ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

О БАЗИСАХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В L_2

Б. Я. Левин

Последовательность элементов $\{x_n\}$ линейного топологического пространства E мы назовем обобщенным базисом, если существует такая система индексов $n_j (j = 1, 2, \ldots)$, что каждый элемент пространства представляется единственным образом в виде

$$x = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{n_j} c_k x_k,$$

при $n_j = j$ обобщенный базис является базисом в обычном смысле.

В этой статье мы изучаем специальные обобщенные базисы в $L_2(-\pi, \pi)$. Пусть $\{\lambda_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ — последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Мы можем считать, что $|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|$. Каждой точке λ_n поставим в соответствие функцию $e^{i\lambda_n x}$. Если точка λ_n встречается в последовательности p — раз, то ей ставится в соответствие система функций

$$e^{i\lambda_n x};\ xe^{i\lambda_n x};\ \ldots;\ x^{p-1} e^{i\lambda_n x}.$$

Всю совокупность функций, отвечающих данной последовательности чисел $\{\lambda_n\}$, мы будем обозначать $\{e^{i\lambda_n x}\}$.

Из результатов, относящихся к исследованию условий, при которых система показательных функций образует базис в $L_2(-\pi, \pi)$ в обычном смысле, укажем следующую теорему Пейли и Винера (1). Если $|\lambda_n - n| < \frac{1}{\pi^2}$ $(n = 0, \pm 1; \ldots,)$ то $\{e^{i\lambda_n x}\}$ — базис в $L_2(-\pi, \pi)$. Дэффин и Икес [2] получили тот же результат при меньшем ограничении $|\lambda_n - n| < \frac{\ln 2}{\pi}$. Эту теорему можно рассматривать как теорему об устойчивости базиса $\{e^{inx}\}$.

В этой статье мы получаем достаточные условия иного типа для того, чтобы система $\{e^{i\lambda_n x}\}$ была базисом или обобщенным базисом в $L_2(-\pi, \pi)$.

§ 1. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(\lambda)$ — целая функция конечной степени, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) Ширина индикаторной диаграммы функции $\Phi(\lambda)$ равна 2π, то есть $h_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$.

б) Все корни функции $\Phi(\lambda)$ лежат в некоторой полосе $|Im\lambda| < h < \infty$.

в) При некотором вещественном H и положительных m и M

$$0 < m < |\Phi(\sigma + iH)| < M < \infty \qquad (-\infty < \sigma < \infty).$$

Если $\{\lambda_n\}$ — все множество корней этой функции, то $\{e^{i\lambda_n x}\}$ есть обобщенный базис в $L_2(-\pi, \pi)$.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Если банахово пространство E рефлективно и последовательность $\{x_n\}$ образует обобщенный базис в этом пространстве, то последовательность биортогональных функционалов $\{f_n\}$ является обобщенным базисом в сопряженном пространстве, отвечающим той же системе индексов**.

Доказательство. Обозначим A_{n_j} конечномерный оператор

$$A_{n_j} x = \sum_{k=1}^{n_j} (f_k, x) x_k$$

и $A^*_{n_j}$ сопряженный оператор

$$A^*_{n_j} f = \sum_{k=1}^{n_j} (f, x_k) f_k.$$

Последовательность $A_{n_j} x$ сходится по норме E на каждом элементе $x \in E$ к этому элементу. Поэтому нормы операторов A_{n_j} ограничены в совокупности. Но $\| A^*_{n_j} \| = \| A_{n_j} \|$ и, следовательно, $\| A^*_{n_j} \|$ также ограничены в совокупности. Из рефлективности пространства E легко следует, что линейная оболочка функционалов $\{f_k\}$ плотна в E^*. Действительно, всякий функционал (X, f) над E^* порождается некоторым элементом $x \in E$, то есть $(X, f) = (f, x)$. Но из разложения

$$x = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{n_j} (f_k, x) x_k$$

следует, что ортогональность $(f_k, x) = 0$ влечет равенство $x = 0$. На линейной оболочке функционалов $\{f_k\}$ очевидно имеем

$$\varphi = \lim_{j \to \infty} A^*_{n_j} \varphi \tag{1}$$

и, в силу ограниченности норм $A^*_{n_j}$, получаем, что (1) имеет место для любого элемента из E^*. Лемма доказана.

