

УДК 517.922+519.642.2

Численное решение вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями

А. Л. Пивень

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Предложен численный метод решения нелинейного вырожденного интегро-дифференциального уравнения запаздывающего типа. Линейной части уравнения отвечает регулярный характеристический матричный пучок индекса 1. Такие уравнения возникают при описании переходных процессов в радиотехнических системах. Установлены условия существования и единственности решения повышенной гладкости, и в этих условиях доказана теорема о сходимости численного метода решения.

Ключевые слова: вырожденное интегро-дифференциальное уравнение с запаздываниями, численное решение, сходимость

Запропоновано чисельний метод розв'язання нелінійного виродженого інтегро-диференціального рівняння запізнюючого типу. Лінійній частині рівняння відповідає регулярний характеристичний матричний жмуток індексу 1. Такі рівняння виникають при опису перехідних процесів у радіотехнічних системах. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку підвищеної гладкості, і в цих умовах доведено теорему про збіжність чисельного методу розв'язання.

Ключові слова: вироджене інтегро-диференціальне рівняння із запізненнями, чисельний розв'язок, збіжність.

We are suggested a numerical method for solving of a nonlinear degenerate integro-differential delay equation. The regular characteristic index-one matrix sheaf is corresponded to a linear part of equation. Such equations appear at describing of transients in radio technical systems. Conditions of existing and uniqueness of higher smoothness solution are obtained, and under these conditions the theorem about convergence of a numerical method is proved.

Key words: degenerate delay integro-differential equation, numeric solution, convergence.

1. Введение

В данной работе предложен численный метод решения начальной задачи

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + \sum_{j=0}^N B_j u(t - \omega_j) + \sum_{j=0}^N \int_{t_0 - \omega_j}^{t - \omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t) + \varphi(u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

$$u(t) = g(t), \quad t_0 - \omega_N \leq t \leq t_0 \quad (1.2)$$

Здесь A_0, B_j ($j=0, \dots, N$) — постоянные квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, элементы $n \times n$ матриц $\Phi_j(t, \tau)$ непрерывны по совокупности переменных на множествах $\{(t, \tau) \in [t_0, T] \times [t_0 - \omega_j, T] : t_0 - \omega_j \leq \tau \leq t - \omega_j\}$ соответственно, $f(t) \in C([t_0, T], R^n)$, $\varphi(x) \in C(R^n, R^n)$, $g(t) \in$

$C([t_0 - \omega_N, t_0], R^n)$. Запаздывания упорядочены : $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$. Следуя [1,2], под решением задачи (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0 - \omega_N, T]$ будем понимать вектор-функцию $u(t) \in C([t_0 - \omega_N, T], R^n)$ такую, что

$A_0 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $t \in [t_0, T]$ и начальному условию (1.2).

Уравнение (1.1) называется *неявным*, а в случае обратимости матрицы A_0 – *вырожденным* [1,3]. Нелинейное уравнение (1.1) с вырожденной матрицей A_0 получено в [4,5] при описании переходных процессов в радиотехнических системах.

Различные численные методы решения вырожденных линейных дифференциально-алгебраических уравнений $\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + B_0 u(t) = f(t)$ рассматривались в [6–8], для системы полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 вида $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t)); y(t) = g(t, x(t), y(t))$ – в [8,9]. В [10] доказаны теоремы существования и единственности и предложен численный метод решения вырожденного нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + B_0 u(t) + \int_{t_0}^t \Phi_0(t, s, u(s)) ds = f(t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

В [11] эти вопросы получили дальнейшее развитие для вырожденного уравнения с малым нелинейным членом

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + B_0 u(t) = \mu F\left(t, u(t), \int_0^t \Phi_0(t, s, u(s)) ds\right) + f(t), \quad t \in [0, 1],$$

где μ – малый параметр. В [12] доказаны теоремы существования и единственности решения для общего квазилинейного уравнения вида

$$F_0\left(t, u(t), \int_0^t \Phi_0(t, s, u(s)) ds\right) + F_1\left(t, u(t), \int_0^t \Phi_1(t, s, u(s)) ds\right) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

а численный метод решения построен на основе неявной вычислительной схемы, в которой проведено разложение входных данных в ряд Тейлора с удержанием первого члена разложения. При этом в [11,12] для нахождения численного решения и доказательства сходимости вычислительного процесса требовалось знание точного решения в нескольких узлах сетки.

При построении численных методов решения указанных классов нелинейных вырожденных интегро-дифференциальных уравнений используются явные и неявные вычислительные схемы, связанные с заменой производной конечной разностью и интегрального слагаемого квадратурной суммой. Как отмечалось в [10–12] трудности реализации явных схем (например, схем Эйлера) связаны с необходимостью решения вырожденных дискретных систем, а неявных схем – с решением сложных нелинейных систем. В настоящей работе разработан численный метод решения задачи (1.1), (1.2) на основе явной вычислительной схемы, реализация которой возможна благодаря применению метода спектральных проекторов типа Рисса [13]. В отличие от [11,12] для

доказательства сходимости вычислительного процесса не требуется знание точного решения ни в одной точке $t > t_0$.

2. Теорема существования и единственности решения

Всюду в статье мы используем евклидову норму вектора пространства R^n и подчиненную ей операторную норму матрицы размера $n \times n$. Линейной части уравнения (1.1) отвечает характеристический матричный пучок $\lambda A_0 + B_0$. Всяду в дальнейшем он предполагается регулярным ($\det(\lambda A_0 + B_0) \neq 0$) [14] индекса 0 или 1. Если индекс равен нулю, то матрица A_0 обратима, если индекс равен 1, то A_0 имеет нетривиальное ядро, а пучок $\lambda A_0 + B_0$ – бесконечные элементарные делители первой степени [14]. Введем пару взаимно дополнительных спектральных проекторов [13]

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_0} (\lambda A_0 + B_0)^{-1} A_0 d\lambda, \quad P_2 = E - P_1; \quad (2.1)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_0} A_0 (\lambda A_0 + B_0)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1,$$

где контур $\{\lambda : |\lambda| = C_0\}$ охватывает конечный спектр пучка $\lambda A_0 + B_0$, а E – единичная матрица порядка n . По аналогии с оператором G из [3] введем матрицу

$$G = A_0 + B_0 P_2 = A_0 + Q_2 B_0.$$

Как и оператор G из [3], матрица G обратима. Для проекторов вида (2.1) свойства матрицы G установлены в [1].

Положим $S = G^{-1} Q_1 B_0$. Рассмотрим множество D , содержащее точку T и все точки отрезка $[t_0, T]$, представимые в виде $t_0 + \sum_{j=0}^N l_j \omega_j$, где $l_j (j=0, \dots, N)$ –

целые неотрицательные числа. Как правило, сходимость численного метода можно доказать при условии, что точное решение задачи (1.1), (1.2) обладает повышенной гладкостью [6–12, 15]. В следующей теореме устанавливаются условия существования и единственности решения $u(t) \in C^m([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$ задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1. Пусть пучок матриц $\lambda A_0 + B_0$ регулярный индекса не выше 1, $f(t) \in C^m([t_0, T], R^n)$, $\varphi(x) \in C^m(R^n, R^n)$, $g(t) \in C^m([t_0 - \omega_N, t_0], R^n)$, элементы $n \times n$ матриц $\Phi_j(t, \tau)$ вещественны и m раз непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на множествах $\{(t, \tau) \in [t_0, T] \times [t_0 - \omega_j, T] : t_0 - \omega_j \leq \tau \leq t - \omega_j\}$ ($j=0, \dots, N$) соответственно и при некоторой постоянной $M > 0$ выполнено условие Липшица

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad x, y \in R^n, \quad (2.2)$$

Предположим что

$$Q_2\phi(x) = 0, \quad x \in R^n \quad (2.3)$$

и выполнено условие согласования

$$Q_2 \sum_{j=0}^N B_j g(t_0 - \omega_j) = Q_2 f(t_0) \quad (2.4)$$

на начальный вектор в (1.2) и правую часть в (1.1). Тогда начальная задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u(t) \in C^m([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$. В точках множества D производные $u^{(k)}(t)$ ($k = 1, \dots, m$) могут не существовать и иметь скачки.

Доказательство. Существование и единственность решения $u(t)$ задачи (1.1), (1.2) вытекают из теоремы 1 статьи [2]. С помощью соотношения (см. [2])

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-S(t-t_0)} P_1 g(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-S(t-\tau)} G^{-1} Q_1 f(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^N \int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{-S(t-\tau-\omega_j)} G^{-1} Q_1 B_j u(\tau) d\tau - \\ & - \sum_{j=0}^N \int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau - \sum_{j=0}^N \int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \int_{\tau+\omega_j}^t e^{-S(t-s)} G^{-1} Q_1 \Phi_j(s, \tau) ds u(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t e^{-S(t-\tau)} G^{-1} \phi(u(\tau)) d\tau + G^{-1} Q_2 f(t) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u(t - \omega_j), \quad t_0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

и условий теоремы проверяется, что $u(t) \in C^m([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$. Теорема доказана.

Замечание. В [16] получены локальные и глобальные теоремы существования и единственности решения задачи (1.1), (1.2) в бесконечномерных пространствах в случае $\Phi_j(t, \tau) \equiv 0$ ($j = 0, \dots, N$).

3. Построение численного решения задачи (1.1), (1.2)

Как и в [1,3] применим к уравнению (1.1) проекторы Q_1, Q_2 . С учетом ограничения (2.3) получим эквивалентную систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)) + Sx(t) + G^{-1} Q_1 \sum_{j=1}^N B_j u(t - \omega_j) + \\ + G^{-1} Q_1 \sum_{j=0}^N \int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau = G^{-1} Q_1 f(t) + G^{-1} \phi(u(t)); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$y(t) = G^{-1} Q_2 f(t) - G^{-1} Q_2 \sum_{j=1}^N B_j u(t - \omega_j) - G^{-1} Q_2 \sum_{j=0}^N \int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

где $x(t) = P_1 u(t)$, $y(t) = P_2 u(t)$.

Рассмотрим сеточную область $\{t_i = t_0 + ih : i = -m_N, \dots, K\}$, где шаг сетки $h = \frac{T-t_0}{K}$ выбирается сколь угодно малым и таким, что величины $m_k = \frac{\omega_k}{h}$ ($k = 0, \dots, N$) являются целыми. Обозначим через u_i значение приближенного решения задачи (1.1), (1.2) в узле сетки t_i ($i = -m_N, \dots, K$) и через $x_i = P_1 u_i$, $y_i = P_2 u_i$ его проекции: $u_i = x_i + y_i$. Заменим производную в уравнении (3.1) конечной разностью, а интегральные слагаемые в (3.1), (3.2) – квадратурной формулой трапеций [15]. Получаем следующую разностную схему:

$$x_{i+1} = (E - Sh)x_i - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j u_{i-m_j} - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) u_k + h G^{-1} Q_1 f(t_i) + h G^{-1} \varphi(u_i); \quad (3.3)$$

$$y_{i+1} = G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u_{i+1-m_j} - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j} \delta_{i+1,jk} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u_k; \quad (3.4)$$

$$u_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3.5)$$

где $\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & k = -m_j + 1, \dots, i - m_j - 1, \\ \frac{1}{2}, & k = -m_j, i - m_j \end{cases}$ – весовые коэффициенты формулы трапеций [15]. Разностные уравнения (3.3)–(3.5) решаются при известных начальных условиях:

$$x_i = P_1 g(t_0 + ih), y_i = P_2 g(t_0 + ih), u_i = x_i + y_i, \quad i = -m_N, -m_N + 1, \dots, 0. \quad (3.6)$$

При каждом $i = 0, \dots, K-1$ однозначная разрешимость системы линейных алгебраических уравнений (3.3), (3.4) относительно неизвестных x_{i+1}, y_{i+1} имеет место для всех $h > 0$, удовлетворяющих неравенству

$$h \max_{t \in [t_0, T]} \|G^{-1} Q_2 \Phi_0(t, t)\| < 1. \quad (3.7)$$

В следующей теореме указываются достаточные условия сходимости вычислительного метода (3.3)–(3.6).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 при $m = 2$. Тогда разностная схема (3.3)–(3.6) имеет первый порядок сходимости:

$$\max_{i=0, \dots, K} \|u(t_i) - u_i\| = O(h).$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in C^2([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$ – точное решение задачи (1.1), (1.2), которое существует в силу теоремы 1. Заметим, что $x(t) =$

$= P_1 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n)$. В силу формулы Тейлора и квадратурной формулы трапеций

$$x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h), \quad i = 0, \dots, K-1; \quad (3.8)$$

$$\int_{t_0 - \omega_j}^{t - \omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau = h \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + O(h^2), \quad i = 0, \dots, K, j = 0, \dots, N. \quad (3.9)$$

Положим в уравнении (3.1) $t = t_i$, в уравнении (3.2) $t = t_{i+1}$ и воспользуемся формулами (3.8), (3.9). Получим

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) = & (E - hS)x(t_i) - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j u(t_{i-m_j}) - \\ & - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + hG^{-1} Q_1 f(t_i) + hG^{-1} \varphi(u(t_i)) + O(h^2); \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) = & G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u(t_{i+1-m_j}) - \\ & - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j} \delta_{i+1,jk} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u(t_k) + O(h^2); \end{aligned} \quad (3.11)$$

Обозначим $\varepsilon_i^x = x_i - x(t_i)$, $\varepsilon_i^y = y_i - y(t_i)$, $i = -m_N, \dots, K$. В силу условия Липшица (2.2) имеем

$$\varphi(u_i) - \varphi(u(t_i)) = O(1)(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y), \quad i = 0, \dots, K. \quad (3.12)$$

Вычитая из уравнений (3.3), (3.4) уравнения (3.10), (3.11) соответственно, с учетом (3.12) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^x = & (E - hS)\varepsilon_i^x - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j (\varepsilon_{i-m_j}^x + \varepsilon_{i-m_j}^y) - \\ & - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2) + O(h)(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y); \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^y = & - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j (\varepsilon_{i+1-m_j}^x + \varepsilon_{i+1-m_j}^y) - \\ & - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j} \delta_{i+1,jk} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2); \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.13), (3.14) решаются при нулевых начальных условиях

$$\varepsilon_i^x = \varepsilon_i^y = 0, \quad i = -m_N, \dots, 0. \quad (3.15)$$

Построим $2n$ -мерные векторы $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y)^{tr}$, $i = -m_N, \dots, K$. При достаточно малых $h > 0$ выполнено условие (3.7). Тогда задача (3.13)–(3.15) переписывается в виде

$$\varepsilon_{i+1} = A\varepsilon_i + F_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i), \quad i = 0, \dots, K-1; \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_i = 0, \quad i = -m_N, \dots, 0, \quad (3.17)$$

где $A = \begin{pmatrix} E + O(h) & O(h) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – блочная матрица размера $2n \times 2n$ с блоками размера

$$n \times n, \quad F_i = F_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = \begin{pmatrix} O(h) \sum_{j=1}^N \varepsilon_{i-m_j} + O(h^2) \sum_{k=0}^i \varepsilon_k + O(h^2) \\ \sum_{j=1}^N L_j \varepsilon_{i+1-m_j} + O(h) \sum_{k=0}^i \varepsilon_k + O(h^2) \end{pmatrix}, \quad \text{где } L_j (j=1, \dots, N)$$

– постоянные матрицы размера $n \times 2n$, не зависящие от i, h . Используя формулу вариации постоянных [17, с. 59], находим следующее представление для решения ε_i уравнения (3.16):

$$\varepsilon_i = A^i \varepsilon_0 + \sum_{l=1}^i A^{i-l} F_l, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.18)$$

Степени матрицы A имеют следующую структуру:

$$A^i = \begin{pmatrix} (E + O(h))^i & (E + O(h))^{i-1} O(h) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.19)$$

и при некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеют место оценки

$$\|(E + O(h))^i\| \leq (1 + C_1 h)^i \leq e^{C_2(T-t_0)}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.20)$$

Тогда с учетом нулевых начальных условий (3.17), структуры (3.19) степеней матрицы A , вида вектор - функций F_i и оценок (3.20) получаем линейное дискретное разностное неравенство

$$\|\varepsilon_i\| \leq O(h) \sum_{j=0}^{i-1} \|\varepsilon_j\| + O(h), \quad i = 1, \dots, k_1 = \min\{m_1, K\}. \quad (3.21)$$

В силу следствия 4.1.2 [17, с. 186] из (3.21) получаем

$$\max_{i=1, \dots, k_1} \|\varepsilon_i\| \leq O(h)(1 + O(h))^{k_1} = O(h), \quad (3.22)$$

что доказывает сходимость вычислительного процесса на отрезке $[t_0, t_0 + \omega_1] \cap [t_0, T]$. Если $t_0 + \omega_1 < T$, то рассмотрим разностное уравнение (3.16) для $i = m_1, \dots, k_2 - 1$, где $k_2 = \min\{K, 2m_1\}$. Это разностное уравнение решается при начальном условии

$$\varepsilon_i = O(h), \quad i = -m_N, \dots, m_1, \quad (3.23)$$

справедливом в силу соотношений (3.17) и (3.22). Повторяя проведенные выше рассуждения относительно уравнения (3.16) с учетом начального условия (3.23), получим $\max_{i=1,\dots,k_2} \|\varepsilon_i\| = O(h)$. За конечное число шагов получим оценку

$$\max_{i=1,\dots,K} \|\varepsilon_i\| = O(h),$$

которая доказывает теорему.

4. Пример

На рис. 1–2 приведены в графической форме результаты численного решения задачи (1.1), (1.2). Эта задача рассмотрена в пространстве R^2 на отрезке

$[t_0, T] = [0, 100]$, причем $N=1, \omega_1=1, A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix},$

$f(t) = e^{-0.05t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, g(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_0(t, \tau) = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & 0 \\ 0 & \cos 2(t-\tau) \end{pmatrix}, \Phi_1(t, \tau) =$
 $= \begin{pmatrix} 0 & \sin(t-\tau) \\ \sin 3(t-\tau) & 0 \end{pmatrix},$ и для вектора $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ нелинейная вектор-функция

$\varphi(u)$ имеет вид $\varphi(u) = \begin{pmatrix} \sin^2 u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пучок $\lambda A_0 + B_0$ регулярный и имеет индекс 1.

При этом $P_1 = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = E$ и выполняются соотношения

(2.3), (2.4). Функция $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица (2.2) с постоянной $M=1$. Поэтому условия теорем 1, 2 выполнены при $m=2$. В силу теоремы 2 для нахождения численного решения этой задачи на отрезке $[0, T]$ можно использовать вычислительную схему (3.3)–(3.6), которая имеет первый порядок сходимости.

