О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ $\frac{1}{t-z_k}$

В. Э. Кацнельсон

Пусть $C_0(-\infty, \infty)$ — банахово пространство комплекснозначных функций $x(t)$, непрерывных на вещественной оси $(-\infty < t < \infty)$ и стремящихся к нулю, когда $|t| \to \infty$, с нормой

$$\| x(t) \|_{C_0} = \sup_{-\infty < t < \infty} | x(t) |.$$

Пусть z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — точки полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а w_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — точки полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Мы будем рассматривать функции $(t - z_k)^{-1}$ и $(t - w_k)^{-1}$ как элементы пространства $C_0(-\infty, \infty)$. Пусть $E^- = E^-(z_1, \ldots, z_n)$ — подпространство в $C_0(-\infty, \infty)$, натянутое на функции $(t - z_k)^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $E^+ = E^+(w_1, \ldots, w_m)$ — подпространство, натянутое на функции $(t - w_k)^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Очевидно, $E^- \cap E^+ = 0$ и сумма $E = E^- \dotplus E^+$ — прямая. Пусть $\Phi(t) \in E$,

$$\Phi(t) = \Phi^-(t) + \Phi^+(t), \tag{1}$$

где

$$\Phi^-(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{t - z_k} \tag{2}$$

и

$$\Phi^+(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\eta_k}{t - w_k}, \tag{3}$$

ξ_k и η_k — комплексные числа. Определим на подпространстве $E = E(z_1, \ldots, z_n; w_1, \ldots, w_m)$ пространства $C_0(-\infty, \infty)$ проекторы $\mathfrak{P}^- = \mathfrak{P}^-(z_1, \ldots, z_n; w_1, \ldots, w_m)$ и $\mathfrak{P}^+ = \mathfrak{P}^+(z_1, \ldots, z_n; w_1, \ldots, w_m)$ на подпространства $E^- = E^-(z_1, \ldots, z_n)$ и $E^+ = E^+(w_1, \ldots, w_m)$ соответственно:

$$\mathfrak{P}^-\Phi(t) = \Phi^-(t)$$

и

$$\mathfrak{P}^+\Phi(t) = \Phi^+(t).$$

Наш основной результат — теорема 1.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\| \mathfrak{P}^-(z_1, \ldots, z_n; w_1, \ldots, w_m) \| = \sup_{\Phi \in E} \frac{\| \mathfrak{P}^-\Phi \|_{C_0}}{\| \Phi \|_{C_0}} \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \min \{ n(m+n), m(m+n) \}, \tag{4}$$

где C — абсолютная константа, которая может быть выбрана $C = 1000$.

При доказательстве теоремы 1 существенную роль будет играть аппарат преобразования Фурье. Напомним, что для каждой функции $\Phi(t)$ вида (1) определено преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}\Phi = \tilde{\Phi}(\lambda) = V.\ P. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \cdot e^{it\lambda}\, dt,$$

причем

$$\tilde{\Phi}^{-}(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0 \tag{5}$$

и

$$\tilde{\Phi}^{+}(\lambda) = 0, \quad \lambda > 0. \tag{6}$$

Мы будем рассматривать оператор Фурье $\mathfrak{F}$ как оператор, действующий из подпространства $E = E^{-} \dotplus E^{+} \subset C_0(-\infty, \infty)$ в банахово пространство $L(-\infty, \infty)$, суммируемых на вещественной оси функций с нормой

$$\| u(\lambda) \|_L = \int_{-\infty}^{\infty} | u(\lambda) |\, d\lambda.$$

Будут рассматриваться также сужения $\mathfrak{F}^{-}$ и $\mathfrak{F}^{+}$ оператора на подпространства $E^{-}(z_1, \ldots, z_n)$ и $E^{+}(w_1, \ldots, w_m)$ соответственно. Как обычно,

$$\| \mathfrak{F} \| = \sup_{\Phi \in E} \frac{\| \mathfrak{F}\Phi \|_L}{\| \Phi \|_C}.$$

Аналогично определяются $\| \mathfrak{F}^{-} \|$ и $\| \mathfrak{F}^{+} \|$.

