УДК 517.97

А. Г. РУТКАС

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

Известно, что голоморфные функции с эрмитово-положительными воспроизводящими ядрами в единичном круге являются характеристическими для неунитарных операторов [2, 3]. Ниже исследуется класс голоморфных оператор-функций $w(\lambda)$ с эрмитово-положительным ядром (20) в полуплоскости. Этот класс совпадает с множеством характеристических функций операторных пучков $\lambda A + B$ [7, 8] и содержит характеристические функции несамосопряженных операторов.

1. Символами X, Y, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ обозначаются гильбертовы пространства. Характеристической для пучка $\lambda A + B\,(A,\ B \in [X,\ Y])$ называется функция

$$w(\lambda) = w(V,\ \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L, \tag{1}$$

коэффициенты которой являются блоками $(J_0^1,\ J_0^2)$-унитарного ограниченного оператора V: $X \oplus X \oplus F \to Y \oplus Y \oplus \boldsymbol{G}$, где

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}; \quad J_0^1(J_0^2) = \begin{bmatrix} 0 & -I_{X(Y)} & 0 \\ -I_{X(Y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{1(2)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$J_{1(2)}^* J_{1(2)} = I_{F(G)},\ J_{1(2)} = J_{1(2)}^*$.

Функция $w(\lambda)$ (1) рассматривается на множестве Ω тех несобственных точек λ пучка $\lambda A + B$, для которых голоморфна функция

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} L = \Gamma_\lambda \tag{3}$$

и одновременно голоморфны по $\mu = \bar{\lambda} \in \bar{\Omega}$ функции

$$V_1 = (\bar{\lambda} A^* + B^*)^{-1} M^*, \quad V_2 = (\bar{\lambda} A^* + B^*)^{-1} N^*. \tag{4}$$

Очевидно, Ω содержит множество регулярных точек пучка

$$\rho(A,\ B) = \{\lambda : \exists\,(\lambda A + B)^{-1} \in [Y,\ X]\} \subset \Omega,$$

которое по предположению не пусто. По заданному пучку $\lambda A + B \in [X,\ Y]$ всегда можно указать пространства $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ с сигнатурными операторами J_1, J_2 и достроить операторы A, B остальными блоками в (2) до J_0-унитарного отображения V [8].

Представление функции $w(\lambda)$ в виде правой части (1) назовем J_0-унитарной или консервативной реализацией относительно полуплоскости, Ω — областью реализации, блочный J_0-унитарный оператор V (2) — задающим оператором.

Свойство J_0-унитарности оператора V (2)

$$1)\ VV^+ = I; \quad 2)\ V^+V = I\ (V^+ = J_0^1 V^* J_0^2) \tag{5}$$

эквивалентно определенным соотношениям между его блоками [8]. Одно из этих соотношений имеет вид:

$$AB^* + BA^* = LL^+. \tag{6}$$

Рассмотренная в [1] характеристическая функция

$$1)\ S(\lambda) = I - iL^+(T - \mu I)^{-1} L; \quad 2)\ T - T^* = iLL^+ \tag{7}$$

несамосопряженного оператора T после замены аргумента $\mu = i\lambda$ оказывается частным случаем представления (1), где

$$K = I, \quad M = 0, \quad N = L^+, \quad A = I, \quad B = -iT.$$

При этом равенство (7.2) эквивалентно (6), а при $[C\ D\ R] = [0\ I\ 0]$ соотношения (5) тривиальны.

Функция (1) является передаточной для системы управления

$$1)\ A\frac{dx}{dt} + Bx = Lf(t); \quad 2)\ g(t) = Kf(t) - \left(M\frac{dx}{dt} + Nx\right) \tag{8}$$

с входом f, внутренним состоянием x, выходом g. В приложениях индефинитные метрики $[f, f] = (J_1 f, f)$, $[g, g] = (J_2 g, g)$ пространств $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ обычно имеют смысл мгновенных мощностей входа f и выхода g, а величина $(x, x) = \|x\|^2$ — мгновенной энергии состояния x. Обозначим $h = (-\overset{\circ}{x}, -x, f)^{TP}$, $e = [CD\ R]\,h$, $\psi = [0, e, g]^{TP}$. Тогда равенства (8) записываются как $Vh = \psi$, а условие унитарности $(J_0^2 Vh, Vh) = (J_0^1 h, h)$ превращается в свойство консервативности системы (8):

$$[f, f] - [g, g] = \frac{d}{dt}(x, x). \tag{9}$$

В качестве физического примера рассмотрим четырехполюсный радиотехнический фильтр, образованный включением осциллятора (индуктивности L и емкости C) между двумя идеальными передающими проводниками. Помечая входные ток и потенциал значком минус, выходные — значком плюс, имеем четыре уравнения Кирхгофа и два дифференциальных уравнения [8]:

$$\begin{aligned} &I^- + I^+ = I_L + I_C; \quad U^- = U_c = U_L = U^+; \\ &U_L = L\frac{dI_L}{dt}; \qquad\quad I_c = C\frac{dU_c}{dt}. \end{aligned} \tag{10}$$

