

К-14038
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0453-8048

П 3189/6



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

334 '89

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

«Выща школа»

1 р. 10 к.



ISSN 0453-8048. Вестн. Харьк. ун-та. 1989. № 334. Динам. системы. 1—112.



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 334

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Основан в 1965 г.

Харьков
Издательство при Харьковском
государственном университете
издательского объединения
«Выща школа»
1989

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов и механике сплошных сред, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), В. И. Коробов (зам. отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-72-40

~~Редакция литературы по естественным наукам и филологии~~
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

~~Издано по заказу Харьковского государственного университета~~

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА

Задача стабилизации относительно подпространства линейных автономных систем дифференциальных уравнений изучалась в работах [1—5]. В частности, в [3—5] получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости.

В данной работе методами, близкими к применяемым в [3—4], аналогичная задача исследуется для случая разностных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы разностных уравнений относительно подпространства.

Рассмотрим систему

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где A, B — постоянные вещественные матрицы размеров $m \times m$ и $m \times r$; $x \in E_m$; $u \in E_r$.

Обозначим через $L = \text{Lin}(B, AB, \dots, A^{m-1}B)$. Так как подпространство L является A — инвариантным, то ортогональное дополнение $L^\perp$ будет A^* — инвариантным. Введем в $L^\perp$ канонический базис из корневых векторов матрицы A^* (см. [6]). Тогда $L^\perp$ может быть представлено в виде прямой суммы $L^\perp = K^S + K_2$, где K^S — подпространство, порожденное корневыми векторами матрицы A^* из $L^\perp$, отвечающими собственным значениям λ с $|\lambda| < 1$, а K_2 — подпространство, порожденное корневыми векторами матрицы A^* из $L^\perp$, отвечающими собственным значениям λ с $|\lambda| \geq 1$. Так как $E_m = K^S + K_2 + L$, то каждый вектор $f \in E_m$ разлагается в сумму $f = f^S + f_2 + f_L$. Если обозначить $f^R = f_2 + f_L$, то каждый вектор f можно представить в виде $f = f^S + f^R$ (2).

Установим следующие три вспомогательные результата.

Лемма 1. Для произвольных вектора $f^S \in K^S$, управления u_n и начального вектора x_0 решение системы (1) удовлетворяет условию $(f^S, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Вектор f^S можно разложить по корневым векторам матрицы A^* : $f^S = \sum_k \eta_k$, где η_k — корневой вектор высоты m_k , отвечающий собственному значению λ_k с $|\lambda_k| < 1$.

В силу формулы Коши имеем

$$x_n = \sum_{k=1}^n A^{n-k} B u_{k-1} + A^n x_0,$$

откуда, обозначив через b_i столбцы матрицы B , получаем

$$(f^S, x_n) = (f^S, A^n x_0) + \left(f^S, \sum_{k=1}^n A^{n-k} \sum_{i=1}^r b_i u_{k-1}^i \right), \quad (3)$$

где $u_{k-1}^* = (u_{k-1}^1, \dots, u_{k-1}^r)$. Так как $A^{n-k} b_i \in L$, $f^S \in L^\perp$, то в правой части (3) второе слагаемое равно нулю и, следовательно,

$$(f^S, x_n) = (A^{*n} f^S, x_0) = \sum_k (A^{*n} \eta_k, x_0). \quad (4)$$

Несложные вычисления приводят к равенству

$$A^{*n} \eta_k = \sum_{l=0}^{m_k-1} C_n^l \lambda^{n-l} (A^* - \lambda_k I)^l \eta_k, \quad n > m_k. \quad (5)$$

Таким образом, если $|\lambda| < 1$, то $A^{*n} \eta_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда в силу (4) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Для любого ненулевого вектора $f_2 \in K_2$ существует начальный вектор x_0 такой, что решение системы (1) с произвольным управлением u_n удовлетворяет соотношению $(f_2, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как $f_2 \in L^\perp$, то аналогично предыдущему

$$(f_2, x_n) = (A^{*n} f_2, x_0).$$

Поскольку f_2 разлагается по корневым векторам матрицы A^* , то $A^{*n} f_2$ представим в силу (5) в виде линейной комбинации функций вида $C_n^0 \lambda^n$, $C_n^1 \lambda^{n-1}$, ..., $C_n^{\nu} \lambda^{n-\nu+1}$, где $\nu = \max_k \{m_k\}$. Причем

в силу $f_2 \neq 0$ один из коэффициентов линейной комбинации (обозначим его g_s) отличен от нуля, так как в противном случае, воспользовавшись сужением оператора A^* на корневое подпространство, соответствующее собственным значениям λ с $|\lambda| < 1$, мы получили бы $f_2 = 0$. Таким образом,

$$A^{*n} f_2 = \sum_{j=0}^{\nu-1} C_n^j \lambda^{n-j} g_j,$$

где $g_s \neq 0$. В качестве x_0 выберем вектор, не ортогональный g_s и ортогональный всем остальным коэффициентам g_j . Тогда $(A^{*n} f_2, x_0) = C_n^s \lambda^{n-s} (g_s, x_0)$, откуда $|(A^{*n} f_2, x_0)| = C_n^s |\lambda|^{n-s} |(g_s, x_0)|$. Так как $|\lambda| \geq 1$, то $(A^{*n} f_2, x_0) \rightarrow 0$.

Лемма 3. Если система (1) стабилизируема управлением $u_n = Qx_n$ относительно подпространства $\{x: (f, x) = 0\}$ и если вектор f ортогонален столбцам матрицы $(B, AB, \dots, A^{i-1}B)$, то любое решение системы (1) со стабилизирующим управлением $u_n = Qx_n$ удовлетворяет соотношениям $(A^{*k} f, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $k=0, j$.

Доказательство. При $u_n = Qx_n$ система (1) превращается в систему $x_{n+1} = (A + BQ)x_n$, общее решение которой имеет вид $x_n = (A + BQ)^n x_0$.

По условию $(f, x_n) \rightarrow 0$, или $(f, (A + BQ)^n x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как вектор $\dot{f}$ ортогонален столбцам матрицы $(B, AB, \dots, A^{j-1}B)$, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(A^* f, x_n) &= (f, Ax_n) = (f, (A + BQ)x_n) = (f, x_{n+1}) \\(A^{*2} f, x_n) &= (f, A^2 x_n) = (f, (A + BQ)^2 x_n) = (f, x_{n+2}) \\(A^{*j} f, x_n) &= (f, A^j x_n) = (f, (A + BQ)^j x_n) = (f, x_{n+j}),\end{aligned}$$

из которых следует утверждение леммы.

Пусть D — матрица, L — подпространство. Запись $D \subset L$ будет в дальнейшем означать, что столбцы матрицы D принадлежат подпространству L .

Теорема. Для стабилизируемости системы $x_{n+1} = Ax_n + bu_n$, $b \in E_m$ (6) относительно подпространства $G = \{x: Hx = 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^S$, либо существовали вектор «с» и неотрицательное число j такие, что

$$H^* \subset \text{Lin}(c, A^*c, \dots, A^{*j}c) + K^S, \quad (7)$$

причем $(c, A^k b) = 0$, $0 \leq k < j$, $(c, A^j b) \neq 0$. (8)

Доказательство. Необходимость. Пусть система (6) стабилизируема относительно подпространства G управлением $u_n = Qx_n$.

Если $H^* \subset K^S$, то необходимость доказана. Пусть $H^* \not\subset K^S$ и пусть h_i — столбцы матрицы H^* . Рассмотрим полученные в соответствии с обозначением (2) векторы h_i^R . Пусть q — максимальное число линейно независимых векторов системы $\{h_i^R\}$. Очевидно, $q \geq 1$. Не нарушая общности, будем считать, что векторы $h_1^R, \dots, h_q^R$ линейно независимы. Матрицу, составленную из этих векторов, обозначим через $H^{*(1)}$. Таким образом, $H^{*(1)} = (h_1^R, h_2^R, \dots, h_q^R)$.

Покажем, что найдутся постоянные α_i , $i = \overline{1, q}$, не равные нулю одновременно, такие, что для некоторого $j \geq q-1$ вектор

$$v = \sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^R$$

удовлетворяет соотношениям

$$(v, b) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^R, b) = 0;$$

$$(v, Ab) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^R, Ab) = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(v, A^{j-1}b) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^R, A^{j-1}b) = 0; \quad (9)$$

$$(v, A^j b) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^R, A^j b) \neq 0. \quad (10)$$

Действительно, при $j=q-1$ система (9) имеет нетривиальное решение, как однородная линейная система $q-1$ уравнений с q неизвестными, т. е. существует ненулевой вектор v , удовлетворяющий системе (9). Если при данном j удовлетворяется соотношение (10), то нужный вектор построен. В противном случае вектор v удовлетворяет системе (9) при $j=q$. Если при этом удовлетворяется соотношение (10), то нужный вектор построен. В противном случае увеличиваем j на единицу и повторяем рассуждения.

Докажем, что при некотором $j \leq n$ вектор v будет удовлетворять соотношению (10). Допустим противное, т. е. пусть вектор v ортогонален векторам $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$, следовательно, $v \in L^\perp$. Так как по построению $v \in S_0$, то $v = v_2 \in K_2$. Поэтому в силу леммы 2 при произвольном управлении u_n найдется начальный вектор x_0 такой, что

$$(v, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

В силу леммы I выполняется соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^S, x_n \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Из равенств

$$\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i h_i, x_n \right) = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^R + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^S, x_n \right) = (v, x_n) + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^S, x_n \right)$$

на основании (11), (12) заключаем, что при любом управлении u_n будет

$$\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i h_i, x_n \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

а это противоречит стабилизируемости системы.

Таким образом, нужный вектор v построен. Для матрицы $H^{*(1)}$ и вектора v могут представиться две возможности:

1. $H^{*(1)} \subset \text{Lin}(v^R, (A^*v)^R, \dots, (A^{*j}v)^R)$. В этом случае $H^* \subset \text{Lin}(v, A^*v, \dots, A^{*j}v) + K^S$ (13) и доказательство необходимости закончено. Действительно, рассмотрим вектор h_i . Для него $h_i^R \in \text{Lin}(v^R, (A^*v)^R, \dots, (A^{*j}v)^R)$, поэтому

$$h_i^R = \sum_{k=0}^j \beta_{ki} (A^{*k}v)^R.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} h_i &= h_i^R + h_i^S = \sum_{k=0}^j \beta_{ki} (A^{*k}v)^R + h_i^S = \sum_{k=0}^j \beta_{ki} (A^{*k}v) - \\ &- \sum_{k=0}^j \beta_{ki} (A^{*k}v)^S + h_i^S \in \text{Lin}(v, A^*v, \dots, A^{*j}v) + K^S. \end{aligned}$$

Последнее включение означает, что справедливо (7).

$$2. H^{*(1)} \subset \text{Lin}(v^R, (A^*v)^R, \dots, (A^{*j}v)^R). \quad (14)$$

В этом случае вводим в рассмотрение матрицу

$$H^{*(2)} = (H^{*(1)}, v^R, (A^*v)^R, \dots, (A^{*j}v)^R).$$

Докажем, что ранг этой матрицы, который обозначим через q_2 , удовлетворяет соотношению $q_2 \geq q+1$. Для этого достаточно, например, показать, что векторы $v^R, \dots, (A^{*j}v)^R$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{k=0}^j \delta_k (A^{*k}v)^R = 0.$$

Применим следующую процедуру. Умножим это равенство скалярно на вектор b :

$$0 = \sum_{k=0}^j \delta_k ((A^{*k}v)^R, b) = \sum_{k=0}^j \delta_k (A^{*k}v, b) - \sum_{k=0}^j \delta_k ((A^{*k}v)^S, b),$$

откуда в силу включений $(A^{*k}v)^S \in L^\perp, b \in L$ следует

$$\sum_{k=0}^j \delta_k (A^{*k}v, b) = 0.$$

На основании (9) заключаем, что $\delta_j (A^{*j}v, b) = 0$, а на основании (10), что $\delta_j = 0$. Умножим теперь равенство

$$\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k (A^{*k}v)^R = 0$$

скалярно на вектор Ab . Как и выше, получим

$$0 = \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k ((A^{*k}v)^R, Ab) = \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k (A^{*k}v, Ab) = \delta_{j-1} (A^{*j}v, b),$$

откуда следует $\delta_{j-1} = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты $\delta_k = 0$. Таким образом, в силу (14) ранг $H^{*(2)}$ больше или равен $j+2 \geq q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{*(2)}$ и любого решения x_n системы (6) со стабилизирующим управлением $u_n = Qx_n$ будет $(h_i^{(2)}, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Для столбцов матрицы $H^{*(1)}$ это вытекает из условия стабилизируемости и леммы 1:

$$(h_i^{(1)}, x_n) = (h_i^R, x_n) = (h_i, x_n) - (h_i^S, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, система (6) стабилизируема относительно подпространства $\{x : (v, x) = 0\}$ тем же управлением. Тогда в силу леммы 3 получаем

$$(A^{*k}v, x_n) \rightarrow 0, k = \overline{0, j}, n \rightarrow \infty.$$

$$= (A^{*k_T} x_-) = ((A^{*k_T})^S$$

ждения, относящиеся к $N^*(2)$, получим, что будет выполнено соот-

$$= \text{Lin} (v_1^R, (A^* v_2)^R, \dots,$$

которой не меньше $q_2 +$

$$= (H^{*(2)}, v_2^R, (A^* v_2)^R, \dots$$

ения матриц с увелич
орваться на соотноше
 m -мерных векторов не

устъ существует векто

$$\subseteq \text{Lin}(c, A^*c, \dots, A^{*l}c)$$

$$b) = 0, k = \overline{0, j-1}, (c,$$

енные y_n^k , $k = \overline{1, j+1}$

$$= (A^{*k-I}c, x_n) = (c, A^{k-I}x_n)$$

му уравнений

$$bu_n) = (c, Ax_n) + (c, b$$

$$bu_n) = (c, A^2 x_n) + (c,$$

$$bu_n) = (c, A^l x_n) + (c, A^j$$

$$x_n + Aibu_n) = (c, A' +$$

$$\left[\begin{array}{c} - (c, A^{l+1}x_n) - \sum_{k=1}^{l+1} \tilde{\gamma}_k \\ \overline{b)} \end{array} \right] - (c, A^{l+1}x_n) - \sum_{k=1}^{l+1} \tilde{\gamma}_k$$

к, чтобы обеспечить у
матрицы системы

$$y_{n+1}^1 = y_n^2;$$

$$y_{n+1}^2 = y_n^3;$$

$$y_{n+1}^{j+1} = - \sum_{k=1}^{j+1} \gamma_k y_n^k.$$

Это можно сделать, так как характеристический многочлен этой матрицы определяется коэффициентами $\gamma_1, \dots, \gamma_{j+1}$. Поэтому все решения системы (16) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

По предположению существуют постоянные β_{ki} и векторы f_i^S такие, что

$$h_i = \sum_{k=1}^{j+1} \beta_{ki} A^{*k-1} c + f_i^S.$$

Поэтому при управлении, задаваемом соотношением (15), для любого решения системы (6) получим

$$(h_i, x_n) = \sum_{k=1}^{j+1} (\beta_{ki} A^{*k-1} c, x_n) + (f_i^S, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Действительно, первое слагаемое стремится к нулю в силу выбора управления u_n , так как $(\beta_{ki} A^{*k-1} c, x_n) = \beta_{ki} u_n^k$, а стремление к нулю второго слагаемого вытекает из леммы 1.

Если $H^* \subset K^S$, то система (6) стабилизируема, так как каждая компонента вектора Hx_n стремится к нулю в силу леммы 1. Теорема доказана.

Теорема. Для того чтобы система $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$ с r -мерным управлением была стабилизируема относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^S$, либо существовали векторы $c_1, \dots, c_p$ и неотрицательные целые числа $k_1, \dots, k_p$ такие, что

$$H^* \subset \text{Lin}(c_1, A^{*k_1} c_1, \dots, A^{*k_p} c_p, \dots, c_p, A^* c_p, \dots, A^{*k_p} c_p) + K^S,$$

причем

$$c_1^* A^k B = 0, 0 \leq k < k_1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_p^* A^k B = 0, 0 \leq k < k_p;$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c_1^* A^{k_1} B \\ \dots \\ c_p^* A^{k_p} B \end{pmatrix} = p.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Список литературы: 1. Bhattacharyya S. P., Pearson I. B., Wonham W. M. On zeroing the output of a linear systems//Information and Control. 1972. 20, N 2. P. 135—142. 2. Wonham W. M. Tracking and regulation in linear multivariable systems//SIAM J. Control. 1973. 11, N 3. P. 424—437. 3. Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н.//Вестн. Харьк. ун-та. 1976. № 134: Мат. и механика. Вып. 41. С. 114—123. 4. Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н.//Вестн. Харьк. ун-та. 1977. № 148: Прикл. мат. и механика. Вып. 42. С. 3—11. 5. Уонзм У. М. Линейные многомерные системы управления. М., 1980. 376 с. 6. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л., 1963. 734 с.

