ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. М. Глазман

(Харьков)

В настоящей статье устанавливаются некоторые признаки дискретности и ограниченности отрицательной части спектра оператора, определяемого одним дифференциальным уравнением второго порядка или системой таких уравнений на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ (см. § 1). Далее находятся признаки конечности (§ 2) и признаки бесконечности (§ 3) множества точек отрицательной части спектра. Эти признаки связаны с осцилляционными свойствами дифференциальных уравнений и в § 4 формулируются как условия осцилляторности или неосцилляторности соответствующих дифференциальных уравнений.

Исследование ведется на основе принципа расщепления, введенного в [2] и [3].

Терминология, используемая в данной статье, совпадает с принятой в [1].

§ 1. Интегральные признаки дискретности и полуограниченности отрицательной части спектра

Пусть $\tilde{L}$ означает любое самосопряженное расширение оператора с минимальной областью определения, определяемого в $L_2(0, \infty)$ дифференциальной операцией

$$l[y] = -y'' + q(x)\, y, \tag{1}$$

где вещественная функция $q(x)$ предполагается абсолютно интегрируемой в любом конечном интервале $[0, a]$.

Введем используемую ниже «отрицательную часть» $q^*(x)$ функции $q(x)$ с помощью равенств

$$q^*(x) = \begin{cases} q(x) & \text{при } q(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{при } q(x) > 0. \end{cases}$$

Следующая теорема дает достаточное условие дискретности и полуограниченности отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Теорема 1. *Если при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{M_\delta} |q^*(x)|\, dx < \infty, \tag{2}$$

где M_δ есть множество значений переменной x, для которых $|q^*(x)| \geqslant \delta$, то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и полуограничена снизу.

Доказательство. В силу принципа расщепления [3] достаточно установить, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число $N=N(\varepsilon)$, что квадратичный функционал

$$\Phi_\varepsilon[y]=\int_N^\infty |y'|^2\,dx+\int_N^\infty q^*(x)\,|y|^2\,dx+\varepsilon\int_N^\infty |y|^2\,dx \tag{3}$$

неотрицателен для любой гладкой финитной функции $y(x)$, определенной на полуоси $I_N=[N,\ \infty)$.

При заданном положительном $\varepsilon<1$ разобьем полуось $I=[0,\ \infty)$ на два непересекающихся множества

$$I=\mathbf{G}+\mathbf{F},$$

определяемых условиями

$$|q^*(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ при } x\in\mathbf{G};$$

$$|q^*(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ при } x\in\mathbf{F}.$$

Далее положим

$$\mathbf{G}_N=I_N\cap\mathbf{G},\quad \mathbf{F}_N=I_N\cap\mathbf{F}$$

и выберем число $N=N(\varepsilon)$ так, чтобы было

$$\int_{\mathbf{F}_N}|q^*(x)|\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{4}$$

Так как функционал (3) является однородным, то без ограничения общности можно считать

$$\int_N^\infty |y|^2\,dx=1. \tag{5}$$

Имеем, очевидно,

$$\int_{\mathbf{G}_N}q^*(x)\,|y|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbf{G}_N}|y|^2\,dx\geqslant 0$$

и для доказательства неотрицательности функционала $\Phi_\varepsilon[y]$ достаточно установить неравенство

$$\int_N^\infty |y'|^2\,dx+\int_{\mathbf{F}}q^*(x)\,|y|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_N^\infty |y|^2\,dx\geqslant 0.$$

Пусть M есть максимум модуля финитной функции $y(x)$ при $x\in\mathbf{F}_N$.

Если $M<\varepsilon$, то, пользуясь условием (4) и нормировкой (5), получаем

$$\int_{\mathbf{F}_N}q^*(x)\,|y|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_N^\infty |y|^2\,dx\geqslant\varepsilon\int_{\mathbf{F}'_N}q^*(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

Если же $M \geqslant \varepsilon$, то обозначим через c точку замкнутого ограниченного множества $\mathbf{F}_N$, в которой функция $|y(x)|$ достигает своего максимального значения $M \geqslant \varepsilon$.