Частотные свойства фильтра характеризуются передаточной матрицей-функцией $w(\lambda)$, выражающей преобразования Лапласа выходных тока и потенциала через входные:

$$\begin{bmatrix} \hat{U}^+ \\ -\hat{I}^+ \end{bmatrix} = w(\lambda)\begin{bmatrix} \hat{U}^- \\ \hat{I}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\lambda^2 LC + 1}{\lambda C} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{U}^- \\ \hat{I}^- \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Выписанное значение $w(\lambda)$ немедленно получается после применения преобразования Лапласа к уравнениям (10). Интерпретируем фильтр как линейную систему с состояниями

$$f(t)=\begin{bmatrix}U^-\\ I^-\end{bmatrix},\quad x(t)=\begin{bmatrix}\sqrt{L}\ I_L\\ \sqrt{C}\ U_c\end{bmatrix},\quad g(t)=\begin{bmatrix}U^+\\ -I^+\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Вход f и выход g определяются условиями передачи (11), а внутреннее состояние x выбирается так, чтобы его норма в пространстве $X=C^2$ была связана с энергией осциллятора соотношением $\|x(t)\|^2=(LI_L,\ I_L)+(CU_c,\ U_c)$. Закон сохранения в форме баланса мощностей

$$\operatorname{Re}(U^-,\ I^-)+\operatorname{Re}(U^+,\ I^+)=\operatorname{Re}(U_L,\ I_L)+\operatorname{Re}(U_c,\ I_c)$$

в обозначениях (12) переписывается как условие консервативности (9), где $[f,\ f]=2\operatorname{Re}(U^-,\ I^-)=(Jf,\ f)$; $J=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $[g,\ g]=(Jg,\ g)$. Очевидно, с помощью состояний (12) уравнения цепи (10) представляются в виде векторных равенств (8), в которых

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{L}&0\\0&0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&\sqrt{C^{-1}}\end{bmatrix};\quad L=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix};$$
$$M=\begin{bmatrix}0&0\\0&\sqrt{C}\end{bmatrix};\quad N=\begin{bmatrix}0&0\\\sqrt{L^{-1}}&0\end{bmatrix};\quad K=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Следовательно, передаточную матрицу-функцию $w(\lambda)$ (11) можно вычислить по формуле (1). Матрицы

$$C=\begin{bmatrix}0&0\\0&\sqrt{C}\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}\sqrt{L^{-1}}&0\\0&0\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \tag{14}$$

достраивают блоки (13) до J_0-унитарной матрицы V вида (2), где $Y=X,\ J_1=J_2=J$.

2. Введем преобразование полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0$ в круг

$$|\zeta|<1:\zeta=\varphi(\lambda)=\frac{\lambda-\nu}{\lambda+\bar{\nu}},\quad 2\operatorname{Re}\nu=\sigma^2>0.$$

Пусть $w(\lambda)=w(V,\ \lambda)$ — характеристическая функция (1) пучка $\lambda A+B,\ \nu\in\rho(A,\ B)$,

$$\Phi_\nu=M-\Pi_\nu A;\quad \Pi_\nu=(\nu M+N)(\nu A+B)^{-1}. \tag{15}$$

Тогда оператор $U:X\oplus F\to X\oplus G$ вида

$$U=\begin{bmatrix}T&F\\G&S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(B+\nu A)^{-1}(B-\bar{\nu}A)&\sigma(B+\nu A)^{-1}L\\-\sigma\Phi_\nu&w(\nu)\end{bmatrix} \tag{16}$$

является $(I\oplus J_1,\ I\oplus J_2)$-унитарным и характеристическая функция

$$\theta(\zeta)=\theta(U,\ \zeta)=S+\zeta G(I-\zeta T)^{-1}F \tag{17}$$

неунитарного оператора T [2] совпадает с функцией $w(\varphi^{-1}(\zeta))$.

Обратно, если характеристическая функция θ (17) оператора T задана блоками $(I \oplus J_1,\ I \oplus J_2)$-унитарного оператора

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \boldsymbol{F} \to X \oplus \boldsymbol{G}. \tag{18}$$

и ν — точка из правой полуплоскости $(\nu + \bar{\nu} = \sigma^2 > 0)$, то блочный оператор V вида

$$\begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \dfrac{I - T}{\bar{\nu} + \nu} & \dfrac{\bar{\nu} I + \nu T}{\bar{\nu} + \nu} & \dfrac{F}{\sigma} \\ \hline \dfrac{I + T}{2} & \dfrac{\bar{\nu} I - \nu T}{2} & -\dfrac{\sigma F}{2} \\ \hline -\sigma^{-1} G & \nu \sigma^{-1} G & S \end{array}\right] \tag{19}$$

задает J_θ-унитарную реализацию (1) функции $w(\lambda) = \theta\left(\dfrac{\lambda - \nu}{\lambda + \bar{\nu}}\right)$. Детальная проверка этих утверждений содержится в [8]. Формулы (16), (19) определяют однозначные преобразования над классами блочных операторов V, U (2,18), задающих представления (1,17):

$$z : \{V\} \xrightarrow{(16)} \{U\}; \quad \pi : \{U\} \xrightarrow{(19)} \{V\}.$$

Лемма 1. *Преобразованием z над реализациями (1,2) в полуплоскости можно получить все реализации (17, 18) функции $\theta(\zeta) = w(\varphi^{-1}(\zeta))$ в единичном круге, более того, $z(\pi(U)) = U$ при любом U.* ***Значения*** *же преобразования π (правого обратного к z) задают лишь специальные реализации (1) функции $w(\lambda)$, нормироеанные в точке $\lambda = \nu$ условием $\nu M + N = 0$.*

В этом смысле множество всех реализаций (1) заданный функции в полуплоскости шире множества представлений (17) соответствующей функции в единичном круге, что важно с точки зрения физической реализации. В примере фильтра из п. 1 естественная J_0-унитарная реализация $w(V, \lambda)$ (1) передаточной функции (11) задается матрицей V с блоками (13, 14); эта реализация не нормирована ни в одной точке расширенной комплексной плоскости.