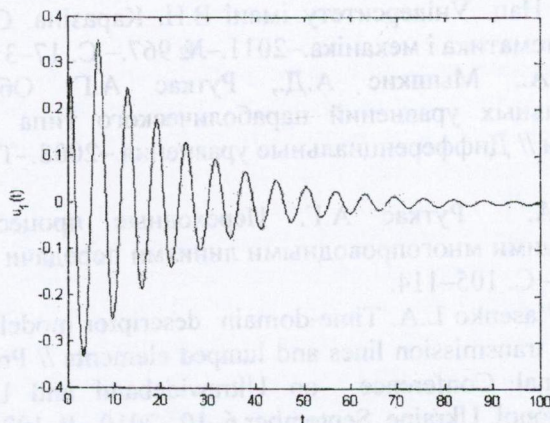


Рис. 1

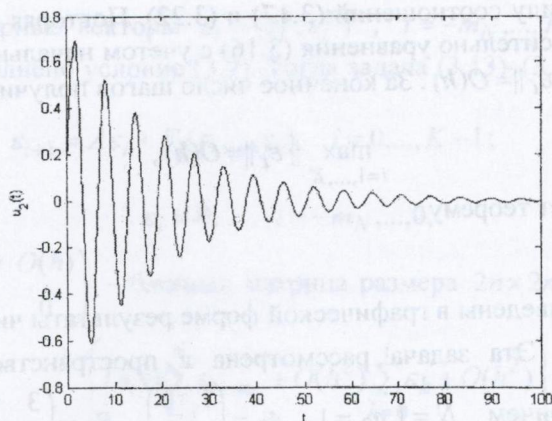


Рис.2

5. Выводы

Вычислительная схема (3.3)–(3.6) позволяет находить численное решение определенных классов вырожденных интегро-дифференциальных уравнений вида (1.1). Условия сходимости этой схемы установлены в теореме 2. Разработанный в статье численный метод может быть использован для построения приближенного решения конкретных уравнений вида (1.1), полученных в [4,5] при исследовании переходных процессов в радиотехнических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // *Nonlinear Analysis. TMA.*–2003–V. 55, № 1-2.–P.125–139.
2. Пивень А.Л. Существование и единственность решения одного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями // *Вісник Харк. Нац. Університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математика, прикладна математика і механіка.*–2011.–№ 967.– С. 17–31.
3. Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // *Дифференциальные уравнения.*–2008.–Т.44, № 2.– С. 222–231.
4. Власенко Л.А. Руткас А.Г. Переходные процессы в цепях с диспергирующими многопроводными линиями передачи // *Радиотехника.*–2010.– № 161.– С. 105–114.
5. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements // *Proceedings of IEEE 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals.*–Sevastopol, Ukraine, September 6–10.–2010.–P. 102–104.
6. Численные методы решения сингулярных систем / Под ред. Ю.Е. Бояринцева.– Новосибирск: Наука, 1989.–223 с.

7. Campbell S.L. Singular system of differential equations II.– San-Francisco, London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics, Vol. 61, 1982.–234 p.
8. Brennan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations.–SIAM: Classic in Applied Mathematics, 1995.–256 p.
9. Куликов Г.Ю. Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования // Журнал выч. математики и мат. физики. – 1996.– Т.36, № 8.–С. 73–89.
10. Булатов М.В., Чистякова Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многшаговыми методами // Дифференциальные уравнения.–2006.–Т. 42, № 9.– С. 1248–1255.
11. Чистякова Е.В. Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // Дифференциальные уравнения.–2009.–Т. 45, № 11.– С. 1365–1368.
12. Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии.–2011.–Т. 16, № 5.– С. 100–113.
13. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференциальные уравнения.–1975.–Т.11, № 11.–С. 1996–2010.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1988.– 548 с.
15. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.– 632 с.
16. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006.–273 с.
17. Agarval R. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. – Marcel: Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2000.–971 p.

УДК 539.3

Метод решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане

Е. В. Свет, Н. В. Сметанкина, А. Н. Шупиков

Институт проблем машиностроения им А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

Предлагается метод решения стационарной задачи термоупругости многослойных цилиндрических оболочек сложной формы в плане. Метод основан на приеме погружения сложной области в область канонической формы. Деформации слоев оболочки описываются в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига в каждом слое. Температурные воздействия получены в результате решения задачи теплопроводности. Исследовано напряженно-деформированное состояние пятислойной оболочки при нагреве пленочным источником тепла.

Ключевые слова: многослойная оболочка, сложная форма плана, термоупругость, пленочный источник тепла.

Пропонується метод розв'язання стаціонарної задачі термопружності багат шарових циліндричних оболонок складної форми в плані. Метод базується на прийомі занурення складної області в область канонічної форми. Деформації шарів оболонки описуються в рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву в кожному шарі. Температурні впливи отримані в результаті розв'язання задачі теплопровідності. Досліджено напружено-деформований стан п'ятишарової оболонки при нагріванні плівковим джерелом тепла.

Ключові слова: багат шарова оболонка, складна форма плану, термопружність, плівкове джерело тепла.

A method of solving the stationary thermoelasticity problem for multilayer cylindrical shells of complex plan shape is proposed. The method is based on immersion of complex area into a canonical shape area. Deformations of the shell layers are described within the framework of the first-order theory taking into account of transverse shear strains in each layer. Temperature loads are obtained as a result of solution of a heat conduction problem. The stress-strained state of a five-layer shell at heating by a film heat source is investigated.

Key words: multilayer shell, complex plan shape, thermoelasticity, film heat source.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Как показывает анализ литературных источников, большинство публикаций посвящено решению задач термоупругости изотропных оболочек канонической формы в плане при заданном законе распределения температуры по их толщине и поверхности [1, 2]. Основными методами решения задач термоупругости многослойных оболочек сложной формы чаще всего являются численные методы, требующие дискретизации области или ее границы – метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов [2–5]. Таким образом, разработка эффективных методов, позволяющих представить решение задачи в аналитическом или численно-аналитическом виде, остается актуальной задачей.

Рассматривается многослойная незамкнутая цилиндрическая оболочка, собранная из I слоев постоянной толщины h_i ($i = \overline{1, I}$), отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя. На

координатной поверхности оболочка занимает область G , ограниченную контуром $L: x_L = x(s), y_L = y(s)$ (s – текущая длина дуги). На оболочку действует система силовых и тепловых нагрузок.

Поведение оболочки описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига [6]. Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Перемещения точек оболочки представляются в виде

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \quad w^i = w, \quad (1)$$

где $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ –

перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных осей; $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y)$, $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y)$ – углы поворота нормального элемента в i -м слое вокруг осей Ox и Oy .

Деформации слоев определяются согласно формулам Коши, а напряжения и деформации в i -м слое связаны законом Гука [7]

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_x^i + \nu_i \epsilon_y^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_T^i T_i, \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_y^i + \nu_i \epsilon_x^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_T^i T_i, \\ \tau_{xy}^i &= \tau_{yx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = \tau_{zx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xz}^i, \\ \tau_{yz}^i &= \tau_{zy}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{yz}^i, \quad i = \overline{1, I}, \end{aligned} \quad (2)$$

где E_i – модуль Юнга материала i -го слоя; ν_i – коэффициент Пуассона; α_T^i – коэффициент линейного температурного расширения материала i -го слоя; $T_i = T_i(x, y, z)$ – изменение температуры по отношению к температуре ненапряженного состояния.

Уравнения термоупругого равновесия многослойной оболочки и соответствующие граничные условия получены на основе вариационного принципа Лагранжа [6]

$$\mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P}, \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^L \mathbf{U} = \mathbf{P}^L, \quad (x, y) \in L, \quad (4)$$

где $\mathbf{U}$ – вектор, компонентами которого являются искомые функции (1);

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w, \quad u_{3+i} = \psi_x^i, \quad u_{3+I+i} = \psi_y^i, \quad i = \overline{1, I};$$

$$\mathbf{P}_T = \{C_{1T,x}^I, C_{2T,y}^I, -C_{2T}^I/R, D_{1T,x}^I, D_{2T,y}^I\};$$

$$\mathbf{P}^L = \{C_{1T}^I l_x^2 + C_{2T}^I l_y^2, (C_{1T}^I - C_{2T}^I) l_x l_y, 0, D_{1T}^I l_x^2 + D_{2T}^I l_y^2, (D_{1T}^I - D_{2T}^I) l_x l_y\},$$

$$C_{1T}^I = \sum_{i=1}^I N_{1T}^i, \quad C_{2T}^I = \sum_{i=1}^I N_{2T}^i, \quad D_{1T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{1T}^{j+1}, \quad D_{2T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{2T}^{j+1} + M_{2T}^i,$$

$$N_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, N_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz,$$

$$M_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, M_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz;$$

R – радиус оболочки, l_x, l_y – направляющие косинусы нормали к контуру L .

2. Истоки исследования авторов

Решение поставленной задачи термоупругости опирается на метод погружения, ранее разработанный для решения задач термоупругости многослойных пластин [6]. Исходная многослойная оболочка произвольной формы в плане погружается вспомогательную охватывающую многослойную оболочку канонической формы в плане с такой же композицией слоев. Этот прием позволяет получить простое аналитическое решение исходной задачи.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Анализ исследований, посвященных термоупругости многослойных элементов конструкций, показывает, что чаще всего рассматривается их деформирование при воздействии стационарных температурных полей. При этом на поверхностях слоев температура считается постоянной, а по толщине конструкции применяется гипотеза о кусочно-линейном распределении температуры.

В статье [8] рассмотрена задача термоупругости для неравномерно нагретых по толщине ортотропных цилиндрических оболочек с применением метода фундаментальных решений. Предполагается линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона на наружных поверхностях. Исследовано влияние теплообмена на термонапряженное состояние конструкций. В работе [9] методом R -функций, позволяющим учитывать сложную геометрию тел на аналитическом уровне, решена задача термоупругости для тонких пластин сложной формы. Поведение пластин описано на основе гипотез Кирхгофа-Лява. В статье [10] предложен альтернативный вариант метода граничных элементов к решению задач изгиба пластин, находящихся в температурном поле. Подход состоит в приведении задачи Дирихле для бигармонического оператора к последовательности распадающихся задач и последующей декомпозиции каждой из них в пару несвязанных задач для уравнения Пуассона. В качестве примера рассматривалась круговая защемленная пластина под действием распределенной температурной нагрузки.

Целью настоящей работы является разработка метода решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане при воздействии температурных полей, полученных в результате решения задачи теплопроводности.

4. Используемый метод решения

В настоящей работе в качестве вспомогательной принимается многослойная цилиндрическая шарнирно опертая оболочка прямоугольной формы в плане.

Чтобы обеспечить выполнение действительных граничных условий, к вспомогательной оболочке по контуру L прилагаются дополнительные компенсирующие усилия и моменты $Q^c = \{q_j^c(x, y)\}$, $(x, y) \in L$, $j = \overline{1, 2I+3}$. В уравнения термоупругого равновесия (3) функции компенсирующих нагрузок входят в виде интегральных соотношений:

$$p_j^c(x, y) = \int_0^{s^*} q_j^c(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (5)$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака; s^* – периметр оболочки.

Граничные условия (4) с учетом (5) приводят к системе интегральных уравнений для определения компенсирующих нагрузок

$$V^L U[Q^c(x, y)] = Q^L, \quad (x, y) \in L. \quad (6)$$

Метод решения системы (6) состоит в том, что функции перемещений, силовых P , температурных P_T и компенсирующих P^c (5) нагрузок разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной оболочки

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn} B_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn} B_{jmn}(x, y), \\ p_{Tj}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^T B_{jmn}(x, y), \quad p_j^c(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^c B_{jmn}(x, y), \\ B_{1mn} &= \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad B_{2mn} = \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad B_{3mn} = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ B_{3+i mn} &= B_{1mn}, \quad B_{3+I+i mn} = B_{2mn}, \\ \alpha_m &= m\pi/A, \quad \beta_n = n\pi/B, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \end{aligned}$$

где A – длина образующей вспомогательной оболочки; B – длина дуги этой оболочки.

Кроме того, функции компенсирующих нагрузок и граничных перемещений, разлагаются в ряд вдоль контура L [6, 7]

$$q_j^c(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s), \quad u_j(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (7)$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \int_0^{s^*} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате преобразований система интегральных уравнений (3) с учетом (7) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих нагрузок $f_{j\alpha\mu}$

$$\sum_{j=1}^{2I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} N_{ij\alpha\mu} f_{j\alpha\mu} = \Pi_{i\beta v}, \quad i = \overline{1, 2I+3}, \beta = 1, 2, v = 0, v^*.$$

Порядок полученной системы зависит от числа слоев в оболочке и количества членов ряда, удерживаемых в разложении (7), и равен $(2I+3) \times (2\mu^* + 1)$. После определения компенсирующих нагрузок путем суммирования ряда (7) вычисляются перемещения (1) и напряжения (2) в слоях исходной оболочки.

5. Численный пример решения задачи термоупругости

В качестве иллюстрации решена задача термоупругости пятислойной оболочки, контур которой составлен из отрезков прямых и сопряженных с ними дуг окружностей.

На рис. 1 приведена расчетная схема оболочки радиуса 2,5 м с такими геометрическими параметрами: $l_1 = 0,74$ м, $l_2 = 0,16$ м, $l_3 = 0,75$ м, $l_4 = 0,26$ м, $R_k = 0,03$ м, $k = \overline{1, 4}$. Слои оболочки выполнены из материалов со следующими характеристиками: $E_i = 6,8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0,22$, $\alpha_T^i = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 1, 3, 5$; $E_i = 2,2 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_i = 0,38$, $\alpha_T^i = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 2, 4$; $h_1 = 0,005$ м, $h_2 = 0,003$ м, $h_3 = 0,012$ м, $h_4 = 0,002$ м, $h_5 = 0,008$ м. Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют.

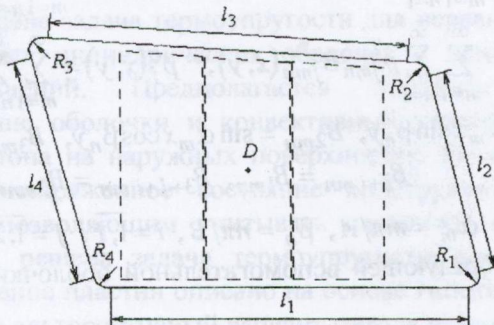


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

Поле температурных нагрузок получено из решения нестационарной задачи теплопроводности многослойных оболочек [11] с учетом воздействия пленочного источника. Боковая поверхность оболочки считается идеально теплоизолированной. Задача теплопроводности решена с такими исходными данными: $k_i = 1,08 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$, $i = 1, 3, 5$; $k_i = 0,22 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$, $i = 2, 4$ (коэффициенты теплопроводности материала i -го слоя); $H_1 = 433 \text{ Вт/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$, $H_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ (коэффициенты конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки); $T_1 = -30^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (температура среды на

границе с верхней и нижней поверхностями). Пленочный источник тепла мощностью $q = 6 \text{ кВт/м}^2$ расположен между первым и вторым слоями оболочки. Расположение источника показано штриховой линией.

На рис. 2 представлено распределение температуры T и главного напряжения σ_1^i ($i = \overline{1, I}$) по толщине оболочки в точке D . Также показана композиция слоев. Напряжения получены для температурного распределения в момент времени, когда температура на поверхности с источником достигает наибольшего значения. На поверхности раздела первого и второго слоев оболочки наблюдается резкое изменение температуры и напряжения, вызванное наличием источника тепла. При этом напряжение не превышает своего допустимого значения.

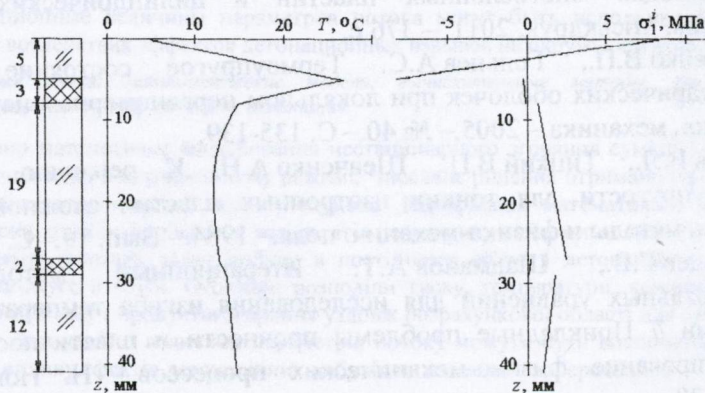


Рис. 2. Распределение температуры и напряжений в слоях оболочки

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложен метод решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане с пленочными источниками тепла, позволяющий представить решение задачи в аналитической форме. Разработанный метод позволяет рассматривать оболочки, собранные из слоев с различными механическими и геометрическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bielski W.R. Controllability and stabilization in elasticity, heat conduction and thermoelasticity: review of recent developments // J. of Global Optimization.— 2000.— v. 17, № 4. — P. 353 — 386.
2. Barut A., Madenci E., Tessler A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution // Int. J. Solids and Structures.— 2000.— v. 37, № 27.— P. 3681–3713.

3. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. – Самара: Самар. ГТУ, 2006. – 304 с.
4. Jane K.C., Wu Y.H. A generalized thermoelasticity problem of multilayered conical shells // *Int. J. Solids and Structures*. – 2004. – v. 41, № 9–10. – P. 2205 – 2233.
5. Oguamanam D.C.D., Hansen J.S., Heppler G.R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2004. – v. 71, № 1. – P. 49 – 56.
6. Шупиков А.Н., Сметанкина Н.В., Свет Е.В. Термонапряженное состояние многослойных пластин неканонической формы // *Вісник ДНУ. Механіка* – 2011. – т. 2, вип. 15. – С. 264–274.
7. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Миськдрук, 2011. – 376 с.
8. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Термоупругое состояние ортотропных цилиндрических оболочек при локальном неравномерном нагреве // *Теорет. и прикл. механика*. – 2005. – № 40. – С. 135–139.
9. Рвачев В.Л., Тицкий В.П., Шевченко А.Н. К решению одной задачи термоупругости для тонких изотропных пластин сложной геометрии // *Матем. методы и физико-механич. поля*. – 1984. – Вып. 19. – С. 62–65.
10. Туровцев Г.В., Шадманов А.Т. Итерационный метод граничных интегральных уравнений для исследования изгиба температурного изгиба пластин // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов*. – Н. Новгород, 1991. – С. 35–39.
11. Shupikov A.N., Smetankina N.V., Svet Ye.V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. – 2007. – v. 129, № 3. – P. 335 – 341.

УДК 534.222

Численное моделирование детонации в газовых смесях

Ю. А. Скоб, М. Л. Угрюмов

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», г. Харьков, Украина*

Выполнено математическое моделирование нестационарного сгорания смеси химически реагирующих газов в детонационном режиме. Численное решение получено на основе явной конечно-разностной схемы Годунова. Верификация математической модели проведена путем сравнения результатов расчета с известными аналитическими решениями тестовых задач взрыва в постоянном объеме и детонационных условий Чепмена-Жуге в трубе. Получены распределения давления, температуры, концентраций реагирующего газа и продуктов сгорания вдоль расчетной области для метана и водорода. Детонационные величины параметров потока могут быть использованы для оценки воздействия эффектов детонационных взрывов на окружающую среду.

Ключевые слова: математические модели, вычислительные методы, химически реагирующие газы, ударная волна, детонация.

Виконано математичне моделювання нестационарного згорання суміші хімічно реагуючих газів в детонаційному режимі. Чисельне рішення отримано на основі явної кінцево-різницевої схеми Годунова. Верифікація математичної моделі проведена шляхом порівняння результатів розрахунку з відомими аналітичними рішеннями тестових задач вибуху в постійному об'ємі і детонаційних умов Чепмена-Жуге в трубі. Отримані розподіли тиску, температури, концентрацій реагуючого газу і продуктів згорання уздовж розрахункової області для метану і водню. Детонаційні величини параметрів потоку можуть бути використані для оцінки впливу ефектів детонаційних вибухів на навколишнє середовище.

Ключові слова: математичні моделі, обчислювальні методи, хімічно реагуючі газы, ударна хвиля, детонація.

Numerical modeling of unsteady combustion of reactive gases in the detonation regime is implemented. The solution is obtained on the basis of an explicit finite-difference scheme of Godunov. The verification of the mathematical model by comparing the calculation results with the known analytical solutions of test problems of explosions in constant volume and Chapman-Jouguet detonation conditions in the pipe is completed. The distributions of pressure, temperature, concentration of the reacting gas and combustion products along the computational domain for methane and hydrogen are obtained. The detonation values of the flow parameters can be used to assess the effects of detonation explosions on the environment.

Key words: mathematical models, numerical methods, chemically reactive gases, shock waves, detonation.