Из неравенства Коши-Буняковского

$$\frac{1}{2}\left|\int_c^\infty (y^2)'\,dx\right|^2 \leqslant \left(\int_c^\infty |yy'|\,dx\right)^2 \leqslant \int_c^\infty |y|^2\,dx \int_c^\infty |y'|^2\,dx$$

следует, что *

$$\frac{1}{4}|y(c)|^4 \leqslant \int_c^\infty |y|^2\,dx \int_c^\infty |y'|^2\,dx,$$

то есть

$$\int_c^\infty |y'|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}M^4,$$

а это неравенство в сочетании с (4) дает

$$\int_N^\infty |y'|^2\,dx + \int_{\mathbf{F}_N} q^*(x)\,|y|^2\,dx \geqslant M^2\left[\frac{1}{4}M^2 + \int_{\mathbf{F}_N} q^*(x)\,dx\right] > 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 1 следуют, в частности, два известных признака дискретности и полуограниченности отрицательной части спектра оператора $\widetilde{L}$ выражаемых соотношением

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$$

или

$$\int_0^\infty |q(x)|\,dx < \infty.$$

Первый из этих признаков установлен впервые Гартманом в [4], а затем, иным методом, автором в [3]. Второй признак принадлежит Г. Вейлю (см., например, [5]).

Заметим также, что в условии теоремы 1 неравенство (2) можно заменить неравенством

$$\int_0^\infty |q^*(x)|^r\,dx < \infty,$$

где $r \geqslant 1$, так что из принадлежности функции $q^*(x)$ к $L_r(0, \infty)$ при некотором $r \geqslant 1$ следует дискретность и полуограниченность отрицательной части спектра оператора $\widetilde{L}$.

* См. также [7], стр. 233.

Действительно, при $x \in M_\delta$ имеем

$$\frac{|q^*(x)|}{\delta} \geqslant 1,$$

и, следовательно,

$$\frac{|q^*(x)|}{\delta} \leqslant \frac{|q^*(x)|^r}{\delta^r},$$

так что

$$\int\limits_{M_\delta} |q^*(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\delta^{r-1}} \int\limits_{M_\delta} |q^*(x)|^r\, dx < \infty.$$

Теорема 1 допускает обобщение на дифференциальную операцию вида

$$l[\vec{y}] = -\vec{y}'' + Q(x)\vec{y}, \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{6}$$

где $\vec{y}(x) = \{y_1(x),\ y_2(x), \ldots y_n(x)\}$ есть гладкая вектор-функция, а $Q(x)$ — непрерывная эрмитова матрица n-го порядка

$$Q(x) = \| q_{jk}(x) \|.$$

Через $\tilde{L}$ теперь обозначим любое самосопряженное расширение оператора с минимальной областью определения, определяемого в пространстве $\vec{L}_2(0, \infty)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{y}, \vec{z}) = \int\limits_0^\infty \sum_{k=1}^n y_k(x)\overline{z_k(x)}\, dx$$

дифференциальной операцией (6).

Пусть $\mu(x)$ есть наименьшее собственное значение матрицы $Q(x)$ и пусть

$$\mu^*(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{при } \mu(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{при } \mu(x) > 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Если при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{M_\delta} |\mu^*(x)|\, dx < \infty, \tag{7}$$

где M_δ есть множество значений переменной x, для которых $|\mu^*(x)| \geqslant \delta$, то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и ограничена снизу.