Поступила в редколлегию 06.04.88

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k); \\ x(0) &= x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x(k) \in E_n$, $u(k) \in \Omega \subset E_r$, A, B — вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $\Omega = \{u \in E_r : \|u\| \leq d\}$. В данной работе рассмотрена задача синтеза [1, 2] ограниченных управлений в задаче управляемости из множества $M \subset E_n$ в ноль для линейной дискретной системы (1) за свободное число шагов, т. е. построения такого управления $u(x(k), k) \in \Omega$, что для любого $x_0 \in M$ существует конечное целое число $N = N(x_0) \geq 0$, что решение системы (1), начинающееся в точке x_0 , через N шагов попадает в ноль, т. е.

$$x(N) = \left(A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} Bu(x(k), k) \right) = 0.$$

Если $M = E_n$, то будем говорить о глобальном синтезе в ноль, если $M = V_n(0, \varepsilon)$, где $V_n(0, \varepsilon)$ — замкнутый n -мерный шар положительного радиуса ε , где ε достаточно мало, будем говорить о локальном синтезе в ноль. Общее решение задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости в ноль для непрерывных систем дано в работах [2, 3]. В данной работе решена задача локального синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости в ноль из некоторой окрестности начала координат для системы (1) за свободное (фиксированное) число шагов. Основной результат получен в форме критерия. Также даны достаточные условия глобального синтеза ограниченных управлений для системы (1) с устойчивой матрицей A , т. е. такой, что $\sigma(A) \subset C^-$ где $C^- = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}$. Наряду с системой (1) будем рассматривать неуправляемую систему:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k); \\ x(0) &= x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{2}$$

Приведем некоторые определения.

Определение 1. Систему (1) назовем локально синтезируемой в ноль за свободное число шагов, если существуют управление $u(x(k), k) \in \Omega$ и шар $V_n(0, \varepsilon)$ такие, что для любого $x_0 \in V_n(0, \varepsilon)$ существует конечное целое число $N = N(x_0) \geq 0$, что решение системы (1) с управлением $u = u(x(k), k)$:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(x(k), k); \\ x(0) &= x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3}$$

попадает в ноль за N шагов, т. е.

$$\bar{x}(N) = \left(A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} B u(x(k)) \right) = 0.$$

Если управление можно выбрать в виде $u = Fx(k)$, где F — $r \times n$ — вещественная матрица, то будем говорить о локальном линейном синтезе.

Определение 2. Систему (1) назовем глобально синтезируемой в ноль за свободное число шагов, если существует управление $u(x(k), k) \in \Omega$ такое, что для любого $x_0 \in E_n$ существует конечное целое число $N = N(x_0) \geq 0$, что решение системы (3) попадет в ноль за N шагов.

Определение 3. Точку ноль назовем локально достижимой за свободное число шагов в силу системы (2), если существует замкнутый шар $V_n(0, \varepsilon)$ радиуса $\varepsilon > 0$, что для любой точки $x_0 \in V_n(0, \varepsilon)$ существует конечное целое число $N = N(x_0) \geq 0$ такое, что решение системы (2) достигнет нуля за N шагов, т. е. $x(N) = A^N x_0 = 0$.

Определение 4. Точку ноль назовем глобально достижимой за свободное число шагов в силу системы (2), если для любого $x_0 \in E_n$ существует конечное целое число $N = N(x_0) \geq 0$ такое, что решение системы (22) достигнет нуля за N шагов, т. е. $x(N) = A^N x_0 = 0$. Наряду с системой (1) будем рассматривать линейно эквивалентную систему [4]:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Q A Q^{-1} z(k) + Q B u(k) \\ z(0) &= z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где $z(k) = Qx(k)$, $\det Q \neq 0$.

Очевидно, что системы (1), (4) либо одновременно локально синтезируемы в ноль, либо нет.

Пусть $m(\lambda) = \lambda^{n_0} m_1(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A , $\deg m(\lambda) = p$, $n_0 \geq 0$, $m_1(\lambda)$ отвечает ненулевым собственным значениям матрицы A . Обозначим

$$K_0^- = \{x: A^{n_0} x = 0\}, \quad K_0^+ = \{x: m_1(A) x = 0\}.$$

Тогда $K_0^- \dot{+} K_0^+ = E_n$, $p_0 + q_0 = n$, $\dim K_0^- = p_0$, $\dim K_0^+ = q_0$.

Пусть $V_n(0, R)$ — n -мерный замкнутый шар положительного радиуса R . Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Точка ноль достижима за свободное число шагов из любой точки $x_0 \in V_n(0, R)$ в силу системы (2) тогда и только тогда, когда корневое подпространство, отвечающее нулевым собственным значениям матрицы A , совпадает со всем пространством E_n , т. е. $K_0^- = E_n$, что равносильно условию $\sigma(A) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$ или условию $K_0^- = 0$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть точка ноль достижима из любой точки шара $V_n(0, R)$, но $K_0^- \neq E_n$.

Тогда существует собственный вектор v матрицы A , отвечающий ненулевому собственному значению λ . Возможны два случая: 1) λ — вещественное, 2) λ — комплексное, т. е. $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. В первом случае возьмем $v > 0$ таким, что $vv \in V_n(0, R)$. Тогда решение системы (2) при $x_0 = vv$ примет вид: $x(k) = v\lambda^k v$ и $x(k) \neq 0$ при любом конечном целом k . Противоречие. Во втором случае $v = v_1 + iv_2$, $\lambda = e^{i(\cos \delta + i \sin \delta)}$, $\delta \neq 0$. Выберем $v > 0$ таким, что $v(v_1 + v_2) \in V_n(0, R)$. Тогда решение системы (2) при $x_0 = v(v_1 + v_2)$ примет вид

$$x(N) = vA^N(v_1 + v_2) = e^{iN}[(\cos \delta N + \sin \delta N)v_1 + (\cos \delta N - \sin \delta N)v_2].$$

Так как $e^{iN} > 0$ при любом конечном $N \geq 0$, v_1, v_2 — линейно независимы, а коэффициенты при векторах v_1 и v_2 в ноль одновременно не обращаются при любых $N \geq 0$, то $x(N) \neq 0$ при любых $N \geq 0$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $K_0^- = E_n$, т. е. $\sigma(A) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$, $m(\lambda) = \lambda^p$ — минимальный полином матрицы A . Тогда $A^p = O$.

Следовательно, для любой точки $x_0 \in E_n$, $x(p) = A^p x_0 = 0$. Таким образом, ноль достигим из каждой точки пространства E_n не более чем за p шагов. Теорема доказана полностью. Пусть $L = \text{Lin}(B, AB, \dots, A^{p-1}B)$ — линейная оболочка, натянутая на вектор-столбцы матрицы управляемости. Имеет место критерий локальной синтезируемости в ноль системы (1) за свободное число шагов:

Теорема 2. Для того чтобы система (1) была локально синтезируемой в ноль за свободное число шагов, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , «содержалось» в L , т. е. $K_0^+ \subset L$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть система (1) локально синтезируема в ноль за свободное число шагов, но $K_0^+ \not\subset L$. Возможны два случая: 1) $L = 0$, 2) $L \neq 0$. В первом случае $B = 0$, т. е. система (1) неуправляема. Тогда из условия $K_0^+ \subset L$ следует существование собственного вектора матрицы A , отвечающего ненулевому собственному значению λ . Но так как ноль достигим из любой точки $x_0 \in V_n(0, \varepsilon)$ в силу неуправляемости системы (2), то по теореме 1 следует, что $\sigma(A) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$. Противоречие. Во втором случае $\dim L = s$, $1 \leq s < n$. Тогда существует [4] такая невырожденная $n \times n$ вещественная матрица Q , что после замены переменных $z = Qx$ система (1) перейдет в линейно эквивалентную систему:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_1 z(k) + B_1 u(k); \\ z(0) &= z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_1 = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_1 = QB = \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$A_{11} (s \times s)$, $A_{12} (s \times (n-s))$, $A_{22} ((n-s) \times (n-s))$, $B_{11} (s \times r)$ — вещественные матрицы, $\text{rank} (B, AB, \dots, A^{n-1}B) =$
 $= \text{rank} (B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1) = \text{rank} (B_{11}, A_{11} B_{11}, \dots, A_{11}^{n-1} B_{11}) = s$,

$$L_1 = \text{Lin} (B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1) = QL, \quad K_{01}^+ = QK_0^+.$$

В силу линейной эквивалентности системы (1) и (5) одновременно локально синтезируемы в ноль за свободное число шагов. Из предположения $K_{01}^+ \subset L$ следует, что $K_{01}^+ \subset L_1 \cdot \sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cdot \sigma(A_{22})$. Так как $K_{01}^+ \subset L_1$, то у матрицы A_{22} есть ненулевое собственное значение λ . Пусть $z = (y_1, y_2)^*$, где $y_1 = (z_1, \dots, z_s)^*$, $y_2 = (z_{s+1}, \dots, z_n)^*$. Тогда произвольное решение системы (5) примет вид

$$z(N) = A_1^N z_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A_1^{N-1-k} B u(z(k), k) \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1(N) \\ y_2(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D z_0 \\ A_{22}^N y_2^0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} A_{11}^{N-1-k} B_{11} u(z(k), k) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_1^N = \begin{pmatrix} D & \\ 0 & A_{22}^N \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что $y_2(N) = A_{22}^N y_2^0$. Так как у матрицы A_{22} есть ненулевое собственное значение λ , то в силу теоремы 1 ноль не будет достижим за свободное число шагов из всех точек шара $V_{n-s}(0, \epsilon) \subset E_{n-s}$ в силу неуправляемой системы

$$\begin{aligned} y_2(k+1) &= A_{22} y_2(k); \\ y_2(0) &= y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда существуют точки $z_0 \in V_n(0, \epsilon)$, для которых $z(N) \neq 0$ для любого конечного целого $N \geq 0$. Поэтому система (5), а следовательно, и система (1) не являются локально синтезируемыми в ноль за свободное число шагов. Противоречие.

Достаточность. Пусть $K_0^+ \subset L$. Как и выше, рассмотрим два случая: 1) $L=0$, 2) $L \neq 0$. В первом случае у матрицы A все собственные значения нулевые. Пусть $m(\lambda) = \lambda^p$ — минимальный полином матрицы A . Тогда $A^p = 0$. Возьмем любую точку $x_0 \in E_n$. Положим $u(x(k), k) = 0$ при всех $k \geq 0$. Тогда решение системы (1) через p шагов попадает в ноль, т. е. $x(p) = A^p x_0 = 0$. В этом случае есть синтез в ноль из всех точек пространства E_n . Во втором случае, если $L = E_n$, то пара (A, B) полностью управляема и поэтому существует [5] вещественная $r \times n$ матрица F такая, что $\sigma(A +$

$+BF) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$. Положив в системе (1) управление $u = Fx(k)$, получим

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + BF)x(k); \\ x(0) &= x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$, то $x(p_2) = (A + BF)^{p_2} x_0 = 0$, где $p_2 = \deg m_2(\lambda)$, $m_2(\lambda) = \lambda^{p_2}$ — минимальный полином матрицы $(A + BF)$. В этом случае имеем синтез в ноль за p_2 шагов из всех точек шара $V_n(0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = \min_{0 < j < p_2 - 1} d/(\|F\| \cdot \|(A + BF)^j\|)$, если $\|F\| > 0$ и $\varepsilon_0 = +\infty$, если $\|F\| = 0$ с управлением $u = Fx(k) \in \Omega$, $k = 0, 1, \dots, p_2 - 1$.

Рассмотрим случай $1 \leq s < n$. Как и выше, перейдем от системы (1) к линейно эквивалентной системе

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} z(k) + \begin{pmatrix} B_{11} \\ O \end{pmatrix} u(k) \\ z(0) &= z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $K_0^+ \subset L$, то $K_{01}^+ = QK_0^+ \subset L_1$. Поэтому все ненулевые собственные значения матрицы A_1 (если такие есть) содержатся в управляемой части системы (8), т. е. принадлежат спектру матрицы A_{11} , а $\sigma(A_{22}) = \{\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0\}$. Пара (A_{11}, B_{11}) — полностью управляема. Поэтому можно выбрать вещественную $r \times s$ матрицу D_1 так, что $\sigma(A_{11} + B_{11}D_1) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0\}$. Пусть $r \times n$ матрица $F_1 = (D_1 O)$. Положив в системе (8) управление $u = F_1 z(k)$, получим замкнутую систему:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}D_1 & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} z(k) \\ z(0) &= z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

У матрицы системы (9) только нулевые собственные значения, поэтому ее минимальный полином имеет вид $m(\lambda) = \lambda^{p_3}$. В этом случае имеем синтез системы (9) в ноль за p_3 шагов из всех точек шара $V_n(0, \varepsilon_1)$, где

$$\varepsilon_1 = \min_{0 < j < p_3 - 1} d/(\|F_1\| \cdot \|(A_1 + B_1 F_1)^j\|), \text{ если } \|F_1\| > 0 \text{ и } \varepsilon_1 = +\infty, \text{ если } \|F_1\| = 0$$

с управлением $u = F_1 z(k) \in \Omega$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Но тогда и система (1) локально синтезируема в ноль за p_3 шагов из всех точек шара $V_n(0, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \min_{0 < j < p_3 - 1} d/(\|F_1 Q\| \cdot \|(A + BF_1 Q)^j\|)$, если

$$\|F_1\| > 0 \text{ и } \varepsilon_2 = +\infty, \text{ если } \|F_1\| = 0 \text{ с управлением } u = F_1 Qx(k) \in \Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, условие теоремы $K_0^+ \subset L$ позволяет локально синтезировать в ноль систему (1) с помощью линейного управления $u = Fx(k)$ за некоторое фиксированное число шагов, равное степени мини-

мального полинома матрицы $(A+BF)$ такой, что $\sigma(A+BF) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$.

Замечание. Локальная синтезируемость в ноль с помощью линейного управления допускает минимизацию числа шагов, т. е. оптимальность по быстродействию.

Рассмотрим пространство $n \times n$ вещественных матриц E_n^2 . Пусть $\Gamma_0 = \{A \in E_n^2: \sigma(A) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}\}$. Обозначим через Γ_j множество матриц из Γ_0 , имеющих минимальный полином степени j , т. е. для всех $A \in \Gamma_j$, $\deg m(\lambda) = j$. Отметим, что степень минимального полинома матрицы $A \in \Gamma_0$ определяется размерностью максимальной клетки жордановой формы матрицы A . Поэтому ситуация, при которой есть возможность выбрать $r \times n$ вещественную матрицу F_0 так, что $(A+BF_0) \notin \Gamma_j$ и ни при какой другой $r \times n$ вещественной матрице F , $(A+BF) \notin \Gamma_k$, где $1 \leq k < j$, $2 \leq j \leq n$ и дает нам линейный оптимальный по быстродействию локальный синтез в ноль за j шагов из всех точек некоторого шара $V_n(0, \varepsilon)$.

Рассмотрим систему (1), у которой матрица A устойчива. Имеет место следующая

Теорема 3. Для того чтобы система (1) с устойчивой матрицей A была глобально синтезируема в ноль за свободное число шагов, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы, «содержалось» в L , т. е. $K_0^+ \subset L$.

Доказательство. Достаточность. Возьмем произвольную точку $x_0 \in E_n$. По условию теоремы $K_0^+ \subset L$. Поэтому в силу теоремы 2 система (1) локально синтезируема в ноль за p шагов линейным управлением $u = Fx(k)$ из всех точек шара $V_n(0, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Здесь p — степень минимального полинома матрицы $(A+BF)$ такой, что $\sigma(A+BF) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$. Так как матрица A устойчива, то существует целое число $N = N(x_0) \geq 0$ такое, что $x_1 = A^N x_0 \in V_n(0, \varepsilon)$. Тогда за q шагов, где $q \leq p$, из точки $x_1 \in V_n(0, \varepsilon)$ попадем в ноль в силу системы (1) с линейным управлением $u = Fx(k)$. Итак, выбрав управление $u(x(k), k) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $u(x(k), k) = Fx(k)$, $k = N, \dots, N-q+1$ попадем из точки x_0 в точку ноль за $N+q$ шагов. Необходимость очевидна. Теорема доказана.