3. Важную информацию об аналитической J-сжимающей оператор-функции $w(\lambda)$ содержит следующее «двойное» воспроизводящее ядро, называемое иначе ядром Шварца — Пика [4]:

$$F(\lambda, \mu) = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\overbrace{J_1 - w^*(\lambda) J_2 w(\mu)}^{F_{11}}}{\bar{\lambda} + \mu} & \dfrac{w^*(\lambda) - w^*(\mu)}{\bar{\lambda} - \bar{\mu}} \\ \hline \dfrac{w(\lambda) - w(\mu)}{\lambda - \mu} & \underbrace{\dfrac{J_2 - w(\lambda) J_1 w^*(\mu)}{\lambda + \bar{\mu}}}_{F_{22}} \end{array}\right]. \tag{20}$$

Для произвольной функции $w(\lambda)$ в области ее голоморфности Ω ядро (20) аналитично в том смысле, что при $\lambda, \mu \in \Omega$ блок F_{11} аналитичен по переменным $(\bar{\lambda}, \mu)$, F_{12} — по $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, F_{21} — по (λ, μ), F_{22} — по $(\lambda, \bar{\mu})$.

Лемма 2. *Если $w(\lambda)$ — характеристическая функция (1) пучка $\lambda A + B$, то всюду в области Ω, где голоморфны функции (3, 4), ядро (20) аналитично и эрмитово-положительно.*

Из условия (5.1) для блоков оператора V (2) можно получить

$$I - w(\lambda) w^+(\mu) = (\Pi_\lambda A - M)(N - \Pi_\mu B)^+ + (\Pi_\lambda B - N)(M - \Pi_\mu A)^+.$$

Отсюда с учетом $\Pi_\lambda B - N = \lambda \Phi_\lambda$ имеем

$$J_2 - w(\lambda) J_1 w^*(\mu) = (\lambda + \bar{\mu}) \Phi_\lambda \Phi_\mu^*. \tag{21}$$

Аналогично из блочных равенств, эквивалентных (5.2), вытекает

$$J_1 - w^*(\lambda) J_2 w(\mu) = (\mu + \bar{\lambda}) \Gamma_\lambda^* \Gamma_\mu. \tag{22}$$

Для несобственных чисел пучка резольвентное тождество

$$\frac{\gamma(\lambda) - \gamma(\mu)}{\mu - \lambda} x = \gamma(\mu) A \gamma(\lambda) x; \quad \gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$$

справедливо при тех x, на которых определена его левая часть. Поэтому выражения $\gamma(\lambda) A \gamma(\mu) L$, $\gamma(\lambda) B \gamma(\mu) L$ корректны при λ, $\mu \in \Omega$ и выполняется тождество

$$w(\lambda) - w(\mu) = (\lambda - \mu) \Phi_\lambda \Gamma_\mu. \tag{23}$$

Таким образом, ядро (20) представляется в виде

$$F(\lambda, \mu) = \Lambda^*(\lambda) \Lambda(\mu); \quad \Lambda(\mu) = [\Gamma_\mu \Phi_\mu^*].$$

Отсюда вытекает аналитичность и эрмитова положительность ядра.

Следствие 1. *В силу равенств (21), (22) функции $w(\lambda)$ (1), $w^*(\lambda)$ принимают J-сжимающие значения в точках области Ω из правой полуплоскости, J-растягивающие — в левой полуплоскости, J-унитарные — на мнимой оси.*

4. Для голоморфной функции $w(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega)$ эрмитова положительность «двойного» ядра F (20) эквивалентна эрмитовой положительности его диагональных блоков F_{11}, $F_{22}(\lambda, \mu)$ (см. [8]).

Теорема 1. *Голоморфная в области Ω функция $w(\lambda)$ с эрмитово-положительными ядрами F_{11}, F_{22} (λ, μ) (20) является характеристической для некоторого пучка. Существует универсальная модель пучка и блочного оператора V (2), задающего глобальную консервативную реализацию функции по формуле (1) всюду в области Ω.*

Пусть L — линейное множество функций $e: \Omega \to \boldsymbol{F} \oplus \boldsymbol{G}$ с конечными носителями, т. е. линейная оболочка множества функций

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} f \in \mathbf{F}, & z = \lambda; \\ 0\ , & z \neq \lambda; \end{cases} \quad g_\lambda(z) = \begin{cases} g \in \boldsymbol{G}, & z = \lambda; \\ 0\ , & z \neq \lambda \end{cases} \tag{24}$$

с одноточечными носителями. В силу эрмитовой положительности ядро в F (20) задает на $\boldsymbol{L}$ неотрицательную полуторалинейную форму

$$(e,\ q)^F = \sum_{\lambda,\ \mu} (F(\lambda,\ \mu)\, e(\mu),\ q(\lambda))_{F\oplus G} \tag{25}$$