Доказательство этой теоремы аналогично проведенному выше для случая скалярной дифференциальной операции (1). При этом функционал (3) следует заменить функционалом

$$\Phi_\varepsilon[\vec{y}] = \int\limits_N^\infty |\vec{y}'|^2\, dx + \int\limits_N^\infty \mu^*(x)|\vec{y}|^2\, dx + \varepsilon\int\limits_N^\infty |\vec{y}|^2\, dx = \sum_{k=1}^n \Phi_\varepsilon[y_k], \tag{8}$$

где

$$\Phi_\varepsilon[y] = \int\limits_N^\infty |y'|^2\, dx + \int\limits_N^\infty \mu^*(x)|y|^2\, dx + \varepsilon\int\limits_N^\infty |y|^2\, dx.$$

Из неотрицательности функционала $\Phi[\vec{y}]$ и неравенства

$$\sum_{j,\ k=1}^n q_{jk}(x)\, y_j(x)\, \overline{y_k(x)} \geqslant \mu(x) \sum_{k=1}^n |y_k(x)|^2 \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

на основании принципа расщепления [3] вытекает справедливость теоремы 2.

Как и в случае скалярной дифференциальной операции, из теоремы 2 следуют два частных признака дискретности и полуограниченности отрицательной части спектра оператора $\widetilde{L}$, выражаемых соотношениями

$$\lim_{x\to\infty} \mu(x) = 0$$

или

$$\int_0^\infty |\mu(x)|\, dx < \infty.$$

Первый из этих признаков установлен автором в ранее в [6], а второй, полученный в данной статье, можно рассматривать, как обобщение известного признака Г. Вейля для скалярной операции (1).

Как и в случае скалярной операции (1), условие (6) можно заменить более простым достаточным условием, а именно неравенством

$$\int_0^\infty |\mu^*(x)|^r\, dx < \infty$$

при некотором $r \geqslant 1$.

Теорема 1 также допускает обобщение на случай самосопряженных дифференциальных операций любого четного порядка

$$l = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^{n-k} p_k D^{n-k} \quad (p_0(x) \equiv 1);$$

при этом неравенство (2) следует заменить условиями

$$\int_{M_{k,\,\delta}} |p_k^*(x)|\, dx < \infty,$$

где

$$p_k^*(x) = \begin{cases} p_k(x) \text{ при } p_k(x) \leqslant 0 \\ 0 \text{ при } p_k(x) > 0, \end{cases}$$

и $M_{k,\,\delta}$ есть множество значений x, для которых $|p_k^*(x)| \geqslant \delta$ $(k = 1, 2, \ldots n)$.

§ 2. Признаки конечности множества точек отрицательной части спектра

Применение метода расщепления к операции (1) приводит к следующей лемме, которая легко обобщается на случай операции (6) над вектор-функциями.

Лемма. Для того, чтобы отрицательная часть спектра оператора $\widetilde{L}$ состояла из конечного числа собственных значений, необходимо и достаточно, чтобы при некотором N для всех гладких финитных функций $y(x)$, равных нулю в окрестности точки N, выполнялось неравенство

$$\int_N^\infty |y'|^2\, dx + \int_N^\infty q(x)\, |y|^2\, dx \geqslant 0.$$

Пользуясь этой леммой и ее очевидным обобщением на случай операции (6), установим в этом и следующем параграфе ряд признаков, позволяющих судить о конечности или бесконечности множества отрицательных собственных значений оператора $\widetilde{L}$ с полуограниченной и дискретной отрицательной частью спектра.

Теорема 3. Если при достаточно больших x $(x > \gamma)$ выполнено неравенство

$$q(x) \geqslant -\frac{1}{4x^2} \tag{10}$$

или, соответственно,

$$\mu(x) \geqslant -\frac{1}{4x^2}, \tag{11}$$

то отрицательная часть спектра оператора $\widetilde{L}$, определяемого операцией (1) *или, соответственно, операцией* (6), *состоит из конечного множества собственных значений.*

Доказательство. Интегрированием по частям для вещественной и мнимой части любой гладкой финитной функции $y(x) = u_1(x) + iu_2(x)$, обращающейся в нуль вблизи точки $x = a$, получаем равенство

$$\int_a^\infty \left(u_j' - \frac{1}{2x}u_j\right)^2 dx = \int_a^\infty |u_j'|^2 dx - \frac{1}{4}\int_a^\infty \frac{1}{x^2}|u_j|^2 dx, \quad (j = 1,2),$$

откуда вытекает неотрицательность функционала*

$$\int_a^\infty |y'|^2 dx - \frac{1}{4}\int_a^\infty \frac{1}{x^2}|y|^2 dx, \tag{12}$$

а, следовательно, в силу (10), неотрицательность функционала

$$\Phi_0[y] = \int_\gamma^\infty |y'|^2 dx + \int_\gamma^\infty q(x)|y|^2 dx. \tag{13}$$

Аналогично, из (11) вытекает неотрицательность соответствующего функционала для операции (6).