Численный пример. Рассмотрим систему (1) вида

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k); \quad (10)$$

$$x(0) = x_0, k = 0, 1, \dots, \Omega = \{u: |u| \leq d, d > 0\}.$$

Матрица системы (10) имеет спектр $\{0; (1+i)/2; (1-i)/2\} \subset \mathbb{C}^+$,

т. е. матрица системы (10) устойчива, $K_0^+ = \text{Lin} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$L = \text{Lin} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $K_0^+ = L$. Поэтому в силу теоре-

мы 2 система (10) локально синтезируема в ноль не более чем за три шага из всех точек некоторого шара $V_3(0, \varepsilon)$, а в силу теоремы 3 система (10) будет глобально синтезируема в ноль за свободное число шагов. Управление $u = (f_1, -1/2, -1/2)x(k)$, где $f_1 \neq 0$ обеспечивает системе (10) линейный локальный синтез в ноль за три шага. Управление $u = (0, -1/2, -1/2)x(k)$ обеспечивает системе (10) линейный оптимальный синтез в ноль за два шага из точек шара $V_3(0, d)$.

Выбрав $N \geq \log_{\sqrt{2}}(|x_{20}| + |x_{30}|)/d$, мы за N шагов попадем в силу системы (10) в шар $V_3(0, d)$ с управлением $u(x(k), k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, т. е. $x(N) = A^N x_0 = x_1 \in V_3(0, d)$. А из точки x_1 попадем в ноль с управлением $u = (0, -1/2, -1/2)x(k)$ за два шага. Итак, из точки x_0 попадем в ноль за $N+2$ шага с управлением $u(x(k), k) \in \Omega$.

Список литературы: 1. Математическая теория оптимальных процессов/Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М., 1969. 384 с. 2. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функций управляемости//ДАН СССР. 1979. 248, № 5. С. 1051—1055. 3. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости//Мат. сб. 1979. 109, № 4. С. 582—606. 4. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М., 1980. С. 375. 5. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., 1972. С. 574.

Поступила в редколлегию 12.05.88

УДК 517.5

В. Д. ГОРДЕВСКИЙ, Ю. В. ЛЫСЕНКО, И. Е. ОВЧАРЕНКО,
Л. Д. ПАВЛЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ЗАДАЧАМ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Задача Монжа—Канторовича; метод одномерных моментов. Поводом к написанию цикла статей по применению методов функционального анализа к задачам обработки изображений явилась неожиданная для авторов эффективность алгоритмов, основанных на идеологии задачи Монжа—Канторовича (З. М. К.) и метода моментов (М. М.). В первой из них рассматриваем некоторые моделирующие примеры. Даже при самой «грубой» постановке об-

наруживаются, по нашему мнению, далеко идущие связи между далекими друг от друга вопросами.

1. Задача идентификации квадрата текущего сигнала (к. т. с.) и подквадрата изображения (п. к. и.). Постановка задачи: задано изображение, т. е. квадратный участок плоскости, на котором распределена масса (задана функция освещенности, сосредоточена заданная мера). Точный смысл этих понятий определяется ниже. Изображение разбито по принципу координатной сетки на одинакового размера меньшие квадраты — подквадраты изображения (п. к. и.). Конкретный способ задания изображения п. к. и. может варьироваться: в одной постановке известна масса любого подмножества панно (непосредственное задание распределения масс), в другой постановке заданы какие-либо «интегральные» характеристики распределения, например, моменты. Считается заданным также квадрат того же размера, как и п. к. и. с распределенной на нем массой («квадрат текущего сигнала») — (к. т. с.). Требуется идентифицировать его с одним из имеющихся п. к. и., т. е. указать, на какой из п. к. и. этот к. т. с. «наиболее похож».

Подобные задачи неоднократно рассматривались, и для их решения привлекались, как правило, весьма сложные алгоритмы, основанные, например, на выделении «края» или «характерных рисунков» на сличаемых объектах [1, 2]. Однако часты ситуации, в частности таковыми были рассматриваемые нами изображения биологических объектов, когда либо край естественным образом не выделяется, либо «краев» столь много, что «края» нет. Рассмотрим два подхода к указанной задаче, основанных на использовании d_{HGR} -метрики Канторовича—Гавурина—Рубинштейна при оценке «близости» двух распределений. Различия между двумя подходами состоит в характере и способе задания информации о сличаемых объектах, и, следовательно, в способе вычисления и оценки метрики. В следующем разделе приведем общее определение метрики d_{HGR} и укажем некоторые нужные нам свойства этой метрики. В разделах 3 и 4 конкретизируются подходы I и II, приводятся расчетные формулы и строятся простейшие алгоритмы идентификации.

2. Расстояние Канторовича—Гавурина—Рубинштейна между мерами. Особое расстояние между мерами, о котором идет речь, было введено в связи с классической задачей перемещения масс, восходящей к Г. Монжу.

В работе [3] для дискретного случая содержались основные элементы последующего подхода к экстремальным задачам типа «перемещения» масс. Работа [3] была написана в 1940 г.*. Дальнейшее развитие она получила в работе Л. В. Канторовича и Г. Ш. Рубинштейна [4] как существенное обобщение транспортной задачи, и область ее применения продолжает расширяться [5, 6].

* Канторович Л. В. Мой путь в науке // Успехи мат. наук. 1987. 42, вып. 2. С. 132—213.

Приведем нужную для нас формулировку задачи перемещения масс в двух возможных вариантах.

Пусть X — метрический бикомпакт с метрикой $r(x; y)$ (в экономико-математической интерпретации $r(x; y)$ есть стоимость перемещения единичной массы из точки x в точку y). Пусть на X заданы две положительные меры $\mu_1(dx)$ и $\mu_2(dx)$ (начальное и конечное распределение масс).

Ищется неотрицательная мера μ на $X \times X$ (план перемещения масс), минимизирующая функционал

$$\iint_{X \otimes X} r(x; y) \mu(dx; dy) \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\mu \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\text{при условиях} \quad \pi_x \mu - \pi_y \mu = \mu_1(dx) - \mu_2(dx) \quad (2.3)$$

(задача с фиксированной разностью проекций), либо

$$\pi_x \mu = \mu_1(dx); \pi_y \mu(dx; dy) = \mu_2(dx) \quad (2.4)$$

(задача с фиксированными проекциями).

Здесь $\pi_x \mu$ и $\pi_y \mu$ — проекции меры μ на первую и вторую координаты соответственно, т. е.

$$(\pi_x \mu)(E) = \mu(E \otimes X); (\pi_y \mu)(E) = \mu(X \otimes E)$$

для всякого борелевского множества $E \subset X$.

Основные теоретические результаты, относящиеся к этой задаче, кратко могут быть резюмированы следующим образом [5, 7].

В пространстве $V(X)$ мер Радона на X (незнакопостоянных) рассматривается гиперподпространство $V_0(X)$, состоящее из тех мер σ , для которых $\sigma(X) = 0$. Функция

$$\|\sigma\|_0 = \inf \iint_{X \otimes X} r(x; y) \mu(dx; dy); \mu \geq 0; \mu_1 - \mu_2 = \sigma \quad (2.5)$$

является нормой на пространстве $V_0(X)$, причем нижняя грань в (2.5) достигается. Пространство $V_0(X)$ с метрикой, порожденной этой нормой, обозначается через Φ_0 ; для $\mu_1, \mu_2 \in \Phi_0$

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) := \|\mu_1 - \mu_2\| \quad (2.6).$$

Двойственным к этому пространству (т. е. пространством ограниченных линейных функционалов на Φ_0) является пространство $\text{Lip}(X; r)$ функций на X , удовлетворяющих условию Липшица (функции, различающиеся на константу, отождествляются):

$$\|u\|_{\text{Lip}} = \inf \{ \alpha : |u(x) - u(y)| \leq \alpha r(x; y) \}. \quad (2.7)$$

Наряду с экстремальной задачей (2.1) — (2.2) — (2.3) или (2.1) — (2.2) — (2.4) (существенно, что если X — метрический компакт, то экстремумы в этих задачах совпадают) [8] рассматривается двойственная задача:

$$\int_X u(x) [\mu_1(dx) - \mu_2(dx)] \rightarrow \max \quad (2.8)$$

при ограничении

$$|u(x) - u(y)| \leq r(x; y). \quad (2.9)$$

Последнее дает оценку снизу для величины d_{KGR} .

Примерами функций, удовлетворяющих (2.9), в случае, когда X — отрезок прямой или прямоугольник на плоскости, могут служить функции, у которых $|u'(x)| \leq 1$ (соответственно $|\text{grad } u| \leq 1$).

Отметим еще, что в случае меры, сосредоточенной на прямой, и естественного там расстояния $r(x; y) = |x - y|$, величина (2.6) может быть вычислена по формуле *

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x) - F_2(x)| dx, \quad (2.10)$$

где F_1, F_2 — функции распределения мер μ_1 и μ_2 . Величина, выражаемая правой частью равенства (2.10), рассматривалась К. Жини еще в 1914 г.

3. Идентификация при заданном распределении масс; алгоритм «King — Н». Будем считать, что функции распределения массы на п. к. и. и к. т. с. заданы. В качестве модели такого задания рассмотрим «гистограмму», т. е. предположим, что все пано покрыто сеткой из «микроквадратов». Пусть число «микроквадратов» на п. к. и. и к. т. с. — N^2 . Каждому «микроквадрату» сопоставлено неотрицательное число — его «масса», которую будем считать сосредоточенной в центре. Это, конечно, довольно произвольное округление реальной ситуации (раздел 4). Очевидно, в такой модели масса произвольного п. к. и. находится простым суммированием масс всех составляющих его «микроквадратов».

Прежде чем перейти к изложению алгоритма идентификации к. т. с. и п. к. и., отметим два обстоятельства. Во-первых, описанный в разделе 2 аппарат может быть применен к любому компакт X (в нашем случае это отрезок прямой или участок плоскости). Во-вторых, как отмечалось выше, величина d_{KGR} одинакова для задач: с фиксированными разностями проекций и с фиксированными проекциями. Последнее важно ввиду того, что одинаковый «шум», наложенный на $pr_x \sigma$ для к. т. с. и п. к. и., не приводит к изменению расстояния.

* В доступной литературе нам не удалось найти вывод равенства (2.10). В целях самозамкнутости изложения приводим вывод (2.10) в «гладком случае»: $\mu_1(dx) = p_1(x)dx$; $\mu_2(dx) = p_2(x)dx$. Общий случай рассматривается аналогично. В силу двойственности

$$d_{KGR}(\mu_1, \mu_2) = \sup_u \int_a^b u(x) [p_1(x) - p_2(x)] dx.$$

В качестве $u(x)$ можно взять класс функций таких, что $|u'(x)| \leq 1$. Интегрируя по частям, получаем

$$d_{KGR}(\mu_1, \mu_2) = \sup_u \int_a^b \dot{u}(x) [F_1(x) - F_2(x)] dx,$$

где $F_1(x), F_2(x)$ — функции распределения мер μ_1 и μ_2 . Очевидно, правая часть последнего равенства экстремальна, когда $\dot{u}(x) = \text{sign}[F_1(x) - F_2(x)]$, т. е. $d_{KGR}(\mu_1, \mu_2) = \int_a^b |F_1(x) - F_2(x)| dx$.

Алгоритм идентификации состоит в последовательном отбрасывании п. к. и., «далеких» от к. т. с. В качестве признаков выбирают различные характеристики мер, сосредоточенных на п. к. и. и к. т. с., а в качестве расстояния принимается d_{KGR} . Одним из возможных вариантов является алгоритм «King», представленный описываемой ниже цепочкой шагов.

Вычисляется масса к. т. с. и п. к. и. и из сопоставления исключаются все п. к. и., масса которых достаточно далека от массы к. т. с.

Замечание. Если из условий эксперимента неясно, каковы параметры нормализации [1] к. т. с. и п. к. и., то алгоритм начинается с шага 2. В к. т. с. и п. к. и. производится снесение (проектирование) массы на оси x и y , т. е. суммируются массы «микроквадратов» по вертикали и по горизонтали. Делением на полную массу квадрата производится нормировка полученных проекций. Обозначим их через μ_1 и μ_2 ; τ_1 и τ_2 . После этого вычисляется $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$ и $d_{KGR}(\tau_1; \tau_2)$ и отбрасываются все к. п., у которых $d_{KGR}(\tau_1; \tau_2)$ или $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$ превышает некий назначенный порог. Этот порог может быть разным для осей x и y , и его приемлемое численное значение определяется после обработки всех к. п. при помощи указанной процедуры. Расстояние d_{KGR} для снесенных мер, т. е. мер μ_x п. к. и.; μ_y к. т. с.; τ_x п. к. и.; τ_y к. т. с. может быть вычислено либо решением транспортной задачи линейного программирования, либо с помощью формулы (2.10). Приведем формулы для последнего случая.

Рассмотрим, например, процедуру снесения массы на ось x , считая для определенности, что центры микроквадратов находятся

в точках $\left(k + \frac{1}{2}; j + \frac{1}{2}\right)$.

Сначала формируются величины

$$\rho_k^{(i)} = \sum_{j=1}^N m_{kj}^{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (3.1)$$

где $m_{kj}^{(1)}$ и $m_{kj}^{(2)}$ — полученные после нормирования на единицу массы «микроквадратов» к. т. с. и п. к. и. Получаем два набора значений, описывающих распределения масс на оси x :

$$\left(\frac{1}{2} + k; \rho_k^{(1)}\right); \left(\frac{1}{2} + k; \rho_k^{(2)}\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

Здесь $1/2 + k$ — точки скачков распределений снесенных масс к. т. с. (μ_1) и п. к. и. (μ_2), $\rho_k^{(1)}$ и $\rho_k^{(2)}$ — величины этих скачков. Теперь $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$ вычисляется по формуле (2.10), которая в данном случае принимает следующий вид:

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) = |\rho_1^{(1)} - \rho_1^{(2)}| + |\rho_2^{(1)} + \rho_2^{(2)} - \rho_1^{(2)} - \rho_2^{(2)}| + \dots + |\rho_1^{(1)} + \rho_2^{(1)} + \dots + \rho_{N-1}^{(1)} - \rho_1^{(2)} - \rho_2^{(2)} - \dots - \rho_{N-1}^{(2)}|. \quad (3.3)$$

Аналогичная процедура производится при проектировании меры на ось y . Формула (3.3) допускает быструю численную реализацию.

Шаги 1, 2 позволяют исключить из рассмотрения значительное число п. к. и. Однако ввиду того что двумерная мера все же не определяется однозначно своими проекциями, для оставшихся п. к. и. алгоритм должен быть продолжен. Это продолжение имеет в своей основе процедуру дезинтеграции меры (см., например [9]). Именно, пусть $\sigma(d\lambda; d\mu)$ — двумерная мера, $\rho(d\lambda) = \pi_\lambda \sigma(d\lambda; d\mu)$; $\tau(d\mu) = \pi_\mu \sigma(d\lambda; d\mu)$ ее проекция на оси λ и μ (см. п. 1). Двумерная мера допускает дезинтеграцию по отношению к мерам ρ и τ , т. е. существует семейство однопеременных мер $\eta_\lambda(d\mu)$ (соответственно $r_\mu(d\lambda)$) такие, что

$$\sigma(d\lambda; d\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \bigoplus \eta_\lambda(d\mu) \rho(d\lambda); \quad (3.4)$$

$$\sigma(d\lambda; d\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \bigoplus r_\mu(d\lambda) \tau(d\mu). \quad (3.5)$$

Последние равенства означают, что на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$ в плоскости $(\lambda; \mu)$ имеют место равенства

$$\sigma(\Delta' \otimes \Delta'') = \int_{\Delta'} \left\{ \int_{\Delta''} \eta_\lambda(d\mu) \right\} \rho(d\lambda); \quad (3.6)$$

$$\sigma(\Delta' \otimes \Delta'') = \int_{\Delta''} \left\{ \int_{\Delta'} r_\mu(d\lambda) \right\} \tau(d\mu). \quad (3.7)$$

Замечание. Символ $\bigoplus$ отражает то обстоятельство, что

$$L_{\sigma(d\lambda; d\mu)}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \bigoplus (L_{\eta_\lambda(d\mu)}^2) \rho(d\lambda), \quad (3.8)$$

т. е. гильбертово пространство, полученное метризацией функций двух переменных, представляется как прямой интеграл (континуальная ортогональная сумма) гильбертовых пространств функций одной переменной. Именно благодаря (3.8) в ряде случаев оказывается возможным двухпеременную задачу свести к набору однопеременных. Во второй работе этот подход будет использован в связи с двумерными моментными характеристиками мер.