Остальные леммы относятся к свойствам функции $\Phi(\lambda)$, участвующей в формулировке теоремы.

Лемма 2. *Число нулей функции $\Phi(\lambda)$ внутри прямоугольника $|\tau| \leq h$ $t \leq \sigma \leq t+1$; $(\lambda = \sigma + i\tau)$ не превосходит некоторого числа K, не зависящего от t.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, то есть, можно подобрать такую последовательность вещественных чисел σ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, что функция $\Phi(\sigma_j + \lambda)$ имеет в основном прямоугольнике $0 \leq \sigma \leq 1$; $|\tau| \leq h$ не меньше, чем j корней. Умножив функцию $\Phi(\lambda)$ на множитель $e^{i\gamma\lambda}$, мы сдвинем ее индикаторную диаграмму на вектор $-i\gamma$. Поэтому можно, не нарушая общности, считать, что индикаторная диаграмма функции $\Phi(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси, то есть $h_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. В силу условий *а*) и *в*) эта функция удовлетворяет во всей плоскости неравенству

$$|\Phi(\lambda)| < M_1 e^{\pi|\tau|}, \tag{2}$$

---

* Близкие факты есть в книге С. Банаха [3]. Приведенное здесь доказательство было мне сообщено В. И. Мацаевым.

в котором $M_1 = Me^{\pi |H|}$. Из этого неравенства следует компактность семейства функций $\Phi(\sigma_j + \lambda)$ в прямоугольнике $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$; $|\tau| \leqslant h + |H|$. Выделим сходящуюся в этом прямоугольнике подпоследовательность $\Phi(\sigma_{j_k} + \lambda)$. Предельная функция $\Phi_0(\lambda)$ должна быть тождественным нулем. Таким образом, при достаточно большом значении j_k получим

$$|\Phi(\sigma + \sigma_{j_k} + iH)| < m,$$

при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, что противоречит условию *в*) теоремы.

Лемма 3. *В области* $|\tau| \geqslant h_1 > h$ *функция* $\Phi(\sigma + i\tau)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m_1 \leqslant |\Phi(\sigma + i\tau)\, e^{-\pi|\tau|}| \leqslant M_1, \tag{3}$$

в которых m_1 *и* M_1 *— постоянные, зависящие от функции и величины* $h_1 > h$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что при $h_1 > h$, некотором $m_1 > 0$ и $-\infty < \sigma < \infty$

$$|\Phi(\sigma + ih_1)| \geqslant m_1 > 0. \tag{4}$$

Предположим, что это не так, то есть, что существует такая последовательность $\{\sigma_j\}$ вещественных чисел, что либо $\Phi(\sigma_j + ih_1) \to 0$, либо $\Phi(\sigma_j - ih_1) \to 0$. Пусть, для определенности, имеем первый случай. В силу неравенства (2) семейство функций $\Phi(\lambda + \sigma_j + ih_1)$ компактно в круге C_η вида $|\lambda - ih_1| < \eta$. Положим $\eta = \frac{1}{2}(h_1 - h)$ и выделим равномерно сходящуюся последовательность $\Phi(\lambda + \sigma_{j_k} + ih_1)$. Предельная функция $\Phi_0(\lambda)$ обращается в нуль в точке 0, но, в силу условия *в*), не равна нулю тождественно. По известной теореме, при всех достаточно больших значениях индекса j_k найдутся в C_η точки z_k, в которых $\Phi(z_k + \sigma_{j_k} + ih_1) = 0$. Это противоречит условию *б*) теоремы. Итак $|\Phi(\sigma + ih_1)| \geqslant m_1 > 0$. Воспользуемся теперь следующим представлением функции $\ln|\Phi(\lambda)|$ в области $\tau \geqslant h_1$

$$\ln|\Phi(\sigma + i\tau)| = \frac{\tau - h_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\Phi(t + ih_1)|\, dt}{(t - \sigma)^2 + (\tau - h_1)^2} + \pi(\tau - h_1).\ *$$

Неравенства (3) получаются непосредственно из этой формулы, если воспользоваться оценками (2) и (4). В области $\tau \leqslant -h_1$ неравенства (3) устанавливаются аналогично.