Лемма. *Имеют место неравенства*

$$\| \mathfrak{F}^{-} \| \leqslant 30n,$$

и

$$\| \mathfrak{F}^{+} \| \leqslant 30m,$$

$$\| \mathfrak{F} \| \leqslant 2000 \cdot \min\{n(m+n),\ m(m+n)\}.$$

Доказательство. Пусть $\Phi^{-}(t) \in E^{-}(z_1, \ldots, z_n)$ и

$$\max_{-\infty < t < \infty} |\Phi^{-}(t)| = 1. \tag{7}$$

Так как

$$\Phi^{-\prime}(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\xi_k}{(t - z_k)^2},$$

то $\mathrm{Re}\,\varphi'(t)$ и $\mathrm{Im}\,\varphi'(t)$ не более чем $4n - 2$ раза меняют знак при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$, а это вместе с равенством (7) дает

$$\operatorname*{var}_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^{-\prime}(t)| \leqslant 4(4n - 2) < 16n. \tag{8}$$

Для L_1-нормы преобразования Фурье $\tilde{\Phi}^{-}(\lambda)$ функции $\Phi(t)$, голоморфной в нижней полуплоскости, имеет место оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}^{-}(\lambda)|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname*{var}_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-}(t), \tag{9}$$

получаемая так же, как известная оценка Харди—Литльвуда суммы модулей коэффициентов Тейлора функции, голоморфной в круге $|\lambda| \leqslant 1$ через ее вариацию на окружности. (По поводу оценки Харди—Литльвуда см., например, [1, стр. 455] или [2, стр. 104]).

Воспользовавшись оценками (8) и (9), получаем

$$\|\mathfrak{F}^-\| \leqslant 30n.$$

Аналогично

$$\|\mathfrak{F}^+\| \leqslant 30m.$$

Оценим $\|\mathfrak{F}\|$. Пусть, для определенности, $n \leqslant m$. Пусть

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Phi(t)| = 1,$$

где $\Phi(t)$ определена равенствами (1), (2) и (3). Рассмотрим функцию

$$\Phi_1^+(z) = \Phi(z) : B^{-1}(z),$$

где

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k}. \tag{10}$$

Очевидно, $\Phi_1^+(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, имеет вид (2) и

$$\max_{-\infty \leqslant t < \infty} |\Phi_1^+(t)| = 1.$$

По уже доказанному

$$\|\tilde{\Phi}_1^+(\lambda)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}_1^+(\lambda)|\, d\lambda \leqslant 30(m+n),$$

Преобразованием Фурье функции $B(t)$, определенной в (10), будет являться мера

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\lambda) + \mathfrak{F}[B(t) - 1],$$

где $\delta(\lambda)$ — δ-функция.

Так как

$$\max_{-\infty<t<\infty} |B(t) - 1| \leqslant 2,$$

то по доказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}[B(t) - 1](\lambda)|\, d\lambda \leqslant 60 \cdot n$$

и

$$\|\tilde{B}(\lambda)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |d\mu| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 60n < 61n.$$

Так как

$$\Phi^-(t) = \Phi_1^+(t) \cdot B(t),$$

то

$$\tilde{\Phi}^-(\lambda) = \tilde{\Phi}_1^+(\lambda) * \tilde{B}(\lambda)$$

и

$$\|\tilde{\Phi}^-(\lambda)\|_{L_1} \leqslant \|\tilde{\Phi}_1^+(\lambda)\|_{L_1} \cdot \|\tilde{B}(\lambda)\|_{L_1} \leqslant 30n \cdot 61(m+n) < 2000 \cdot n(m+n).$$

Случай, когда $m \leqslant n$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Phi(t)| = 1,$$

где $\Phi(t)$ определена в (1), (2) и (3). По лемме 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}(\lambda)|\, d\lambda \leqslant 2000 \min\{n(m+n),\ m(m+n)\}.$$

Вследствие (5) и (6)

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \begin{cases} \Phi^-(\lambda), & \lambda > 0 \\ \Phi^+(\lambda), & \lambda <. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|\tilde{\Phi}^-(\lambda)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}^-(\lambda)|\, d\lambda = \int_0^{\infty} |\tilde{\Phi}(\lambda)|\, d\lambda \leqslant 2000 \times$$
$$\times \min\{n(m+n),\ m(m+n)\}.$$

Ввиду того, что

$$\Phi^-(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}^-(\lambda) e^{-i\lambda t}\, d\lambda,$$

$$\|\Phi^-(t)\|_{C_0} = \max_{-\infty<t<\infty} |\Phi^-(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\tilde{\Phi}^-(\lambda)\|_{L_1} \leqslant 1000 \times$$
$$\times \min\{n(m+n),\ m(m+n)\}.$$

Отметим, что при фиксированном n и при $m \to \infty$ правая часть оценки (4) стремится к бесконечности, и при $m = n$ правая часть (4) стремится к бесконечности как n^2, когда $n \to \infty$. Представляется правдоподобным, что имеет место более точная оценка

$$\|\Psi^-(z_1, \ldots, z_n;\ w_1, \ldots, w_m)\| \leqslant C \cdot \ln(n+1), \tag{11}$$

где C — абсолютная константа, однако нам это показать не удалось. Мы покажем далее, что неравенство (11), по крайней мере в смысле порядка роста по n, не может быть улучшено. Некоторые основания в пользу гипотезы (11) дает