Отсюда, на основании леммы заключаем, что отрицательная часть спектра оператора $\widetilde{L}$ состоит из конечного множества собственных значений, что и требовалось доказать.

Нетрудно оценить сверху число m отрицательных собственных значений оператора $\widetilde{L}$ при выполнении условия (10) (или, соответственно, (11)). Ограничиваясь для простоты скалярной дифференциальной операцией (1), положим

$$\tau = \sup_{0<x<\gamma} |q^*(x)| \tag{14}$$

и заметим, что замена при $x \leqslant \gamma$ в (1) $q(x)$ на $-\tau$ приводит к оценке $m < \frac{1}{\pi}\gamma\sqrt{\tau} + \frac{5}{2}$.

* См. также [7], стр. 210.

Отметим ещё, что из неотрицательности функционала (12) вместе с теоремой 3 следуют также близкие к (10) и (11) интегральные признаки, выражаемые соотношениями

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup \rho \int_{\rho}^{\infty} |q^*(x)|\, dx < \frac{1}{4} \tag{15}$$

и

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho \int_{\rho}^{\infty} |\mu^*(x)|\, dx < \frac{1}{4},$$

соответственно.

Действительно, при достаточно больших γ для любой гладкой финитной вещественной функции $y(x)$, исчезающей вблизи γ, имеем, в силу (15),

$$\int_{\gamma}^{\infty} |q^*(x)|\, y^2\, dx = 2 \int_{\gamma}^{\infty} |q^*(x)| \int_{\gamma}^{x} y(t)\, y'(t)\, dt =$$
$$= 2 \int_{\gamma}^{\infty} y(t)\, y'(t)\, dt \int_{t}^{\infty} |q^*(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{|yy'|}{t}\, dt,$$

откуда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, а затем неотрицательностью функционала (12), получаем требуемое неравенство (13).

Следующая теорема дает интегральный признак конечности множества отрицательных значений.

Теорема 4. *Если при любом $\delta > 0$ выполнено неравенство*

$$\int_{M_\delta} x\, |q^*(x)|\, dx < \infty, \tag{16}$$

где M_δ есть множество значений переменной x, для которых $4x^2 |q^*(x)| \geqslant \geqslant 1 - \delta$, то отрицательная часть спектра оператора $\widetilde{L}$, определяемого операцией (1), *состоит из конечного числа собственных значений.*

Доказательство. Преобразуя интеграл

$$\int_{N}^{\infty} l[y]\, \bar{y}\, dx = \int_{N}^{\infty} \{ |y'|^2 + q(x)\, |y|^2 \}\, dx$$

с помощью замены переменной $x = \exp s$ и полагая

$$z(s) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \tag{17}$$
$$\widetilde{q}(s) = x^2 q(x),$$

получим

$$\int_{N}^{\infty} l[y]\, \bar{y}\, dx = \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{dz}{ds} \right|^2 ds + \int_{N'}^{\infty} \widetilde{q}(s)\, |z|^2\, ds + \frac{1}{4} \int_{N'}^{\infty} |z|^2\, ds.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить при некотором N' неотрицательность функционала

$$F[z] = \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{dz}{ds} \right|^2 ds + \int_{N}^{\infty} \widetilde{q}^*(s)\, |z|^2\, ds + \frac{1}{4} \int_{N'}^{\infty} |z|^2\, ds,$$