Имея набор мер $\eta_\lambda^{(1)}(d\mu)$, $\eta_\lambda^{(2)}(d\mu)$ и соответственно $r_\mu^{(1)}(d\lambda)$, $r_\mu^{(2)}(d\lambda)$, вычисляем по формуле (2.10):

$$d_{KGR}(\eta_\lambda^{(1)}(d\mu), \eta_\lambda^{(2)}(d\mu)); \quad (3.9)$$

$$d_{KGR}(r_\mu^{(1)}(d\lambda), r_\mu^{(2)}(d\lambda)). \quad (3.10)$$

Напомним, что после шагов 1, 2 остались такие п. к. и., у которых проекции мер на оси такие же, как у к. т. с. Двумерные меры $\sigma^{(1)}(d\lambda; d\mu)$ и $\sigma^{(2)}(d\lambda, d\mu)$ совпадают, если у них $\rho^{(1)}(d\lambda) = \rho^{(2)}(d\lambda)$

и $\gamma_{\lambda}^{(1)}(d\mu) = \gamma_{\lambda}^{(2)}(d\mu)$. Равным образом $\tau^{(1)}(d\mu) = \tau^{(2)}(d\mu)$; $r_{\mu}^{(1)}(d\lambda) = r_{\mu}^{(2)}(d\lambda)$. Набор расстояний (3.9) (3.10) позволяет отбросить «далекие» п. к. и. Согласно нашим допущениям, внутри к. т. с. и п. к. и. в центрах микроквадратов содержится масса $m_{kj}^{(i)}(k, j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2)$. Определяем величины

$$\rho_k^{(i)} = \sum_{j=1}^N m_{kj}^{(i)}. \quad (3.11)$$

Пусть l_j — точки скачков проекции мер к. т. с. и п. к. и. Мерам $\gamma_{\lambda}^{(1)}(d\mu)$ и $\gamma_{\lambda}^{(2)}(d\mu)$ из (3.4) отвечают $2N$ — функций распределения $(\Pi_k^{(1)}, \Pi_k^{(2)})$ $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\Pi_k^{(i)} = \left\{ \frac{m_{kj}^{(i)}}{\rho_k^{(i)}}, \quad j + \frac{1}{2} \right\} \quad (3.12)$$

со скачками в точках $j + \frac{1}{2}$ и величинами скачков $m_{kj}^{(i)}/\rho_k^{(i)}$. Величины $d_{KGR}(\Pi_k^{(1)}; \Pi_k^{(2)})$ вычисляются по формуле (3.3) с заменой там $\rho_i^{(i)}$ на величины $m_{ke}^{(i)}/\rho_e$, где ρ_e находятся из (3.12).

Такая же процедура, как и изложенная выше, проводится и при проектировании на другую ось.

Принятие решения об идентификации к. т. с. и п. к. и. принимается после просчета больших массивов, так как к. т. с. и п. к. и. в реальной обстановке почти никогда не совпадают точно.

В связи с этим целесообразно сопоставление изложенной процедуры, основанной на дезинтеграции плоской меры, с расстоянием $d_{KGR}(\sigma^{(1)}(d\lambda; d\mu); \sigma^{(2)}(d\lambda; d\mu))$, вычисленным непосредственно по двумерным распределениям. Здесь, однако, возникает следующее затруднение. Алгоритмы транспортной задачи линейного программирования весьма объемны, а «быстрая» формула, аналогичная (2.10), когда $r(x; y)$ — евклидово расстояние на плоскости, нам неизвестно. Все же рассмотрение двойственной задачи (2.8), (2.9) позволяет получить оценки снизу для $d_{KGR}(\sigma^{(1)}; \sigma^{(2)})$. Здесь полезно сочетание этого подхода с методами двумерной проблемы моментов.

4. Использование моментных характеристик различения изображений. Алгоритм «King — M». При этом подходе отличие от раздела 3 состоит в том, что относительно меры не используется никаких предположений, кроме ее сосредоточенности на квадрате или отрезке. При этом считается, что задана не сама плотность, а ее моменты. Помимо «робастности» нас привлекает то обстоятельство, что моменты некоторого распределения гораздо более доступны, чем оно само (см., например, [10] и приводимые там ссылки). Заметим, что формула (2.10) существенно использует саму функцию распределения. Здесь мы рассматриваем одномерные функции распределения. Плоские плотности (и соответственно

двумерные моменты) будут рассмотрены во второй статье. Пусть μ_1 и μ_2 — проекции мер, описывающих п. к. и. и к. т. с.; их моменты $S_0^{(1)}, S_1^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}$ и $S_0^{(2)}, S_1^{(2)}, \dots, S_n^{(2)}$ считаются заданными:

$$S_k^{(l)} = \int_0^N x^k \mu_l(dx).$$

На данном этапе мы не ставим вопрос о минимальном числе моментов, достаточном для идентификации. Простое, но важнейшее в теории Л. В. Канторовича—М. К. Гавурина — Г. Ш. Рубинштейна неравенство

$$\int_{X \otimes X} r(x; y) \mu(dx; dy) \geq \int_X u(x) \mu_1(dx) - \int_X u(y) \mu_2(dx), \quad (4.1)$$

справедливое для любой функции $u(x)$ на X , удовлетворяющей неравенству $|u(x) - u(y)| \leq r(x; y)$, показывает, что

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) \geq \int_X u(x) (\mu_1(dx) - \mu_2(dx)). \quad (4.2)$$

В нашем случае

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) \geq \int_0^N u(x) (\mu_1(dx) - \mu_2(dx)), \quad (4.3)$$

где $u(x)$ — любая функция, удовлетворяющая условию

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|, \quad (4.4)$$

в том числе любая дифференцируемая на $[0; N]$ функция, такая, что $|u'(x)| \leq 1$.

В качестве таких „оценочных“ функций может быть, например,

взята система функций $u_0(x) = 1, \dots, u_k(x) = \frac{x^k}{kN^{k-1}} \quad k = 1, 2, \dots$

Зафиксируем целое число $2L$ и рассмотрим следующую систему функций:

$$v_k(x) = \begin{cases} u_k(x) & k = 1, 2, \dots, L; \\ -u_k(x) & k = L + 1, \dots, 2L \end{cases}$$

и выпуклую оболочку этой системы:

$$\text{conv}\{v\} = \left\{ \sum_{k=0}^{2L+1} \alpha_k v_k(x), \alpha_k \geq 0, \sum_{k=0}^{2L+1} \alpha_k = 1 \right\}. \quad (4.5)$$

Каждая из функций, принадлежащих $\text{conv}\{v\}$, приводит к оценке снизу для $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$. Именно:

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) \geq \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{kN^{k-1}} |S_k^{(1)} - S_k^{(2)}|. \quad (4.6)$$

После этого правую часть (4.6) можно максимизировать по всевозможным α_k , удовлетворяющим условиям (4.5). Как мы видим,

в правую часть (4.6) входят только моменты спроектированных мер, а не сами меры. Тогда получим

$$d_{KGR}(\mu_1; \mu_2) \geq \max_{\{\alpha_k\}} \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{kN^{k-1}} |S_k^{(1)} - S_k^{(2)}|$$

$$\alpha_k \geq 0 \sum \alpha_k = 1. \quad (4.7)$$

Так как функции $v_k(x) = \pm \frac{x^k}{kN^{k-1}}$ ($k = 1, 2, \dots, L$)

являются «крайними точками» в рассматриваемом выпуклом множестве $\text{conv}\{v\}$, то из общих соображений следует, что

$$\max_{\{\alpha_k\}} \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{kN^{k-1}} |S_k^{(1)} - S_k^{(2)}| = \max_{1 \leq k \leq L} \frac{|S_k^{(1)} - S_k^{(2)}|}{kN^{k-1}}. \quad (4.8)$$

Величина (4.8) более предпочтительна с вычислительной точки зрения, и для своего вычисления требует лишь знания L моментов проекций мер к. п. и. и к. т. с. на ось. Вопрос об удовлетворительности оценки (4.8) на данном этапе решается эмпирически.

Аналогичная описанной процедура производится при снос мере на вторую ось. Оценки (4.6) — (4.8) для $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$ приводят к такой интересной математической задаче.

Каковы крайние точки единичного шара в банаховом пространстве функций, удовлетворяющих условию (4.4). Как описать хотя бы достаточно богатые наборы таких функций? Еще более интересны эти вопросы в многомерном случае.

Приведенные соображения были положены в основу алгоритма различения («King — М»), использующего только моменты мер, описывающих к. т. с. и п. к. и.

В заключение приведем расчетные формулы для моментов в «гистограммном» случае. Оценка (4.8) в такой ситуации тоже представляет определенный интерес как «обобщенный признак» распределения масс:

$$S_k^{(i)} = \sum_{l=0}^N \left(l + \frac{1}{2}\right)^k \sum_{t=1}^N m_{lt}^{(i)}. \quad (4.9)$$

Замечание 1. Оценки (4.7), (4.8) — одни и те же в классе всех распределений с заданными моментами.

Замечание 2. Изложенный выше подход естественно переносится на двумерный случай. Оценки снизу для $d_{KGR}\{\sigma_{к. т. с} (d\lambda; d\mu); \sigma_{п. к. и} (d\lambda; d\mu)\}$ выражаются через смешанные моменты этих мер. Здесь для дальнейших рассмотрений, очевидно, целесообразно привлечение теоретических результатов по двумерной проблеме моментов.

Замечание 3. Интересная система оценок снизу величины $d_{KGR}(\mu_1; \mu_2)$ получается, если от системы многочленов Чебышева,

отнесенных к промежутку $[0, N]$ и умноженных на константы так, чтобы при $0 \leq x \leq N$ выполнялись неравенства $|\tilde{T}_L(x)| \leq 1$. Эти вопросы приводят к интересной математической проблематике, к которой мы рассчитываем вернуться в последующих частях работы.

Список литературы: 1. Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. Распознавание и цифровая обработка изображений. М., 1983. С. 295. 2. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М., 1979. С. 312. 3. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков//Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.; Л., 1949. С. 110—138. 4. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. Вестн. ЛГУ 13:7 (1958): Мат. и астроном. С. 52—59. 5. Levin V. L. General Monge-Kantorovich problem and its application in measure theory and mathematical economics Surway//AMS. 1987. P. 56. Рачев С. Т. Задача Монжа-Канторовича о перемещении масс и ее приложения. Теория вероятностей и ее применения. 1984. 29, вып. 4. С. 633—374. 7. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984. С. 750. 8. Левин В. Л. Задача Монжа-Канторовича о перемещении масс//Методы функционального анализа в математической экономике. М., 1987. С. 124. 9. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально-компактных пространствах. М., 1977. С. 600. 10. Teague M. Image Analysis via the general theory of moments//I. Opt. Soc. Amer. 1980. 70. P. 920—930.

Поступила в редколлегию 15.01.88

УДК 532.516

В. А. СКОРИК, Г. В. СУЗИКОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Постановка задачи и формулировка основного результата.

Пусть $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость жидкости, p — давление, ν — вязкость. Тогда для определения течения в области $D \subset R^3$ с границей ∂D нужно решить следующую задачу Навье—Стокса:

$$-\nu \Delta \vec{V} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_k} = -\text{grad } p + \vec{f} \text{ в } D, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad \text{в } D, \quad (2)$$

$$\vec{V} = 0 \quad \text{на } \partial D. \quad (3)$$

В цилиндрической системе координат r, φ, z [1] уравнения (1), (2) принимают вид

$$v_r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v_\varphi}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + F_r,$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + F_\varphi,$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + F_z,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Взяв теперь в качестве оси z ось рассматриваемого течения и учитывая симметрию, приходим к задаче

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) + F_r,$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + F_\varphi, \quad (4)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + F_z,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$v_r, v_\varphi, v_z, F_r, F_\varphi, F_z$ являются функциями переменных r, z , причем систему (4) необходимо решить в плоской области Ω с прямоугольными координатами r, z при нулевых значениях v_r, v_φ, v_z на ее границе Γ .

Введем в рассмотрение функцию тока f по формулам $\frac{\partial}{\partial z}(rf) = rv_r, \frac{\partial}{\partial r}(rf) = -rv_z$ и положим для упрощения записи

$v_\varphi = v, \lambda = \frac{1}{\nu}$. Тогда мы автоматически удовлетворим уравнению неразрывности и после определенных преобразований получаем из (4) следующую систему:

$$L^2 f + \lambda M(f, v) + \lambda F_1 = 0 \text{ в } \Omega, Lv + \lambda N(f, v) + \lambda F_2 = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$f = \frac{\partial f}{\partial n} = v = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (5)$$

где

$$F_1 = -\frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial F_r}{\partial r}, F_2 = F_\varphi,$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

$$M(f, v) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} Lf \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) Lf \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v^2),$$

$$N(f, v) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (6)$$

Заметим, что оператору M можно придать еще и такую форму:

$$M(f, v) = M_1(f, Lf, v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (f Lf) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (Lf) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (Lf) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v^2). \quad (7)$$

Так как L в случае, когда Ω не пересекает оси z (а именно этот случай будем рассматривать далее исключительно в целях упрощения некоторых рассуждений) — «хороший» эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (типа оператора Δ), то решения задачи (5) естественно считать принадлежащими таким классам: $f \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Для решения задачи (5) в настоящей работе предлагается следующий алгоритм:

λ_0 — функция на Γ выбирается произвольно ($\lambda_0 \in L_2(\Gamma)$) и далее строятся последовательные приближения f_n и v_n $n=0, 1, 2, \dots$ как решения краевых задач:

$$L^2 f_n + \lambda M(f_n, v_n) + \lambda F_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (8)$$

$$Lv_n + \lambda N(f_n, v_n) + \lambda F_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad f_n = 0, v_n = 0, Lf_n = -\lambda_n \text{ на } \Gamma$$

с переходом к очередному приближению после пересчета

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n \frac{\partial f_n}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad (9)$$

где числа $\rho_n > 0$ — параметры метода.

Решение этой задачи естественно искать в классах: $f_n \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $v_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Мы покажем далее (и в этом состоит основной результат работы), что при достаточно малых λ параметры метода ρ_n можно выбрать так, что будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n - f\|_{H^2(\Omega)} + \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}) = 0.$$

Заметим, что задаче (8) можно придать следующий вид:

$$Lf_n = p_n \text{ в } \Omega, \quad f_n = 0 \text{ на } \Gamma, \quad Lp_n = -\lambda M_1(f_n, p_n, v_n) - \lambda F_1 \text{ в } \Omega,$$

$$p_n = -\lambda_n \text{ на } \Gamma, \quad Lv_n = -\lambda N(f_n, v_n) - \lambda F_2 \text{ в } \Omega, \quad v_n = 0 \text{ на } \Gamma \quad (10)$$

и, таким образом, она представляет собой квазилинейную систему из трех эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, которую нужно решать при заданных краевых значениях неизвестных функций f_n, p_n, v_n .

2. **Вспомогательные предложения.** Покажем, что $\forall f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} Lf \cdot g r dr dz = - \int_{\Omega} \left[\frac{fg}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right] r dr dz + \int_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} r ds. \quad (11)$$

В самом деле, интегрируя по частям два раза последовательно, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Lf g r dr dz &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right) g r dr dz = \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{fg}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{gf}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (gr) - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} g \right) r dr dz + \\ &+ \int_{\Gamma} g \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos(n, r) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(n, z) \right) r ds = \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{fg}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} r ds. \end{aligned}$$

Полагая здесь $g = f$, приходим $\forall f \in H^2 \cap H_0^1$ к равенству

$$\int_{\Omega} f Lf r dr dz = - \int_{\Omega} \left[\frac{f^2}{r^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz. \quad (12)$$

Положим

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} \left[\frac{f^2}{r^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz.$$

Очевидно, что так введенная норма эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)$.

Пусть теперь f, g — произвольные функции из класса $H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Покажем, что

$$\int_{\Omega} [M(f, v) f - N(f, v) v] r dr dz = 0. \quad (13)$$

Действительно, используя определения (6) и интегрирование по частям, легко получаем

$$\int_{\Omega} M(f, v) f r dr dz = \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} Lf \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) Lf \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v^2) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times f r d r d z = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial z} L f \frac{\partial}{\partial r} (r f) - \frac{\partial}{\partial r} (r f) L f \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial}{\partial z} (v^2) \right] d r d z = \\
& = \int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial z} (v^2) d r d z, \int_{\Omega} N(f, v) v r d r d z = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \frac{\partial f}{\partial z} \right] v \times \\
& \times r d r d z = \int_{\Omega} \left[-r f \frac{\partial}{\partial r} \left(v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + f \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v) v \right) \right] d r d z = \\
& = \int_{\Omega} \left[-r f \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} - r f \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + f \frac{\partial}{\partial z} (v^2) + r f \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + r f v \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \right] d r d z = \\
& = \int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial z} (v^2) d r d z
\end{aligned}$$

и, тем самым, равенство (13) доказано.