Лемма 4. *Вне множества* C_δ *кружков радиуса* $\delta > 0$ *с центрами в корнях функции* $\Phi(\lambda)$ *имеет место неравенство*

$$|\Phi(\lambda)| \geqslant m_\delta > 0, \tag{5}$$

где m_δ *— положительная постоянная, зависящая от функции* $\Phi(\lambda)$ *и числа* δ.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что оценку (5) следует доказать только при $|\tau| < h_1$. Предположим, что вне кружков C_δ функция $|\Phi(\lambda)|$ принимает сколь угодно малые значения, то есть $\Phi(\sigma_j + i\tau_j) \to 0$, причем $|\tau_j| < h_1$ и $\sigma_j + i\tau_j$ находится вне исключительного множества C_δ. Выделим из компактного семейства функций $\{\Phi(\lambda + \sigma_j + i\tau_j)\}$ равномерно сходящуюся последовательность $\Phi_k(\lambda) = \Phi(\lambda + \sigma_{j_k} + i\tau_{j_k})$. Предельная функция $\Phi_0(\lambda)$ не равна тождественно нулю и $\Phi_0(0) = 0$. По теореме Гурвица, каждая из функций $\Phi_k(\lambda)$ имеет корень z_k в кружке

* См., напр., [4].

$|\lambda| < \frac{\delta}{2}$. Поэтому $\Phi(z_k + \sigma_k + i\tau_k) = 0$, то есть функция $\Phi(\lambda)$ имеет корень вне множества $C_{\frac{\delta}{2}}$. Это невозможно и, следовательно, (5) верно при некотором $m_\delta > 0$.

Лемма 5. *При достаточно малом $\delta > 0$, на каждом интервале единичной длины найдется такое число N, что прямая $Re\lambda = N$ не пересекает исключительного множества.*

Доказательство. Спроектируем все корни функции $\Phi(\lambda)$ на вещественную ось. По лемме 2 существует такое число K, что произвольный интервал $(x, x+1)$ вещественной оси содержит не больше, чем K точек $\sigma_k = Re\lambda_k$. Выберем $\delta = (4K)^{-1}$. Тогда проекция множества C_δ на интервал $(x, x+1)$ вещественной оси имеет меру меньшую, чем единица. Отсюда следует, что при некотором N, лежащем между x и $x+1$, прямая $Re\lambda = N$ не пересекает множества C_δ. Аналогично можно показать, что при достаточно малом $\delta > 0$ найдется такая последовательность чисел R_n, что $R_n < R_{n+1} < R_n + 1$; $R_n \to \infty$ и окружности $|\lambda| = R_n$ не пересекает множества C_δ.

§ 2. Мы получим сейчас важное для дальнейшего разложение в интерполяционный ряд Эрмита произвольной целой функции конечной степени, не большей π и принадлежащей $L_2(-\infty, \infty)$. Узлы интерполяции будут совпадать с корнями $\{\lambda_n\}$ функции $\Phi(\lambda)$ и кратность узлов с кратностью соответствующего корня.