с изотропным линеалом $\boldsymbol{L}_0$. На фактор-линеале $\boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}_0$ форма (25) индуцирует скалярное произведение. Пополнение предгильбертового пространства $\boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}_0$ приводит нас к искомому модельному пространству X с тотальной системой элементов $\{f_\lambda,\ g_\lambda\}$ $\lambda \in \Omega$, порождаемой одноименными функциями (24) с помощью естественного гомоморфизма. Модельные операторы определяются на тотальной системе:

$$\left.\begin{array}{ll}
1.\ Af_\lambda = \dfrac{f_\lambda - f_\nu}{\nu - \lambda}; & 2.\ Ag_\lambda = \dfrac{g_\lambda + (w^+(\lambda)\, J_2 g)_\nu}{\bar{\lambda} + \nu};\\[2ex]
3.\ Bf_\lambda = \dfrac{\lambda f_\lambda - \nu f_\nu}{\lambda - \nu}; & 4.\ Bg_\lambda = \dfrac{\bar{\lambda} g_\lambda - \nu\,(w^+(\lambda)\, J_2 g)_\nu}{\bar{\lambda} + \nu};\\[2ex]
5.\ Lf = f_\nu; & 6.\ Mf_\lambda = \dfrac{w(\lambda) - w(\nu)}{\nu - \lambda}\, f;\\[2ex]
7.\ N = -\nu M;\ K = w(\nu); & 8.\ Mg_\lambda = \dfrac{I - w(\nu)\, w^+(\lambda)}{-(\bar{\lambda} + \nu)}\, J_2 g.
\end{array}\right\} \tag{26}$$

Изотропный линеал $\boldsymbol{L}_0$ формы (25) инвариантен относительно операторов A, B — линейных продолжений операций 1—4 на линеал $\boldsymbol{L}$. Поэтому формулами 1—4 можно задавать в модельном пространстве X операторы A, B, корректно продолжающиеся по линейности на плотный линеал $\boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}_0$. Более того, они непрерывны; формулы 5—8 в (26) также определяют линейные непрерывные операторы. Область не содержит собственных чисел пучка $\lambda A + B$, а нетривиальная окрестность точки ν состоит из его регулярных точек. Если по аналогии с конструкцией (19) построить среднюю блок-строку по известной первой $[C\,D\,R] = \left| I - \frac{\sigma^2}{2} A;\right.$ $\left.\bar{\nu} I - \frac{\sigma^2}{2} B;\ -\frac{\sigma^2}{2} L\right]$, то полученный блочный оператор V вида (2) окажется J_0-унитарным. Доказательства этих утверждений используют структуру и аналитичность ядра (20) (см. [8]). Из формул (26) видно, что

$$(\lambda A + B)\, f_\lambda = f_\nu = Lf, \quad (\lambda M + N)\, f_\lambda = w(\nu)\, f - w(\lambda)\, f.$$

Отсюда вытекает представление (1) функции $w(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$.

Построенную модельную реализацию $w(\lambda)$ назовем универсальной; она нормирована в точке ν, более того $X = Y$, $\nu M + N = 0$, $\nu A + B = I$.

Замечание. Если ядра F_{11}, F_{22} компактнозначны (в частности, если пространства $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ конечномерны), то полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > 0$ состоит из нормальных точек (см. п. 7) пучка $\lambda A + B$. В случае обратимости хотя бы одного значения $w(\lambda_0)$ полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ также состоит из нормальных точек.

Из компактности левой части (22) при $\lambda = \mu$ вытекает компактность операторов Γ_λ (3) и L. В силу (6) для модельного пучка отображение $AB^* + BA^*$ компактно и остается применить п. 7.

5. В связи с линейными системами (8) интересно изучить такие эквивалентные преобразования пучка $\lambda A + B$, которые не меняют норму (энергию) состояния $x(t)$ и передаточную функцию $w(\lambda)$. Очевидно, таким является преобразование

$$Q(\lambda A + B)U^* = \lambda A_1 + B_1 \tag{27}$$

с унитарным оператором U и вполне обратимым Q, если оператор V (2) с блоками-коэффициентами системы (8) изменяется по правилу

$$V_1 = (Q \oplus Q^{*-1} \oplus I_G)\, V\, (U^* \oplus U^* \oplus I_F). \tag{28}$$

Преобразование (28) над задающим оператором V сохраняет свойство J_0-унитарности, причем пучки (27) имеют одинаковые х. ф. $w(V, \lambda) = w(V_1, \lambda)$. В случае простых реализаций верно и обратное: характеристическая функция определяет пучок с точностью до преобразования (27) (теорема 2). Реализация (1) называется простой, если пространство реализации X совпадает с главным подпространством X_0, где в обозначениях (3,15)

$$X_0 = \text{л. з. о. } \{\Gamma_\lambda(\boldsymbol{F});\quad \Phi_\lambda(\boldsymbol{G})\}\quad \forall\lambda\in\Omega.$$

Теорема 2. *Пусть характеристические функции $w(V, \lambda)$, $w(V_1, \lambda)$ пучков $\lambda A + B$, $\lambda A_1 + B_1$ отвечают простым реализациям в связной области Ω. Если значения функций совпадают в окрестности точки ν ($\operatorname{Re}\nu > 0$), то найдутся унитарный оператор $U: X \to X_1$ и вполне обратимый $Q: Y \to Y_1$, такие, что*

$$A_1 = QAU^*;\quad B_1 = QBU^*;\quad L_1 = QL; \tag{29}$$

$$(M - M_1U)(B + \lambda A)^{-1}B = (N - N_1U)(B + \lambda A)^{-1}A. \tag{30}$$

На плотном в X линеале вводится отображение

$$U_0 \sum_{k,\,m} (\Gamma_{\lambda_k} f_k + \Phi^*_{\lambda_m} g_m) = \sum_{k,\,m} (\Gamma_{1\lambda_k} f_k + \Phi^*_{1\lambda_m} g_m),$$

где суммы конечны и $g^m \in \boldsymbol{G}$, $f_k \in \boldsymbol{F}$, $\lambda_k \in \Omega$. Благодаря совпадению форм (21)—(23) линейное отображение U_0 сохраняет скалярное произведение векторов [8]. Поэтому U_0 однозначно и его замыкание $U: X \to X_1$ есть унитарный оператор. Используя резольвентное тождество (п. 3), можно получить

$$U\Gamma_\lambda = \Gamma_{1\lambda};\quad \Phi_\lambda = \Phi_{1\lambda}U;\quad U\gamma(\lambda)A = \gamma_1(\lambda)A_1U.$$

Отсюда с помощью оператора

$$Q = (\nu A_1 + B_1)U(\nu A + B)^{-1}: Y \to Y_1$$

легко выводятся искомые равенства (29), (30).