Сейчас мы покажем, что для решения задачи (5) справедлива оценка

$$\|f, v\| = \left(\int_{\Omega} \left[(L f)^2 + \frac{v^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r d r d z \right)^{1/2} \leq c \lambda F, \quad (14)$$

где c не зависит от λ , F , F_1 , F_2 и определяется лишь областью

$$\Omega, F = \left(\int_{\Omega} [F_1^2 + F_2^2] r d r d z \right)^{1/2}.$$

В самом деле, используя (11), интегрирование по частям и принадлежность f классу $H^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} L f L f d r d z = - \int_{\Omega} \left[\frac{f L f}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (L f) + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (L f) \right] \times \\
& \times r d r d z = - \int_{\Omega} f \left[\frac{L f}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (L f) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial}{\partial z} (L f) \right) \right] \times \\
& \times r d r d z = - \int_{\Omega} f \left[\frac{L f}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (L f) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial}{\partial z} (L f) \right) \right] \times \\
& \times r d r d z = \int_{\Omega} f L^2 f r d r d z.
\end{aligned}$$

Поэтому, используя еще соотношения (5), (13), (11), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Lf)^2 r dr dz &= \int_{\Omega} f L^2 f r dr dz = -\lambda \int_{\Omega} M(f, v) f r dr dz - \\ &- \lambda \int_{\Omega} F_1 f r dr dz = -\lambda \int_{\Omega} N(f, v) v \cdot r dr dz - \lambda \int_{\Omega} F_1 f \cdot r dr dz = \\ &= \int_{\Omega} v L v r dr dz + \lambda \int_{\Omega} (F_2 v - F_1 f) r dr dz = - \int_{\Omega} \left[\frac{v^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \lambda \int_{\Omega} (F_2 v - F_1 f) r dr dz, \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f, v\|^2 = \int_{\Omega} \left[(Lf)^2 + \frac{v^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz = \lambda \int_{\Omega} (F_2 v - F_1 f) r dr dz,$$

откуда, очевидно, в силу неравенств Гельдера и Буняковского

$$\|f, v\|^2 \leq \lambda F \left(\int_{\Omega} (v^2 + f^2) r dr dz \right)^{1/2},$$

где

$$F = \left[\int_{\Omega} (F_1^2 + F_2^2) r dr dz \right]^{1/2}.$$

Так как L в рассматриваемой области — хороший эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (типа оператора Лапласа Δ), то $\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (см. [2]): $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|Lu\|_{L_2(\Omega)}$ (15), где c определяется лишь областью Ω . И, таким образом, $\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|Lf\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|f, v\|$.

Используя эту оценку, теперь имеем $\|f, v\|^2 \leq \lambda F c \|f, v\|$.

Из этого соотношения, очевидно, имеем $\|f, v\| \leq \lambda c F$, чем и завершается доказательство утверждения (14).

3. Доказательство основного результата. Положим $f_n - f =$

$$= \tilde{f}_n, v_n - v = \tilde{v}_n, \lambda_n - \lambda^1 = \tilde{\lambda}_n, \text{ где } \lambda^1 = Lf \text{ на } \Gamma.$$

Тогда, в силу (5), (8), (9), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{n+1} &= \tilde{\lambda}_n + \rho_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad L^2 \tilde{f}_n = -\lambda [M(\tilde{f}_n, v_n) - M(f, v)] \text{ в } \Omega, \quad L \tilde{v}_n = \\ &= -\lambda [N(f_n, v_n) - N(f, v)] \text{ в } \Omega, \quad \tilde{f}_n = 0, \quad \tilde{v}_n = 0, \quad L \tilde{f}_n = -\tilde{\lambda}_n \text{ на } \Gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Напомним, что $f \in H^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $f_n, \tilde{f}_n \in H^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_n, \tilde{v}_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

Из первого соотношения (16) получаем

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds = -2\rho_n \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \right) r ds - \rho_n^2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \right)^2 r ds. \quad (17)$$

Используя теперь (11) при $g = L\tilde{f}_n$, $f = \tilde{f}_n$, имеем

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} r ds &= \int_{\Gamma} L \tilde{f}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} r ds = \int_{\Omega} (L \tilde{f}_n)^2 r dr dz + \\ &+ \int_{\Omega} \left[\frac{\tilde{f}_n L \tilde{f}_n}{r^2} + \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial r} \frac{\partial L \tilde{f}_n}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \frac{\partial L \tilde{f}_n}{\partial z} \right] r dr dz. \end{aligned}$$

Выполняя в последнем интеграле интегрирование по частям, приходим к равенству

$$- \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} r ds = \int_{\Omega} (L \tilde{f}_n)^2 r dr dz - \int_{\Omega} L^2 \tilde{f}_n \cdot \tilde{f}_n r dr dz. \quad (18)$$

Используя еще соотношения (16) и очевидные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} L^2 \tilde{f}_n \tilde{f}_n r dr dz &= \lambda \int_{\Omega} \tilde{f}_n [M(f_n, v_n) - M(f, v)] r dr dz = \\ &= \lambda \int_{\Omega} \tilde{f}_n M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) r dr dz + \lambda \int_{\Omega} [M(f + \tilde{f}_n, v + \tilde{v}_n) - M(f, v) - \\ &- M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n)] \cdot \tilde{f}_n r dr dz. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$- \int_{\Omega} \tilde{f}_n L \tilde{f}_n r dr dz = \lambda \int_{\Omega} \tilde{f}_n M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) r dr dz + \lambda \alpha, \quad (19)$$

где $\alpha = \int_{\Omega} \tilde{f}_n [M(f + \tilde{f}_n, v + \tilde{v}_n) - M(f, v) - M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n)] r dr dz$.

Далее, в силу (6), имеем

$$M(f + \tilde{f}_n, v + \tilde{v}_n) - M(f, v) - M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r f + r \tilde{f}_n) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (Lf + L\tilde{f}_n) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rf) Lf \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) L\tilde{f}_n \right) - \\
& - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((Lf + L\tilde{f}_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(Lf \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(L\tilde{f}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v^2 + 2v\tilde{v}_n + \tilde{v}_n^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{v}_n^2) = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v \cdot \tilde{v}_n) - \\
& - \frac{\partial}{\partial r} \left(L\tilde{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(Lf \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rf) L\tilde{f}_n \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) Lf \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\alpha = \int_{\Omega} \tilde{f}_n \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} (v \cdot \tilde{v}_n) - \frac{\partial}{\partial r} \left(L\tilde{f}_n \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(Lf \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right) + \right. \\
\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rf) L\tilde{f}_n \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) Lf \right) \right] r dr dz.
\end{aligned}$$

Интегрируя здесь по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\alpha = \int_{\Omega} \left[-2v\tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} + L\tilde{f}_n \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) + Lf \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) - \right. \\
\left. - L\tilde{f}_n \frac{\partial}{\partial r} (rf) \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} - Lf \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) \right] r dr dz. \quad (20)
\end{aligned}$$

Займемся теперь преобразованиями первого слагаемого в (19). Имеем в силу (13)

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega} \tilde{f}_n M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) r dr dz &= \lambda \int_{\Omega} \tilde{v}_n N(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) r dr dz = \\
&= \lambda \int_{\Omega} \tilde{v}_n [N(f_n, v_n) - N(f, v) + N(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) + N(f, v) - \\
&- N(f_n, v_n)] r dr dz = \lambda \int_{\Omega} \tilde{v}_n [N(f_n, v_n) - N(f, v)] r dr dz + \lambda \beta, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \beta = - \int_{\Omega} [N(\tilde{f}_n + f, \tilde{v}_n + v) - N(f, v) - N(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n)] r dr dz.$$

Используя (6), после простых вычислений имеем

$$\beta = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \tilde{v}_n + \frac{\partial}{\partial r} (rv) \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \tilde{v}_n - \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{f}_n) \frac{\partial v}{\partial z} \tilde{f}_n - \frac{\partial}{\partial r} (rf) \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \tilde{v}_n \right] r dr dz. \quad (22)$$

Первое слагаемое в правой части (21) в силу (16) и (12) приводится к виду

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \tilde{v}_n [N(f_n, v_n) - N(f, v)] r dr dz &= - \int_{\Omega} (L \tilde{v}_n, \tilde{v}_n) r dr dz = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\tilde{v}_n^2}{r^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом,

$$\lambda \int_{\Omega} \tilde{f}_n M(\tilde{f}_n, \tilde{v}_n) r dr dz = \int_{\Omega} \left[\frac{\tilde{v}_n^2}{r} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 \right] r dr dz + \lambda \beta \quad (24)$$

и из (19), (21), (22) теперь имеем

$$- \int_{\Omega} \tilde{f}_n L^2 \tilde{f}_n r dr dz = \int_{\Omega} \left[\frac{\tilde{v}_n^2}{r^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \lambda \alpha + \lambda \beta,$$

где α и β определены формулами (20) и (22). Возвращаясь еще и к равенству (18), получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} r ds &= \int_{\Omega} \left[(L \tilde{f}_n)^2 + \frac{\tilde{v}_n^2}{r^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \\ &+ \lambda \alpha + \lambda \beta = \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\| + \lambda \alpha + \lambda \beta, \end{aligned}$$

и, следовательно, равенству (17) мы можем придать вид

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds = 2 \rho_n (\|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2 + \lambda \alpha + \lambda \beta) - \rho_n^2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \right)^2 r ds, \quad (25)$$

где

$$\|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2 = \int_{\Omega} \left[(L \tilde{f}_n)^2 + \frac{\tilde{v}_n^2}{r} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz$$

и α и β определены в (20) и (22). Так как $\tilde{f} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то

$$\left\| \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq \tilde{c} \|\tilde{f}_n\|_{H^2(\Omega)} \leq c_1 \|L \tilde{f}_n\|_{L_2(\Omega)}$$

и, таким образом,

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} \right)^2 r ds \leq c_2 \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2. \quad (26)$$

где c_2 — некоторая постоянная.

Займемся теперь оценками величин α и β , определенных равенствами (20) и (22). Каждое слагаемое, входящее в α или β , имеет вид

$$\int_{\Omega} \theta \eta \zeta dr dz,$$

где θ, η, ζ выбираются из совокупности $Lf, L\tilde{f}_n, \tilde{f}_n, f,$

$$\tilde{v}_n, v, \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Используя неравенства

$$\left| \int_{\Omega} \theta \eta \zeta dr dz \right| \leq \left(\int_{\Omega} \theta^2 dr dz \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \eta^4 dr dz \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \zeta^4 dr dz \right)^{1/4},$$

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c_3 \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \forall q: 1 \leq q < \infty,$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_4 \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

и принадлежность θ, η, ζ к определенным классам, можно проверить, что для каждого слагаемого в α и β справедлива оценка

$$\left| \int_{\Omega} \theta \eta \zeta dr dz \right| \leq \bar{c} \|f, v\| \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2.$$

Приведем, для примера, и без пояснений оценки двух типичных слагаемых. В самом деле

$$\left| \int_{\Omega} L\tilde{f}_n \frac{\partial f}{\partial z} \tilde{f}_n dr dz \right| \leq \left(\int_{\Omega} (L\tilde{f}_n)^2 dr dz \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^4 dr dz \right)^{1/4} \times$$

$$\times \left(\int_{\Omega} \tilde{f}_n^4 dr dz \right)^{1/4} \leq \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\| c_3 \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\|_{H^1(\Omega)} c_3 \|\tilde{f}_n\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\| c_3^2 \|f\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|\tilde{f}_n\|_{H^2(\Omega)} \leq c_3^2 c_4^2 \|f, v\| \cdot \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2,$$

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{v}_n v \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} dr dz \right| \leq \left(\int_{\Omega} v^2 dr dz \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \tilde{v}_n^4 dr dz \right)^{1/4} \cdot \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right)^4 dr dz \right)^{1/4} \leq$$

$$\leq \|f, v\| \|\tilde{v}_n\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq \|f, v\| c_3 \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} c_3 \left\| \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_3^2 \|f, v\| \cdot \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{f}_n\|_{H^2(\Omega)} \leq c_3^2 c_4^2 \|f, v\| \cdot \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2.$$

Таким образом, мы установили оценку

$$\lambda(|\alpha| + |\beta|) \leq \lambda c_5 \|f, v\| \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2 \quad (27)$$

и из (25) — (27) теперь вытекает

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds \geq 2\rho_n (1 - \lambda c_5 \|f, v\|) \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2 - \rho_n^2 \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2.$$

Так как $\|f, v\| \leq c\lambda F$ (см. (14)), то

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds \geq \rho_n [2(1 - \lambda^2 c c_5 F) - c_2 \rho_n] \|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\|^2. \quad (28)$$

Таким образом, при $\rho_n \geq 0$ $2(1 - \lambda^2 c c_5 F) - c_2 \rho_n \geq 0$ получаем

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds \geq 0$$

и, следовательно, последовательность неотрицательных чисел

$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds$ невозрастающая и, тем самым, она имеет предел при

$n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_n^2 r ds - \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_{n+1}^2 r ds \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Если теперь выбирать параметры метода ρ_n , удовлетворяющими соотношениям $\rho_n \geq r_0 > 0$, $2(1 - \lambda^2 c c_5 F) - c_2 \rho_n \geq r_1 > 0$, то из

(28), (29) получается $\|\tilde{f}_n, \tilde{v}_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\int_{\Omega} \left[(L\tilde{f}_n)^2 + \frac{\tilde{v}_n^2}{r^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial z} \right)^2 \right] dr dz \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\|L\tilde{f}_n\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $\tilde{f}_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то $\|\tilde{f}_n\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|L\tilde{f}_n\|_{L_2(\Omega)}$ и, таким об-

разом, $\|\tilde{f}_n\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, чем и завершается доказательство высказанных в п. 1 утверждений.

Заметим, что предложенный алгоритм рекомендуется в [3] для решения первой краевой задачи для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = f$ и в [4] для решения различных задач гидродинамики.

Список литературы: 1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемости жидкости. М., 1986. 519 с. 2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1961. 203 с. 3. Гловински Р., Лионс Ж. Л.,

Тремольер Р. Численное решение вариационных неравенств. М., 1979. 574 с.
4. Сузиов Г. В. Об одном методе определения функции тока: III Всесоюз. симпозиум «Метод дискр. особенностей в задачах мат. физики и его роль в развитии числ. эксперимента на ЭВМ». Х., 1987. С. 158—159.

Поступила в редколлегию 05.04.88

УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ, Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОВОДНИКОВ

В связи с интенсивным развитием и использованием вычислительной техники широкое применение при решении прикладных задач получил следующий подход. Изучаемое физическое поле, созданное искомым распределением источников, представляется приближенно как поле конечного числа специальным образом выбранных точечных источников, а неизвестные интенсивности этих источников должны и могут быть найдены как решения систем алгебраических уравнений, полученных при соответствующей дискретизации граничных условий, выполняющихся в рассматриваемых физических полях. Таким образом, этот подход к описанию физических полей дает вычислительный алгоритм численного решения исходной задачи.

На модельных задачах, имеющих точное решение, этот вычислительный алгоритм проверяется, а затем распространяется на более сложные задачи.

В отдельных случаях удается получить математическое обоснование найденных решений. Чаще всего это обоснование основано на сведении рассматриваемых задач к граничным интегральным уравнениям. В двумерном случае — к системам сингулярных интегральных уравнений.

По такой схеме развивался метод дискретных вихрей численного решения задач аэродинамики, который позволил единообразно решить множество линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных задач (литературные ссылки можно найти в [1]).

Аналогичный подход к решению двумерных задач электростатики и электродинамики был предложен в [2].

Разработанный в [3] способ численного анализа электростатических полей (в двумерном случае) по аналогии естественно называть методом дискретных зарядов.

Численный анализ электростатических полей в простых важных частных случаях приведен в [4].

Математическое обоснование метода дискретных зарядов для двумерных краевых задач электростатики проведено в настоящей работе. Дано обоснование численного метода, предложенного в [2, 3] для приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений, к которым приводят рассматриваемые задачи.

Рассмотрим систему цилиндрических проводников. Образующие этих цилиндров параллельны оси z декартовой системы координат, линии пересечения цилиндров с плоскостью xoy — гладкие кривые L_k , $k=1, \dots, m$, среди которых могут быть как замкнутые, так и разомкнутые. Двумерное распределение зарядов на этих проводниках характеризуется тем, что их плотность не зависит от координаты z .

Пусть заданное двумерное распределение зарядов создает поле $\vec{E}_0$, а полный заряд на единицу длины образующей k -го цилиндра равен q_k , $k=1, \dots, m$. Ищется распределение зарядов на цилиндрических проводниках, которое описывается линейной плотностью зарядов σ_k на кривой L_k , $k=1, \dots, m$.