1. Постановка проблемы и её актуальность

Широкое использование в авиационной, химической, нефтегазодобывающей промышленности и энергетике углеводородных газообразных топлив связано с риском возникновения аварий, сопровождающихся выбросом в атмосферу химически активных газов, формированием взрывоопасных облаков. Воспламенение последних приводит к пожарам, разрушению инфраструктуры предприятий и человеческим жертвам. Часто после воспламенения волна горения, которая движется по непрореагировавшей газовой смеси, переходит из звукового режима распространения пламени (дефлаграция) в самоподдерживающийся сверхзвуковой режим (детонация). Газовая среда

продуктов сгорания с детонационными параметрами обладает большим разрушающим потенциалом, поэтому их численная оценка на основе математического моделирования движения химически реагирующих газов является чрезвычайно актуальной проблемой.

Слияние волн сжатия у фронта пламени генерирует ударную волну, которая поддерживает воспламенение при сжатии. Переход горения в детонацию реализуется на определенном расстоянии и зависит от ряда условий: начальной температуры и давления смеси, химической активности, концентрации примеси и геометрии области. Основными характеристиками детонационной волны являются средняя скорость распространения, детонационное давление и температура, ширина зоны реакции [1]. Детонационные режимы горения большинства реагирующих газов похожи, тогда как параметры детонации (скорость и давление) могут существенно отличаться, что позволяет использовать классические теории детонации Чепмена-Жуге (ЧЖ) и Зельдовича для анализа процесса детонации газов [2].

Известны результаты численных исследований процесса газовой детонации в одномерной [3, 4] и двумерной [5] постановках задачи. Обзор по теории и практике численного моделирования движения химически реагирующих газов вообще, и газофазной детонации в частности, представлен в работе [6, 7]. Процессам горения предварительно приготовленных газовых смесей в закрытом пространстве, инициированного температурными неоднородностями, взаимодействия сгенерированных волн давления, посвящены работы [8, 9]. Численному моделированию перехода горения в детонацию метано- и водородо-кислородных стехиометрических смесей посвящена работа [10]. Эффект затухания метано-воздушного пламени на основе модели, построенной на упрощенной схеме химической реакции, был исследован в работе [11]. Вопросам уменьшения негативных эффектов, вызванных распространением детонационной волны, при помощи водяной дисперсии уделено внимание в исследовании [12].

Из анализа литературных источников, посвященных вопросам газофазной детонации, видно, что общепринятым подходом при моделировании рассматриваемых физических процессов является применение компьютерного моделирования движения газов CFD (Computational Fluid Dynamics Methods) на основе решения системы нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа, осредненных по Рейнольдсу или Фавру, дополненных моделью турбулентности. Однако большинство моделей турбулентности не описывают с одинаковой степенью адекватности различные типы течений. Особенно это касается течений с интенсивными отрывами потока и/или большими градиентами давления и температуры, что характерно для процессов горения. С другой стороны, рассматриваемый класс задач требует больших вычислительных ресурсов, что не позволяет осуществлять численное моделирование реальных процессов с приемлемыми затратами машинных ресурсов. Поэтому существует необходимость построения новых математических моделей и эффективных вычислительных методов для решения задачи детонационного горения газо-воздушных смесей и использования

результатов моделирования для прогноза последствий взрывов на окружающую среду.

Целью данной работы является разработка математической модели, которая адекватно описывает нестационарные процессы движения смеси химически реагирующих газов в детонационной трубе и эффективного вычисленного метода для решения подобного класса задач. Численное моделирование выполнено для изучения характеристик пламени заранее приготовленных водородо-кислородной и метано-кислородной смесей в полуограниченной области.

2. Общая постановка задачи

Рассматриваются процессы горения стехиометрической смеси горючий газ-кислород в детонационной трубе (рис. 2.1). Известны параметры исходной смеси (температура $T_i=300$ К, давление $P_i=0,1$ МПа, стехиометрическая массовая концентрация горючей примеси Q_r), температура инициирования воспламенения смеси со стороны закрытого торца $T_i=1800$ К. Расчетной областью является одномерное пространство длиной 1 м в направлении OZ, которое разбивается на 1000 вычислительных ячеек.

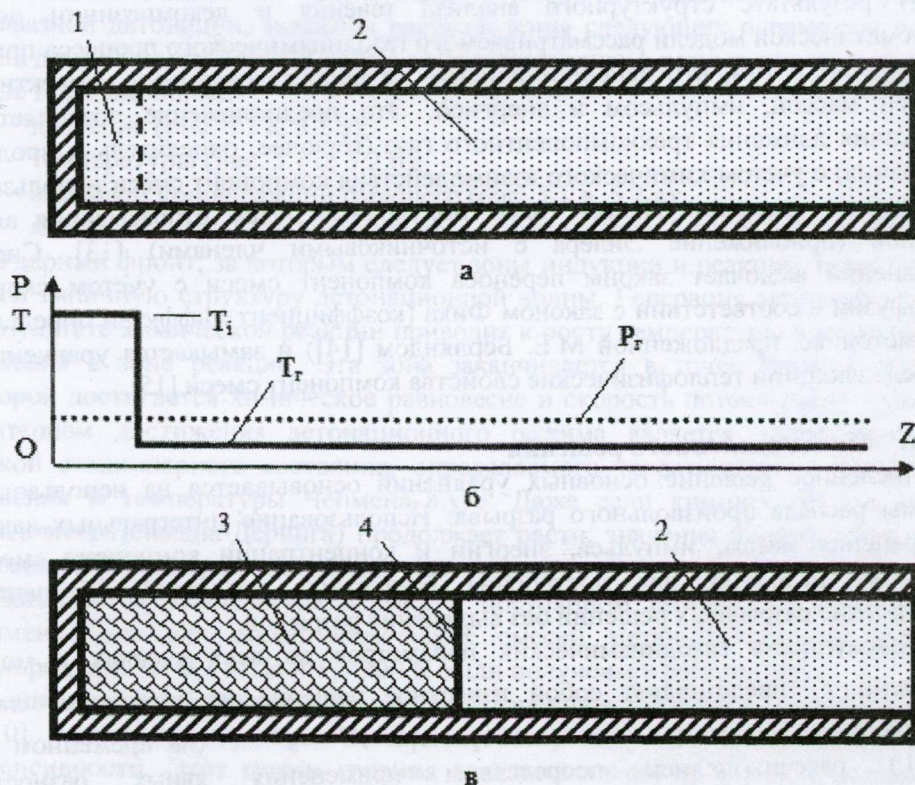


Рис.2.1. Расчетная схема горения в трубе (1 – высокотемпературная зона, 2 – горючая смесь, 3 – продукты сгорания, 4 – фронт пламени): а) состояние перед воспламенением; б) начальное распределение давления и температуры вдоль трубы; в) движение фронта пламени

Высокотемпературная зона создается энергетической «накачкой» ячейки у закрытого торца детонационной трубы до момента воспламенения газовой смеси (достижения температуры инициирования). Далее возникает нестационарный процесс горения при котором энергия, выделившаяся в области реагирующей смеси, генерирует в направлении фронта пламени волны давления с возрастающей амплитудой. Увеличивающийся градиент давления вблизи фронта пламени ускоряет сам фронт и приводит к установившемуся ударному воспламенению.

3. Математическая модель течения смеси газов

Основными признаками формирования детонации является генерирование волн сжатия, их слияние с трансформацией в ударную волну, переход от ламинарного пламени к турбулентному, появление поперечных волн и взаимодействие ударной волны с пограничным слоем [10]. Из этого следует, что полная модель должна быть пространственной. Но для моделирования сверхзвуковых реагирующих течений часто используются одномерные нестационарные модели, которые не рассматривают молекулярные явления, но воспроизводят основные эффекты модели Зельдовича и дают небольшое отклонение от идеальной скорости детонации Чепмена-Жуге [3].

В результате структурного анализа течения и декомпозиции полной математической модели рассматриваемого газодинамического процесса принято допущение о том, что основное влияние на процесс оказывает конвективный обмен массой, импульсом и энергией. Это предположение позволяет для описания движения трехкомпонентного газа (горючее, окислитель и продукты сгорания) с учетом химического взаимодействия компонент смеси использовать усеченные уравнения Навье-Стокса, полученные путем отбрасывания вязких членов (приближение Эйлера с источниковыми членами) [13]. Система уравнений включает законы переноса компонент смеси с учетом скорости диффузии в соответствии с законом Фика (коэффициент диффузии определяется по методике, предложенной М.Е. Берляндом [14]) и замыкается уравнениями, определяющими теплофизические свойства компонент смеси [15].

4. Метод численного решения

Численное решение основных уравнений основывается на использовании схемы распада произвольного разрыва. Использование интегральных законов сохранения массы, импульса, энергии и концентрации компонент смеси в качестве исходных для построения разностных уравнений обеспечивает построение разрывных решений без выделения разрывов.

Совокупность газодинамических параметров во всех ячейках в момент времени t^n представляет собой известное решение на временном слое с индексом n . Параметры в момент времени $t^{n+1} = t^n + \tau$ (на временном слое $n+1$) рассчитывались посредством применения явных разностных аппроксимаций законов сохранения в рамках метода С.К. Годунова [16]. На первом этапе непрерывное распределение параметров заменяется кусочно-постоянными средне-интегральными значениями в каждой расчетной ячейке.

При этом границы ячейки представляют собой неустойчивые поверхности произвольного разрыва, которые распадаются на устойчивые волновые элементы: ударную волну, контактную поверхность и волну разрежения. Для каждого такого разрыва определяются потоки массы, импульса, энергии, концентрации газообразной примеси через грани газовых ячеек. Предполагалось, что горение происходит в объеме расчетной области, занимаемом горючей смесью с концентрацией горючего в диапазоне между минимальным и максимальным концентрационными пределами воспламеняемости $Q_{\Gamma \min} \leq Q_{\Gamma} \leq Q_{\Gamma \max}$. Величины $Q_{\Gamma \min}$ и $Q_{\Gamma \max}$ задавались на основе обобщения экспериментальных данных [17]. Устойчивость конечно-разностной схемы обеспечивается выбором величины шага по времени τ .

На основе предложенных математической модели и вычислительного метода разработана компьютерная система FIRE[®] [18], которая позволяет прогнозировать поля концентрации примеси и других газодинамических параметров смеси во времени и пространстве.

5. Результаты численного моделирования процесса газофазной детонации в трубе

Выходными данными, полученными в результате моделирования процесса газофазной детонации, являются распределения следующих параметров потока вдоль детонационной трубы, которые фиксировались в разные моменты времени после воспламенения:

- давления (рис. 5.1 а, 5.2.а);
- температуры (рис. 5.1 б, 5.2.б);
- массовой концентрации горючего (рис. 5.1 в, 5.2.в);
- массовой концентрации продуктов сгорания (рис. 5.1 г, 5.2.г).

Ударный фронт, за которым следует зоны индукции и реакции, представляет собой типичную структуру детонационной волны. Генерация тепловой энергии в результате химической реакции приводит к росту температуры и уменьшению давления в зоне реакции. Эта зона заканчивается в точке Чепмена-Жуге, в которой достигается химическое равновесие и скорость потока равна звуковой. Критерием достижения детонационного режима является достижение этой точкой стационарного состояния, определяемого теоретическими значениями давления и температуры Чепмена-Жуге. Даже если химический пик (точка Зельдовича-Неймана-Деринга) продолжает расти, значения параметров в точке Чепмена-Жуге во время детонации постоянны.

Давление и температура взрыва в постоянном объеме и для состояния Чепмена-Жуге для стехиометрических смесей метан-кислород и водород-кислород при $P_1=0,1$ МПа и $T_1=300$ К были получены в работе [10]. Механизм временной эволюции перехода горения в детонацию подробно описан в [10]. Пламя движется через несгоревший газ, генерируя волны сжатия низкой интенсивности. Этот режим горения локально похож на взрыв в постоянном объеме. Однако существует локальная скорость потока, обусловленная конвективным переносом, зависящим от градиента давления. С течением времени давление за фронтом пламени возрастает, что приводит к ускорению

потока в зоне реакции, сокращению длины зоны индукции и увеличению скорости распространения фронта пламени. Начинает формироваться пик давления, а волны сжатия объединяются, образуя ударный фронт. После того как волна горения догоняет ударную волну, происходит переход к детонации и обе волны движутся совместно. В момент возникновения детонационной волны формируется вторая волна (ретонационная), движущаяся в обратном направлении, сжигающая остаток топлива за ударным фронтом.

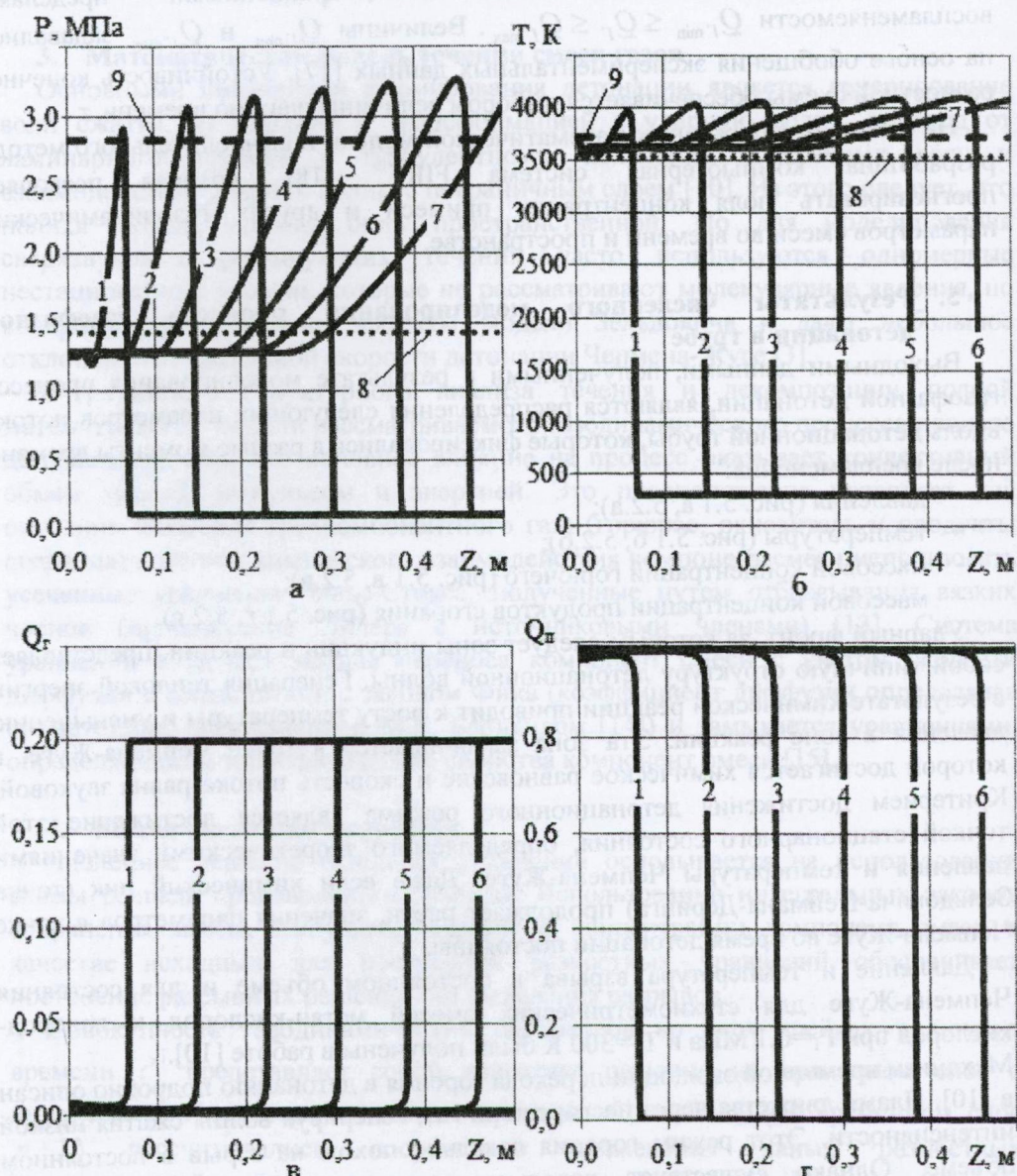


Рис. 5.1. Динамика изменения давления (а), температуры (б), концентраций метана (в) и продуктов сгорания (г) в детонационной трубе: 1-7 – моменты времени 30, 60, 90, 120,

150, 180 и 210 мкс; 8 – параметры взрыва при постоянном объеме, 9 – детонационные параметры Чепмена-Жуге

Расчетные параметры горения в состоянии Чепмена-Жуге и в постоянном объеме изображены горизонтальными линиями (рис. 5.1, 5.2). В начальной стадии область воспламенения характеризуется изобарическим поведением и более низким градиентом температуры, что позволяет представлять область горения на этой стадии как взрыв в постоянном объеме. В окрестности детонационной волны параметры потока близки к параметрам в точке Чепмена-Жуге.

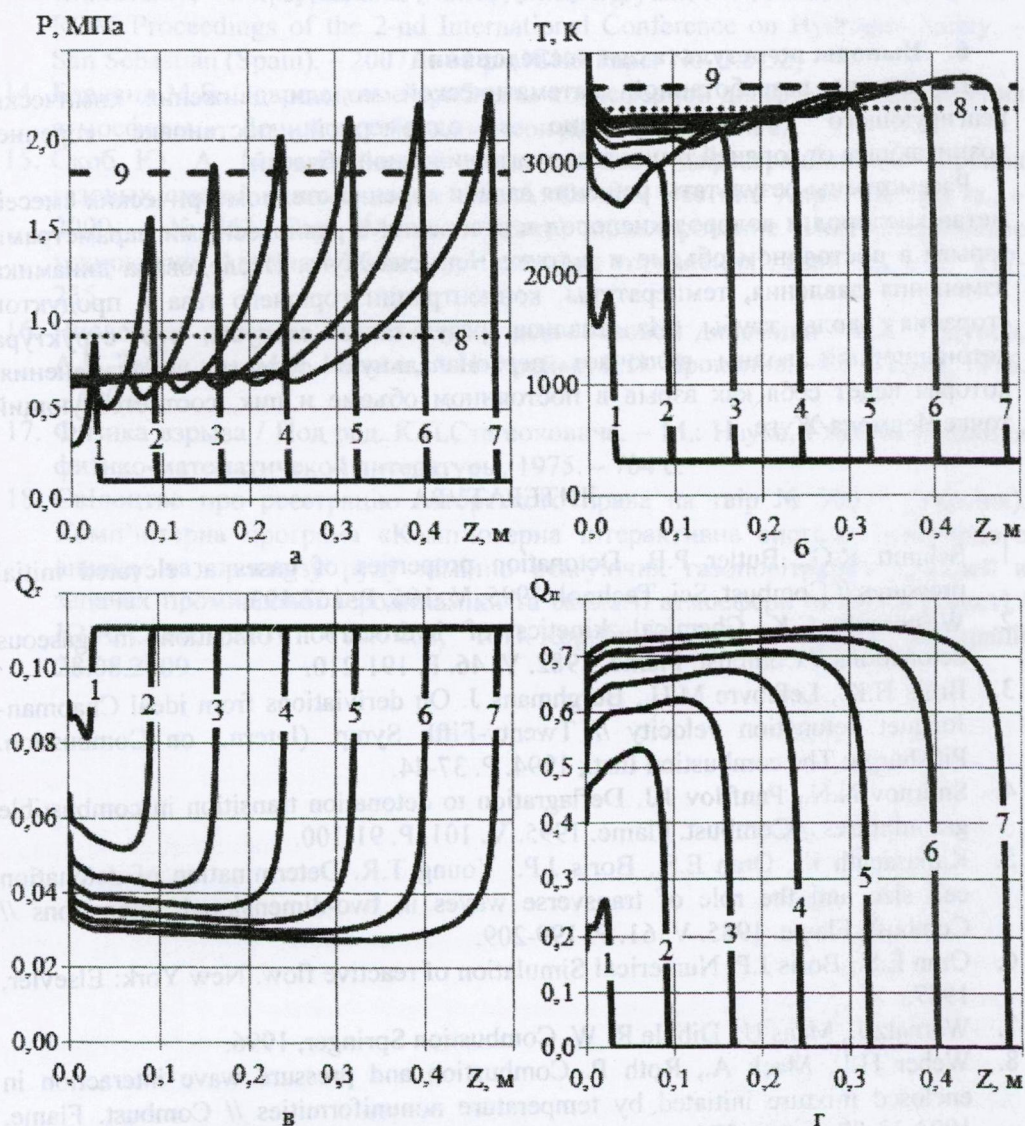


Рис.5.2. Динамика изменения давления (а), температуры (б), концентрации водорода (в) и продуктов сгорания (г) в детонационной трубе: 1-7 – моменты времени 30, 60, 90,

120, 150, 180 и 210 мкс, соответственно; 8 – параметры взрыва при постоянном объеме, 9 – детонационные параметры Чепмена-Жуге

Так как в данной работе используется модель химической реакции «брутто», то химическую структуру пламени можно проследить по изменению распределения вдоль канала массовой концентрации горючего газа и продуктов сгорания (рис. 5.1, в, г и рис. 5.2, в, г). Известно, что при горении большую роль играет химическая структура пламени, обеспечивающая его устойчивое развитие, поскольку химическая кинетика сильно зависит от состава и температуры [11]. Однако при детонации более важным является генерируемый тепловой поток, сохраняющий сверхзвуковые условия [12].