Обратное утверждение верно не только для простых реализаций: если для коэффициентов х. ф. $w(\lambda)$, $w_1(\lambda)$ выполнены условия (29, 30) и функции принимают одинаковые значения хотя бы в одной точке $\lambda = \nu$, то они совпадают тождественно [8].

Следствие. *В условиях теоремы 2 для реализаций, нормированных условием* $\nu M + N = 0$, $\nu M_1 + N_1 = 0$, *справедливы равенства* $M = M_1 U$, $N = N_1 U$, $K = K_1$. Таким образом, соотношение (28) в существенном выполнено, именно для первой и третьей строк операторов V, V_1, задающих реализации.

Замечание. В частном случае пучков вида $\lambda I - iT$ теорема 2 выражает известный критерий унитарной эквивалентности вполне несамосопряженных операторов [1], заключающийся в совпадении их характеристических функций (7.1).

В самом деле, согласно п. 1 консервативная реализация имеет вид (7.1). По теореме 2 $Q(\lambda I - iT)U^* = \lambda I - iT_1$, откуда $Q = U$, $T_1 = UTU^*$.

6. Предположим, две х. ф. $w_i = w(V_i, \lambda)$, $\lambda \in \Omega$ допускают перемножение $w_2 w_1 = w(\lambda)$ благодаря совпадению пространств $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{G}_1$. Произведение $w(\lambda)$ допускает реализацию $w = w(V, \lambda)$ с задающим оператором V вида

$$V = (I_{Y_1 \oplus Y_1} \oplus V_2)(V_1 \oplus I_{X_2 \oplus X_2}) \doteq V_2 \circ V_1, \tag{31}$$

который называется композицией операторов V_i. Разбиение оператора V на девять блоков (2) определяется подпространствами

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_2.$$

Пространство $E = G_1 = F_2$ называется пространством умножения. Согласно (31)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ L_2 M_1 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ L_2 N_1 & B_2 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 K_1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Аналогично конструируются блоки C, D, R, M, N, K [8]. Таким образом, пара подпространств (X_2, Y_2) инвариантна относительно пучка $\lambda A + B$ $(X \to Y)$ в том смысле, что

$$(\lambda A + B) X_2 \subset Y_2, \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{C}, \tag{33}$$

а индуцированный пучок $\lambda A_2 + B_2 : X_2 \to Y_2$ имеет регулярные точки.

Теорема 3. *Если пучок* $\lambda A + B$ $(X \to Y)$ *обладает инвариантной парой подпространств (33), то его х. ф.* $w(V, \lambda)$ *представляется в виде произведения* $w(V_2, \lambda)\, w(V_1, \lambda)$ *х. ф. пучков* $\lambda A_i + B_i = \pi_i (\lambda A + B)/X_i$, *где* π_i — *ортопроектор* $Y \to Y_i$,

$$Y_1 = Y \ominus Y_2; \quad X_1 = X \ominus X_2; \quad V_1 = V/X_1 \oplus X_1 \oplus \boldsymbol{F}.$$

Доказательство проводится путем декомпозиции J_0-унитарного оператора V на J_0-унитарные операторы V_i по формуле (31) [8]. При этом пространство умножения удобно выбирать в виде

$$E = V(X_1 \oplus X_1 \oplus \boldsymbol{F}) \ominus (Y_1 \oplus Y_1); \quad E \subset Y_2 \oplus Y_2 \oplus \boldsymbol{G}. \tag{34}$$

Итак, инвариантной паре подпространств пучка отвечает отщепление множителя от его характеристической функции. Обратное утверждение содержится в теореме 4. Функция $w_2(\lambda)$ называется правильным левым делителем функции $w(\lambda)$, если $w = w_2 w_1$, где множители $w_k(\lambda)$ не являются постоянными и существуют такие простые J_0 — унитарные реализации $w_k = w(V_k, \lambda)$, $k = 1, 2$, что композиция $V_2 \circ V_1 = \tilde{V}$ задает простую реализацию $\tilde{w}(V, \lambda)$.

Следствие 1 [8]. *Пусть $P_n : X \to X_n$, $Q_n : Y \to Y_n$ — ортопроекторы, (X_n, Y_n) — монотонно возрастающая последовательность инвариантных пар подпространств пучка $\lambda A + B$, $\lim P_n (Q_n) = I_X (I_Y)$. Тогда характеристическая функция $w(\lambda) \in [F, G]$ пучка представляется сильно сходящимся бесконечным произведением $w(\lambda) = \overset{\frown}{\prod_{n=1}^{\infty}} w_n(\lambda)$ с переменным пространством*) умножения $E_n \subset Y \oplus Y \oplus G$, где $w_n(\lambda) \in [E_n, E_{n-1}]$ — х. ф. пучка-проекции $(Q_n - Q_{n-1})(\lambda A + B)(P_n - P_{n-1})$. Если $\lambda A + B$ и индуцированные пучки $\lambda A_n + B_n = (\lambda A + B)/X_n$ имеют общую пару регулярных точек ν, $-\bar{\nu}$, то можно обеспечить $E_n = G(V_n)$.*