где

$$\bar{q}^*(s) = x^2 q^*(x), \quad x = \exp s.$$

Полученный функционал $F[z]$ имеет тот же вид что и функционал (3) при $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Разбивая полуось $I = [0, \infty]$ на два непересекающиеся множества

$$I = \mathbf{G} + \mathbf{F},$$

определяемых условиями

$$|\bar{q}^*(s)| < \delta \quad \text{при} \quad s \in \mathbf{G},$$

$$|\bar{q}^*(s)| \geqslant \frac{1}{4} - \delta \ \text{при} \ s \in \mathbf{F},$$

и далее, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1 § 1, получим требуемое неравенство $F[z] \geqslant 0$.

Более простыми признаками конечности множества отрицательных точек спектра оператора $\widetilde{L}$, вытекающими из доказанной теоремы 4, будет неравенство

$$\int_0^\infty x\,|q^*(x)|\,dx < \infty \tag{18}$$

или, общée, неравенство

$$\int_0^\infty x^{2r-1}\,|q^*(x)|^r\,dx < \infty \tag{19}$$

при некотором $r \geqslant 1$.

Метод доказательства теоремы 4 легко переносится на дифференциальную операцию (6) над вектор-функциями. При этом неравенство (16) заменяется неравенством

$$\int_{M_\delta} x\,|\mu^*(x)|\,dx < \infty,$$

где M_δ есть множество значений переменной x, для которых $4x^2\,|\mu^*(x)| \geqslant \geqslant 1 - \delta$. Неравенства (18) и (19) заменяются, соответственно, неравенствами

$$\int_0^\infty x\,|\mu^*(x)|\,dx < \infty$$

и

$$\int_0^\infty x^{2r-1}\,|\mu^*(x)|^r\,dx < \infty$$

при некотором $r \geqslant 1$.

§ 3. Признаки бесконечности множества точек отрицательной части спектра

В настоящем параграфе устанавливаются признаки бесконечности множества точек отрицательной части спектра оператора $\widetilde{L}$, определяемого операцией (1) или (6). Если функция $q(x)$ или матрица-функция $Q(x)$ удовлетворяет не только условиям следующей теоремы, но и условиям теорем 1 или 2 § 1, то дальнейшие теоремы дают признаки сходимости отрицательных собственных значений оператора с полуограниченной и дискретной отрицательной частью спектра к точке $\lambda = 0$.

Теорема 5. *Если $q(x) \leqslant 0$ при $x > \gamma$ и*

$$\limsup \rho \int_{\rho}^{\infty} |q(x)|\, dx > 1, \tag{20}$$

то отрицательная часть спектра оператора $\overline{L}$, определяемого операцией (1), *есть бесконечное множество*.*

Доказательство. В соответствии с леммой § 2 достаточно для любого $N > 0$ построить по крайней мере одну гладкую финитную функцию $y(x)$, равную нулю в окрестности точки N, на которой функционал (9) будет принимать отрицательное значение.

Пусть N есть любое положительное число. Положим при $\rho = \rho_k$

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho \int_{\rho}^{\infty} |q(x)|\, dx = 1 + \alpha$$

и построим функцию $u(x)$ по формулам

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant \mu\rho \\ \dfrac{x - \mu\rho}{\rho(1-\mu)} & \mu\rho \leqslant x \leqslant \rho \\ 1 & \rho \leqslant x \leqslant R \\ \dfrac{x - \nu R}{R(1-\nu)} & R \leqslant x \leqslant \nu R \\ 0 & x \geqslant \nu R. \end{cases}$$

При этом выберем сначала параметр μ так, чтобы было

$$\frac{1}{1-\mu} < 1 + \frac{\alpha}{4},$$

затем — параметр ρ так, чтобы было

$$\mu\rho > \gamma, \quad \mu\rho > N$$

и

$$\int_{\rho}^{\infty} |q(x)|\, dx > \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{\rho}$$

и, наконец,— параметры R и ν так, чтобы было

$$\int_{\rho}^{R} |q(x)|\, dx > \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{\rho}$$

и

$$\frac{\rho}{R(\nu - 1)} < \frac{\alpha}{4}.$$

Вычисляя значение функционала (9) на функции $u(x)$ получаем

$$\Phi_0[u] \leqslant \frac{1}{\rho(1-\mu)} + \frac{1}{R(\nu-1)} + \int_{\rho}^{R} q(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{\rho}{R(\nu-1)} - \rho \int_{\rho}^{\infty} |q(x)|\, dx\right] < 0.$$

---

* Этот результат указан без доказательства в заметке автора [8].