Пусть $F(\lambda)$ — произвольная целая функция конечной степени, не большей π и принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$. По известной теореме Пейли и Винера эта функция представляется в форме

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx \qquad (f(x) \in L_2(-\pi, \pi)). \tag{6}$$

Дадим оценку функции $F(\lambda)$ во всей плоскости. Для этого заметим, что функция

$$\chi_1(\lambda) = F(\lambda)\, e^{i\pi\lambda}$$

ограничена в верхней полуплоскости. Кроме того, по теореме Римана Лебега на вещественной оси $\chi_1(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \pm\infty$. Применяя далее теорему Фрагмена и Линделефа для полуплоскости, мы получим, что функция $\chi_1(\lambda)$ равномерно стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и $Im\lambda \geqslant 0$. Аналогично получается, что функция

$$\chi_2(\lambda) = F(\lambda)\, e^{-i\pi\lambda}$$

равномерно стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ и остающемся в нижней полуплоскости. Применяя леммы 3 и 4, мы получаем отсюда, что функция

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\Phi(\lambda)}$$

равномерно стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и λ — не принадлежащем множеству C_δ исключительных кружков. Интеграл

$$\Gamma_R(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_R)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta,$$

взятый по окружности C_R, не пересекающей исключительного множества C_δ, стремится к нулю равномерно при λ, принадлежащем произвольной ограниченной области. Вычисляя вычеты, мы получим следующее разложение

$$F(\ ) = \lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \sum_{l=0}^{\alpha_k-1} \frac{F^{(l)}_{(\lambda_k)}}{l!} \sum_{j=1}^{\alpha_k-l} \frac{C_{j+l,\,k}\Phi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^j},$$

в котором α_k кратность корня λ_k функции $\Phi(\lambda)$, а числа $C_{j,k}$ определяются главной частью

$$G_k\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right) = \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{C_{j,k}}{(\lambda-\lambda_k)^j}$$

разложения функции $[\Phi(\lambda)]^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки λ_k. Обозначив через $\Psi_{kl}(\lambda)$ целые функции

$$\Psi_{kl}(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{l!} \sum_{j=1}^{\alpha_k-l} \frac{C_{j+l,k}}{(\lambda-\lambda_k)^j},$$

мы заметим, что разложение функции $\Psi_{kl}(\lambda)$ имеет вид

$$\Psi_{kl}(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_k)^l}{l!}\left\{1 + a_k(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k-l} + \ldots\right\}.$$

Поэтому

$$\Psi^{(s)}_{kl}(\lambda_k) = 0,\ (s=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ l+1,\ \ldots,\ \alpha_k-1);\ \Psi^{(l)}_{kl}(\lambda_k) = 1. \qquad (7)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\Psi^{(s)}_{kl}(\lambda_j) = 0 \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_j-1) \qquad (7')$$

при $\lambda_k \neq \lambda_j$. Таким образом, мы показали, что произвольная целая функция из L_2 конечной степени, не превосходящей π, разлагается в равномерно сходящийся интерполяционный ряд Эрмита

$$F(\lambda) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{k_j} \sum_{l=0}^{\alpha_k-1} F^{(l)}(\lambda_k)\,\Psi_{kl}(\lambda). \qquad (8)$$

В частном случае, когда все корни функции $\Phi(\lambda)$ — простые, это разложение переходит в интерполяционный ряд Лагранжа. Для дальнейшего нам нужно показать, что ряд (8) сходится на вещественной оси в $L_2(-\infty,\ \infty)$. Мы сформулируем результат в виде леммы, имеющей на наш взгляд самостоятельное значение.

Лемма 6. *Всякая целая функция конечной степени, не большей π, принадлежащая $L_2(-\infty,\ \infty)$, разлагается в метрике L_2 в ряд Эрмита (8), причем суммирование ведется по некоторой последовательности индексов.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_{abR}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L_{abR})} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta \qquad (9)$$

по контуру, изображенному на рис 1, причем предполагается, что $c > h$ и прямые $Re\,\lambda = a$; $Re\,\lambda = b$ не пересекают исключительного множества C_δ. Очевидно, что

$$I_{abR}(\lambda) = \varphi(\lambda) + \sum_{a < Re\lambda_k < b} R_{\lambda_k}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \lambda}\right).$$

При $R \to \infty$ интеграл $I_{abR}(\lambda)$ стремится к интегралу

$$I_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L_{ab})} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta$$

взятому по контуру, изображенному на рис. 2.