Процедура декомпозиции (31), (34) применительно к инвариантной паре подпространств (X_n, Y_n) обеспечивает следующее представление оператора V (2), задающего х. ф. $w = w(V, \lambda)$:

$$V = V_n \bigcirc \widehat{V}_n, \quad V_n = V/X_n \oplus X_n \dot{+} J_{E_n}.$$

Последовательная декомпозиция операторов V_{i+1} по инвариантным парам (X_i, Y_i) $|i = n-1, n-2, \ldots, 1|$ дает

$$V_n = \overset{\frown}{\prod_{i=1}^{n}} \bigcirc V_{i-1}^{i}; \quad w(V_n, \lambda) = \overset{\frown}{\prod_{i=1}^{n}} w_i(\lambda); \, w_i = w(V_{i-1}^{i}, \lambda). \qquad (35)$$

В пространстве $Y \oplus Y \oplus G$ сильно сходятся ортопроекторы $Q(E_n) \to \to Q(H)$, $H = V(F)$. Оператор V_n стремится к $V/_{X \oplus X} + Q(H)$, поэтому частичное произведение функций $w_i(\lambda)$ в (35) сильно сходится в пространстве $Y \oplus Y \oplus G$ к функции $w(\lambda)$ с точностью до постоянного J-унитарного множителя

$$V/F = U : F \to H \, (\lambda \in \bigcap^{\infty} \rho(A_n, B_n) \cap \rho(A, B)).$$

Пусть теперь ν, $-\bar{\nu} \in \rho(A, B)$. С учетом леммы 1 и теоремы 2 достаточно в фиксированном пространстве G разложить в бесконечное произведение функцию

$$\Theta(\zeta) = w\left(\frac{\nu + \bar{\nu}\zeta}{1 - \zeta}\right) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F,$$

редуцированную к единичному кругу. Подпространство X_n инва-

---

*) $E_n = E$ строится по формуле (34) с заменой $X_2 (Y_2)$ на $X_n (Y_n)$.

риантно относительно оператора T (16). Будем искать разложение на два множителя $\Theta = \Theta_1^n \Theta_n^1$, где

$$\Theta_1^n = S_n + \zeta G_n (I - \zeta T_n)^{-1} F_n; \quad \Theta_n' = S_n' + \zeta G_n' (I - \zeta T_n')^{-1} F_n'. \quad (36)$$

Положим $\{\sigma(\Pi_n) \cup \sigma(\Pi)\} \subset \{[m, M] \cup 1\}$ — ортопроектор,

$$T_0 = T/X_n; \quad T_n' = P_n T/X_n'; \quad F_n' = P_n' F; \quad G_n = G/X_n.$$

Из $(I \oplus J_1, I \oplus J_2)$ — унитарности оператора U (16) вытекает

$$T^*T = I - G^+G; \quad T_n^* T_n = I - G_n^+ G_n \ (TX_n \subset X_n).$$

Если обозначить через $m_n(M_n)$, $m(M)$ нижние (верхние) границы спектров операторов $T_n^*T_n$, T^*T, то $0 < m \leqslant m_n \leqslant M_n \leqslant M$. Поэтому спектры операторов

$$\Pi_n = I - G_n G_n^+ = I - GP_nG^+; \quad \Pi = I - GG^+ \ (\in [\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}])$$

обладают свойством $\{\sigma(\Pi_n) \cup \sigma(\Pi)\} \subset \{[m, M] \cup 1\}$. В полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta > 0$ существует простой контур, симметричный относительно вещественной оси и охватывающий все спектры $\sigma(\Pi_n)$, $\sigma(\Pi)$, так что интегрированием вдоль контура стандартным образом строятся J-эрмитовы обратимые квадратные корни $\Pi^{1/2}$ $\Pi_n^{1/2}$ $(J = J_2)$. Положим далее $S_n = \Pi_n^{1/2}$; $F_n = -T_n G_n^+ S_n^{-1}$; $S_n' = S_n^{-1} S$; $G_n' = S_n' G/X_n'$. Теперь формулами (36) определены консервативные реализации искомых множителей, причем $\Theta_1^n(\zeta) \in [\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}]$. Аналогично по инвариантному подпространству X_{n-1} оператора T_n строится представление $\Theta_1^n = \Theta_1^{n-1}\Theta_n$ и так далее, пока не получится $\Theta = (\overset{\frown}{\prod_1^n} \Theta_i)\Theta_n'$. Если существуют сильные пределы $S_n \to \Pi^{1/2}$, $S_n^{-1} \to \Pi^{-1/2}$, то

$$\Theta_n'(\zeta) \underset{n}{\rightarrow} \Lambda \doteq \Pi^{-1/2} S; \quad \Theta_1^n(\zeta) = \overset{\frown}{\prod_1^n} \Theta_i \underset{(n)}{\rightarrow} \Theta(\zeta)\Lambda^+;$$

$$\Theta(\zeta) = (\overset{\frown}{\prod_1^\infty} \Theta_n(\zeta))\Lambda; \quad \zeta^{-1} \in \bigcap_n \rho(T_n) \cap \rho(T).$$

Здесь $\Lambda: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ есть (J_1, J_2)-унитарный оператор. Предельные условия для S_n, S_n^{-1} доказаны в [8] методом J-модуля В. П. Потапова, перенесенным Ю. П. Гинзбургом с матриц на операторы.