Теорема 2. *Пусть* $z_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ *— точки полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *а* $w_k\ (k = 1, 2, \ldots, m)$ *— точки полуплоскости* $\operatorname{Im} z < 0$. *Пусть*

$$\Psi(t) = \Psi^-(t) + \Psi^+(t), \tag{12}$$

где

$$\Psi^-(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - z_k} \tag{13}$$

и

$$\Psi^+(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - w_k}. \tag{14}$$

Если

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Psi(t)| \leqslant 1, \tag{15}$$

то

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Psi^{-}(t)| \leqslant C \cdot \ln(n+1), \tag{16}$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Рассмотрим ядро

$$K(t,\ h,\ n) = \frac{1}{t+ih} - \frac{1}{t+in} \ (0<h<1,\ -\infty<t<\infty).$$

Оценим

$$\| K(t,\ h,\ n) \|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |K(t,\ h,\ n)|\,dt.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,\ h,\ n)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{t+ih} - \frac{1}{t+in}\right| dt < n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|(t+ih)(t+in)|} =$$

$$= n \int_{|t|<h} \frac{dt}{|(t+ih)(t+in)|} + n \int_{h<|t|<n} \frac{dt}{|(t+ih)(t+in)|} + n \int_{n<|t|} \frac{dt}{|(t+ih)(t+in)|} \leqslant$$

$$\leqslant 2 + 2\ln\frac{n}{h} + 2 = 4 + \ln\frac{n}{h}. \tag{17}$$

Пусть функция $\Psi(t)$ (см. 12) удовлетворяет неравенству (15). Непосредственно проверяется, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} K(t+x,\ h,\ n)\,\Psi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+ih+z_k} - \frac{1}{x+in+z_k}\right). \tag{18}$$

Из (15), (17) и (18) получаем

$$\max_{-\infty<x<\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+z_k+ih} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+z_k+in} \right| \leqslant \| \Psi(t) \|_{C_0} \cdot \| K(t) \|_{L_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4 + 2\ln\frac{n}{h}\right). \tag{19}$$

Так как $\operatorname{Im} z_k = y_k > 0$, то $|x+z_k+in| > n$, и

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+z_k+in} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x+z_k+in|} < 1. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$\max_{-\infty<x<\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+z_k+ih} \right| < \frac{1}{2\pi}\left(11 + 2\ln\frac{n}{h}\right) \quad (0<h<1). \tag{21}$$

Положив в (21) $h = \frac{1}{(n+4)^2}$, получим

$$\max_{-\infty<x<\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x + z_k + \frac{i}{(n+4)^2}} \right| < \frac{1}{2\pi} [11 + 6 \ln (n+4)]. \tag{22}$$

В связи с тем, что мнимые части всех слагаемых в левой части (22) одного знака,

$$\left| \operatorname{Im} \frac{1}{x + z_k + \frac{i}{(n+4)^2}} \right| < \frac{1}{2\pi} [11 + 6 \ln (n+4)]. \tag{23}$$

Полагая в (23) $x = -x_k = -\operatorname{Re} z_k$, получим

$$\frac{1}{y_k + \frac{1}{(n+4)^2}} < \frac{1}{2\pi} [11 + 6 \ln (n+4)] \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

откуда следует

$$y_k > \frac{2\pi}{5[5 + 6 \ln (n+4)]}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x + z_k} - \frac{1}{x + z_k + \frac{i}{(n+4)^2}} \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{x + z_k} - \frac{1}{x + z_k + \frac{i}{(n+4)^2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+4)^2} \frac{1}{y_k \left(y_k + \frac{1}{(n+4)^2} \right)} \leqslant \frac{5}{4\pi^2} \frac{n}{(n+4)^2} [5 + 6 \ln (n+4)]^2 < C_1, \tag{26}$$

где C_1 — константа, не зависящая от n. Из (22) и (26) следует, что

$$\max_{-\infty<t<\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - z_k} \right| \leqslant C \cdot \ln (n+1),$$

где константа C не зависит от n. Теорема 2 доказана.

Приведем теперь пример, показывающий, что оценка (16), которая дается теоремой 2, не может быть улучшена, по крайней мере, в смысле порядка роста по n. Пусть

$$\Psi^{-}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - ik}$$

и

$$\Psi^{+}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t + ik}.$$

Очевидно,

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2t}{t^2 + k^2}$$

и

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Psi(t)| < \int_0^\infty \frac{2t}{t^2+x^2}\,dx = \pi,$$

однако

$$\max_{-\infty<t<\infty} |\Psi^-(t)| = |\Psi^-(0)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Отметим, что попутно нами доказана теорема 3, существенно улучшающая результаты Е. А. Горина ([3, стр. 506—508]) и Николаева [4].