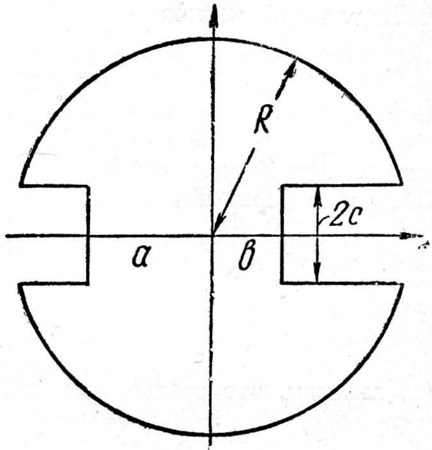

Рис. 1.

Выберем в соответствии с леммой 5 на каждом интервале $(p, p+1)$, (p — целое) число r_p так, чтобы прямые $Re\,\lambda = r_p$ не пересекали множество C_δ. Положим $a = r_p$, $b = r_q$ и обозначим при таком выборе функцию $I_{r_p r_q}(\lambda)$ сокращенно $I_{pq}(\lambda)$, а соответствующий контур — L_{pq}. Умножив функцию $I_{pq}(\lambda)$ на $\Phi(\lambda)$, получим формулу Эрмита с остаточным членом

$$F(\lambda) = \sum_{r_p < \sigma_k < r_q} \sum_{l=0}^{\alpha_k - 1} F(\lambda_k)\,\Psi_{kl}(\lambda) + I_{pq}(\lambda)\,\Phi(\lambda); \quad (\sigma_k = Re\,\lambda_k). \tag{10}$$

Покажем, что при $p \to -\infty$, $q \to +\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_{pq}(\sigma + 2ic)|^2\, d\sigma \to 0.$$

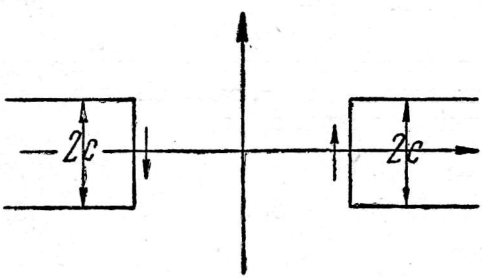

Рис. 2.

Для этого обозначим

$$\varphi_{pq}(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta) & Re\,\zeta \geqslant r_q;\ Re\,\zeta \leqslant r_p \\ 0 & r_p < Re\,\zeta < r_q, \end{cases}$$

и представим $I_{pq}(\lambda)$ в виде суммы четырех интегралов

$$I_{pq}(\lambda) = S_p(\lambda) + S_q(\lambda) + T^+_{pq}(\lambda) + T^-_{pq}(\lambda).$$

Первые два интеграла берутся по вертикальным отрезкам

$$S_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{c} \frac{\varphi(r_p + it)}{r_p + it - \lambda}\, dt; \quad S_q(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{c} \frac{\varphi(r_q + it)}{r_q + it - \lambda}\, dt,$$

а другие два имеют вид

$$T^+_{pq}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{pq}(\xi + ic)}{\xi + ic - \lambda}\, d\xi; \quad T^-_{pq}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{pq}(\xi - ic)}{\xi - ic - \lambda}\, d\xi.$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I_{pq}(\sigma+2ic)|^2 d\sigma \leqslant 4\int_{-\infty}^{\infty} \{|S_p(\sigma+2ic)|^2 + |S_q(\sigma+2ic)|^2 +$$

$$+|T_{pq}^{+}(\sigma+2ic)|^2 + |T_{pq}^{-}(\sigma+2ic)|^2\} d\sigma.$$

Для оценки первых двух интегралов мы заметим, что при λ, не принадлежащем исключительному множеству C_δ и $\lambda \to \infty$, функция $\varphi(\lambda)$ равномерно стремится к нулю. Поэтому

$$\varkappa_p = \max_{-c\leqslant t\leqslant c} |\varphi(r_p+it)| \to 0 \quad (p \to -\infty)$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_p(\sigma+2ic)|^2 d\sigma \leqslant \frac{c^2}{\pi^2}\varkappa_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(r_p-\sigma)^2+c^2} = \frac{c\varkappa_p^2}{\pi} \to 0.$$