Следствие 2 [8]. *Полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка эквивалентна представимости его простой х. ф. $w(\lambda)$ сильно сходящимся произведением множителей Бляшке — Потапова $w(\lambda) = \overset{\frown}{\prod_1^\infty} w_j(\lambda)$ и сходимости бесконечных произведений $\overset{\frown}{\prod} w_j^{-1}(\nu)$, $\overset{\frown}{\prod} w_j^*(\nu)$ хотя бы в одной точке ν.*

7. Спектры пучка $\lambda A + B$ и преобразования типа Кэли

$$T = (B + \nu A)^{-1}(B - \bar{\nu}A) | \nu \in \rho(A, B), \quad \nu + \bar{\nu} = \sigma^2 > 0 |$$

связаны соотношением

$$\sigma(A, B) = f[\sigma(T)], \quad f(\zeta) = \frac{\nu\zeta + \bar{\nu}}{\zeta - 1}.$$

При $\zeta = (\lambda + \bar{\nu})(\lambda - \nu)^{-1}$ это вытекает из равенств

$$I - TT^* = \sigma^2\gamma(\nu)(AB^* + BA^*)\gamma^*(\nu); \quad T - \zeta I = \frac{\sigma^2}{\nu - \lambda}\gamma(\nu)(B + \lambda A).$$

Оператор $AB^* + BA^*$, совпадающий с левой частью равенства (6), естественно считать вещественной частью сопряженного пучка $\mu A^* + B^*$. В случае ее компактности $(AB^* + BA^* \in \sum_\infty)$ пучок $\lambda A + B$ имеет в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ только нормальные точки, то есть регулярные и, возможно, изолированные собственные числа λ_j конечной алгебраической кратности. Последнее означает что проекторы

$$\widehat{P}_j = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{l(\gamma_j)}(\lambda A + B)^{-1} A\, d\lambda; \quad \widehat{Q}_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l(\gamma_j)} A(\lambda A + B)^{-1}\, d\lambda$$

конечномерны. Подпространства $X(\lambda_j) = \widehat{P}_j(X)$, $Y(\lambda_j) = \widehat{Q}_j(Y) = AX(\lambda_j)$ образуют пару, инвариантную относительно пучка $\lambda A + B$, причем $X(\lambda_j)$ состоит из собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному числу λ_j. Предположим, в левой полуплоскости существует регулярная точка пучка, тогда полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ также состоит из его нормальных точек. Пара подпространств

$$X_p = \text{л. з. о. } \{X(\lambda_j)\}, \quad Y_p = \text{л. з. о. } \{Y(\lambda_j)\}\ \forall\ \mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0$$

инвариантна относительно пучка, поэтому разложения пространств $X = X_p \oplus X_c$, $Y = Y_p \oplus Y_c$ разбивают его на такие блоки:

$$\lambda A + B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda A_p + B_p & \lambda\tilde{A} + \tilde{B} \\ \hline 0 & \lambda A_c + B_c \end{array}\right]. \tag{37}$$

Пучки $\lambda A_p + B_p$, $\lambda A_c + B_c$ естественно назвать дискретной и непрерывной компонентами пучка $\lambda A + B$. Для их спектров верны соотношения:

$$\sigma(A, B) = \sigma(A_p, B_p) \cup \sigma(A_c, B_c)$$

$$\sigma(A_p, B_p) = \overline{\cup\ \lambda_j}\,(\forall\ \mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0), \quad \mathrm{Re}\,\sigma(A_c, B_c) = 0.$$

По построению система собственных и присоединенных векторов дискретной компоненты $\lambda A_p + B_p \in [X_p, Y_p]$ полна в пространстве

X_p, поэтому х. ф. $w_p(\lambda)$ пучка $\lambda A_p + B_p$ раскладывается в произведение $\overset{\curvearrowright}{\prod\limits_{k=1}^{N}} b_k(\lambda)$ $(N \leqslant \infty)$ множителей Бляшке — Потапова

$$b_k(\lambda) = \left(I + \frac{2\operatorname{Re}\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} P_k\right) v_k; \quad \operatorname{Re}\lambda_k J P_k \leqslant 0, \quad P_k^2 = P_k. \tag{38}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\pm 1 \in \rho(A, B)$, поэтому для характеристической функции удается обеспечить совпадение входного и выходного пространств: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}$, $J_1 = J_2 = J$. Произведение сходится в норме пространства $\boldsymbol{G}$, если [8]

$$v_k = I + (e^{i\varphi_k} - 1) P_k, \quad \varphi_k = \arg\frac{1 - \lambda_k}{1 + \bar{\lambda}_k}. \tag{39}$$

Проекторы P_k конечномерны и вычисляются последовательно либо по старшим коэффициентам Лорановских разложений функций $\left[\overset{\curvearrowright}{\prod\limits_{j=1}^{k-1}} b_j^{-1}(\lambda)\right] w_p(\lambda)$, либо по инвариантным парам подпространств пучка $\lambda A_p + B_p$ и оператору V_p, задающему консервативную реализацию (1) $w_p(\lambda) = w(V_p, \lambda)$ [8]. Легко видеть, что множитель (38) допускает простую консервативную реализацию $b_k = w(V_k, \lambda)$ с пространством реализации $H_k = JP_k(\boldsymbol{G})$, где

$$V_k = \left[\begin{array}{c|c|c} \dfrac{-1}{\lambda_k - 1} I_k & \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k - 1} I_k & e^{i\beta_k}\Delta_k \\ \hline \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k - 1} I_k & \dfrac{-1}{\lambda_k - 1} I_k & -e^{i\beta_k}\Delta_k \\ \hline J\Delta_k^* & -J\Delta_k^* & S_k \end{array}\right],$$

$$\Delta_k = \frac{(-2\operatorname{Re}\lambda_k J P_k)^{1/2}}{|\lambda_k - 1|^2} : \boldsymbol{G} \to H_k; \quad \beta_k = \arg\frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k - 1}; \tag{40}$$

$$S_k = b_k(1) = I - P_k + \left|\frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k - 1}\right| P_k.$$