6. Выводы по результатам исследований

На основе разработанной математической модели движения химически реагирующего газа исследовано в одномерной постановке горение, возникающее от горячей точки в полугораниченной области.

Рассмотрены результаты решения задачи горения стехиометрических смесей метан-кислород и водород-кислород в сравнении с равновесными параметрами взрыва в постоянном объеме и в точке Чепмена-Жуге. Исследована динамика изменения давления, температуры, концентрации горючего газа и продуктов сгорания вдоль трубы. Из анализа результатов следует, что структура детонационной волны включает первоначальную область воспламенения, которая ведет себя как взрыв в постоянном объеме и пик, соответствующий точке Чепмена-Жуге.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmitt R.G., Butler P.B. Detonation properties of gases at elevated initial pressures // Combust. Sci. Technol. 1995. V. 106. P. 167-193.
2. Westbrook C.K. Chemical kinetics of hydrocarbon oxidation in gaseous detonations // Combust. Flame. 1982. V. 46. P. 191-210.
3. Bruls H.K., Lefebvre M.H., Berghmans J. On deriviations from ideal Chapman-Jouguet detonation velocity // Twenty-Fifth Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh: The combustion Inst., 1994. P. 37-44.
4. Smirnov N.N., Panfilov J.J. Deflagration to detonation transition in combustible gas mixtures // Combust. Flame. 1995. V. 101. P. 91-100.
5. Kailasanath K., Oran E.S., Boris J.P., Young T.R. Determination of detonation cell size and the role of transverse waves in two-dimensional detonations // Combust. Flame. 1985. V. 61. P. 199-209.
6. Oran E.S., Boris J.P. Numerical Simulation of reactive flow. New York: Elsevier, 1987.
7. Warnatz J., Maas U., Dibble R. W. Combustion Springer, 1996.
8. Weber H.J., Mack A., Roth P. Combustion and pressure wave interaction in enclosed mixture initiated by temperature nonuniformities // Combust. Flame. 1994. V. 97. P. 281-295.

9. Bielert U., Sichel M. Numerical simulation of premixed combustion processes in closed tubes // *Combust. Flame*. 1998. V. 114. P.397.
10. Численное моделирование перехода горения в детонацию / М.Т. Пайра-Сантос, Ф. Кастро-Руис, Ц. Мендес-Буено // *Физика горения и взрыва*, 2005, т. 41, №2, с. 108-115.
11. Bechtold J.K., Law C.K. Extinction of premixed methane-air flames with reduced reaction mechanism // *Combust. Sci. Technol.* 1990. V. 71. P. 233-245.
12. Thomas G.O., Edwards M.J., Edwards D.H. Studies of detonation quenching by water sprays // *Combust. Sci. Technol.* 1990. V. 71. P.233-245.
13. Computational Modeling of Pressure Effects from Hydrogen Explosions / E.A. Granovskiy, V.A. Lyfar, Yu.A. Skob, M.L. Ugryumov // *Abstracts Book и CD-ROM Proceedings of the 2-nd International Conference on Hydrogen Safety*. – San Sebastian (Spain). – 2007. – 15 p. (ICHS Paper No. 1.3.52)
14. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1975. – 448 с.
15. Скоб Ю. А. Математическое моделирование дефлаграционного горения газовых смесей в помещении / Ю. А. Скоб // *Вестник Харк. нац. ун-та.*, – 2009. – № 863. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 12. – С. 217-235.
16. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
17. Физика взрыва / Под ред. К.П.Станюковича. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 704 с.
18. Свідोцтво про реєстрацію авторського права на твір № 30079 (Україна). Комп'ютерна програма «Комп'ютерна інтерактивна система інженерного аналізу та прогнозу руху хімічно реагуючих газоповітряних сумішей в задачах промислової аеродинаміки та екології атмосфери «FIRE»» [Текст] / Ю.А. Скоб, М.Л. Угрюмов, К.П. Коробчинський. – Дата реєстрації 28.08.2009.

УДК 519.23:004.93'1:004.942

Планирование экспериментов при исследовании решающих правил распознавания сигналов методом моделирования

А. В. Фёдоров, А. В. Омельченко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

Рассмотрена задача построения рабочих характеристик решающих правил распознавания сигналов методом статистического моделирования с использованием полиномиальной регрессии. Обоснованы планы экспериментов, оптимальные по критерию минимума суммы квадратов отклонений оценки функции регрессии от ее истинных значений на множестве планирования (Q-оптимальные). Эффективность разработанных методов проиллюстрирована на примерах.

Ключевые слова: полиномиальная регрессия, регрессионный эксперимент, план эксперимента, решающие правила распознавания сигналов.

Розглянута задача побудови робочих характеристик вирішувальних правил розпізнавання сигналів методом статистичного моделювання з використанням поліноміальної регресії. Обґрунтовано плани експериментів, що є оптимальними за критерієм мінімуму суми квадратів відхилень оцінки функції регресії від її справжніх значень на множині планування (Q-оптимальні). Ефективність методів, що були розроблені, проілюстрована на прикладах.

Ключові слова: поліноміальна регресія, регресійний експеримент, план експерименту, вирішувальні правила розпізнавання сигналів.

The problem of getting working performances of signals recognition decision rules by statistical modeling with the aid of polynomial regression has been considered. Designs optimal with respect to the criterion of minimum of the total of squared deviations of a regression function estimate from its true values on a design region (Q-optimal) have been substantiated. The effectiveness of the developed methods has been illustrated by examples.

Key words: polynomial regression, regression experiment, design for experiment, signals recognition decision rules.

1. Введение

При исследовании решающих правил распознавания сигналов основное внимание уделяется таким их характеристикам как зависимость вероятности ошибки распознавания от: 1) объема выборки; 2) соотношения сигнал/шум; 3) числа распознаваемых сигналов и т.д. Как показывает практика, решение прикладных задач, связанных с получением этих характеристик методом моделирования, требует существенных вычислительных затрат. Это обуславливает актуальность задачи планирования модельного эксперимента, заключающейся в выборе условий эксперимента таким образом, чтобы по результатам его статистической обработки можно было сделать наиболее точные выводы об исследуемом явлении [1-4].

История развития математической теории оптимального регрессионного эксперимента насчитывает более 50 лет. Основное внимание исследователей было сосредоточено на ставшей ныне классической теории D-оптимального планирования [1-4], при котором минимизируется объем области ограниченной эллипсоидом рассеяния оценок параметров полиномиальной регрессии,

найденных по методу наименьших квадратов. Столь значительный интерес к D-оптимальным планам обусловлен, во-первых, относительной простотой D-критерия, что дает возможность использовать такие планы на различных, часто встречающихся на практике, множествах планирования [3], а, во-вторых, теоремами эквивалентности [1, 2, 4], согласно которым задачи построения планов, оптимальных по ряду других, имеющих ясный физический смысл, критериев сводятся к задачам D-оптимального планирования. Однако, если исследователя прежде всего интересует повышение точности оценивания функции регрессии на всем множестве планирования, то целесообразно использовать так называемые Q-оптимальные планы, общих методов синтеза которых, пока предложено не было, ввиду сложности данного критерия [1, 2, 4].

Целями настоящей работы являются: 1) построение Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов; 2) повышение точности оценивания характеристик решающих правил распознавания на основе Q-оптимального планирования полиномиальных регрессионных экспериментов.

2. Постановка задачи

Пусть имеется решающее правило распознавания сигналов, принимающее решение в пользу одного из M сигналов

$$i = R(\bar{x}, \bar{y}', \bar{y}), \quad i \in \{1, \dots, M\}, \quad (2.1)$$

где $\bar{x}$ – вектор отсчетов сигнала, $\bar{y}$ – вектор истинных значений параметров распределений распознаваемых сигналов; $\bar{y}'$ – значение вектора $\bar{y}$, используемое в решающем правиле (2.1).

Истинные значения $\bar{y}$ не известны, однако заданы классифицированные обучающие выборки сигналов. Для упрощения будем полагать, что объемы обучающих выборок всех сигналов одинаковы и равны v . На основе (2.1) построено адаптивное решающее правило

$$i = R(\bar{x}, \hat{\bar{y}}, \bar{y}), \quad i \in \{1, \dots, M\}, \quad (2.2)$$

где $\hat{\bar{y}}$ – оценка вектора параметров $\bar{y}$, найденная по обучающей выборке.

Необходимо:

1. Показать, что зависимость вероятности ошибки распознавания сигналов правилом (2.2) от объема обучающей выборки v допускает аппроксимацию полиномами малых степеней от переменной v^{-1} .

2. Синтезировать и исследовать свойства Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов на множествах планирования со структурой определяемой особенностями решаемой задачи, в частности задачей построения рабочих характеристик решающих правил вида (2.2).

3. Критерии оптимальности полиномиальных регрессионных экспериментов

Введем обозначения. Пусть $\mathbf{X} = \{x_j \mid x_j \in R, j = \overline{0, J}\}$ множество планирования. Рассмотрим схему проведения регрессионного эксперимента, согласно которой измерения выполняются в возможно совпадающих точках $x_0, \dots, x_N \in \mathbf{X}$, а

результаты измерений $\bar{y} = [y(x_0), \dots, y(x_N)]^T$ представляются в виде [1-3, 5-7]:

$$\bar{y} = \bar{\rho} + \bar{\eta}, \quad \bar{\rho} = \mathbf{F} \bar{\theta}, \quad (3.1)$$

где $\bar{\theta} = [\theta_0, \dots, \theta_h]^T$ - неизвестные параметры регрессии, h - порядок модели; $\bar{\eta} = [\eta(x_0), \dots, \eta(x_N)]^T$ - вектор шумов наблюдений, с нулевыми средними $M[\bar{\eta}] = \bar{0}$ и ковариационной матрицей $M[\bar{\eta} \bar{\eta}^T] = \mathbf{W}^{-1}$, $M[\cdot]$ - символ математического ожидания, $\mathbf{W} = \text{diag}(w(x_0), \dots, w(x_N))$ - диагональная матрица весов измерений [1, 6]; $\mathbf{F} = [\bar{f}^T(x_0), \dots, \bar{f}^T(x_N)]^T$, $\bar{f}(x) = [f_0(x), \dots, f_h(x)]^T$ - система базисных функций определенных на $\mathbf{X}$. Матрицу $\mathbf{F}$ называют матрицей плана.

Оценки неизвестных параметров регрессии $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_h]^T$ находят из условия $\bar{\eta}^T \mathbf{W} \bar{\eta} \rightarrow \min$ [1]:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \bar{y}. \quad (3.2)$$

Поскольку, среди точек $x_0, \dots, x_N \in \mathbf{X}$ могут быть совпадающие, то, фактически, измерения в эксперименте выполняются $r_i \geq 1$ раз в каждой из точек множества $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^n \subset \mathbf{X}$, $\sum_{i=0}^n r_i = N+1$, $h \leq n \leq N$. Планом эксперимента [1-4] называется набор

$$\xi = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \\ p_0, \dots, p_n \end{matrix} \right\}, \quad (3.3)$$

где $p_i = r_i / (N+1)$ - частоты проведения наблюдений в точках ε_i , $i = \overline{0, n}$ плана (3.3). Совокупность точек $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^n$ называют *спектром* плана. Если $n = \text{const}$, а число точек N неограниченно, то план (3.3) называют *непрерывным*, при этом частоты p_i интерпретируют как вероятности точек ε_i плана ξ .

Можно показать, что оценки (3.2) являются несмещенными ($M[\hat{\theta}] = \bar{\theta}$) с ковариационной матрицей

$$\mathbf{C}(\xi) = M[(\hat{\theta} - \bar{\theta})(\hat{\theta} - \bar{\theta})^T] = (\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{N+1} \mathbf{M}^{-1}(\xi), \quad (3.4)$$

где $\mathbf{M}(\xi) = \sum_{i=0}^n \bar{f}(\varepsilon_i) \bar{f}^T(\varepsilon_i) w(\varepsilon_i) p_i$ - информационная матрица [1-4]. При этом суммарная дисперсия погрешности [5] оценивания функции регрессии $\rho(x) = \bar{\theta}^T \bar{f}(x)$ по всем точкам $x_j \in \mathbf{X}$, $j = \overline{0, J}$ множества $\mathbf{X}$ равна

$$Q(\xi) = \sum_{j=0}^J M[\hat{\rho}(x_j) - \rho(x_j)]^2 = \frac{J+1}{N+1} d(\xi); \quad d(\xi) = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J \bar{f}^T(x_j) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \bar{f}(x_j), \quad (3.5)$$

где $\hat{\rho}(x) = \hat{\theta}^T \bar{f}(x)$ - выборочная функция регрессии.

Известно довольно много критериев оптимальности планов. Дадим определение D и Q-оптимальным планам [1-4].

План

$$\xi^* = \arg \min_{\xi} \det \mathbf{M}^{-1}(\xi) \quad (3.6)$$

называется D-оптимальным. Часто в критерии D-оптимальности вместо $\det \mathbf{M}^{-1}(\xi)$ используется $-\ln \det \mathbf{M}(\xi)$.

План

$$\xi^* = \arg \min_{\xi} d(\xi) \quad (3.7)$$

называется Q-оптимальным. Величина $d(\xi)$ определяется выражением (3.5). Кроме того, планом, оптимальным для экстраполяции в точку x' , называется план

$$\xi^* = \arg \min_{\xi} M[\hat{\rho}(\xi, x') - \rho(\xi, x')]^2, \quad \rho(\xi, x') \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x'). \quad (3.8)$$

D-оптимальное планирование минимизирует максимальную по $x \in \mathbf{X}$ дисперсию выборочной функции регрессии. Однако, если требуется обеспечить общую точность аппроксимации зависимости на всем множестве планирования, то целесообразно использовать Q-оптимальные планы.

Заметим, что при практических вычислениях в качестве базисных функций $f_0(x), \dots, f_h(x)$ обычно используют систему функций Чебышева [5-7] $\psi_0(x), \dots, \psi_h(x)$ ортогональных на множестве точек $x_0, \dots, x_N \in \mathbf{X}$ с весами $w(x_i)$, $i = \overline{0, N}$. В этом случае выражения (3.4) и (3.5) для $\mathbf{M}(\xi)$ и $Q(\xi)$ принимают, соответственно, вид

$$\mathbf{M}(\xi) = \|m_{i,j}\|_{i,j=0}^h, \quad m_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \psi_i^2(\varepsilon_k) w(\varepsilon_k) p_k, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$Q(\xi) = \frac{J+1}{N+1} d(\xi); \quad d(\xi) = \sum_{i=0}^h \frac{\frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J \psi_i^2(x_j)}{\sum_{k=0}^n \psi_i^2(\varepsilon_k) w(\varepsilon_k) p_k}. \quad (3.10)$$

4. Зависимость вероятности ошибки распознавания сигналов от объема обучающей выборки

Найдем зависимость вероятности ошибки распознавания сигналов от объема обучающей выборки ν . Предположим, что известна зависимость средней вероятности ошибки распознавания сигналов решающим правилом (2.1) $P(\hat{\gamma})$, тогда средняя вероятность ошибки распознавания сигналов решающим правилом (2.2) равна

$$\bar{P}(\nu) = M[P(\hat{\gamma})]. \quad (4.1)$$

Сформулируем и докажем теорему, определяющую класс функций для аппроксимации зависимости вероятности ошибки от объема обучающей выборки [17]. Воспользуемся понятием мультииндекса [8]. Обозначим через $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ вектор с неотрицательными целыми координатами, тогда $\beta_{\vec{\alpha}} = \beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$, $\vec{x}^{\vec{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ и положим $|\vec{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $(\vec{\alpha})! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$.

Производную порядка $|\vec{\alpha}|$ от функции $f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ обозначим

$$P_{\vec{\alpha}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|} f}{\partial x_m^{\alpha_m} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}(\vec{x}_0).$$

Теорема 1. Пусть функция $P(\hat{\gamma})$ представима рядом Тейлора в окрестности точки $\vec{\gamma}$ и $P = P(\vec{\gamma})$, а оценка $\hat{\gamma}$ является несмещенной, эффективной и нормально распределенной. Тогда средняя вероятность ошибки распознавания сигналов решающим правилом (2.2) представима рядом

$$\bar{P}(\nu) = P + \sum_{|\vec{\delta}|=1}^{\infty} \beta_{2\vec{\delta}} \cdot \nu^{-|\vec{\delta}|}, \quad (4.2)$$

$$\text{где } \beta_{2\vec{\delta}} = \frac{P_{2\vec{\delta}}(\vec{\gamma})}{(2\vec{\delta})!} \frac{(2\delta_1-1)(2\delta_1-3)\dots 1 \dots (2\delta_m-1)(2\delta_m-3)\dots 1}{I^{\delta_1}(\gamma_1) \dots I^{\delta_m}(\gamma_m)}.$$

Доказательство. В работе [9] дано доказательство сформулированного утверждения для одномерного случая, т.е., когда размерность вектора $\vec{\gamma}$ равна 1. Покажем, что утверждение теоремы справедливо и для многомерного случая.

Пусть вектор $\hat{\gamma}$ имеет некоррелированные координаты, если это не так, то выполним декоррелирующее преобразование. Разложим функцию $P(\hat{\gamma})$ в ряд Тейлора [8] в окрестности точки $\vec{\gamma}$:

$$P(\hat{\gamma}) = P + \sum_{|\vec{\alpha}|=1}^{\infty} \frac{P_{\vec{\alpha}}(\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha})!} (\hat{\gamma} - \vec{\gamma})^{\vec{\alpha}}.$$

Тогда с учетом некоррелированности координат вектора $\hat{\gamma}$ выражение (4.1) примет вид:

$$\bar{P}(\nu) = P + \sum_{|\vec{\alpha}|=1}^{\infty} \frac{P_{\vec{\alpha}}(\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha})!} M[\hat{\gamma}_1 - \gamma_1]^{\alpha_1} \dots M[\hat{\gamma}_m - \gamma_m]^{\alpha_m}. \quad (4.3)$$

Для гауссовских случайных величин центральные моменты высших порядков выражаются через центральный момент второго порядка [10]:

$$M[\hat{\gamma}_i - \gamma_i]^{\alpha_i} = \begin{cases} (\alpha_i - 1)(\alpha_i - 3) \dots 1 \cdot \sqrt{D_i}^{\alpha_i}, & \text{если } \alpha_i \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } \alpha_i \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (4.4)$$

где $D_i = M[\hat{\gamma}_i - \gamma_i]^2$.