Аналогично оценивается второй интеграл. Переходим к оценке третьего интеграла. Функция $T_{pq}^{+}(\sigma+2ic)$ является сверткой функций $\varphi_{pq}(\xi+ic)$ и $(\xi-ic)^{-1}$. Имеем

$$(\xi-ic)^{-1} = \frac{1}{i}\int_0^{\infty} e^{-ct}\cdot e^{i\xi t}\,dt.$$

Пусть, кроме того, функция $\chi_{pq}(t)$ такова, что

$$\varphi_{pq}(\xi+ic) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{pq}(t)\,e^{i\xi t}\,dt.$$

Тогда, по теореме о свертке

$$T_{pq}^{+}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \chi_{pq}(t)\,e^{-ct}e^{i\lambda t}\,dt.$$

Из равенства Парсеваля получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T_{pq}^{+}(\sigma+2ic)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} |\chi_{pq}(t)|^2 e^{-2ct}\,dt < \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{pq}(t)|^2\,dt$$

и, снова применяя равенство Парсеваля, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T_{pq}^{+}(\sigma+2ic)|^2 d\sigma < \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{pq}(\xi+ic)|^2 d\xi. \tag{11}$$

Функция $\varphi(\xi+ic) \in L_2(-\infty, \infty)$ и потому интеграл (11) стремится к нулю при $p \to -\infty$; $q \to +\infty$. Аналогично доказывается стремление к нулю четвертого интеграла. Итак, при $p \to -\infty$; $q \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I_{pq}(\sigma+2ic)|^2 d\sigma \to 0.$$

Из ограниченности функции $\Phi(\sigma + 2ic)$ следует, что также

$$\int_{-\infty}^{\infty} | I_{pq}(\sigma + 2ic)\,\Phi(\sigma + 2ic)|^2\, d\sigma \to 0. \tag{12}$$

Остается перейти от интегрирования по прямой $\tau = 2c$, параллельной вещественной оси, к интегрированию по вещественной оси.

Возвращаясь к формуле (10), мы убеждаемся в том, что функция

$$\theta_{pq}(\lambda) = I_{pq}(\lambda)\,\Phi(\lambda)$$

есть целая функция конечной степени, не большей π, причем $\theta_{pq}(\sigma + 2ic) \in L_2(-\infty, \infty)$. По теореме Пейли и Винера эта функция представляется в форме

$$\theta_{pq}(\sigma + 2ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(t)\, e^{i\sigma t} dt. \quad (\vartheta(t) \in L_2(-\pi, \pi)).$$

Это представление справедливо при всех комплексных значениях σ и, следовательно,

$$\theta_{pq}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(t)\, e^{2ct} e^{i\sigma t}\, dt.$$

Далее из равенства Парсеваля получается

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_{pq}(\sigma)|^2\, d\sigma < e^{4\pi c} \int_{-\pi}^{\pi} |\vartheta(t)|^2\, dt = e^{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_{pq}(\sigma + 2ic)|^2\, d\sigma,$$

и, в силу (12) при $p \to -\infty$, $q \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_{pq}(\sigma)|^2\, d\sigma \to 0.$$

Возвращаясь к формуле (10), мы убеждаемся в том, что ряд Эрмита (8) сходится в $L_2(-\infty, \infty)$.