Сглаживая надлежащим образом построенную функцию $u(x)$ в точках $\mu\rho$, ρ, R и νR, получим функцию $y(x)$, для которой также будет

$$\Phi_0[y] < 0,$$

что и требовалось установить.

В случае дифференциальной операции (6), также, как и выше, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть $\nu(x)$ есть наибольшее собственное значение матрицы $Q(x)$. Если $\nu(x) \leqslant 0$ и*

$$\lim\sup \rho \int_\rho^\infty |\nu(x)|\, dx > 1,$$

то отрицательная часть спектра оператора $\vec{L}$, определяемого операцией (6), *есть бесконечное множество.*

Согласно теореме 3 § 2 неравенство

$$q(x) + \frac{1}{4x^2} \geqslant 0$$

при $x > \gamma$ влечет конечность множества точек отрицательной части спектра оператора $\vec{L}$, определяемого операцией (1). Следующая теорема показывает, что при обратном знаке неравенства и некоторых дополнительных условиях множество точек отрицательной части спектра будет бесконечным.

Теорема 7. *Положим*

$$q(x) + \frac{1}{4x^2} = \eta(x).$$

Если $\eta(x) \leqslant 0$ при $x > N$ и

$$\lim\sup \ln \rho \int_\rho^\infty x\,|\eta(x)|\, dx > 1, \tag{21}$$

то отрицательная часть спектра оператора $\vec{L}$, определяемого операцией (1), *есть бесконечное множество.*

Доказательство. Вычисляя функционал $\Phi_0[y]$ с помощью замены независимой переменной и функции по формуле (17), получим, как в § 2,

$$\Phi_0[y] = \int_{N'}^\infty \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 ds + \int_{N'}^\infty \left\{\bar{q}(s) + \frac{1}{4}\right\} |z|^2\, ds, \tag{22}$$

где $\bar{q}(s) = x^2 q(x)$, $x = \exp s$.

В силу теоремы 5 при каждом $N' > 0$ функционал в правой части равенства (22) будет отрицательным для некоторой гладкой финитной функции $z(s)$, равной нулю в окрестности точки N', если

$$\limsup_{R\to\infty} R\int_R^\infty \left|\vec{q}(s)+\frac{1}{4}\right| ds > 1$$

и

$$\vec{q}(s)+\frac{1}{4}\leqslant 0,$$

а эти неравенства следуют из (21) и соотношения $\eta(x)<0$.

Из доказанной теоремы 7, в частности, следует, что неравенство

$$q(x) < -\frac{1+\delta}{4x^2}\quad (\delta>0,\ x>N) \tag{23}$$

влечет бесконечность множества точек отрицательной части спектра оператора $\vec{L}$, определяемого операцией (1).

Повторяя преобразование (17), то-есть полагая в (22)

$$z(\xi)=\frac{z(s)}{\sqrt{s}},\quad \xi=\exp s$$

получим, вместо (23), условие

$$q(x) < -\frac{1}{4x^2}-\frac{1+\delta}{4x^2\ln^2 x}.$$

Вообще, после m-кратной итерации преобразования (17) А. М. Ляпунова получим достаточное условие бесконечности множества точек отрицательной части спектра оператора $\vec{L}$ в виде*

$$q(x) < -\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4x^2\ln^2 x}-\ \ldots\ -\frac{1+\delta}{4x^2\ln_m^2 x},$$

где $\delta>0$, $x>N$ и $\ln_m^2 x=\underbrace{\ln^2\ln^2\ \ldots\ .\ \ln^2}_{m} x$.