Равномерно заряженная прямая линия (с зарядом q на единицу длины), параллельная оси z и проходящая через точку $(x, y, 0)$, создает двумерное электростатическое поле и называется точечным источником этого поля. Обозначим $\vec{r}$ — радиус-вектор точки (x, y) . Напряженность поля, созданного таким источником в точке наблюдения (x_0, y_0) — ее радиус-вектор обозначим $\vec{r}_0$ — определяется, как известно, формулой

$$\vec{E}^q(\vec{r}_0) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2},$$

где $|\vec{r}_0 - \vec{r}|$ — расстояние между точками (x_0, y_0) и (x, y) ;

ϵ — диэлектрическая постоянная.

Используя принцип суперпозиции, находим полное поле, созданное заданным и искомым распределением зарядов в точке наблюдения (x_0, y_0) :

$$\vec{E}_{\text{полн}}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_{k=1}^m \int_{L_k} \frac{\sigma_k ds}{2\pi\epsilon |\vec{r}_0 - \vec{r}|} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}.$$

Известное граничное условие на поверхности проводника — тангенциальная составляющая напряженности электрического поля равна нулю — приводит к системе граничных интегральных уравнений:

$$(\vec{E}_0, \vec{\tau}_0)|_{(x_0, y_0) \in L_j} + \sum_{k=1}^m \int_{L_k} \frac{\sigma_k(s) ds}{2\pi\epsilon |\vec{r}_0 - \vec{r}|} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}, \vec{\tau}_0)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \Big|_{(x_0, y_0) \in L_j} = 0, \quad j=1, \dots, m,$$

здесь $\vec{\tau}_0$ — единичный вектор касательной к кривой L_j в точке (x_0, y_0) , а скалярное произведение $(\vec{E}_0(\vec{r}_0), \vec{\tau}_0)|_{(x_0, y_0) \in L_j}$ — известная функция точки на кривой L_j .

Кроме того, имеем m дополнительных условий

$$\int_{L_k} \sigma_k(s) ds = q_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

выражающих тот факт, что полные заряды каждой кривой L_k заданы.

Действуя так же, как и в [2, 3], можно показать, что эта система сингулярных интегральных уравнений на плоских кривых L_k , $k=1, \dots, m$.

Предположим, что все контуры гладкие, причем первые m контуров разомкнутые, а остальные — замкнутые.

Существуют гладкие взаимоднозначные отображения отрезка $[-1, 1]$ на кривую L_k , $k=1, \dots, m_1$ и единичной окружности на L_k , $k=m_1+1, \dots, m$. Это позволяет параметризовать все кривые L_k .

Учитывая условия на ребре [3], введем обозначения

$$\sigma_k(s) \frac{ds}{dt} \Big|_{L_k} = \frac{u_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1, \quad k = 1, \dots, m_1;$$

$$\sigma_k(s) \frac{ds}{d\varphi} \Big|_{L_k} = u_k(\varphi), \quad u_k(\varphi + 2\pi) = u_k(\varphi), \quad k = m_1 + 1, \dots, m.$$

Рассматриваемая двумерная задача электростатики приводит к системе сингулярных интегральных уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\tau)}{\tau - t} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(t, \tau) u_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(t, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi = f_i(t), \\ & |t| < 1, \quad i = 1, \dots, m_1, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u_i(\varphi) d\varphi + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(\theta, \tau) u_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(\theta, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi = f_i(\theta), \\ & i = m_1 + 1, \dots, m. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь функции f_i и Q_{ik} — 2π -периодические по θ и φ . Предполагается, что функции Q_{ik} и f_i , $i, k=1, \dots, m$, μ раз непрерывно дифференцируемы по каждой из переменных и их μ -е производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ ($0 < \gamma \leq 1$) по

каждой из переменных (на соответствующем отрезке) равномерно относительно другой переменной.

Предполагается, что система сингулярных интегральных уравнений (1) имеет единственное решение $\vec{u} = (u_k)_{k=1}^m$, удовлетворяющее дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = C_k, & k = 1, \dots, m_1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(\varphi) d\varphi = C_k, & k = m_1 + 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2)$$

где C_k — известные константы. Ниже считаем, что $C_k = 0$, $k = 1, \dots, m$. Это достигается простой заменой неизвестной функции.

Необходимые условия разрешимости системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f_i(\theta) - \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(\theta, \tau) u_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(\theta, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi \right] d\theta = 0, \quad i = m_1 + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

Приближенное решение системы (1) с дополнительными условиями (2) ищем в виде $\vec{u}_n = (u_{n_k})_{k=1}^m$ ($\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$), где при $1 \leq k \leq m_1$, $u_{n_k}(\tau)$ — алгебраический интерполяционный полином Лагранжа по системе узлов t_{r_k} , $r_k = 1, \dots, n_k$, являющихся корнями полинома Чебышева первого рода степени n_k ; при $m_1 + 1 \leq k \leq m$, $u_{n_k}(\varphi)$ — тригонометрический интерполяционный полином порядка n_k по системе узлов φ_{r_k} , $r_k = 0, \dots, 2n_k$, которые, интерпретируемые как угловые координаты точек единичной окружности с центром в начале координат, разбивают эту окружность на $2n_k + 1$, равных частей, из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n_i} \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{t_{r_i} - t_{0p_i}} + Q_{ii}(t_{0p_i}, t_{r_i}) \right] u_{n_i}(t_{r_i}) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{r_k=1}^{n_k} Q_{ik}(t_{0p_i}, t_{r_k}) u_{n_k}(t_{r_k}) + \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& + \sum_{k=m_1+1}^m \sum_{r_k=0}^{2n_k} \frac{1}{2n_k+1} Q_{ik}(t_{0p_i}, \varphi_{r_k}) u_{n_k}(\varphi_{r_k}) = \\
& = f_i(t_{0p_i}), \quad p_i = 1, \dots, n_i - 1, i = 1, \dots, m_1, \\
& \sum_{r_i=0}^{2n_i} \frac{1}{2n_i+1} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi_{r_i} - \varphi_{0j_i}}{2} + Q_{ii}(\varphi_{0j_i}, \varphi_{r_i}) \right] u_{n_i}(\varphi_{r_i}) + \\
& + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{r_k=1}^{n_k} \frac{1}{n_k} Q_{ik}(\varphi_{0j_i}, t_{r_k}) u_{n_k}(t_{r_k}) + \\
& + \sum_{\substack{k=m_1+1 \\ k \neq i}}^m \sum_{r_k=0}^{2n_k} \frac{1}{2n_k+1} Q_{ik}(\varphi_{0j_i}, \varphi_{r_k}) u_{n_k}(\varphi_{r_k}) + \beta_{in} = \\
& = f_i(\varphi_{0j_i}), \quad j_i = 0, \dots, 2n_i, i = m_1 + 1, \dots, m, \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{n_k} \sum_{r_k=1}^{n_k} u_{n_k}(t_{r_k}) = C_k, \quad k = 1, \dots, m_1, \\
& \frac{1}{2n_k+1} \sum_{r_k=0}^{2n_k} u_{n_k}(\varphi_{r_k}) = C_k, \quad k = m_1 + 1, \dots, m.
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \right. \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь t_{0p_i} , $p_i = 1, \dots, n_i - 1$ ($1 \leq i \leq m_1$) — узлы интерполирования по t — корни полинома Чебышева второго рода степени $n_i - 1$; φ_{0j_i} — узлы интерполирования по θ — середины дуг φ_{j_i} , φ_{i+1} , $j_i = 0, \dots, 2n_i$ ($m_1 + 1 \leq i \leq m$), ($\varphi_{2n+1} = \varphi_0$); $\beta_{i\bar{n}}$, $i = m_1 + 1, \dots, m$ — дополнительные регуляризирующие неизвестные, впервые введенные И. К. Лифановым [1].

Чтобы доказать однозначную разрешимость при достаточно больших $n = \min\{n_1, \dots, n_m\}$ системы линейных алгебраических уравнений (4), (5), введем функциональные пространства и операторные обозначения.

Запишем систему (1) в операторных обозначениях:

$$(\hat{A} + \hat{Q}) \vec{u} = \vec{f}, \quad (6)$$

где $\hat{A} \vec{u}$ — сингулярная часть; $\hat{Q} \vec{u}$ — регулярная часть; $\vec{f}$ — вектор-столбец правых частей системы (1). Оператор $\hat{A}$ непрерывно обратим в паре пространств $(L_1^{2,0}, L_{11}^{2,0})$ (7), где $L_{11}^{2,0}$ — подпространство гильбертова пространства L_1^n вектор-функций $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^m$ со скалярным произведением:

$$(\vec{x}, \vec{y})_I = \sum_{k=1}^{m_1} \int_{-1}^1 x_k(\tau) \bar{y}_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \sum_{k=m_1+1}^m \int_0^{2\pi} x_k(\varphi) \bar{y}_k(\varphi) d\varphi,$$

элементы $L_{II}^{2,0}$ удовлетворяют условиям (2). $L_{II}^{2,0}$ — подпространство гильбертова пространства L_{II}^2 вектор-функций $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^m$ со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y})_{II} = \sum_{k=1}^{m_1} \int_{-1}^1 x_k(t) \bar{y}_k(t) \sqrt{1-t^2} dt + \sum_{k=m_1+1}^m \int_0^{2\pi} x_k(\theta) \bar{y}_k(\theta) d\theta,$$

элементы $L_{II}^{2,0}$ удовлетворяют условиям $\int_0^{2\pi} x_k(\theta) d\theta = 0$, $k = m_1 + 1, \dots, m$.

Преобразуем уравнение (6) таким образом, чтобы его можно было рассматривать в паре пространств (7).

Пусть $\vec{w} \in L_{II}^2$. Назовем $\vec{w}$ регуляризированной вектор-функцию $\vec{w}^R = (w_k^R)_{k=1}^m \in L_{II}^{2,0}$, где $w_k^R(t) = w_k(t)$ при $1 \leq k \leq m_1$; $w_k^R(\theta) = w_k(\theta) -$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_k(\theta) d\theta$$

при $m_1 + 1 \leq k \leq m$.

Производя регуляризацию обеих частей уравнения (6) и пользуясь свойствами оператора $\vec{A}$, получаем уравнение

$$(\hat{A} + \hat{Q}^R) \vec{u} = \vec{f}^R, \quad (8)$$

которое, в силу условий (3), эквивалентно уравнению (6).

В рассматриваемых задачах электродинамики условия (3) выполняются для любых функций $u_k(\varphi)$, т. е. не сужают область определения оператора $\hat{A} + \hat{Q}^R$.

Пусть оператор $\hat{A} + \hat{Q}^R$, действующий в паре пространств (7), является в ней непрерывно обратимым.

Заменяя в (8) все функции их интерполяционными полиномами и производя регуляризацию обеих частей полученного уравнения, приходим к уравнению

$$(\hat{A} + (\hat{Q}^R)^R) \vec{u}_n = (\vec{f}^R)_n, \quad (9),$$

которое эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (4), (5).

Оператор $\hat{A} + (\hat{Q}_n^R)^R$ действует в паре пространств

$$(\Pi_{1n}^0, \Pi_{11n}^0), \quad (10)$$

где $\Pi_{1n}^0 \subset L_1^{2,0}$ состоит из вектор-функций, у которых i -я координата при $1 \leq i \leq m_1$ — алгебраический полином степени не выше $n_i - 1$, при $m_1 + 1 \leq i \leq m$ — тригонометрический полином порядка не выше n_i ; $\Pi_{11n}^0 \subset L_{11}^{2,0}$ состоит из вектор-функций, у которых i -я координата при $1 \leq i \leq m_1$ — алгебраический полином степени не выше $n_i - 2$, при $m_1 + 1 \leq i \leq m$ — тригонометрический полином порядка не выше n_i .

Пользуясь теоремами Джексона и свойствами интерполяционных полиномов [6], получаем оценки

$$\|((\hat{Q}_n^R)^R - \hat{Q}^R)\vec{u}_n\|_{11} \leq \varepsilon_n \|\vec{u}_n\|_1, \quad (11)$$

$$\|(\vec{f}_n^R)^R - \vec{f}^R\|_{11} \delta \leq \delta_n,$$

где $\varepsilon_n = O(n^{-\mu-\gamma})$ и $\delta_n = O(n^{-\mu-\gamma})$ при $n \rightarrow \infty$.

Из непрерывной обратимости оператора $\hat{A} + \hat{Q}^R$ в паре пространств (7) и оценок (11) следует [5], что уравнение (9) имеет единственное решение $\vec{u}_n$ в паре пространств (10), причем справедлива оценка $\|\vec{u}_n - \vec{u}\|_1 \leq \alpha_n$, где $\alpha_n = O(n^{-\mu-\gamma})$ при $n \rightarrow \infty$; $\vec{u}$ — решение задачи (1), (2).

Для дополнительных регуляризирующих неизвестных получают оценки: $|\beta_{i,n}| = O(n^{-\mu-\gamma})$ при $n \rightarrow \infty$; $i = m_1 + 1, \dots, m$.

Список литературы: 1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985. 256 с. 2. Гандель Ю. В., Лифанов И. К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики: Научно-методические материалы по численным методам. М., 1985. С. 3—13. 3. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики//Вопр. кибернетики. 1986. Вып. 124. С. 166—183. 4. Гандель Ю. В., Литвяков В. Л. Численное решение модельных задач электростатики методом дискретных особенностей. Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса//Сб. науч. тр. М., 1987. С. 60—74. 5. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации линейных задач. Казань, 1980. 231 с. 6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М., 1949. 344 с.

Поступила в редколлегию 17.06.88

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКА ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Высокочастотные электрические поля применяются для нивелирования ЭГД эффектов, обусловленных проводимостью [1—3]. Переменные бегущие поля используются в устройствах для перекачки диэлектрических жидкостей [4—6]. Возникает вопрос о точности приближенных уравнений в случае достаточно больших частот.

В данной работе методом усреднения [7, 8] выводятся уравнения в переменном электрическом поле вплоть до членов второго порядка малости μ по обратному числу Струхала: $\mu = St^{-1}$, изучаются некоторые ЭГД эффекты.

1. **Постановка задачи.** Предполагаем: жидкость занимает некоторый объем Ω , ограниченный гладкими поверхностями металлических электродов S_1, S_2 , на которых поддерживаются постоянные температуры соответственно T_1, T_2 , и приложена периодически изменяющаяся разность потенциалов $V_0 \cos \omega t$. В переменных полях заряды, инжектируемые на электродах, концентрируются в приэлектродных слоях толщиной $\delta \sim 2\pi bE/\omega$ [9], где b — подвижность инжектируемых ионов. При типичных $b \sim 10^{-4}$ см²/В·с, $E \sim 10$ кВ/см, $\omega \gtrsim 10^3$ с⁻¹ имеем $\delta \lesssim 0,006$ см, поэтому основную роль в развитии ЭГД течений будут играть эффекты диссоциации и поляризации жидкости.

Исходим из системы уравнений [9], в которой не учитываются инжектируемые заряды ($n_3 = n_4 = 0$).

Выбирая в качестве единиц измерения величины * $[t] = \omega^{-1}$, $[\vec{v}] = v/d = v_0$, $[\vec{E}] = V_0/d = E_0$, $[n_1] = [n_2] = n_0$, $[N] = N_0$, $[r] = d$, $[p'] = \rho v_0^2$ и вводя для температуры замену $\theta = (T - T_1)/\Delta T$, $\Delta T_0 = T_2 - T_1$, в приближении Буссинеска получаем следующую систему уравнений в безразмерных переменных:

$$St \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{\Delta} \vec{v} + Gn \vec{E} - G_d E^2 \nabla \varepsilon - Ra \theta \vec{a}, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

$$\text{div } \varepsilon \vec{E} = Cn, \quad n = n_1 - n_2, \quad \vec{E} = -\nabla \Phi, \quad \text{Pe } St \frac{\partial n_j}{\partial t} +$$

$$+ \text{div} ((-1)^{j-1} \beta_j n_j \vec{E} + \text{Pe } n_j \vec{v}) = \gamma_p C (NF_1 - \alpha n_1 n_2),$$

$$St \frac{\partial N}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla N - \frac{1}{P_d} \Delta N = -\kappa (NF_1 - \alpha n_1 n_2), \quad j = 1, 2;$$

* Обозначения см. в [9].

$$\text{St} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta - \frac{1}{P} \nabla^2 \theta = \text{Id} \sigma E^2 + \text{I} \omega \varepsilon E^2 \quad (1); \quad \text{St} = \frac{\omega d}{v_0},$$

$$G = \frac{en_0 E_0 d^2}{\eta v_0}, \quad G_d = \frac{E_0^2 d}{\eta v_0 8\pi}, \quad \beta_j = \frac{b_j}{b_{2*}}, \quad \text{Ra} = \frac{\rho_* g \Delta T_0 d^2}{\eta v_0}, \quad C = \frac{4\pi en_0 d}{E_0},$$

$$\text{Pe} = \frac{v_0}{b_{2*} E_0}, \quad \alpha = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p*}}, \quad P = \nu/\chi, \quad \text{Pd} = \nu/D, \quad \gamma_p = \alpha_{p*}/\alpha_0, \quad \alpha_0 \equiv 4\pi e b_{2*},$$

$$\kappa = \frac{k_{d*} d}{v_0}, \quad \text{Id} = \frac{e b_{2*} n_0 E_0^2 d}{\rho c_p \Delta T_0 v_0}, \quad \text{I} \omega = \frac{\omega E_0^2 \text{tg} \varphi d}{8\pi \Delta T_0 v_0 \rho c_p}, \quad \sigma = \beta_1 \kappa_1 + \beta_2 n_2,$$

$$F_1 = \frac{k_d}{k_{d*}} F(E).$$

Здесь звездочка в нижнем индексе указывает, что величины берутся при температуре T_* , в окрестности которой произведена линеаризация температурной зависимости плотности $\rho = \rho_*(1 - \beta(T - T_*))$, $\text{tg} \varphi$ — тангенс угла диэлектрических потерь, $\vec{a}$ — единичный вектор, направленный вдоль силы тяжести, $F(E)$ — функция, описывающая усиление диссоциации электрическим полем [9]. В силу того, что подвижности b_j , диэлектрическая проницаемость ε , константы скоростей диссоциации k_d и рекомбинации α_p зависят от температуры T , параметры β_j , α зависят от θ , а функция F_1 зависит от E , θ . Источниковые члены в уравнении теплопроводности описывают джоулеву диссипацию и диэлектрические потери. В высокочастотных полях число Струхала $\text{St} \gg 1$, поэтому система уравнений (1) содержит малый параметр $\mu = \text{St}^{-1}$.