§ 3. Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Обозначим

$$h_{kl}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{kl}(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Тогда

$$\Psi_{kl}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} h_{kl}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

и, в силу равенств (7) и (7′), получаем, что $\{h_{kl}(x)\}$ и $\{e^{i\lambda_k x}\}$ — биортонормированные системы.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(-\pi, \pi)$ и

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

— ее преобразование Фурье. Разлагая $F(\lambda)$ в ряд Эрмита (8) и применив обратное преобразование Фурье, мы получим следующее разложение функции $f(x)$ в $L_2(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\kappa_j} \sum_{l=0}^{\alpha_k - 1} F^{(l)}(\lambda_k)\, h_{kl}(x). \tag{13}$$

Из существования биортогональной системы следует, что разложение (13) единственное, то есть что система $h_{kl}(x)$ — обобщенный базис. По лемме 1 отсюда следует, что $\{e^{i\lambda_n x}\}$ также обобщенный базис, отвечающий той же системе индексов. Теорема доказана.

Замечание 1. *Индексы k_j в разложении (13) можно выбрать так, что $k_j < k_{j+1} < k_j + 2K$, где K имеет тот же смысл, что и в лемме 2.*

Действительно, если обозначить через k_{2p} число точек λ_k в интервале $r_{-p} < Re\,\lambda_k < r_p$ и через k_{2p+1} число этих точек в интервале $r_{-p} < Re\,\lambda_k < r_{p+1}$, то в силу лемм 5 и 2 получим, что $k_j < k_{j+1} < k_j + 2K$.

Замечание 2. *Если, кроме условий а), б) и в) точки λ_k удовлетворяют еще условию $\operatorname{Inf}|\lambda_k - \lambda_j| > 0$; $(j \neq k)$, то система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ образует базис в $L_2(-\pi, \pi)$ в обычном смысле.*

Действительно, в этом случае, при достаточно малом $\delta > 0$, кружки множества C_δ не пересекаются. Заменяя, при получении формулы (10), в контуре L_{ab} вертикальные отрезки дугами ограниченной длины, не проходящими через точки множества C_δ и соединяющими прямые $\tau = c$; $\tau = -c$, мы докажем сходимость ряда (8) в $L_2(-\infty, \infty)$ а, следовательно, и ряда (13) в $L_2(-\pi, \pi)$ при любом способе возрастания индексов.

Из основной теоремы можно получить различные достаточные условия для того, чтобы система функций была базисом или обобщенным базисом. Для получения одного такого признака мы воспользуемся следующим фактом, полученным М. Г. Крейном и автором в совместной работе [5]*.

Для того, чтобы числа $\{\lambda_n\}$ удовлетворяющие условию $|\lambda_n - n| \leq L < \infty$, образовывали множество корней целой функции $\Phi(\lambda)$ конечной степени π, и такой, что при некотором фиксированном τ

$$|\ln[\Phi(\sigma + i\tau)\, e^{i\pi(\sigma + i\tau)}]| < M < \infty; \quad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы числа $\{\lambda_n\}$ имели вид

$$\lambda_n = n + (-1)^n \varphi(n), \tag{15}$$

где $\varphi(z)$ — целая функция конечной степени, не большей π, ограниченная на вещественной оси.

Очевидно, что из (14) следует условие в) теоремы 1. Отсюда получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\varphi(z)$ целая функция конечной степени не большей π, модуль $|\varphi(x)|$ ограничен на вещественной оси и*

$$\lambda_n = n + (-1)^n \varphi(n),$$

то система $\{e^{i\lambda_n x}\}$ есть обобщенный базис в $L_2(-\pi, \pi)$.

Замечания 1 и 2 при этом остаются в силе.

---

* См. также [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Paley and N. Wiener. Fourier Transform in the Complex Domain, New York, (1934).

[2]. R. I. Duffin and I. I. Eachus. Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener. Bull. Amer. Math. Soc. 48, (1942).

[3]. С. С. Банах. Курс функціонального аналізу. «Радянська школа», (1948).

[4]. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, (1956).

В [4], стр. 594, в формулировке теоремы допущена ошибка. Там вместо условия (14) поставлено условие в) теоремы 1.

[5] М. Г. Крейн и Б. Я. Левин. О целых почти периодических функциях экспоненциального типа. «ДАН СССР», 64, № 3, (1949).