Теорема 7 и последующие рассуждения легко обобщаются на случай операции (6) над вектор-функциями, если положить

$$\eta(x)=\nu(x)+\frac{1}{4x^2},$$

где функция $\nu(x)$ определена, как в условии теоремы 6.

§ 4. Связь с осцилляционными свойствами дифференциальных уравнений

Из теоремы Штурма о перемежаемости корней решений уравнения второго порядка

$$-\frac{d^2y}{dt^2}+q(t)\,y=0 \tag{24}$$

вытекает следующая альтернатива: либо каждое решение уравнения (24) при $t>0$ имеет бесконечное множество нулей, либо каждое решение этого уравнения имеет лишь конечное число нулей.

В первом случае назовем решения осциллирующими, а само уравнение (24) — осцилляторным; во втором случае назовем решения неосциллирующими, а само уравнение — неосцилляторным.

* В случае скалярной операции (1) это условие и признаки (10), (15), (18), (23) следует считать известным, так как они легко вытекают из осцилляционных теорем. См. далее § 4.

Переходя от одного уравнения (24) к системе уравнений

$$-\frac{d^2\vec{y}}{dt^2}+Q(t)\vec{y}=0, \tag{25}$$

обозначим через $\vec{y}(t)=\{y_1(t),\ y_2(t),\ \dots y_n(t)\}$ общее решение этого уравнения, зависящее от $2n$ произвольных постоянных. Выделим теперь из $2n$-мерного линейного многообразия всех решений уравнений (25) с помощью n линейно-независимых симметрических условий вида

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}y_k'(0)+\beta_{jk}y_k(0)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \dots\ n) \tag{26}$$

некоторое n-мерное линейное многообразие F. Далее в линейном многообразии вектор-функций F произвольно выберем базис $\vec{y}_j(t)=\{y_{j1}(t),\ y_{j2}(t),\ \dots\ y_{jn}(t)\}$ и положим

$$D(t)=\det\|y_{jk}(t)\| \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Для системы (25) имеет место альтернатива: вне зависимости от выбора условий (26) и базиса $\vec{y}_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ \dots\ n)$ в F функция $D(t)$ имеет либо при $t>0$ бесконечное множество нулей, либо при $t>0$ лишь конечное число нулей.

В первом случае альтернативы назовем систему (25) осцилляторной, а во втором случае — неосцилляторной.

Осцилляторность уравнения (24) или системы уравнений (25) эквивалентна бесконечности множества точек отрицательной части спектра соответствующего оператора $\vec{L}$.

В случае одного уравнения (24) отмеченная выше связь между осцилляторностью и отрицательной частью спектра хорошо известна (см., например, [5]). В общем случае системы (25) указанная связь и альтернатива о нулях функции $D(t)$ могут быть легко получены с помощью метода расщепления, если предварительно перенести один результат М. Г. Крейна (см. [9], теорема 22) на случай системы (25).

Таким образом, любое условие конечности множества точек отрицательной части спектра оператора $\vec{L}$ является одновременно признаком неосцилляторности уравнения (24) или (25) и, обратно, любое условие бесконечности множества точек отрицательной части спектра оператора $\vec{L}$ является одновременно признаком осцилляторности уравнения (24) или (25).

Теперь результаты § 2 и § 3 приводят к следующим признакам неосцилляционности и осцилляционности.

Теорема 8. *Уравнение* (24) *является неосцилляторным, если выполнено одно из следующих условий:**

1°) $q(t)\geqslant-\frac{1}{4t^2}$ при $t>\gamma$;

2°) при любом $\delta>0$ имеет место неравенство

$$\int_{M_\delta} t\,|q^*(t)|\,dt<\infty,$$

где M_δ есть множество значений t, для которых $4t^2|q^*(t)|\geqslant 1-\delta$ и $q^*(t)=\min\{q(t),\ 0\}$;

3°) при некотором $r\geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty t^{2r-1}|q^*(t)|^r\,dt<\infty,$$

4°) $\limsup\limits_{\rho\to\infty}\rho\int\limits_\rho^\infty |q^*(t)|\,dt<\frac{1}{4}.$

* Признаки 1° и 3° при $r=1$ известны [10], признак 4° получил E. Hille [13].