Поскольку оценки координат вектора параметров эффективны, то [10]

$$D_i \geq [\nu \cdot I(\gamma_i)]^{-1}, \quad (4.5)$$

где $I(\cdot)$ - информация Фишера.

Подставив соотношения (4.4) и (4.5) в (4.3) и выполнив замену $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\delta}|$ получим (4.2). ■

При анализе решающих правил часто бывает затруднительно найти аналитическое выражение для коэффициентов $\beta_{2\vec{\delta}}$. В этих случаях их значения

могут быть найдены численно с использованием вместо производных конечных разностей соответствующего порядка.

Обоснованная теоретически зависимость вероятности ошибки распознавания сигналов от объема обучающей выборки вида (4.2) может быть положена в основу метода построения рабочих характеристик решающих правил распознавания сигналов с использованием результатов статистического моделирования. В работе [9] содержится обширный иллюстративный материал, показывающий, что в подавляющем большинстве случаев зависимости такого рода хорошо аппроксимируются полиномами малых степеней от v^{-1} .

На рис. 4.1 точками показана аппроксимация полиномом третьей степени зависимости $P(v)$ вероятности ошибки распознавания двух гауссовых векторов с различными математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями от объема обучающей выборки v при объеме контрольной выборки равном 20 [13, 17]. Соотношение для расчета указанной зависимости $P(v)$ взято из [11].

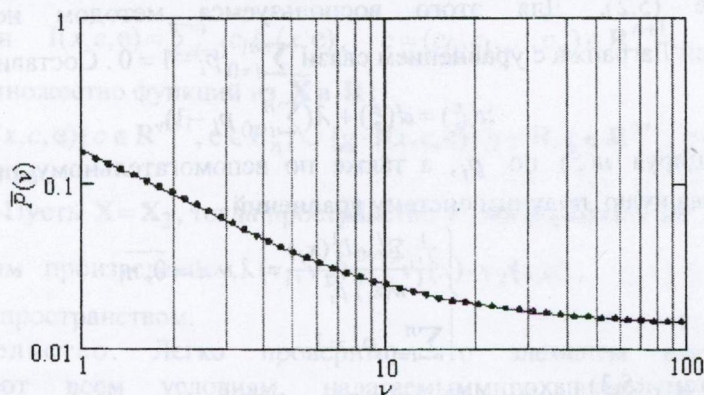


Рис. 4.1. Аппроксимация зависимости $\bar{P}(v)$ вероятности ошибки распознавания двух гауссовых векторов от объема обучающей выборки v полиномом третьей степени относительно переменной v^{-1}

5. Синтез Q-оптимальных планов

Следующая теорема [15-18] дает общее решение задачи непрерывного Q-оптимального планирования полиномиального регрессионного эксперимента произвольного порядка, проводимого согласно (3.1).

Теорема 2. Пусть измерения в эксперименте проводятся согласно (3.1), тогда непрерывный Q-оптимальный план полиномиального регрессионного эксперимента произвольного порядка $n > 0$ имеет вид (3.3), где $n = h$,

$$p_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i)}} \left[\sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_k^2(x_j)}{w(\varepsilon_k)}} \right]^{-1}, \text{ а точки } \varepsilon_i \in X, i = \overline{0, n} \text{ находятся из}$$

$$\text{условия } \min_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n} \frac{1}{J+1} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i)}} \right]^2. \quad L_i(x) = \frac{(x-\varepsilon_0) \cdots (x-\varepsilon_{i-1})(x-\varepsilon_{i+1}) \cdots (x-\varepsilon_n)}{(\varepsilon_i-\varepsilon_0) \cdots (\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1})(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}) \cdots (\varepsilon_i-\varepsilon_n)}$$

интерполяционные коэффициенты Лагранжа.

Доказательство. Будем считать, что $n = h$, т.к. при $n < h$ план (3.3) вырожденный [1]. Используя подход Ноел'а [12] представим исходную и выборочную функции регрессии интерполяционной формулой Лагранжа. С учетом (3.3) имеем

$$\rho(x) = \bar{y}^T \bar{l}(x), \quad (5.1)$$

где $\bar{y} = [y(\varepsilon_0), \dots, y(\varepsilon_n)]^T$, $\bar{l}(x) = [L_0(x), \dots, L_n(x)]^T$.

Подставляя теперь (5.1) в (3.5) и учитывая, что $\bar{l}(x) = \bar{f}(x)$, а также $\mathbf{M}(\xi) = \sum_{i=0}^n \bar{l}(\varepsilon_i) \bar{l}^T(\varepsilon_i) w(\varepsilon_i) p_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{W}$, получим

$$Q(\xi) = \frac{J+1}{N+1} d(\xi); \quad d(\xi) = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J \bar{l}^T(x_j) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \bar{l}(x_j), \quad (5.2)$$

где $\mathbf{P} = \text{diag}(p_0, \dots, p_n)$ - диагональная матрица вероятностей точек плана.

Определим теперь значения p_i , $i = \overline{0, n}$ матрицы $\mathbf{P}$, минимизирующие выражение (5.2). Для этого воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа с уравнением связи $\sum_{i=0}^n p_i - 1 = 0$. Составим функционал

$$u(\xi) = d(\xi) + \lambda (\sum_{i=0}^n p_i - 1).$$

Дифференцируя $u(\xi)$ по p_i , а также по вспомогательному параметру λ и приравнявая нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i) p_i^2} = \lambda, & i = \overline{0, n}, \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Решая систему (5.3) находим:

$$p_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i)}} \left[\sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_k^2(x_j)}{w(\varepsilon_k)}} \right]^{-1}. \quad (5.4)$$

Определим характер найденного условного экстремума. Легко видеть, что, поскольку $p_i > 0$, то

$$d^2 u(\xi) = \frac{2}{J+1} \sum_{i=0}^n \frac{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i) p_i^3} dp_i^2 > 0.$$

Таким образом, найденные значения p_i , $i = \overline{0, n}$ соответствуют точке локального минимума, которая так же является точкой глобального минимума.

Подставляя теперь (5.4) в (5.2) получим

$$Q(\xi) = \frac{J+1}{N+1} d(\xi); \quad d(\xi) = \frac{1}{J+1} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}{w(\varepsilon_i)}} \right]^2. \quad (5.5)$$

Очевидно, что точки плана $\varepsilon_i \in \mathbf{X}$, $i = \overline{0, n}$ должны выбираться из условия $\min_{\varepsilon_i} d(\xi)$, где $d(\xi)$ определяется выражением (5.5). ■

Принимая во внимание результаты теоремы 1, в дальнейшем мы будем рассматривать Q и D -оптимальные планы на множествах $X_1 = \{x_j \mid x_0 = a < b, x_j = x_{j-1} + \Delta, j = \overline{1, J}, \Delta = \frac{b-a}{J}\}$; $X_2 = [a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$ и $X_3 = \{(j+m+1)^{-1} \mid j = \overline{0, J}\}$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < J$.

Заметим, что при $X = X_2$ функционал $d(\xi)$, получаемый из (5.5) путем предельного перехода $J \rightarrow \infty$, имеет вид

$$d(\xi) = \frac{1}{b-a} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{\int_a^b L_i^2(x) dx}{w(\varepsilon_i)}} \right]^2. \quad (5.6)$$

Исследуем свойства функционалов (5.5-5.6). Введем обозначения: $\tilde{X} = [\min X, \max X]$; $E_n = \{e = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \tilde{X}^{n+1} \mid (\forall i > j)(\varepsilon_i > \varepsilon_j)\}$; $L_i(x, e) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(x)$, $x \in \tilde{X}$, $e \in E_n$, $i = \overline{0, n}$. Зададим функции из множества $\tilde{X} \times \mathbf{R}^{n+1} \times E_n$ в $\mathbf{R}$: $I(x, c, e) \equiv 1$ и $I(x, c, e) = \sum_{i=0}^n c_i L_i(x, e)$, $c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Рассмотрим следующее множество функций из $\tilde{X}$ в $\mathbf{R}$:

$$V = \{I(x, c, e) \mid c \in \mathbf{R}^{n+1}, e \in E_n\} \cup \{g \cdot I(x, c, e) \mid g \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}^{n+1}, e \in E_n\}.$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $X = X_2$, тогда пространство V непрерывных на X_2 функций со скалярным произведением $(v_1, v_2) = \int_a^b v_1(x) \cdot v_2(x) dx$, $v_1, v_2 \in V$ является евклидовым пространством.

Доказательство. Легко проверить, что элементы множества V удовлетворяют всем условиям, налагаемым на элементы линейного пространства. Таким образом, множество V является линейным пространством с фиксированным в нем скалярным произведением, т.е. является евклидовым пространством. ■

Теорема 3. Пусть $X = X_2$, тогда функционал

$$d(e) = \frac{1}{b-a} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{\int_a^b L_i^2(x, e) dx}{w(\varepsilon_i)}} \right]^2$$

выпуклый на множестве функций V .

Доказательство. Поскольку $(\forall e \in E_n \wedge i = \overline{0, n})(L_i(x, e) \in V)$, то в силу леммы 1 верно следующее $\|L_i(x, e)\| = \|I(x, c^{(i)}, e)\| = \left(\int_a^b L_i^2(x, e) dx \right)^{1/2}$, где $c^{(i)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ - вектор длины $n+1$ содержащий 1 в i -й позиции. Учитывая тот факт, что норма $\|\cdot\|$ является выпуклым на V функционалом и, в силу особенностей построения множества V , зависит от двух параметров $c \in \mathbf{R}^{n+1}$ и $e \in E_n$, т.е. $(\forall v \in V)(\|v\| = f(c, e))$, то $\|L_i(x, e)\|$, $i = \overline{0, n}$ также является выпуклым на V функционалом, т.к. представляет собой сечение

функции $f(c, e)$ в точке $c^{(i)}$. В свою очередь, функционал $\sum_{i=0}^n \left(\frac{\int_a^b I_i^2(x, e) dx}{w(\varepsilon_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ выпуклый на V как сумма неотрицательных выпуклых функционалов. Последующая операция возведения в квадрат в данном случае выпуклости не меняет. ■

Проанализируем теперь случай, когда X - конечное дискретное упорядоченное множество, т.е. $X = \aleph = \{x_j \in \mathbf{R} \mid j = \overline{0, J} \wedge (\forall j \geq 1)(x_j > x_{j-1})\}$.

Образует множество векторов значений функций пространства V , вычисленных в точках множества $\aleph$: $V_J = \{(v(x_0), \dots, v(x_J)) \mid v \in V\}$. Справедлива

Лемма 2. Пространство V_J со скалярным произведением $(v_1, v_2) = \sum_{j=0}^J v_1(x_j) v_2(x_j)$, $v_1, v_2 \in V_J$ является евклидовым.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. ■

Теорема 4. Пусть $X = \aleph$, тогда функционал

$$d(e) = \frac{1}{J+1} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^J I_i^2(x_j, e)}{w(\varepsilon_i)}} \right]^2$$

выпуклый на множестве векторов V_J .

Доказательство. Опирается на лемму 2 и проводится по схеме аналогичной доказательству теоремы 3. ■

Как следует из теорем 3 и 4 задачу Q-оптимального планирования можно решать в рамках двух подходов. Первый из них - поиск минимума $d(\xi)$ в пространствах V и V_J , т.е. решение задачи выпуклого программирования. Второй подход - непосредственная минимизация $d(\xi)$ по набору аргументов $\{\varepsilon_i \in X\}_{i=0}^n$. В обоих случаях серьезной трудностью является большая размерность экстремальной задачи. Мы будем использовать второй подход.

6. Непрерывные Q-оптимальные планы и их свойства

Опираясь на теорему 2 сформулируем и докажем некоторые утверждения о равнооточных ($w(\varepsilon_i) = \sigma^{-2}$, $i = \overline{0, n}$, $\sigma = \text{const}$) непрерывных Q-оптимальных планах полиномиальных регрессионных экспериментов на множествах $X_{1,2,3}$ [15-18].

Обозначим через Ξ_i суммы вида $\sum_{j=0}^J (j+1)^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$

Теорема 5. Пусть измерения в эксперименте проводятся согласно (3.1), тогда непрерывный Q-оптимальный план равнооточного линейного регрессионного эксперимента имеет вид (3.3), где $n = 1$, $\varepsilon_0 = \min X$, $\varepsilon_1 = \max X$. Если $X = X_{1,2}$,

то $p_{0,1} = \frac{1}{2}$, если $X = X_3$, $m = 0$, то $p_0 = \left[1 + \sqrt{\frac{1}{J+1} \left[1 + \frac{J(\Xi_2 - 1)}{\Xi_2 - 2\Xi_1 + J + 1} \right]} \right]^{-1}$,

$p_1 = 1 - p_0 = \left[1 + \sqrt{(J+1) \left[1 - \frac{J(\Xi_2 - 1)}{(J+1)\Xi_2 - 2\Xi_1 + 1} \right]} \right]^{-1}$.

Доказательство. Поскольку $h=1$, то план ξ должен быть сосредоточен, по крайней мере, в $n+1=2$ точках: $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 \in X$. Покажем, что этими точками должны быть $\varepsilon_0 = \min X$, $\varepsilon_1 = \max X$.

Рассмотрим сначала случай $X=X_1$. Пусть $a=-1$, $b=1$, тогда, в силу симметрии множества X_1 имеем $\varepsilon_0 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\sum_{j=0}^J L_0^2(x_j) = \sum_{j=0}^J L_1^2(x_j)$ и $p_0 = p_1 = 1/2$, как это следует из (5.4). Функционал (5.5) принимает вид

$$d(\xi) = \sigma^2 (1 + \varepsilon_1^{-2} \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J x_j^2).$$

Откуда легко видеть, что минимум $d(\xi)$ достигается в точке $\varepsilon_1 = 1$. Заметим, что при произвольных a и b , полагая $t = 1/2[a+b+(b-a)x]$ можно установить взаимно однозначное соответствие между $x \in [-1, 1]$ и $t \in [a, b]$, другими словами $\varepsilon_0 = \min X_1$, $\varepsilon_1 = \max X_1$. Решение для случая $X=X_2$ легко получить из предыдущего путем предельного перехода $J \rightarrow \infty$. Действительно, снова полагая $a=-1$, $b=1$, имеем $p_{0,1} = 1/2$ и $\lim_{J \rightarrow \infty} d(\xi) = \sigma^2 (1 + 3^{-1} \varepsilon_1^{-2})$.

Рассмотрим теперь случай $X=X_3$. Функционал (5.5) принимает вид

$$d(\xi) = \frac{\sigma^2}{J+1} [\tilde{d}(\xi)]^2; \quad \tilde{d}(\xi) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^{-1} (\sqrt{\sum_{j=0}^J (x_j - \varepsilon_0)^2} + \sqrt{\sum_{j=0}^J (x_j - \varepsilon_1)^2}). \quad (6.1)$$

Дифференцируя $\tilde{d}(\xi)$ по ε_0 и ε_1 будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{d}(\xi)}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\sqrt{(J+1)\varepsilon_0^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_0} \sqrt{(J+1)\varepsilon_1^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_1} + (J+1)\varepsilon_0\varepsilon_1 + \Xi_2 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\Xi_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \sqrt{(J+1)\varepsilon_0^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_0}},$$

$$\frac{\partial \tilde{d}(\xi)}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{\sqrt{(J+1)\varepsilon_0^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_0} \sqrt{(J+1)\varepsilon_1^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_1} + (J+1)\varepsilon_0\varepsilon_1 + \Xi_2 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\Xi_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \sqrt{(J+1)\varepsilon_1^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_1}}.$$

Знаменатели производных $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_0}$ и $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_1}$ не принимают нулевых значений; покажем, что числители также не имеют корней. Докажем неравенство:

$$\sqrt{(J+1)\varepsilon_0^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_0} \sqrt{(J+1)\varepsilon_1^2 + \Xi_2 - 2\Xi_1\varepsilon_1} > |(J+1)\varepsilon_0\varepsilon_1 + \Xi_2 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\Xi_1|.$$

Возводя в квадрат обе части неравенства, получим

$$(J+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 (\Xi_2 - (J+1)^{-1} \Xi_1^2) > 0.$$

Последнее верно поскольку $(\forall J \geq 1)(\Xi_2 > (J+1)^{-1} \Xi_1^2)$. Таким образом, $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_0} > 0$ и $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_1} < 0$, следовательно, функция $d(\xi)$, задаваемая выражением (6.1), имеет глобальный минимум при $\varepsilon_0 = \min X_3 = (J+1)^{-1}$; $\varepsilon_1 = \max X_3 = 1$.

Приведенные в формулировке теоремы выражения для вероятностей, соответствующих найденным точкам плана, легко получаются из (5.4). ■

В виду того, что задача Q-оптимального планирования на множестве X_1 при $J \rightarrow \infty$ равносильна задаче Q-оптимального планирования на множестве X_2 , в дальнейшем мы будем рассматривать только Q-оптимальные планы на множествах X_2 и X_3 .

Теорема 6. Пусть измерения в эксперименте проводятся согласно (3.1) и пусть $X = X_2$, $a, b = \mp 1$, тогда непрерывный Q-оптимальный план равноточного квадратичного регрессионного эксперимента имеет вид (3.3), где $n=2$, $\varepsilon_{0,2} = \mp 1$, $\varepsilon_1 = 0$, $p_{0,2} = 1/4$, $p_1 = 1/2$.

Доказательство. Поскольку $h=2$, то план должен быть сосредоточен, по крайней мере, в $n+1=3$ точках: $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \in X$. Из соображений симметрии очевидно, что $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_0 = -\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$. В этом случае, функционал, определяемый (5.6), принимает вид:

$$d(\xi) = 2^{-1}(\tilde{d}(\xi))^2; \quad \tilde{d}(\xi) = \sqrt{2/15}\varepsilon_2^{-2}(\sqrt{15\varepsilon_2^4 - 10\varepsilon_2^2 + 3} + \sqrt{5\varepsilon_2^2 + 3}).$$

Как и прежде, для оптимизации функционала $d(\xi)$ будем искать минимум $\tilde{d}(\xi)$. Дифференцируя $\tilde{d}(\xi)$ по ε_2 находим:

$$\tilde{d}'(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{15}} \frac{(5\varepsilon_2^2 + 6)\sqrt{15\varepsilon_2^4 - 10\varepsilon_2^2 + 3} - 2(5\varepsilon_2^2 - 3)\sqrt{5\varepsilon_2^2 + 3}}{\varepsilon_2^3 \sqrt{15\varepsilon_2^4 - 10\varepsilon_2^2 + 3} \sqrt{5\varepsilon_2^2 + 3}}.$$

Нетрудно проверить, что $(5\varepsilon_2^2 + 6)\sqrt{15\varepsilon_2^4 - 10\varepsilon_2^2 + 3} > 2|5\varepsilon_2^2 - 3|\sqrt{5\varepsilon_2^2 + 3}$, следовательно, $\tilde{d}'(\xi) < 0$, т.е. $\tilde{d}(\xi)$ монотонно убывает. Таким образом, следует выбирать $\varepsilon_2 = 1$.