Граничные условия к системе (1) имеют вид

$$S_1 \text{ (анод): } \vec{v} = 0, \quad n_1 = 0, \quad \Phi = \cos t, \quad \theta = 0; \quad (2)$$

$$S_2 \text{ (катод): } \vec{v} = 0, \quad n_2 = 0, \quad \Phi = 0, \quad \theta = 1.$$

2. Вывод усредненных уравнений. Согласно методу усреднения [7, 8] решение ищем в виде суммы плавно меняющихся и пульсационных частей, которые снабжаем штрихами

$$\vec{v} = \vec{u}(\tau, \vec{r}) + \vec{u}'(t, \vec{r}), \quad p = p_0(\tau, \vec{r}) + p'(t, \vec{r}), \quad n_j = q_j(\tau, \vec{r}) + q'_j(t, \vec{r}), \quad N = \eta(\tau, \vec{r}) + \eta'(t, \vec{r}), \quad \theta = \vartheta(\tau, \vec{r}) + \vartheta'(t, \vec{r}), \quad (3)$$

где $\tau = \mu t$ — медленное время.

Электрическое поле представим в виде суммы осциллирующего внешнего поля $\vec{E}_0 \cos t$, где $\vec{E}_0 = -\nabla \Phi_0$ — внешнее поле, потенциал которого Φ_0 удовлетворяет задаче $\text{div}(\varepsilon(\vartheta) \nabla \Phi_0) = 0$;

$$S_1: \Phi_0 = 1; \quad S_2: \Phi_0 = 0 \quad (4) \quad \text{среднего } \vec{E}_c(\tau, \vec{r}) \text{ и пульсационного } \vec{E}'(t, \vec{r}) \quad \vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos t + \vec{E}_c(\tau, \vec{r}) + \vec{E}'(t, \vec{r}) \quad (5).$$

Подставляя (3), (5) в (1) и усредняя по времени*, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = & -\nabla p_0 + \Delta \vec{u} - G_d E_0^2 \langle \cos^2 t \nabla \varepsilon \rangle - \text{Ra} \, \vec{\vartheta} \vec{a} + \\ & + G (\vec{E}_0 \langle q' \cos t \rangle + \langle q' \vec{E}' \rangle + \vec{q} \vec{E}_0) - G_d (2 \langle \vec{E}_0 \cdot \vec{E}'' \cos t \nabla \varepsilon \rangle + \\ & + \langle E''^2 \nabla \varepsilon \rangle) - \langle (\vec{u}' \nabla) \vec{u}' \rangle, \quad \text{Pe} \frac{\partial q_j}{\partial \tau} + \text{div} [(-1)^{j-1} \langle \beta_j \rangle q_j \vec{E}_c + \\ & + \vec{E}_0 \langle \beta_j q'_j \cos t \rangle + \langle \beta_j q'_j \vec{E}' \rangle] + q_j \langle \beta_j \vec{E}' \rangle + \text{Pe} (q_j \vec{u} + \langle q'_j \vec{u}' \rangle)] = \\ = \gamma_j C \langle \Sigma \rangle, \quad j=1, 2; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla \eta + \langle \vec{u}' \cdot \nabla \eta \rangle - \frac{1}{P_d} \nabla \eta = -x \langle \Sigma \rangle, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla \vartheta + \langle \vec{u}' \cdot \nabla \vartheta' \rangle - \frac{1}{P} \Delta \vartheta = \text{Id} \langle \sigma E^2 \rangle + \text{Iw} \langle \varepsilon E^2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_c + \vec{E}', \quad \langle \Sigma \rangle = \eta \langle F_1 \rangle + \langle \eta' F_1 \rangle - \langle \alpha (q_1 + q'_1)(q_2 + q'_2) \rangle. \quad (6)$$

После подстановки (3), (5) в (1) и использования (6) получаем следующую систему уравнений для пульсационных величин:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = & \langle \vec{u}' \nabla \rangle \vec{u}' - (\vec{u}' \nabla) \vec{u}' - (\vec{u}' \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \nabla) \vec{u}' - \nabla p' + \Delta \vec{u}' - \\ & - \text{Ra} \, \vec{\vartheta}' \vec{a} + G (q \vec{E}_0 \cos t + \vec{f}_e - \langle \vec{f}_e \rangle) - G_d (\vec{f}_d - \langle \vec{f}_d \rangle), \\ \frac{\text{Pe}}{\mu} \frac{\partial q'_j}{\partial t} + \text{div} [(-1)^{j-1} (\beta_j q_j \vec{E}_0 \cos t + \vec{j}_e - \langle \vec{j}_e \rangle) + \text{Pe} (q_j \vec{u}' + \vec{q}'_j \vec{u} + \\ & + \vec{q}'_j \vec{u}' - \langle \vec{q}'_j \vec{u}' \rangle)] = \gamma_p C \Sigma', \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \text{div} (\eta \vec{u}' + \eta' \vec{u} + \eta' \vec{u}' - \langle \eta' \vec{u}' \rangle) - \\ & - \frac{1}{P_d} \nabla \eta' = -x \Sigma', \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + \text{div} (\vartheta \vec{u}' + \vartheta' \vec{u} + \vartheta' \vec{u}' - \langle \vartheta' \vec{u}' \rangle) - \\ & - \frac{1}{P} \nabla \vartheta' = \text{Id} (\sigma E^2 - \langle \sigma E^2 \rangle) + \text{Iw} (\varepsilon E^2 - \langle \varepsilon E^2 \rangle), \quad \vec{f}_e = q \vec{E}' + q' \vec{E}_0 \cos t + \\ & + q' \vec{E}'', \quad q = q_1 - q_2, \quad q' = q'_1 - q'_2, \quad \vec{f}_d = (E_0^2 \cos^2 t + 2 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}'' \cos t + \\ & + E''^2) \cdot \nabla \varepsilon, \quad \vec{E}'' = \vec{E}_c + \vec{E}', \quad \vec{j}_e = (q_j \vec{E}' + \vec{q}'_j \vec{E}_0 \cos t + \vec{q}'_j \vec{E}'') \beta_j, \end{aligned}$$

* Медленное время τ при усреднении рассматривается как параметр. С физической точки зрения усреднение производится по промежутку времени Δt , удовлетворяющему условию $\omega^{-1} \ll \Delta t \ll t_0$, где t_0 — характерное время усреднения движения.

$$\Sigma = \eta(F_1 - \langle F_1 \rangle) + \eta' F_1 - \langle \eta' F_1 \rangle - (\alpha - \langle \alpha \rangle) q_1 q_2 - \alpha (q_1 q_2' + q_1' q_2 + q_1' q_2') + q_1 \langle \alpha q_2' \rangle + \langle \alpha q_1' \rangle q_2 + \langle \alpha q_1' q_2' \rangle.$$

Из (7) видно, что пульсации имеют порядок μ , поэтому зависимость $\varepsilon(\Theta)$ можно разложить в ряд в окрестности Θ :

$$\varepsilon = \varepsilon(\Theta) + \frac{d\varepsilon}{d\Theta} \Theta' + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{d\Theta^2} \Theta'^2 + \dots \quad (8)$$

Используя (8), уравнение Гаусса запишем как

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [(\varepsilon(\Theta) + \frac{d\varepsilon}{d\Theta} \Theta' + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{d\Theta^2} \Theta'^2 + \dots)(\vec{E}_0 \cos t + \vec{E}_c + \vec{E}')] = \\ = C(q_1 - q_2 + q_1' - q_2'). \end{aligned} \quad (9)$$

Пульсации будем искать в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned} \vec{u}' = \mu \vec{u}_{(1)} + \mu^2 \vec{u}_{(2)} + \dots, \quad p' = \mu p_{(1)} + \mu^2 p_{(2)} + \dots, \quad q_j' = \mu q_{j(1)} + \\ + \mu^2 q_{j(2)} + \dots, \quad \eta' = \mu \eta_{(1)} + \mu^2 \eta_{(2)} + \dots, \quad \vec{E}' = \mu \vec{E}_{(1)} + \mu^2 \vec{E}_{(2)} + \dots, \\ \Theta' = \mu \Theta_{(1)} + \mu^2 \Theta_{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7)–(9) и используя (4), получаем для нулевого приближения

$$\operatorname{div} \varepsilon(\Theta) \vec{E}_c = C(q_1 - q_2), \quad \vec{E}_c = -\nabla \Phi_c. \quad (11)$$

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}_{(1)}}{\partial t} = Gq \vec{E}_0 \cos t - G_d \left(\frac{1}{2} E_0^2 \cos 2t + 2\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c \cos t \right) \nabla \varepsilon,$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial q_{j(1)}}{\partial t} = -\operatorname{div} (-1)^{j-1} \beta_j q_j \vec{E}_0 \cos t + \gamma_p C \eta f, \quad \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} = -\alpha \eta f,$$

$$f = F_0 - \langle F_0 \rangle, \quad F_0 = F_1(|E_0 \cos t|), \quad \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial t} = (\operatorname{Id} \sigma_{(0)} + \operatorname{Id} \varepsilon(\Theta)) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} E_0^2 \cos 2t + 2\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c \cos t \right), \quad \operatorname{div} (\varepsilon(\Theta) \vec{E}_{(1)} + \frac{d\varepsilon}{d\Theta} \Theta_{(1)} \vec{E}_0 \cos t) = \\ = C(q_{1(1)} - q_{2(1)}). \quad (12)$$

Эти уравнения выполняются в объеме жидкости на некотором расстоянии от электродов. В силу граничных условий (2) вблизи электродов образуются пульсационные пограничные слои, структуру которых здесь рассматривать не будем.

Из (12) получаем

$$\vec{u}_{(1)} = \vec{V}_1 \sin t + \vec{V}_2 \sin 2t, \quad q_{j(1)} = Q_j \sin t + \Gamma \eta f_1, \quad \vec{E}_{(1)} = \vec{E}_{11} \sin t \cos t +$$

$$+ \vec{E}_{12} \sin 2t \cos t + \vec{E}_{13} \sin t, \quad \eta_{(1)} = -\kappa \eta f_1, \quad \vartheta_{(1)} = \vartheta_1 \sin t + \vartheta_2 \sin 2t, \\ \vec{V}_1 = Gq\vec{E}_0 - 2G_d\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c \nabla \varepsilon, \quad V_2 = -\frac{1}{4} G_d E_0^2 \nabla \varepsilon,$$

$$Q_j = -\frac{1}{\text{Pe}} \operatorname{div} (-1)^{j-1} \beta_j q_j \vec{E}_0, \quad j = 1, 2; \quad \Gamma \equiv \gamma_p C / \text{Pe},$$

$$\vartheta_1 = 2 (\operatorname{Id} \sigma_{(0)} + \operatorname{Id} \varepsilon) \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{Id} \sigma_{(0)} + \operatorname{Id} \varepsilon) E_0^2,$$

$$\sigma_{(0)} = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2, \quad \vec{E}_{1j} = -\nabla \Phi_j, \quad j = \overline{1, 3}; \quad f_1 = \int_0^t f dt. \quad (13)$$

Здесь Φ_j — решение уравнений

$$\operatorname{div} \varepsilon \nabla \Phi_j = H_j; \quad H_j = \varepsilon \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \vartheta_j, \quad j = 1, 2; \quad H_3 = \Gamma \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{\sigma_{(0)}}{\varepsilon} \quad (14)$$

при нулевых граничных условиях.

В дальнейшем понадобятся следующие уравнения второго приближения:

$$\frac{\partial q_{j(2)}}{\partial t} + \text{Pe}^{-1} \operatorname{div} [(-1)^{j-1} \beta_j (q_j \vec{E}_{(1)} + q_{j(1)} \vec{E}_0 \cos t + q_{j(1)} \vec{E}_c) + \\ + (-1)^{j-1} q_j \frac{d\beta_j}{d\vartheta} \vartheta_{(1)} (\vec{E}_0 \cos t + \vec{E}_c) + \text{Pe} (q_j \vec{u}_{(1)} + q_{j(1)} \vec{u})] = \Gamma \Sigma_{(1)}; \\ \operatorname{div} [\varepsilon \vec{E}_{(2)} + \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \vartheta_{(1)} \vec{E}_{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varepsilon}{d\vartheta^2} (\vec{E}_0 \cos t + \vec{E}_c) \vartheta_{(1)}^2] = C (q_{1(2)} - q_{2(2)}); \\ \frac{\partial \vartheta_{(2)}}{\partial t} = \frac{1}{P} \Delta \vartheta_{(1)} - \vec{u}_{(1)} \cdot \nabla \vartheta - \vec{u} \cdot \nabla \vartheta_{(1)} + \operatorname{Id} (H(\sigma_{(1)}) - \langle H(\sigma_{(1)}) \rangle + \\ + \operatorname{Id} (H(\varepsilon_{(1)}) - \langle H(\varepsilon_{(1)}) \rangle)); \quad (15)$$

$$\Sigma_{(1)} = \eta F_{(1)} + \eta_{(1)} F_0 - \alpha q_1 q_{2(1)} - \alpha q_2 q_{1(1)} - q_1 q_2 \frac{d\alpha}{d\vartheta} \vartheta_{(1)} - \langle \eta_{(1)} F_0 \rangle,$$

$$F_{(1)} = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{(1)}}{E_0} \frac{\cos t}{|\cos t|} + \frac{\partial F_0}{\partial \vartheta} \vartheta_{(1)}, \quad \varepsilon_{(1)} = \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \vartheta_{(1)}, \quad \sigma_{(1)} = \beta_1 q_{1(1)} +$$

$$+ \beta_2 q_{2(1)} + \left(\frac{d\beta_1}{d\vartheta} q_1 + \frac{d\beta_2}{d\vartheta} q_2 \right) \vartheta_{(1)}, \quad H(\sigma_{(1)}) = \sigma_{(1)} (E_0^2 \cos^2 t + E_c^2) +$$

$$+ 2\sigma_{(1)} \vec{E}_0 \cdot (\vec{E}_{(1)} \cos t + \vec{E}_c) + 2\sigma_{(1)} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c \cos t;$$

$$H(\varepsilon_{(1)}) = \varepsilon_{(1)} (E_0^2 \cos^2 t + E_c^2) + 2\varepsilon_{(1)} \vec{E}_0 \cdot (\vec{E}_{(1)} \cos t + \vec{E}_c) + 2\varepsilon_{(1)} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_c \cos t. \quad (16)$$

При получении этих уравнений учтено: $\langle \sigma_{(1)} \cos^2 t \rangle = 0$, $\langle \vec{E}_{(1)} \cos^2 t \rangle = 0$, $\langle F_{(1)} \rangle = 0$.