Теорема 9. *Система уравнений* (25) *является неосцилляторной, если выполнено одно из следующих условий:*

1°) $\mu(t) \geqslant -\frac{1}{4t^2}$ при $t > \gamma$;

2°) при любом $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{M_\delta} t\,|\mu^*(t)|\,dt < \infty,$$

где M_δ есть множество значений t, для которых $4t^2|\mu^*(t)| \geqslant 1-\delta$ и $\mu^*(t) = \min\{\mu(t), 0\}$, а $\mu(t)$ есть наименьшее собственное значение матрицы $Q(t)$;

3°) при некотором $r \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty t^{2r-1}\,|\mu^*(t)|^r\,dt < \infty,$$

4°) $\limsup\limits_{\rho\to\infty} \rho \int_\rho^\infty |\mu^*(t)|\,dt < \frac{1}{4}$.

Теорема 10. *Уравнение* (24) *является осцилляторным, если* выполнено одно из следующих условий:*

1°) при некотором $\delta > 0$ и некотором натуральном m и всех $t > N$ имеет место неравенство

$$q(t) < -\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{4t^2 \ln^2 t} - \ldots - \frac{1+\delta}{4t^2 \ln_m^2 t};$$

2°) $q(t) \leqslant 0$ при $t > \gamma$ и

$$\limsup \rho \int_\rho^\infty |q(t)|\,dt > 1;$$

3°) $q(t) + \frac{1}{4t^2} \leqslant 0$ при $t > N$

и

$$\liminf_{\rho\to\infty} \ln \rho \int_\rho^\infty t\left|q(t) + \frac{1}{4t^2}\right| dt > 1.$$

Теорема 11. *Система уравнений* (25) *является осцилляторной, если выполнено одно из следующих условий:*

1°) наибольшее собственное значение $\nu(t)$ матрицы $Q(t)$ при некотором $\delta > 0$, некотором натуральном m и всех $t > N$ имеет место неравенство

$$\nu(t) < -\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{4t^2 \ln^2 t} - \ldots - \frac{1+\delta}{4t^2 \ln_m^2 t};$$

2°) $\nu(t) \leqslant 0$ при $t > \gamma$ и

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho \int_\rho^\infty |\nu(t)|\,dt > 1;$$

---

* Признак 1° см. в [10].

3°) $\nu(t)+\frac{1}{4t^2}\leqslant 0$ при $t>N$

и

$$\limsup \ln\rho\int_{\rho}^{\infty} t\left|\nu(t)+\frac{1}{4t^2}\right|dt>0.$$

Относительно обобщения результатов настоящей статьи на дифференциальные уравнения высших порядков и уравнения в частных производных см. [11] и [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов, ГТТИ, 1950.
2. И. М. Глазман. Успехи матем. наук, т. **5**, вып. 6 (40), 1950.
3. И. М. Глазман. ДАН СССР, том **70**, № 2, 1951.
4. P. Hartman. Am. Journ. Math. **71**, 1949.
5. Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям, ГТТИ, 1950.
6. И. М. Глазман. Ученые записки ХГПИ, т. **18**, вып. 1. 1956.
7. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. ИЛ, 1948.
8. И. М. Глазман. ДАН СССР, т. **87**, № 1, 1952.
9. М. Г. Крейн. Матем. сборн. 2 (44): 6, 1937.
10. Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
11. И. М. Глазман. ДАН СССР, том 118, № 3, 1958.
12. И. М. Глазман. ДАН СССР, том 119, № 3, 1958.
13. E. Hille. Trans. Am. Math. Soc., **64**, 1948.