Значения вероятностей, соответствующих найденным точкам оптимального плана, получаются непосредственной подстановкой $\varepsilon_{0,2} = \mp 1$, $\varepsilon_1 = 0$ в (5.4). ■

Теорема 7. Пусть измерения в квадратичном полиномиальном регрессионном эксперименте проводятся по схеме (3.1) и пусть $X = X_3$, $m=0$, $J \gg 1$, $\varepsilon_0 = M^{-1}$, $M=J+1$, $\varepsilon_2 = 1$, тогда непрерывный условно Q-оптимальный план равноточного квадратичного регрессионного эксперимента имеет вид (3.3), где $n=2$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $p_0 = [\frac{M-2}{M^2} \frac{Z_2}{Z_0} + \frac{4(M-1)}{M^2} \frac{Z_1}{Z_0} + 1]^{-1}$, $p_1 = [\frac{M-2}{4(M-1)} \frac{Z_2}{Z_1} + \frac{M^2}{4(M-1)} \frac{Z_0}{Z_1} + 1]^{-1}$, $p_2 = [\frac{4(M-1)}{M-2} \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{M^2}{M-2} \frac{Z_0}{Z_2} + 1]^{-1}$, $Z_0 = [4\varepsilon_4 - 12\varepsilon_3 + 13\varepsilon_2 - 6\varepsilon_1 + 1]^{1/2}$, $Z_1 = [M^2\varepsilon_4 - 2(M+1)(M\varepsilon_3 + \varepsilon_1) + (M^2 + 4M + 1)\varepsilon_2 + 1]^{1/2}$, $Z_2 = [4M^2\varepsilon_4 - 2(M+2)(2M\varepsilon_3 + \varepsilon_1) + (M^2 + 8M + 4)\varepsilon_2 + 1]^{1/2}$.

Доказательство. Поскольку $h=2$, то план ξ должен быть сосредоточен, по крайней мере, в $n+1=3$ точках: $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \in X$, две из которых заданы условием теоремы. Следовательно выражение (5.5) будет зависеть только от одного параметра: положения точки ε_1 , таким образом,

$$d(\xi) = \frac{\sigma^2}{M} \tilde{d}^2(\varepsilon_1), \quad \tilde{d}(\varepsilon_1) = \sum_{i=0}^2 \sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} L_i^2(x_j)},$$

здесь $L_0(x) = \frac{(x-1)(x-\varepsilon_1)}{(M^{-1}-1)(M^{-1}-\varepsilon_1)}$, $L_1(x) = \frac{(x-1)(x-M^{-1})}{(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_1-M^{-1})}$, $L_2(x) = \frac{(x-M^{-1})(x-\varepsilon_1)}{(1-M^{-1})(1-\varepsilon_1)}$. Для оптимизации $d(\xi)$ будем минимизировать $\tilde{d}(\varepsilon_1)$. Преобразуя $\tilde{d}(\varepsilon_1)$, получаем:

$$\tilde{d}(\varepsilon_1) = \sum_{i=0}^2 \tilde{d}_i(\varepsilon_1), \quad (6.2)$$

где $\tilde{d}_0(\varepsilon_1) = \frac{\sqrt{a_2 \varepsilon_1^2 + a_1 \varepsilon_1 + a_0}}{(1-M^{-1})(\varepsilon_1-M^{-1})}$, $\tilde{d}_1(\varepsilon_1) = \frac{\sqrt{b_0}}{(1-\varepsilon_1)(\varepsilon_1-M^{-1})}$, $\tilde{d}_2(\varepsilon_1) = \frac{\sqrt{c_2 \varepsilon_1^2 + c_1 \varepsilon_1 + c_0}}{(1-M^{-1})(1-\varepsilon_1)}$, $a_0 = \Xi_4 - 2\Xi_3 + \Xi_2$; $a_1 = -2(\Xi_3 - 2\Xi_2 + \Xi_1)$; $a_2 = \Xi_2 - 2\Xi_1 + M$; $b_0 = \Xi_4 - 2(1+M^{-1})\Xi_3 + (1+4M^{-1}+M^{-2})\Xi_2 - 2M^{-1}(1+M^{-1})\Xi_1 + M^{-1}$; $c_0 = \Xi_4 - 2M^{-1}\Xi_3 + M^{-2}\Xi_2$; $c_1 = -2(\Xi_3 - 2M^{-1}\Xi_2 + M^{-2}\Xi_1)$; $c_2 = \Xi_2 - 2M^{-1}\Xi_1 + M^{-1}$. Можно показать, что каждое из слагаемых $\tilde{d}_0(\varepsilon_1) + \frac{3}{4}\tilde{d}_1(\varepsilon_1)$ и $\frac{1}{4}\tilde{d}_1(\varepsilon_1) + \tilde{d}_2(\varepsilon_1)$ суммы (6.2) является выпуклой функцией $\varepsilon_1 \in (M^{-1}, 1)$, следовательно, функция (6.2) выпукла. Кроме того, можно показать, что $(\forall M \geq 19)(\tilde{d}(1/3) - \tilde{d}(1/2) > 0)$. Другими словами, при $M \geq 19$ точка минимума функции (6.2) $\varepsilon_1^* \in (1/3, 1)$, а, поскольку, в силу специфики решаемой задачи, этот отрезок содержит только одну точку из множества планирования $X = X_3$, то $\varepsilon_1^* = 1/2$.

Вероятности, соответствующие точкам оптимального плана, находятся согласно (5.4). ■

Теорема 8. Пусть измерения в эксперименте проводятся согласно (3.1) и пусть $X = X_3$, $m > 0$, $J \rightarrow \infty$, тогда непрерывный Q-оптимальный план равноточного полиномиального регрессионного эксперимента порядка $n \geq 2$ имеет вид

$$\xi = \left\{ \begin{matrix} 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ 1, 0, \dots, 0 \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon_i \in X_3, \quad \varepsilon_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае (5.5) принимает вид

$$d(\xi) = \sigma^2 \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)} \right]^2. \quad (6.3)$$

Задача минимизации (6.3) равносильна задаче минимизации суммы

$$\tilde{d}(\xi) = \sum_{i=0}^n \tilde{d}_i(\xi), \quad \tilde{d}_i(\xi) = \sqrt{\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \varepsilon_j |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^{-1}. \quad (6.4)$$

Здесь ε_i , $i = \overline{0, n}$ - точки плана, принадлежащие множеству X_3 , получаемому при $J \rightarrow \infty$.

Для нахождения $\min_{\varepsilon_i} \tilde{d}(\xi)$, $i = \overline{0, n}$ составим систему уравнений

$$(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_i} = 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (6.5)$$

Покажем, что она несовместна. Нам достаточно убедиться, что $(\forall \varepsilon_i \in X_3)((\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_0} > 0)$. Определим множество индексов $I = \{i = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) \in \overline{1, n}^{n-1} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}\}$, тогда при $n \geq 2$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \prod_{j=1}^n (\varepsilon_j - \varepsilon_0) = - \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^{n-1} (\varepsilon_{i_j} - \varepsilon_0) < 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{d}_0(\xi)}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\prod_{j=1}^n \varepsilon_j \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^{n-1} (\varepsilon_{i_j} - \varepsilon_0)}{\prod_{j=1}^n (\varepsilon_j - \varepsilon_0)^2} \geq 0.$$

Предположим, что $(\tilde{d}_0(\xi))'_{\varepsilon_0} = 0$. Это возможно только, если при $J \rightarrow \infty$ найдется хотя бы одна из точек ε_j , $j = \overline{1, n}$ плана, равная нулю. Однако, поскольку, $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n$, такой точкой может быть только ε_0 , т.е. $\varepsilon_0 = (J + k)^{-1} \rightarrow 0$ при $J \rightarrow \infty$, $k = \text{const}$, $k \in Z$. Наше предположение не выполняется и $(\tilde{d}_0(\xi))'_{\varepsilon_0} > 0$.

В свою очередь, если $i \geq 1$, то $(\tilde{d}_i(\xi))'_{\varepsilon_0} = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)^{-2} \prod_{j=1}^n \varepsilon_j \prod_{j=1, j \neq i}^n |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^{-1} \geq 0$.

Другими словами, $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_0} = \sum_{i=0}^n (\tilde{d}_i(\xi))'_{\varepsilon_0} > 0$ и система уравнений (6.5) несовместна. Кроме того, поскольку производные $(\tilde{d}(\xi))'_{\varepsilon_i}$ определены во всей рассматриваемой нами области, функция $\tilde{d}(\xi)$ принимает свои экстремальные значения на границах области. Из сказанного выше, в частности, следует, что необходимым условием обеспечения минимума $\tilde{d}(\xi)$ является совпадение точки плана ε_0 с $\min X_3$, т.е., $\varepsilon_0 = (J + m + 1)^{-1} \rightarrow 0$ при $J \rightarrow \infty$.

Вычислим теперь согласно (5.4) вероятности, соответствующие точкам плана: $p_i = \tilde{d}_i(\xi) / \tilde{d}(\xi)$, откуда легко видеть, что в силу (6.4) $p_0 = 1$ и $p_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Это означает, что все измерения необходимо сосредоточить в точке ε_0 в то время как выбор остальных n точек может быть произвольным. ■

Замечание 1. Согласно теореме 8 при $J \rightarrow \infty$ проведение полиномиального регрессионного эксперимента порядка $n \geq 2$ на множестве X_3 в соответствии с Q-оптимальным планом предполагает выполнение всех измерений в точке $x' = 0$. При этом расположение остальных точек плана не является существенным. При $J < \infty$ получение строгих аналитических выражений для точек Q-оптимального плана полиномиального регрессионного эксперимента порядка n на X_3 , доставляющих минимум функционалу (5.5), осложняется большой размерностью задачи оптимизации даже при малых n . В этом случае, для поиска Q-оптимальных планов, оказывается целесообразным применение

процедур численної оптимізації. Опіраючись на теорему 8, можна висказати гіпотезу о том, что при $J \gg 1$ в процедурах численної оптимізації, применяемых для определения расположения точек Q-оптимального плана на X_3 , в качестве начального приближения следует использовать точки плана, оптимального для экстраполяции в точку $x' = 0$.

Решение задачи экстраполяции в точку, лежащую вне интервала $[-1, 1]$ хорошо известно и дано в работе [12], где точки плана рекомендуется выбирать в точках экстремумов многочленов Чебышева I-го рода, т.е. $x_i = -\cos \frac{i\pi}{n}$, $i = \overline{0, n}$. Отображая отрезок $[-1, 1]$ на отрезок $[(J+m+1)^{-1}, (m+1)^{-1}]$ с помощью функционального преобразования $f(x) = \frac{J}{2(J+m+1)(m+1)}[x+1+2\frac{m+1}{J}]$ получим

$$\varepsilon_i = \frac{J}{(J+m+1)(m+1)}[\frac{m+1}{J} + \sin^2 \frac{i\pi}{2n}], \quad i = \overline{0, n}. \quad (6.6)$$

Поскольку вероятности (5.4) для любого заданного набора точек плана обеспечивают минимум выражения (5.2), то после выбора в качестве точек плана, точек (6.6), величины соответствующих им вероятностей должны определяться согласно (5.4). Такие планы будем называть *асимптотически* Q-оптимальными планами на множестве планирования X_3 .

На рис. 6.1 приведены зависимости величины $d(\xi) = \frac{\sigma}{J+1}[\sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=0}^J L_i^2(x_j)}]^2$ от параметра J для различных планов при условии, что $n=3$, $m=9$, $\sigma=1$. Кругочками показана зависимость $d(\xi)$ от J для случая, когда точки плана ξ выбирались ближайшими к точкам $(J+m+1)^{-1}[1+\frac{i}{n}\frac{J}{(m+1)}]$, $i = \overline{0, n}$, т.е. были расположены эквидистантно между крайними точками множества планирования X_3 . Квадратиками показана зависимость $d(\xi)$ от J для случая, когда точки плана ξ находились с использованием численных методов минимизации (метод барьерных функций). Наконец, ромбиками отмечена зависимость $d(\xi)$ от J для случая, когда точки плана ξ выбирались согласно (6.6).

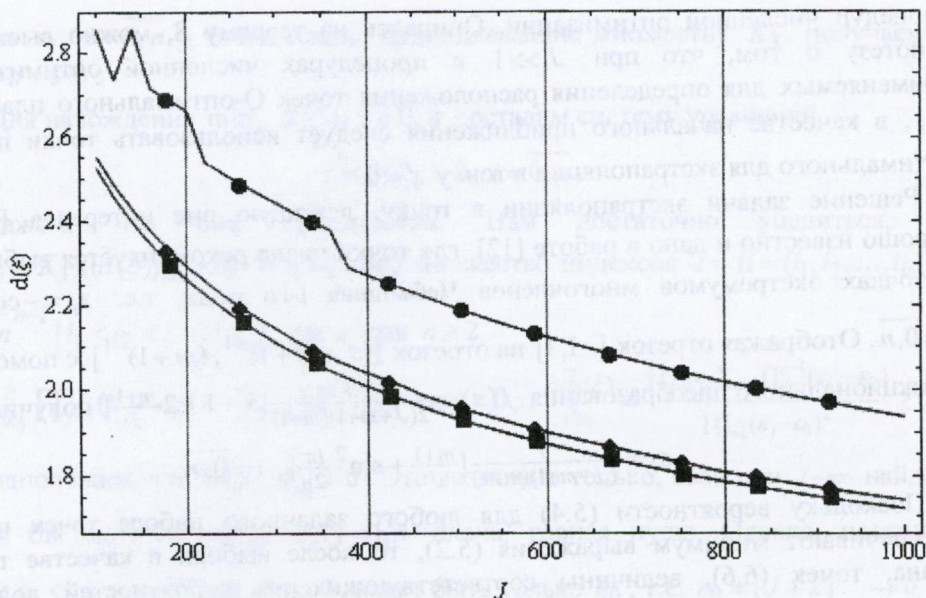


Рис. 6.1. Зависимости величины $d(\xi)$, задаваемой (5.5), от параметра J для различных планов равноотстоящих экспериментов при условии, что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$, $n=3$, $m=9$, $\sigma=1$

Из анализа графиков, показанных на рис. 6.1, следует, что наихудший случай соответствует эквидистантному расположению точек плана, а точки асимптотически Q-оптимального плана обеспечивают значения величины $d(\xi)$ близкие к ее минимальному значению, найденному численными методами. $\square$

Построим теперь непрерывные Q-оптимальные планы полиномиальных регрессионных экспериментов третьего и более высоких порядков на множестве планирования $\mathbf{X}_2 = [-1, 1]$.

Замечание 2. На отрезке $[-1, 1]$ функции $L_i^2(x)$, $i = \overline{0, n}$ имеют $2n-1$ экстремумов: $n-1$ максимум и n минимумов. Минимумы достигаются в точках плана, за исключением самой точки ε_i . Принимая во внимание симметрию в расположении точек плана, нетрудно сделать вывод, что при $\varepsilon_n \leq 1$ на отрезках $[-1, -\varepsilon_n]$ и $[\varepsilon_n, 1]$ функции $L_i^2(x)$ будут монотонно возрастать, таким образом, с приближением ε_n к 1, интегралы $\int_{-1}^{-\varepsilon_n} L_i^2(x) dx$ и $\int_{\varepsilon_n}^1 L_i^2(x) dx$ стремятся к нулю. Откуда следует, что минимум (5.6) на множестве планирования $\mathbf{X}_2 = [-1, 1]$ целесообразно искать в предположении, что $\varepsilon_n = 1$. $\square$

Теорема 9. Пусть измерения в эксперименте проводятся согласно (3.1) и пусть $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2$, $a, b = \mp 1$, $n=3$, $\varepsilon_3=1$, тогда непрерывный условно Q-оптимальный план равноотстоящего кубического регрессионного эксперимента

имеет вид (3.3), где $\varepsilon_{0,3} = \mp 1$, $\varepsilon_{1,2} = \mp \tau$, $\tau = \frac{1}{2\sqrt{7}} \sqrt{g-9 + \sqrt{\frac{-g^3+303g-1486}{g}}}$,

$$g = \sqrt{4\sqrt{577} \cos\left(\frac{1}{3} \arctg \frac{4\sqrt{74409}}{13817}\right) + 101}; \quad p_{0,3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{T}\right)^{-1}, \quad p_{1,2} = [\sqrt{2}(\sqrt{2} + T)]^{-1},$$

$$T = \tau \sqrt{\frac{35\tau^4 - 28\tau^2 + 9}{7\tau^2 + 1}}.$$

Доказательство. С учетом симметрии множества X_2 и условия $\varepsilon_3 = 1$ взаимное расположение точек плана будет $\varepsilon_0 = -\varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_2 < 1$, а суммарная ошибка выборки (5.6)

$$d(\xi) = \frac{\sigma^2}{2(1-\varepsilon_2^2)^2} \left[\sqrt{\int_{-1}^1 (x - \varepsilon_2^2)(1-x)^2 dx} + \varepsilon_2^{-1} \sqrt{\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 (x - \varepsilon_2)^2 dx} \right]^2. \quad (6.7)$$

Таким образом, задача Q-оптимального планирования сводится к задаче минимизации (6.7) по ε_2 , решая которую находим $\varepsilon_2 = \tau$. Наконец, соответствующие значения вероятностей точек плана получаем, подставляя в (5.4), $\varepsilon_{0,3} = \mp 1$ и $\varepsilon_{1,2} = \mp \tau$. ■

Замечание 3. В работе [2] рекомендуется выбирать точки непрерывного Q-оптимального плана полиномиального регрессионного эксперимента степени n на $X = [-1, 1]$ так, чтобы они совпадали с корнями полинома $(1-x^2)P'_n(x)$. При этом вероятности точек плана должны быть $p_i = [P_n(\varepsilon_i) |\sum_{i=0}^n P_n(\varepsilon_i)|^{-1}]^{-1}$, где $P_n(x)$ - многочлен Лежандра степени n . Обозначим такие планы через ξ_L . В свою очередь, через ξ_Q будем обозначать планы, точки которых для кубической регрессии определяются теоремой 9, а для регрессии порядка $n \geq 4$ находятся численно методом Нелдера-Мида при условии, что точки начального приближения выбираются совпадающими со спектром соответствующего плана ξ_L . В табл. 1 приведены точки планов ξ_L и ξ_Q , а также отношения значений величины (5.5), вычисленных в этих точках для $n = 3 - 7$.

Непосредственный анализ данных табл. 1 показывает что планы ξ_L , предложенные в [2], являются квазиоптимальными в том смысле, что обеспечивают значение величины (5.5) близкие к минимальным. □

Обозначим через ξ_e план, согласно которому измерения следует проводить по одному разу в каждой точке множества планирования. D-оптимальные планы будем обозначать через ξ_D . Выполним оценку эффективности применения предложенных в работе Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов на множествах планирования X_2 и X_3 [14,15]. При этом под ξ_Q в случае множества X_2 будут пониматься Q-оптимальные планы, определяемые табл. 1, в то время как для множества X_3 через ξ_Q будут обозначаться асимптотически Q-оптимальные планы (см. замечание 1). Из анализа (3.10) следует, что $d(\xi_e) = \sigma^2(h+1)$. Кроме того, из теоремы 8 следует, что при $J \rightarrow \infty$ на X_3 $d(\xi_Q) = \sigma^2$. Данные сравнения планов ξ_Q с ξ_e и ξ_D на множествах планирования X_2 и X_3 приведены в табл. 2 и 3 соответственно.