Теорема 3*. *Пусть $P(z)$ — полином степени n, и пусть*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left|\frac{P'(x)}{P(x)}\right| \leqslant M. \tag{27}$$

Тогда полином $P(z)$ не имеет нулей в полосе

$$|\operatorname{Im} z| < \frac{c}{\ln(n+1)},$$

где $c>0$ — абсолютная константа.

Доказательство. Образуем функцию

$$\Psi(x) = \frac{\frac{d}{dx} P\left(\frac{x}{M}\right)}{P\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

функция $\Psi(x)$ имеет вид

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - Mz_k},$$

где z_k — нули полинома $P(z)$, и удовлетворяет условию (15). При доказательстве теоремы 2 мы получили неравенство (25), или

$$|\operatorname{Im} Mz_k| > \frac{c}{\ln(n+1)},$$

где $c>0$ — абсолютная константа. Это неравенство и составляет содержание теоремы 3.

Определение. *Пусть γ_n — верхняя грань таких чисел γ, что любой полином $P(z)$ степени не выше n, удовлетворяющий условию*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left|\frac{P'(x)}{P(x)}\right| \leqslant 1,$$

не имеет нулей в полосе $|\operatorname{Im} z| < \gamma$.

Теорема 3 показывает, что $\gamma_n > \frac{c}{\ln(n+1)}$, где $c>0$ — абсолютная константа. Отметим, что неизвестно, стремится ли γ_n к нулю, когда $n\to\infty$.

Теорема 3 может быть обобщена на полиномы от нескольких переменных.

---

* После того как настоящая работа была сдана в печать, вышла в свет работа А. О. Гельфонда (9), в которой теорема 3 получена другим методом.

Теорема 4. *Пусть $P(z_1, \ldots, z_n)$ — полином от n комплексных переменных $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ степени n_j по переменной z_j. Пусть*

$$\sup_{\substack{-\infty < x_1 < \infty \\ \cdots \\ -\infty < x_n < \infty}} \frac{\left|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|}{|P(x_1, x_2, \ldots, x_n)|} \leqslant M_j < \infty \ (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (28)$$

Тогда полином $P(z_1, \ldots, z_n)$ не обращается в нуль в трубчатой области с основанием

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot \frac{M_j}{\gamma_{n_j}} < 1. \quad (29)$$

Доказательство теоремы 4 проводится рассмотрением полинома $P(z_1, \ldots, z_n)$ как полинома от одной переменной при фиксированных остальных $n-1$ переменных. При проведении доказательства нам существенно приходится использовать специфику многих комплексных переменных. Отметим, что формулировка и идея доказательства теоремы 4 принадлежит Л. И. Ронкину, и мы публикуем теорему 4 с его любезного разрешения.

Мы будем исходить из следующей замечательной теоремы С. Н. Бернштейна*.

Теорема.** *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция вещественных переменных, заданная в прямоугольнике $C: |x_j| < k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть при всяком j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и при всяких вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_n$ функция $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, z_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного z_j, голоморфна в эллипсе E_j, имеющем фокусы — k_j, k_j и полусумму осей k_j/φ_j, и пусть $|f(x_1, \ldots, x_{j-1}, z_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)| \leqslant M$, когда $z_j \in E_j$. Тогда функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфна и удовлетворяет неравенству $|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant 2^n(1-\lambda)^{-n}M$ в любой полицилиндрической области вида $z_j \in E_j'$, где E_j' — эллипс софокусный эллипсу E_j и имеющий полусумму осей k_j/R_j, а $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\ln \lambda R_j}{\ln \varphi_j} = 1.$$

Для доказательства теоремы 4 мы применяем теорему С. Н. Бернштейна к функции

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{P(z_1, \ldots, z_n)},$$

исчерпывая надлежащим образом полосы $|y_j| < \gamma_{n_j}$ эллипсами E_j.

---

* Эта теорема доказана в [5, стр. 102] для случая двух переменных. Доказательство автоматически переносится на случай n переменных.

** Отметим, что эта теорема является исторически первой теоремой типа теорем «об острие угла» ([6, гл. V, § 27;] [7, гл. IV, § 19]; [8, стр. 133—190]).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. т. I, Изд-во «Мир», М., 1965.

2. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. Изд-во иностр. лит., М., 1963.

3. Е. А. Горин. Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. «Сибирский матем. журнал». III, № 4, 501—526, 1962.

4. Е. Г. Николаев. Геометрическое свойство нулей полиномов. «Вестн. МГУ, серия матем.», № 5 (1965), 23—27

5. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, М., 1952.

6. В. С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. Изд-во «Наука», М., 1964.

7. Б. А. Фукс. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1963.

8. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958.

9. А. О. Гельфонд. Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными их логарифмов на действительной оси. Матем. сборник, т. 71, вып. 3, 1966.

Поступила 17 марта 1966 г.