Операторы A_k, B_k в H_k скалярны. Последовательное применение правила композиции (31), (32) к отображениям V_k приводит к простой консервативной реализации функции $w_p = w(V_I, \lambda)$ с основными операторами A_I, B_I, имеющими нижнетреугольную матрицу в надлежащем базисе пространства реализации $X_I = Y_I = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus H_k$. С помощью ортопроекторов $q_k : X_I \to H_k$ блоки (2) оператора реализации V_I выражаются через элементы (40) так:

$$q_k A_I = \frac{1}{1 - \lambda_k} q_k + e^{i\beta_k}\Delta_k \sum_{n=k+1}^{N} \left(\overset{\curvearrowright}{\prod_{j=k+1}^{n-1}} S_j\right) J\Delta_n^* q_n;$$

$$q_k B_I = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - 1} q_k - e^{i\beta_k}\Delta_k \sum_{n=k+1}^{N} \left(\widehat{\prod_{j=1}^{n-1}} S_j\right) J\Delta_n^* q_n;$$

$$q_k L_I = e^{i\beta_k}\Delta_k \widehat{\prod_{j=k+1}^{N}} S_j; \quad M_I = \sum_{n=1}^{N} \left(\widehat{\prod_{j=1}^{n-1}} S_j\right) J\Delta_n^* q_n;$$

$$K_I = \widehat{\prod_{j=1}^{N}} S_j; \quad D_I = A_I; \quad C_I = B_I; \quad R_I = -L_I; \quad N_I = -M_I.$$

По следствию из теоремы 2 пучки $\lambda A_p + B_p$, $\lambda A_I + B_I$ эквивалентны друг другу в смысле (27), а задающий оператор V_p эквивалентен V_I в смысле (28). Таким образом, пучок $\lambda A_I + B_I$ является треугольной моделью дискретной компоненты исходного пучка $\lambda A + B$.

Треугольную модель непрерывной компоненты $\lambda A_c + B_c$ (37) можно построить в предложении, что оператор $A_c B_c^* + B_c A_c^*$ принадлежит симметрично-нормированному идеалу $\sum_\omega$ компактных операторов Мацаева В. И. [5, 6] (условие $AB^* + BA^* \in \sum_\omega$ является более сильным). Воспользовавшись мультипликативным представлением [6, 8] характеристической функции w_c пучка $\lambda A_c + B_c$, можно задать ее реализацию $w_c = w(V_0, \lambda)$ с помощью следующего модельного оператора V_0:

$$A_0 g(x) = \frac{g(x)}{i\alpha(x) + 1} + \frac{i\alpha(x) - 1}{i\alpha(x) + 1} \int_x^1 \psi(x, t)\, dE(t)\, g(t);$$

$$B_0 g(x) = \frac{i\alpha(x)\, g(x)}{i\alpha(x) + 1} - \frac{i\alpha(x) - 1}{i\alpha(x) + 1} \int_x^1 \psi(x, t)\, dE(t)\, g(t);$$

$$L_0 g = -R_0 g = \frac{i\alpha(x) - 1}{i\alpha(x) + 1} \psi(x, 1)\, g; \quad K_0 = \psi(0, 1);$$

$$M_0 g(x) = -N_0 g(x) = \int_0^1 \psi(0, t)\, dE(t)\, g(t);$$

$$D_0 = A_0; \quad C_0 = B_0, \quad \psi(x, y) = \widehat{\int_x^y} [I - dE(t)].$$

Здесь $E(t)$ — J-неотрицательная, J-неубывающая, непрерывная (в $\sum_\omega$-норме) функция со значениями в $\sum_\omega(G)$; $\alpha(t)$ — скалярная неубывающая, непрерывная слева функция ($0 \leqslant t \leqslant 1$). Пространство реализации $X_0 = Y_0$ состоит из функций $g : [0, 1] \to G$, для которых

$$(g, g)_{X_c} = \int_0^1 (JdE(t)\, g(t), \quad g(t))_G < \infty.$$

Пучок $\lambda A_0 + B_0$ является треугольной моделью непрерывной компоненты $\lambda A_c + B_c$.

Вопросы, затронутые в п. 6, 7, более полно изложены в [8], там же обсуждаются приложения результатов к анализу и синтезу систем управления вида (8), к исследованию задачи Коши для уравнения (8.1).

Список литературы

1. *Бродский М. С., Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы.— Успехи мат. наук, 1958, 13 № 1 (79), с. 3—85.

2. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы.— Сиб. мат. журн., 1979, 20, № 2, с. 211—227.

3. *Ball J. A.* Models for Noncontractions.— Math. Anal. and Appl., 1975, 52, № 2, 235—254.

4. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-Растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Успехи мат. наук, 1973, 28, 1 (169), с. 65—130.

5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М.: Наука, 1965.— 448 с.

6. *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О характеристических функциях обратимого оператора.— Acta Scientiarum Mathematica rum, 1971, 32, с. 141—164.

7. *Руткас А. Г.* К теории характеристических функций линейных операторов.— Докл. АН СССР, 1976, 229, № 3, с. 546—549.

8. *Руткас А. Г.* Характеристическая функция, универсальная и треугольная модели линейного пучка операторов. Рукопись деп. в Укр НИИНТИ 04.08.83, № 883—83 Деп.

Поступила в редколлегию 18.11.84