Таблица 1. Данные сравнения планов ξ_L и ξ_Q на X_2

n	ξ	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	$\frac{d(\xi_L)}{d(\xi_Q)}$
3	ξ_L	-1	-0,44721	-	-	1,00075
	ξ_Q	-1	-0,43662	-	-	
4	ξ_L	-1	-0,65465	0	-	1,00105
	ξ_Q	-1	-0,64361	0	-	
5	ξ_L	-1	-0,76506	-0,28523	-	1,00112
	ξ_Q	-1	-0,75507	-0,27953	-	
6	ξ_L	-1	-0,83022	-0,46885	0	1,00111
	ξ_Q	-1	-0,82319	-0,46182	0	
7	ξ_L	-1	-0,87174	-0,59170	-0,20930	1,00108
	ξ_Q	-1	-0,86559	-0,58450	-0,20622	

Таблица 2. Данные сравнения планов ξ_Q с ξ_e и ξ_D на X_2

n	$\frac{d(\xi_e)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{d(\xi_D)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_Q)}{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_D)}$
3	1,33789	1,14471	1,00140
4	1,29281	1,14635	1,00296
5	1,26151	1,14371	1,00494
6	1,23865	1,14051	1,00491
7	1,22128	1,13701	1,00657

Таблица 3. Данные сравнения планов ξ_Q с ξ_e и ξ_D на X_3

n	$J = 50, m = 9$			$J = 100, m = 9$		
	$\frac{d(\xi_e)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{d(\xi_D)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_Q)}{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_D)}$	$\frac{d(\xi_e)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{d(\xi_D)}{d(\xi_Q)}$	$\frac{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_Q)}{\det \mathbf{M}^{-1}(\xi_D)}$
3	1,43461	1,18755	1,02104	1,56793	1,27488	1,01452
4	1,29681	1,11966	1,27497	1,53447	1,28552	1,04497
5	1,33292	1,17869	1,06132	1,52065	1,30189	1,04597
6	1,31430	1,18452	1,07553	1,48031	1,29977	1,07332
7	1,26158	1,16881	1,07624	1,39408	1,261862	1,14754

Анализ данных табл. 2 и 3 показывает, что с ростом порядка регрессионной модели n уменьшается выигрыш (в смысле отношения $d(\xi_e)/d(\xi_Q)$) от применения планов ξ_Q вместо ξ_e , оставаясь при этом больше для планов, построенных на множестве X_3 . Кроме того, как и следовало ожидать, с ростом

параметра J возрастает выигрыш, получаемый от применения на множестве планирования X_3 асимптотически Q -оптимальных планов взамен ξ_e планам. Заметим также, что, поскольку, значения элементов информационной матрицы плана ξ_D непосредственно не зависят от структуры множества планирования, то отношение $d(\xi_D)/d(\xi_Q)$, вычисленное для планов на X_3 , оказывается меньше соответствующего отношения, вычисленного для планов на X_2 .

7. Выводы

Рассмотрены вопросы планирования полиномиальных регрессионных экспериментов, оптимальных по критерию минимума суммарной дисперсии погрешности оценивания функции регрессии на множестве планирования (Q -оптимальных). В частности решена задача синтеза Q -оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов по построению рабочих характеристик решающих правил распознавания сигналов методом статистического моделирования.

По результатам выполненных исследований сделаны следующие выводы.

1. Доказана применимость класса полиномиальных моделей для аппроксимации зависимости $\bar{P}(v)$ средней вероятности ошибки распознавания сигналов от объема обучающей выборки v адаптивными решающими правилами распознавания многомерных стационарных случайных последовательностей. В частности показано, что для правила (2.2) зависимость $\bar{P}(v)$ допускает аппроксимацию многочленами малых степеней от v^{-1} .

2. Дано общее решение задачи непрерывного Q -оптимального планирования полиномиальных регрессионных экспериментов произвольного порядка. Получены выражения, позволяющие для любого заданного набора точек плана определить такие значения соответствующих им вероятностей, при которых дисперсия выборочной функции регрессии принимает свое минимальное значение. Показано, что задача Q -оптимального планирования может быть решена в два этапа. На первом этапе определяется расположение точек оптимального плана, а затем вычисляются соответствующие этим точкам значения вероятностей. Данный подход вдвое сокращает размерность оптимизационной задачи, решаемой в ходе Q -оптимального планирования.

3. Показано, что задачу Q -оптимального планирования можно трактовать как задачу выпуклой оптимизации в линейном пространстве, составленном из всевозможных линейных комбинаций интерполяционных коэффициентов Лагранжа, а также функции, значения которой тождественно равны единице.

4. Уточнено решение задачи Q -оптимального планирования на множестве $X = [-1, 1]$ для полиномиальной регрессии порядков $n = 3 - 7$. В [2, стр. 155] предлагается выбирать спектр Q -оптимального плана так, чтобы он совпадал со спектром D -оптимального плана. Однако, в ходе проведенных исследований было установлено, что такие планы не являются строго оптимальными, хотя и обеспечивают значения величины дисперсии выборочной функции регрессии близкие к минимальным.

Для случая кубического регрессионного эксперимента аналитически обоснован Q-оптимальный план на множестве $X = [-1, 1]$. Кроме того, численно, с использованием метода Нелдера-Мида, были найдены точки Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов порядка $4 \leq n \leq 7$ на множестве $X = [-1, 1]$.

5. Введено понятие асимптотически Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов на множестве планирования X_3 . Показано, что при $J \gg 1$ такие планы обеспечивают значения Q-критерия близкие к оптимальным. Данные планы могут быть использованы в качестве начального приближения в процедурах численной оптимизации, применяемых для определения расположения точек Q-оптимального плана на X_3 .

Практическая значимость работы состоит в том, что применение синтезированных в работе Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов позволяет повысить точность построения рабочих характеристик решающих правил распознавания сигналов методом статистического моделирования.

Дальнейшие исследования предполагается посвятить разработке численных методов построения Q-оптимальных планов полиномиальных регрессионных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента – М.: Наука, 1987. – 320с.
2. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов) – М.: Наука, 1971. – 312с.
3. Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатуев В.А. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. – М.: Наука, 1977. – 208с.
4. Melas V.B. Functional approach to optimal experimental design. – New York: Springer Science+Business Media, 2006. – 336p.
5. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487с.
6. Румшицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 192с.
7. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ, 3-е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 912с.
8. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Мир, 1971. – 680с.
9. Омельченко А.В. Анализ влияния объема обучающей выборки на вероятность ошибки распознавания сигналов адаптивными решающими правилами // Прикладная радиоэлектроника. – 2006. – т.5, №3. – С.359-365.
10. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640с.
11. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. – М.: Радио и связь, 1986. – 264с.

12. Hoel P.G., Levine A. Optimal spacing and weighting in polynomial prediction // *Ann. Math. Stat.* – 1964. – Vol. 35, № 4. – P.1553-1560.
13. Федоров А.В., Омельченко А.В. Планирование эксперимента при построении характеристик решающих правил распознавания сигналов. // Материалы 17-й международной конференции «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2007). Севастополь: Вебер, 2007. – С.354-355.
14. Федоров А.В., Омельченко А.В. Эффективность планов полиномиального регрессионного эксперимента // Материалы 1-й международной конференции «Интегрированные интеллектуальные робототехнические комплексы» (ИИРТК-2008). Киев: НАУ, 2008. – С.244-246.
15. Fedorov A.V., Omelchenko A.V. Criteria to design a polynomial regression experiment // *Proceedings of the 3-rd international conference on computer science and information technologies (CIST'2008)*. Lviv.: Vezha&Co, 2008. – P.24 - 26.
16. Fedorov A.V., Omelchenko A.V. Q-optimal design for polynomial regression experiments // Тезисы докладов научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ-2010). Харьков: ХНУ им. Каразина, 2010. – С.319-323.
17. Fedorov A.V., Omelchenko A.V. Designs for polynomial regression experiments to construct operating characteristics of decision rules of signals recognition, // *Proceedings of the V-th international scientific and technical conference (CSIT 2010)*. Lviv: Vezha&Co, 2010 – P. 9-11.
18. Fedorov A.V., Omelchenko A.V. Q-optimal designing for polynomial regression experiment in problems of signals recognition decision rules research // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Тараповские чтения 2011). Харьков: Вировец А. П. «Апостроф», 2011. – С.215.

УДК 519.6

Об одном численном методе одномерной оптимизации

В. П. Черненко

Кременчугский национальный университет имени М. Остроградского, Украина

В данной работе рассматривается новый прямой метод оптимизации унимодальной функции одной переменной на отрезке, приводится алгоритм метода. Проводится сравнительный анализ нового метода и трех методов одномерной оптимизации: метода деления отрезка пополам, метода золотого сечения и метода Фибоначчи. Все эти методы относятся к симметричным методам исключения отрезков. Показывается эффективность данного метода. В качестве показателя эффективности берутся относительное уменьшение первоначального интервала и количество вычислений значений функции, требуемых для достижения заданной точности.

Ключевые слова: *прямые методы оптимизации, унимодальная функция, эффективность метода.*

У даній роботі розглядається новий прямий метод оптимізації унімодальної функції однієї змінної на відрізку, доводиться алгоритм методу. Проводиться порівняльний аналіз нового методу і трьох методів одновимірної оптимізації: методу ділення відрізка навпіл, методу золотого перерізу і методу Фібоначчі. Усі ці методи відносяться до симетричних методів виключення відрізків. Показується ефективність даного методу. Як показник ефективності беруться відносне зменшення початкового інтервалу і кількість обчислень значень функції, необхідних для досягнення заданої точності.

Ключові слова: *прямі методи оптимізації, унімодальна функція, ефективність методу.*

In this article the new direct optimization method of unimodal function of one variable on the interval is considered. Also the algorithm of this method is reduced. The comparing analysis of the new method and the one-dimensional optimization methods: the method of bisection of the interval, the method of golden section and the Fibonacci method is performed. All of these methods belong to the symmetric methods of exception of the intervals. The efficiency of this method is showed. As an indicator of the efficiency is taken relative decrease of the initial interval and the number of calculations of the function required to achieve a given accuracy.

Key words: *direct optimization method, unimodal function, efficiency of method.*

1. Введение

Для решения задачи оптимизации функции на отрезке на практике, как правило, применяют численные методы. Классический метод исследования функции на экстремум имеет весьма ограниченное применение. Вычисление производной функции в практических задачах зачастую является непростым делом. Может оказаться, что значения функции определяются из наблюдений или каких-либо физических экспериментов, и получить информацию о ее производной крайне трудно. Поэтому важно иметь методы поиска экстремума, не требующие вычисления производных, более удобные для реализации на современных компьютерах.

Численные методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, относятся к прямым методам оптимизации [1–5]. Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в

аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений функции в заданных точках.

На сегодня разработано и исследовано большое количество прямых методов одномерной оптимизации. Каждый из этих методов имеет свои недостатки и достоинства при их применении для решения конкретных экстремальных задач. При этом методы, разработанные для решения какого-либо класса задач, часто используются для решения более сложных задач. Поэтому методы одномерной оптимизации могут широко использоваться для разработки и теоретического исследования эффективности методов многомерной оптимизации, а также при решении многомерных экстремальных задач.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума функции одной переменной и проведем их сравнительный анализ по эффективности. Самым слабым требованием на функцию, позволяющим использовать эти методы, является ее унимодальность [4]. Поэтому далее будем считать функцию унимодальной на отрезке.

Прямые методы делятся на методы перебора и методы исключения отрезков. В методах перебора, точки x_i , в которых определяются значения $f(x)$, выбирают заранее. Методы исключения отрезков основаны на следующем принципе. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Сравнив значения $f(x)$ в точках x_1 и x_2 (пробных точках), можно сократить отрезок поиска точки x^* , перейдя к отрезку $[a; x_2]$, если $f(x_1) \leq f(x_2)$ или к отрезку $[x_1; b]$ если $f(x_1) > f(x_2)$. Описанную процедуру можно повторить необходимое число раз, последовательно уменьшая отрезок, содержащий точку минимума. Когда длина последнего из найденных отрезков станет достаточно малой, следует положить $x^* \approx \bar{x}$, где $\bar{x}$ – одна из точек этого отрезка, например, его середина.

Чтобы относительное уменьшение отрезка на каждой итерации не зависело от того, какая из его частей исключается из дальнейшего рассмотрения, пробные точки следует располагать симметрично относительно середины исходного отрезка. В зависимости от способа выбора пробных точек получаются различные симметричные методы исключения отрезков.

2. Сравнительный анализ методов исключения отрезков

При сравнении прямых методов минимизации обычно учитывают количество n вычислений значений $f(x)$, гарантирующее заданную точность $\varepsilon(n)$ определения точки x^* тем или иным методом. Чем меньше n , тем эффективнее считается метод. При этом вспомогательные операции такие, как выбор пробных точек, сравнение значений $f(x)$ и т.п., не учитываются. Во многих практических случаях определение значений целевой функции требует больших затрат (например, времени ЭВМ или средств для проведения экспериментов) и вспомогательными вычислениями можно пренебречь. А эффективность метода минимизации особенно важна именно в таких случаях, поскольку позволяет сократить указанные затраты.

Сравнение методов исключения отрезков можно проводить, сравнивая их относительные эффективности. Обозначим через L_0 длину исходного интервала неопределенности, через L_n – длину интервала, полученного в результате n вычислений функций. Тогда $Q = L_n/L_0$ – относительное уменьшение первоначального интервала и есть показатель эффективности.

Рассмотрим следующие методы исключения отрезков: метод деления отрезка пополам (МДП), метод золотого сечения (МЗС) и метод Фибоначчи (МФ).

Метод деления отрезка пополам. Простейшим симметричным методом минимизации унимодальной функции одной переменной, не требующим вычисления производной, является метод деления отрезка пополам. Несмотря на простоту, этот метод требует большого количества вычислений и не всегда позволяет найти решение с заданной точностью.

Эффективность данного метода: $Q_1 = (0,5)^{n/2}$.

Если задана точность ε , то значение n вычисляется из условия:

$$n \geq \frac{2 \ln(\varepsilon)}{\ln(0,5)}.$$

Метод золотого сечения. Этот метод минимизации унимодальной функции на отрезке также прост, как метод деления отрезка пополам, но он позволяет решить задачу с требуемой точностью при меньшем количестве вычислений значений функции.

Эффективность данного метода: $Q_2 = (0,618)^{n-1}$,

Если задана точность ε , то значение n вычисляется из условия:

$$n \geq 1 + \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(0,618)}.$$

Метод Фибоначчи. Этот метод является предельным случаем метода золотого сечения, т.к. для метода золотого сечения

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{L_3} = \dots = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \gamma = 1,6180\dots,$$

и для метода Фибоначчи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \gamma.$$

Например, для $n = 12$ $F_{12}/F_{11} = 144/89 = 1,6179\dots$

Детальный сравнительный анализ этих методов можно найти в [5].

Эффективность данного метода: $Q_3 = 1/F_{n-2}$.

Если задана точность ε , то значение n вычисляется из условия:

$$F_n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Сравним рассмотренные выше методы, взяв в качестве показателя эффективности относительное уменьшение первоначального интервала.

Таблиця 1. Величини относительного уменьшения интервала

Метод поиска	Количество вычислений значений функции			
	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
МДП	0,500	0,177	0,031	0,0009
МЗС	0,618	0,146	0,013	0,0001
МФ	1,000	0,333	0,029	

Из таблицы 1 видно, что наиболее эффективным в смысле точности является метод золотого сечения.

Сравним теперь рассмотренные выше три метода, взяв в качестве показателя эффективности количество вычислений значений функции.

Таблиця 2. Требуемые количества вычислений значений функции

Метод поиска	Заданная точность			
	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
МДП	7	9	14	20
МЗС	6	8	11	16
МФ	6	8	11	16

Из таблицы 2 видно, что наиболее эффективными в этом случае являются метод золотого сечения и метод Фибоначчи.

Рассмотрим теперь главные недостатки этих методов. Численная реализация метода золотого сечения приводит к тому, что он становится практически неприменимым даже при небольших n . Это связано с тем, что коэффициент уменьшения интервала неопределенности равен $(3 - \sqrt{5})/2$, а число $\sqrt{5}$ в компьютере вычисляется приближенно и уже первые точки итерационного процесса будут найдены с некоторой ошибкой. Эта ошибка при увеличении n довольно быстро накапливается, а это приводит к тому, что нарушается свойство симметричности метода. Такой же недостаток присущ и методу Фибоначчи, т.к. коэффициент уменьшения интервала неопределенности F_{n-2}/F_n в общем случае является бесконечной дробью. Поэтому уже на первом шаге новая пробная точка будет вычислена приближенно. Соответствующая ошибка будет приводить к увеличению ошибки на следующих шагах и к нарушению симметричности метода.

Далее рассмотрим новый метод исключения отрезков и будем его сравнивать только с методом золотого сечения, т.к. этот метод является самым эффективным по двум показателям из трех рассмотренных методов.

3. Алгоритм нового метода

Предлагаемый метод лишен недостатков метода золотого сечения. Вместо разбиения исходного отрезка точками x_1 и x_2 на три части предлагается делить исходный отрезок на пять равных частей точками x_1, x_2, x_3, x_4 . Тогда точка x_2 делит исходный отрезок в отношении $2:5 = 0,4$, а точка $x_3 - 3:5 = 0,6$. Получившиеся отношения являются рациональными числами в отличие от

метода золотого сечения, в котором точки x_1 и x_2 разбивают отрезок в отношении $(3-\sqrt{5})/2$ и $(\sqrt{5}-1)/2$ соответственно. Таким образом, мы избавляемся от главного недостатка, присущего методам золотого сечения и Фибоначчи.

Опишем алгоритм нового метода.

Шаг 1. Задать a, b, ε . Положить $\tau = 0,4$.

Шаг 2. Вычислить $x_2 = a + \tau(b-a)$, $x_3 = b - \tau(b-a)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$.

Шаг 3. Перейти к новому отрезку: если $f(x_2) \leq f(x_3)$, то положить $a = a$, $b = x_3$, иначе – $a = x_2$, $b = b$.

Шаг 4. Проверить на окончание поиска: если $b-a < \varepsilon$, то положить $x^* \approx \bar{x} = (a+b)/2$, $f^* \approx f(\bar{x})$, иначе – к шагу 2.

Эффективность данного метода: $Q_4 = (0,6)^{n-1}$. Если взять $n=10$, то $Q_4 = 0,010$, эффективность метода золотого сечения при таком же числе шагов: $Q_2 = 0,013$. Значит, предлагаемый метод является самым эффективным в смысле точности из всех рассмотренных методов.

Блок-схема предлагаемого метода представлена на рис.3.1.

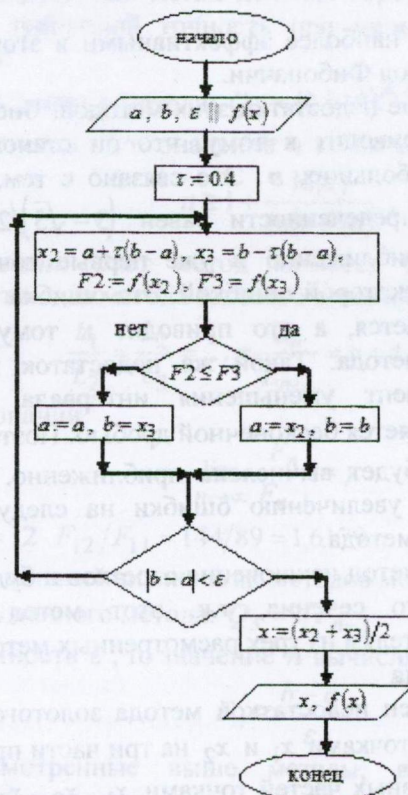


Рис.3.1. Блок-схема нового метода

Рассмотрим недостатки предлагаемого метода. Если ввести понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычислений функции на одной итерации тогда: $Q_1^* = 0,38/1 = 0,38$ – эффективность метода золотого сечения, а $Q_4^* = 0,4/2 = 0,2$ – эффективность предлагаемого метода. Видно, что в этом случае метод золотого сечения более эффективен, т.к. в методе золотого сечения на каждой итерации значение функции вычисляется один раз, а в предлагаемом методе – два раза.

Этот недостаток можно устранить, усовершенствовав новый метод.

Согласно предложенному алгоритму:

$$x_2 = 0,6a + 0,4b, \quad x_3 = 0,4a + 0,6b.$$

Найдем теперь новые пробные точки, идя по левой ветви блок-схемы (для правой ветви проводятся аналогичные рассуждения):

$$x'_3 = 0,64a + 0,36b = x_2 - 0,04(b - a) < x_2,$$

$$x'_2 = 0,76a + 0,24b = x'_3 - 0,12(b - a) < x'_3 < x_2$$

Таким образом, новая левая пробная точка лежит левее предыдущей правой пробной точки. Значит, на каждом новом шаге итерации можно вычислять значение функции только в правой пробной точке, а значение в новой левой точке брать их предыдущего шага, которое равно значению в предыдущей правой точке.

Данная модификация метода приводит к тому, что предложенный метод становится самым эффективным по всем показателям.

3. Выводы

Задача оптимизации функций одной переменной относится к наиболее простому классу оптимизационных задач. Тем не менее, анализ задач такого типа занимает центральное место в оптимизационных исследованиях. Такие задачи обычно решаются в инженерной практике. В работе проведен сравнительный анализ эффективности прямых одномерных методов решения оптимизационных задач и показана эффективность предлагаемого метода.

Направление дальнейшего исследования: одномерные методы оптимизации могут быть использованы для анализа подзадач, которые возникают при решении многомерных задач оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
2. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1994. – 374 с.
3. Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. – М.: Наука, 1997. – 268 с.
4. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
5. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

UDC 517.958, 517.984.5

On solution to integral equations with a logarithmic singularity of the kernel on several intervals of integration: elements of the spectral theory

Y.V. Shestopalov, E.V. Chernokozhin

Karlstad University, SE-651 88 Karlstad, Sweden

We consider the semi-inversion of meromorphic integral operator-valued functions defined on one or several intervals of integration. We perform approximate semi-inversion of the operator principal parts and obtain small-parameter expansions of the inverse operators. We show how the developed techniques can be applied to approximate determination of characteristic numbers and solution to boundary value problems for the Helmholtz equation that are reduced to boundary Fredholm integral equations and systems of integral equations of the first kind with a logarithmic singularity of the kernel. The results are applied to the analysis of oscillations in cylindrical slotted resonators.

Key words: *analytical semi-inversion, integral operator-valued function, characteristic number, slotted resonators.*

Розглядається напівобернення мероморфних інтегральних оператор-функцій, заданих на одному або декількох інтервалах інтегрування. Ми виконуємо наближене напівобернення головної частини оператору і отримуємо розклад зворотного оператора за малим параметром. Ми покажемо, яким чином розроблений метод може бути застосований до наближеного визначення характеристичних чисел і рішення рівняння Гельмгольца шляхом зведення до граничних інтегральних рівнянь Фредгольма і систем інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі. Отримані результати додаються до аналізу коливань в циліндричних щілинних резонаторах.

Ключові слова: *оборотне аналітичне напівобернення, інтегральний оператор-функція, характеристичні числа, щілинні резонатори.*

Рассматривается полуобращение мероморфных интегральных оператор-функций, заданных на одном или нескольких интервалах интегрирования. Мы выполняем приближенное полуобращение главной части оператора и получаем разложение обратного оператора по малому параметру. Мы покажем, каким образом разработанный метод может быть применен к приближенному определению характеристических чисел и решению уравнения Гельмгольца путём сведения к граничным интегральным уравнениям Фредгольма и системам интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре. Полученные результаты используются для анализа колебаний в цилиндрических щелевых резонаторах.

Ключевые слова: *аналитическое полуобращение, интегральная оператор-функция, характеристические числа, щелевые резонаторы.*

1. Introduction

We apply the theory of integral operator-valued functions (OVFs) [1] and the methods of analytical semi-inversion [2–4] developing the method of approximate semi-inversion [5–8] to the case of meromorphic integral OVFs with a logarithmic singularity of the kernel defined on several intervals of integration. In fact, approximate inversion can be used when the spectral parameter is sufficiently distant from the singular points because, according to [1], there exists [5–8] a characteristic number (CN) (i.e., the point, at which the invertibility of the OVF is violated) in a

neighborhood of a pole of the integral OVF with a logarithmic singularity of the kernel. We take into account the closeness to a simple first-order pole and modify the inversion formulas for this case. We apply the developed techniques [7, 8] of approximate semi-inversion to the analysis of eigenoscillations in cylindrical slotted cavities with narrow slots.

2. Semi-inversion of integral operators

Consider the integral OVF with a logarithmic singularity of the kernel

$$K(\lambda)\varphi = \alpha L\varphi + N(\lambda)\varphi \equiv \int_{\Gamma} \left[\alpha \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|t_0 - t|} + N(t_0, t, \lambda) \right] \varphi(t) dt, \quad t_0 \in \Gamma, \quad (1)$$

where $N(t_0, t, \lambda)$ is once continuously differentiable in $\Gamma \times \Gamma$ and a meromorphic function of λ , so that, in the vicinity of a pole λ_ν of $N(t_0, t, \lambda)$,

$$K(\lambda)\varphi = K_\nu(\lambda)\varphi + \frac{m_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} (\varphi, \varphi_\nu) \varphi_\nu, \quad (\varphi, \varphi_\nu) \equiv \int_{\Gamma} \varphi_\nu(t) \varphi(t) dt, \quad (2)$$

m_ν is a constant, and φ_ν is a given differentiable function. OVFs $K(\lambda)$ and $K_\nu(\lambda)$ are Fredholm integral OVFs with a logarithmic singularity of the kernel and may have therefore not more than a finite number of CNs in every ball $B_r = \{\lambda : |\lambda| < r\}$ and are invertible at all (regular) points λ that differ from CNs. For every $r > 0$ there exists [1] a sufficiently small $w = w(r)$ such that B_r contains only regular points λ of the OVF $K(\lambda)$ (and $K_\nu(\lambda)$). Approximate representation for the inverse operator

$$K_\nu^{-1}(\lambda)f = L_1^{-1}f - w^2 \ln w L_1^{-1} N_\nu L_1^{-1}f + O(w^4 \ln^2 w), \quad \Gamma = (a, b) = (d - w, d + w), \quad (3)$$

as a segment of asymptotic series in powers of small parameter $\beta = \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{w} \right)^{-1}$ is obtained using the method of approximate semi-inversion developed in [1, 3–8]; here

$$L_1\varphi \equiv \alpha L\varphi + g(\varphi, 1), \quad g = g(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta} + M_0(\lambda) = \text{const} \quad (\alpha \neq 0),$$

$$M_0(\lambda) = N(d, d, \lambda),$$

$$L_1^{-1}(\lambda, \beta)f = \frac{1}{\alpha} L^{-1}f - \frac{\ln 2}{\alpha\pi} \left(1 - \beta \frac{\ln 2}{\pi} + \beta^2 \frac{\ln 2}{\pi} \left(\frac{M_0(\lambda)}{\alpha} + \frac{\ln 2}{\pi} \right) \right) (L^{-1}f, 1) L^{-1}1 + O(\beta^3).$$

We apply this result to determine CNs of $K(\lambda)$ and show [8] (by the reasoning stated briefly below in Sec. 3) that the CNs are roots of the equation

$$\lambda = \lambda_\nu + m_\nu (K_\nu^{-1}(\lambda)\varphi, \varphi_\nu) \quad (4)$$

that can be obtained as a segment of an asymptotic series in powers of β

$$\lambda_v^* = \lambda_v + \beta \frac{m_v |c_v|^2}{\alpha} + \beta^2 \frac{m_v |c_v|^2}{\alpha} \left(\frac{\ln 2}{\pi} + \frac{M_{0,v}(\lambda_v)}{\alpha} \right) + O(\beta^3), \quad c_v = \varphi_v(d). \quad (5)$$

3. The case of n intervals

In the case of n integration intervals in (1) $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$, $\Gamma_j = (a_j, b_j) = (d_j - w_j, d_j + w_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, OVF $K(\lambda)$ can be written, in the vicinity of a pole λ_v of $N(\lambda; t_0, t)$ as a matrix operator using the vector quantities and the inner product

$$f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T, \quad f_v = \varphi(1, \dots, 1)^T, \\ (f, f_v) = \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi_v)_j = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \varphi(t) \varphi_v(t) dt$$

associated with the set of integration intervals. Then OVF $K(\lambda)$ can be represented as

$$K(\lambda)f = K_v(\lambda)f + \frac{m_v}{\lambda_v - \lambda} (f, f_v) f_v, \quad (6)$$

where $K_v(\lambda)$ is a matrix OVF with the entries $K_{ij,v}(\lambda)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Use (6) and consider a local representation of the integral equation $K(\lambda)f = F$ in the vicinity of the chosen pole λ_v

$$K(\lambda)f = K_v(\lambda)f + \frac{m_v}{\lambda_v - \lambda} (f, f_v) f_v = F, \quad (7)$$

where $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$. Applying operator $K_v^{-1}(\lambda)$ to both sides of (7), we obtain the equivalent equation

$$f + \frac{m_v}{\lambda_v - \lambda} (f, f_v) K_v^{-1}(\lambda) f_v = K_v^{-1}(\lambda) F. \quad (8)$$

The solution to (8) is uniquely defined if the inner product (f, f_v) is uniquely defined. Calculating the inner product of both sides of equation (8) with f_v , we obtain

$$(f, f_v) + \frac{m_v}{\lambda_v - \lambda} (f, f_v) (K_v^{-1}(\lambda) f_v, f_v) = \left(K_v^{-1}(\lambda) F, f_v \right). \quad (9)$$

Resolving (9) with respect to (f, f_v) and substituting the result into (8), we obtain the local representation of the inverse $K(\lambda)^{-1}$ in the vicinity of the pole λ_v :

$$f = K_v^{-1}(\lambda)F - \frac{m_v(K_v^{-1}(\lambda)F, f_v)}{\lambda_v - \lambda + m_v(K_v^{-1}(\lambda)f_v, f_v)} K_v^{-1}(\lambda)f_v. \quad (10)$$

The quantity (f, f_v) is uniquely defined for any F if and only if the denominator of the fraction in (10) is not equal to zero. The zeros of the denominator are the points at which $K(\lambda)$ is not invertible. Since the matrix integral operator $K(\lambda)$ is a Fredholm and holomorphic OVF, these points are its CNs. Thus, CNs of $K(\lambda)$ are the roots of the equation

$$\lambda = \lambda_v + m_v(K_v^{-1}(\lambda)f_v, f_v). \quad (11)$$

For sufficiently small w , we prove using the contraction principle, that there exists a root λ_v^* of equation (11) which can be obtained as a segment of asymptotic series in powers of β ; the resulting expressions are similar to (5).

4. Slotted rectangular resonators

The cross section of a slotted resonator by the plane $x_3 = 0$ (in the Cartesian coordinate system (x_1, x_2, x_3)) is formed by two rectangular domains

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= \{r = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < a_1; 0 < x_2 < b_1\}, \\ \Omega^2 &= \{r : 0 < x_1 < a_2; -b_2 < x_2 < 0\} \end{aligned}$$

with the common part of the boundary $\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2 = \{r : x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq \min(a_1, a_2)\}$ containing one or several slots Γ . The permittivity $\varepsilon = \varepsilon_i(r)$, $i = 1, 2$; $r \in \Omega^i$. The squared eigenfrequencies of this cylindrical resonator are eigenvalues of the boundary eigenvalue problem $(M = (\partial\Omega^1 \setminus \Gamma) \cup (\partial\Omega^2 \setminus \Gamma))$

$$\Delta u(r) + \lambda \varepsilon u(r) = 0, \quad r \in \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_M = 0, \quad [u^1 - u^2]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u^1}{\partial x_2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \right]_{\Gamma} = 0. \quad (13)$$

The Fredholm property and existence of generalized and classical solutions to the corresponding inhomogeneous problem are proved in [5–8]. Therefore, there may exist only isolated eigenvalues of (12), (13). According to [5], this problem has a real

eigenvalue between every two neighboring points $\mu_{nm}^{(i)} = \frac{\pi^2}{\varepsilon_i} \left(\frac{n^2}{a_i^2} + \frac{m^2}{b_i^2} \right)$,

$n, m = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2$. These eigenvalues coincide with CNs of the integral OVF $K(\lambda)$ with a logarithmic singularity that enters the integral equation $K(\lambda)\varphi = 0$ to which this problem is reduced and can be calculated from (11) as segments of asymptotic

series in characteristic small parameter β .

5. Numerical

Present some typical results of calculations obtained using the technique reported in this study for the rectangular slotted resonator shown in Fig. 1.

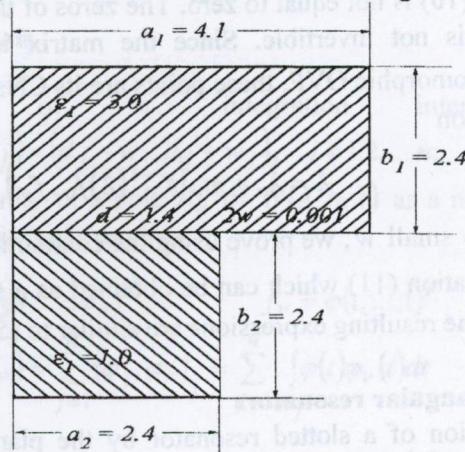


Fig. 1. Cross-section of the cylindrical slotted resonator formed by two rectangular domains connected through a slot in the common wall. Numerical values of the geometric and material parameters used in computations are also shown.

We consider the influence of the width of the upper rectangular domain (parameter a_1) on the structure of H_{11}^1 - and H_{20}^1 -types of oscillations in the resonator with and without a slot. Fig. 2 shows the dependences of the eigenvalues $\lambda_{11}^{(1)}$, $\lambda_{20}^{(1)}$ of the rectangular cylindrical resonator on the width of domain Ω^1 in the absence of the slot. The curves have the point of intersection when the width of the domain $a_1 = a^* \approx 4.156$. The eigenvalues at this point are $\lambda_{11}^{(1)}(a^*) = 0.7616$, $\lambda_{20}^{(1)}(a^*) = 0.7618$.

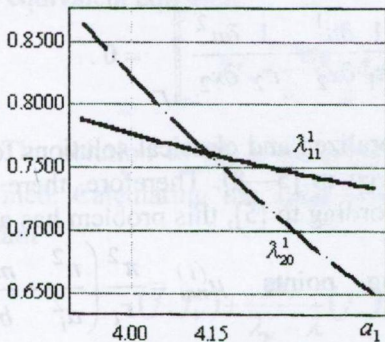


Fig. 2. Dependence eigenvalues on a_1 in the absence of the slot.

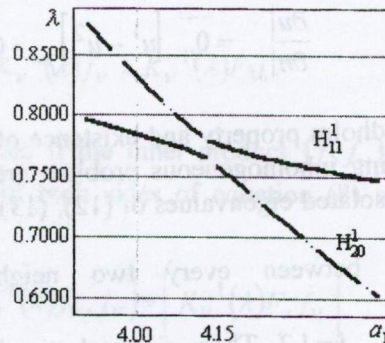


Fig. 3. Dependence eigenvalues of the problem H on a_1 .

Fig. 3 shows the dependences of eigenvalues of problem H (that is, in the presence of the slot) of the considered types of oscillations on parameter a_1 . It can be seen that the eigenvalue curves no longer merge near the point a^* and the exchange of the oscillation types occurs. This process is called intertype interaction of oscillations. For more details we refer to papers [7, 8].

6. Conclusion. Acknowledgements

We have constructed approximate semi-inversion of an integral operator on several integration intervals with a logarithmic singularity of the meromorphic kernel in a vicinity of singularities and show how this technique can be used for determining characteristic numbers.

This work is supported by the Visby project of the Swedish Institute.

REFERENCES

1. Y. Shestopalov, Y. Smirnov, and E. Chernokozhin. Logarithmic Integral Equation in Electromagnetics. – Utrecht: VSP, 2000. – 117 p.
2. V. Shestopalov and Y. Shestopalov. Spectral Theory and Excitation of Open Structures. – London: Peter Peregrinus, 1996. – 399 p.
3. Y. Shestopalov and E. Chernokozhin. Mathematical Methods for the Study of Wave Scattering by Open Cylindrical Structures. // J. Comm. Tech. Elec. - 1997. - V. 42. - pp. 1211-1223.
4. Y. Shestopalov and E. Chernokozhin. Resonant and Nonresonant Diffraction by Open Image-type Slotted Structures. // IEEE Trans. Antennas Propag. - 2001. - V. 49. - pp. 793-801.
5. Y. Shestopalov and O. Kotik. Interaction of Oscillations in Slotted Resonators and its Application to Microwave Imaging. // J. Electromag. Waves Appl. - 2003. - V. 17. - pp. 291-311.
6. Y. Shestopalov and O. Kotik. Eigenoscillations of Rectangular Slotted Resonators. // Vestnik MGU. - 1999. - V. 15. - pp. 4-14.
7. Y. Shestopalov and N. Kotik. Interaction and Propagation of Waves in Slotted Waveguides. // New J. Phys. - 2002. - V. 4. - pp. 40.1-40.16.
8. Y. Shestopalov, N. Kotik, and Y. Okuno. Oscillations in Slotted Resonators with Several Slots: Application of Approximate Semi-Inversion. // Progress in Electromagnetics Research. - 2002. - V. PIER-39. - pp. 193-247.

CONTENTS

▪ V. G. Ageyev, S. P. Grekov, I. N. Zinchenko, T. G. Salakhutdinov.	5
Computer simulation of development, spread and localization of firedamp mixtures explosions in mine workings	
▪ V. M. Godynko, V. O. Mishchenko, A. V. Paseka.	13
The features of the energy metrics of UML diagrams	
▪ A. A. Gourjii, O. V. Shaldenko.	20
Transport processes of scalar fields by viscous fluid in curved pipes in Dean approximation	
▪ I. V. Didenko.	29
Discrete traffic flow sensors of the information system for the management of elements movement in the network	
▪ V. D. Dushkin.	35
Modeling of wave diffraction on a finite system of tapes located on two sides of the dielectric layer	
▪ E. B. Kobilskaya.	43
Research temperature field of a wire during electroplastic drawing	
▪ Ye. A. Kogut, Z. F. Nazyrov, A. A. Yantsevich.	50
On linear continuous systems associated with operator colligations	
▪ D. N. Kolesnyk, A. D. Shamrovsky.	65
Geometrically nonlinear lattice model of a cantilever beam with directed tip load	
▪ A. I. Kosolap.	77
Method of successive modules expansion in problems of nonsmooth optimization	
▪ O. M. Lytvyn, O. P. Nechuiviter.	83
Spline-interflatation and evaluation of 3 D Fourier's coefficients on the class of differentiable functions	
▪ V. P. Lyashenko.	97
Temperature field of an infinite cylinder with a moving heat source	
▪ V. P. Lyashenko.	104
The definition of parameters control of temperature field using the inverse Stefan problem	
▪ T. P. Melnyk.	113
Using extrapolation methods for improving the prediction	

▪ V. O. Mishcenko.	122
Use of models and characteristics of computing cluster to determine the directions of the cluster's modifications	
▪ A. L. Piven.	132
Numerical solving for one degenerate integro-differential delay equation	
▪ Ye. V. Svet, N. V. Smetankina, A. N. Shupikov.	142
Method of Solving Thermoelasticity Problem for Multilayer Shells with a Complex Plan Shape	
▪ Y. A. Skob, M. L. Ugryumov.	149
Numerical modelling of detonation in gas mixtures	
▪ A. V. Fedorov, A. V. Omelchenko.	158
Designing for Experiments at Researching Decision Rules of Signals Recognition by Modeling	
▪ V. P. Chernenko.	178
About One Numerical Method of One-Dimensional Optimization	
▪ Y. V. Shestopalov, E. V. Chernokozhin.	184
On solution to integral equations with a logarithmic singularity of the kernel on several intervals of integration: elements of the spectral theory	
▪ CONTENTS	190

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету №1058

Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 21.

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання О. О. Афанасьєва

Підписано до друку 26.04.2013 р.

Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 13,4

Обл.– вид. арк. – 15,6

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

17-09

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна.

Видавництво

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна

61022 м. Харків, майдан Свободи, 4,

тел.: 362-01-52

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.09