Усредненные уравнения получаем с точностью порядка μ^2 . Используя (8), (13), (15) с учетом $q \sim E_i \sim \mu^2$ (см. ниже (17)), из (6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} &= -\nabla p_0 + \Delta \vec{u} - \frac{1}{2} G_d E_0^2 \nabla \varepsilon - \text{Ra} \, \vec{\vartheta} \vec{a} + \mu^2 \vec{f}_\omega; \quad \text{div} \, \vec{u} = 0, \\ \text{div} \, \varepsilon \vec{E}_e &= Cq, \quad \vec{E}_e = -\nabla \Phi_e, \quad \text{Pe} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \text{div} (\sigma_{(0)} \vec{E}_e + \text{Pe} \, q \vec{u}) = \\ &= -\mu^2 \text{div} \, \vec{I}_\omega, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{1}{P} \Delta \vartheta + \frac{1}{2} \text{Id} \, \sigma_{(0)} E_0^2 + \frac{1}{2} \text{I} \omega \varepsilon E_0^2 + \mu^2 D_\omega, \\ \frac{d}{d\tau} &\equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla, \quad \frac{dn}{d\tau} = \Gamma \langle \Sigma_0 \rangle, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\alpha \langle \Sigma_0 \rangle, \quad \langle \Sigma_0 \rangle \equiv \eta \langle F_1 \rangle - \\ &- \alpha n^2 \, \vec{f}_\omega = G \left[\frac{\vec{E}_0}{\text{Pe}} \left(\frac{\varepsilon}{4} \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{\vartheta_2}{\varepsilon} \left(q_1 \frac{d\beta_1}{d\vartheta} + q_2 \frac{d\beta_2}{d\vartheta} \right) + \text{div} \, \sigma_{(0)} \vec{E}_1 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \nabla Q^- \right) + Q^- \vec{E}_1 \Big] - G_d \left[E_0^2 \nabla \left(\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \langle \vartheta_{(2)} \cos^2 t \rangle + \frac{\vartheta_2^2}{8} \frac{d^2 \varepsilon}{d\vartheta^2} \right) + \right. \\ &+ \left. 2 (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{22}) \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_2) \nabla \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \vartheta_1 + \langle E_{(1)}^2 \rangle \nabla \varepsilon \right] - \frac{1}{2} (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_2; \\ \vec{I}_\omega &= \vec{E}_0 \left[\beta_1 \langle q_{(2)} \cos t \rangle + \beta_2 \langle q_{2(2)} \cos t \rangle + \frac{\vartheta_2}{4} \left(\frac{d\beta_1}{d\vartheta} Q_1 + \frac{d\beta_2}{d\vartheta} Q_2 \right) + \right. \\ &+ \left. \vartheta_2 \left(\frac{d\beta_1}{d\vartheta} + \frac{d\beta_2}{d\vartheta} \right) \Gamma_\gamma A_5 \right] + \vec{E}_{12} \left[\frac{1}{4} Q + (\beta_1 + \beta_2) \Gamma_\gamma A_5 \right] + \\ &+ \vec{E}_{13} \left[\frac{1}{2} Q + (\beta_1 + \beta_2) \Gamma_\gamma A_2 \right]; \quad \Gamma = \gamma_p C / \text{Pe}; \quad D_\omega = (\text{Id} \, \sigma_{(0)} + \text{I} \omega \varepsilon) \times \\ &\times \left[\langle E_{(1)}^2 \rangle + 2 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{22} \right] + 2 \left(\text{Id} \left(q_1 \frac{d\beta_1}{d\vartheta} + q_2 \frac{d\beta_2}{d\vartheta} \right) + \text{I} \omega \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \right) \times \\ &\times \left[\vec{E}_0 \cdot \langle \vec{E}_{(1)} \vartheta_{(1)} \cos t \rangle + E_0^2 (\text{Id} \, \langle \sigma_{(2)} \cos^2 t \rangle + \text{I} \omega \langle \varepsilon_{(2)} \cos^2 t \rangle); \right. \\ &+ \left. \sigma_{(2)} = \vartheta_{(2)} \left(q_1 \frac{d\beta_1}{d\vartheta} + q_2 \frac{d\beta_2}{d\vartheta} \right) + \frac{\vartheta_{(1)}^2}{2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} (\beta_1 + \beta_2); \quad \varepsilon_{(2)} = \vartheta_{(2)} \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} + \right. \\ &+ \left. \frac{\vartheta_{(1)}^2}{2} \frac{d^2 \varepsilon}{d\vartheta^2}; \quad Q^- = Q_1 - Q_2; \quad Q = \beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2; \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4} \vec{E}_{12} + \frac{1}{2} \vec{E}_{13}, \right. \\ &\vec{E}_2 = \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13}, \quad \vec{E}_{22} = \langle \vec{E}_{(2)} \cos t \rangle, \quad \langle q_{(2)} \cos t \rangle = (-1)^{j-1} \frac{1}{\text{Pe}} \times \\ &\times \left(\text{div} \, \beta_j q_j \vec{E}_1 + \frac{\varepsilon}{4} \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{\vartheta_2}{\varepsilon} q_j \frac{d\beta_j}{d\vartheta} \right) + \vec{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} Q + \gamma \Gamma A_2 \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Gamma \left(\eta A_3 - \kappa \eta A_4 - \frac{\alpha}{2} Q - \alpha \eta \Gamma A_2 (q_1 + q_2) \right); \langle \vartheta_{(2)} \cos^2 t \rangle = \\
& = -\frac{1}{8\rho} \Delta \vartheta_2 + \frac{1}{8} (\vec{V}_2 \cdot \nabla \vartheta + \vec{u} \cdot \nabla \vartheta_2) - \frac{1}{8} (\text{Id } \sigma_{(0)} + \text{I} \omega \varepsilon) \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_2 - \\
& - \frac{\vartheta_2}{16} E_0^2 \left[\text{Id} \left(q_1 \frac{d\beta_1}{d\vartheta} + q_2 \frac{d\beta_2}{d\vartheta} \right) + \text{I} \omega \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \right]; \langle E_{(1)}^2 \rangle = \frac{1}{4} E_{12}^2 + \\
& + \frac{1}{2} \vec{E}_{12} \cdot \vec{E}_{13} + \frac{1}{2} E_{13}^2; A_2 = \langle f_1 \sin t \rangle, A_3 = \langle F_{(1)} \sin t \rangle, \\
& A_4 = \langle f_1 F_0 \sin t \rangle, A_5 = \langle f_1 \cos t \sin 2t \rangle. \quad (17)
\end{aligned}$$

Здесь F_0 определяется по (12); Q , ϑ_2 , f_1 , $\vec{V}_2$, $\vec{E}_{1j}$ — по (13), (14), $F_{(1)}$ — по (16). Потенциал поля $\vec{E}_0$ определяется задачей (4). В выражениях для $\vec{f}_\omega$, $\vec{I}_\omega$, D_ω можно считать $q_1 = q_2 = n$, так как погрешность уравнений (17) при этом не изменится. Граничные условия для $\vec{u}$, ϑ имеют вид (2); для Φ_c необходимо требовать $\Phi_c = 0$ на S_1 , S_2 .

3. Анализ уравнений. Проведем оценку значений безразмерных параметров для неполярного жидкого диэлектрика при следующих типичных значениях: $\sigma_* = 10^{-12}$ см/см, $\omega = 10^3$ 1/с, $E_0 = 30$ кВ/см, $\Delta T_0 = 1^\circ$, $\rho = 1$ г/см³, $\eta = 0,1$ пз, $d = 1$ см, $c_p = 10^7$ эрг/г·град, $T_* = 20^\circ\text{C}$, $\text{tg } \varphi = 0,02$; $b_{2*} = 10^{-4}$ см²/В·с. Будем считать зависимости ε , σ от температуры линейными:

$$\varepsilon = \varepsilon_* [1 - \beta_\varepsilon (T - T_*)], \quad \sigma = \sigma_* [1 + \beta_\sigma (T - T_*)],$$

причем для неполярных диэлектриков $\varepsilon_* = 2$, $\beta_\varepsilon \approx 10^{-3}$ 1/град, $\beta_\sigma \approx 0,05$ 1/град. Имеем $G \approx 1,5 \cdot 10^5$, $G_d \approx 10^6$, $\text{Id} \approx 0,01$, $\text{I} \omega \approx 1,6 \cdot 10^{-2}$; $C \approx 2,0$; $\text{Pe} \approx 0,03$; $\gamma_p \approx 2$, $\mu \approx 10^{-4}$. Отсюда видно, что членами с Id , $\text{I} \omega$ в $\vec{f}_\omega$, $\vec{I}_\omega$ можно пренебречь. Так как обычно $\Gamma \gg 1$, $\kappa \ll 1$, то можно считать $\eta = 1$, $n = (\langle F_1 \rangle / \alpha)^{1/2}$ (18).

С учетом сделанных замечаний и соотношений $\beta_\varepsilon \Delta T_0 \ll \beta_\sigma \Delta T \ll 1$, $C \beta_\varepsilon \Delta T_0 / \text{Pe} \sim 1$, $G_d \beta_\varepsilon \Delta T_0 \gtrsim 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\vec{f}_\omega &= \frac{G}{2\text{Pe}} \left[\left(\frac{\sigma_{(0)} C}{\varepsilon \text{Pe}} q_0 + \vec{u} \cdot \nabla q_0 \right) \vec{E}_0 + q_0 \vec{E}_{13} \right] - G_d [E_{13}^2 + 2\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{22}] \nabla \varepsilon + \\
& + \frac{1}{32} G_d^2 E_0^2 \left(\nabla \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} E_0^2 (\nabla \varepsilon \cdot \nabla \vartheta) - (\nabla \varepsilon \cdot \nabla) E_0^2 \nabla \varepsilon \right); \\
\vec{I}_\omega &= \vec{E}_0 \left[\frac{n C q_0}{2\varepsilon \text{Pe}} (\beta_1^2 - \beta_2^2) + \varepsilon \vec{E}_{13} \cdot \vec{g} + \vec{u} \cdot \nabla H - (\beta_1 + \beta_2) \times \right. \\
& \times \Gamma (A_3 - \frac{1}{2} \alpha n Q + - 2 \alpha n \Gamma A_2) \left. \right] + H \vec{E}_{13};
\end{aligned}$$

$$H = -\frac{\varepsilon}{2Pe} \vec{E}_0 \cdot \vec{g} + (\beta_1 + \beta_2) \Gamma A_2, \quad \vec{g} = \beta_1 \nabla \beta_2 \frac{n}{\varepsilon} - \beta_2 \nabla \beta_1 \frac{n}{\varepsilon};$$

$$q_0 = -\varepsilon \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{\sigma_{(0)}}{\varepsilon}, \quad Q^+ = -\varepsilon \vec{E}_0 \cdot \nabla \frac{n}{\varepsilon} (\beta_1 - \beta_2). \quad (19)$$

В силу малости Id , $I\omega$ член $\mu^2 D_\omega$ в уравнении теплопроводности (17) можно опустить.

Появление дополнительной силы $\vec{f}_\omega$ в высокочастотных полях связано только с температурной неоднородностью. Дополнительный ток $\vec{J}_\omega$ обусловлен разными коэффициентами подвижностей ($\beta_1 \neq \beta_2$) и усилением диссоциации электролита под действием электрического поля ($A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$). Обсудим условия применимости уравнений (17)–(19). Прежде всего заметим, что усредненные уравнения (6) и уравнения для пульсаций (7) — точные. При получении (17) из (6) использовались разложения (10), поэтому условия применимости (17) определяются условиями асимптотической сходимости рядов (10). Из (7) условия сходимости для q'_j , ϑ' , η' имеют вид

$$\mu \Gamma = \frac{\alpha_{p*} n_0}{\omega} \ll 1, \quad \mu x = \frac{k_{d*}}{\omega} \ll 1, \quad \mu Id \sim \mu I\omega \ll 1. \quad (20)$$

Первое неравенство означает, что период колебаний внешнего поля значительно меньше времени рекомбинации ионов, второе — период колебаний значительно меньше времени распада нейтральной компоненты. С учетом $q'_j \sim \mu$, $\vartheta' \sim \mu$ условия сходимости для μ запишутся как $\mu^2 Ra \ll 1$, $\mu^2 G \ll 1$, $\mu^2 G_d \varepsilon \beta_2 \Delta T_0 \ll 1$ (21).

Неравенства (20), (21) суть верхняя оценка условий сходимости. Если исходить из физических соображений, то условие того, что средняя поляризационная сила значительно больше составляющих силы, приводит к неравенствам

$$\frac{\mu^2 \beta_2 GC}{\varepsilon \beta_2 E_0 G_d Pe^2} \ll 1, \quad \mu^2 G_d \varepsilon \beta_2 \Delta T_0 \ll 1; \quad (22)$$

$$\mu^2 \frac{\varepsilon G}{2Pe} |\vec{\mu} \cdot \nabla q_0| \ll G_d E_0 |\nabla \varepsilon|. \quad (23)$$

Используя полученные выше значения безразмерных параметров, видим, что условия (22) обычно выполняются. Проверка условия (23) требует специальных рассуждений. Например, для сдвиговых течений под действием поляризационных сил в стоковом приближении имеем $u \sim G_d t_0^2 \nabla \varepsilon$, тогда (23) запишется как

$$\mu^2 \frac{G}{2Pe} |\nabla q_0| \sim \mu^2 \frac{\beta_2 \Delta T_0 G}{2s Pe} \ll 1. \quad (24)$$

При частотах $\omega = 500$ 1/с, проводимости $\sigma \approx 10^{-12}$ ом $^{-1}$ см $^{-1}$ и $\Delta T_0 = 10^\circ$ для неполярного диэлектрика левая часть в (24) имеет порядок ~ 1 . Поэтому для нивелирования эффектов проводимости необходимо брать хорошо очищенные жидкости с проводимостью порядка 10^{-14} ом $^{-1}$ см $^{-1}$.

4. Зависимость вольт-амперных характеристик (ВАХ) от частоты электрического поля. В переменных полях пульсационный (или эффективный) ток может существенно зависеть от частоты ω . Этот эффект связан с тем, что в переменных полях диссоциационный и инжекционные токи зависят от частоты. Ясно, что ток во внешней цепи будет фиксироваться только тогда, когда на поверхностях электродов разряжаются или образуются ионы. Можно выделить три случая: 1) диссоциационный ток значительно больше инжекционного; в этом случае ионы, формирующие диссоциационный ток, разряжаются на поверхностях электродов; 2) диссоциационный и инжекционный токи имеют один и тот же порядок; в этом случае инжектируемые и примесные ионы рекомбинируют в узких приэлектродных областях; 3) инжекционный ток значительно больше диссоциационного. В этой работе ограничимся рассмотрением первого и третьего случаев.

Рассмотрим случай диссоциационной проводимости. Будем пренебрегать нагревом жидкости, считая температуру постоянной. Тогда из (3), (13), (18) вытекает (размерные переменные)

$$n = n_0 \left((F_1)^{1/2} + \mu_e f_1 \right) + O(\mu_e^2), \quad \mu_e = \alpha_p n_0 / \omega \ll 1, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t + O(\mu_e^2).$$

Рассмотрим случай слабых полей, когда функция F_1 определяется фактором Онзагера [10]. Тогда

$$F_1 = 1 + \alpha_E E_0 |\cos \omega t|, \quad \alpha_E = \frac{e}{2\varepsilon} \left(\frac{e}{kT} \right)^2.$$

Вычисляя средний ток на двух полупериодах, получим

$$\langle j \rangle = \pm \frac{2}{\pi} \sigma_0 E_0 \left[1 + \alpha_E E_0 \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\alpha_p n_0}{\omega} \right) \right], \quad \sigma_0 = e (b_1 + b_2) n_0. \quad (25)$$

Из (25) следует, что средний ток за полупериод с ростом частоты убывает, а с ростом напряжения увеличивается по квадратичному закону. Измеряя $\langle j \rangle$ при различных E_0 , можно найти σ_0 (на линейном участке ВАХ при малых E_0), α_E — в сильных полях и при больших ω ($\omega \gg \alpha_p n_0$), наконец, α_p , n_0 — измеряя зависимость $\langle j \rangle$ от ω .

Рассмотрим теперь ВАХ в инжекционном режиме проводимости. Предварительно решим задачу о распространении униполярно разряженного облака инжектируемых зарядов от плоского электрода. Пусть x — нормальная координата с началом на электроде и направленная вглубь жидкости. Тогда краевая задача о распе-

делении поля $E(t, x)$ и плотности инжектируемых зарядов $n(t, x)$ имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} n E = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi e}{\varepsilon} n, \quad (27)$$

$x=0$: $n=n_a$, $n_a=n_a(|E(t, 0)|)$ (28); $t=0$: $n=0$, $E=E_0$ (29). Здесь для определенности считаем, что инжектируются положительные ионы; n_a — инжекционная функция, зависящая от напряженности поля на электроде [9], E_0 — напряженность поля в начальный момент времени, когда отсутствуют инжектируемые заряды. Пусть $\gamma_0: x_0=x_0(t)$ — уравнение движения фронта ионного облака. Тогда на γ_0 необходимо потребовать непрерывности напряженности поля $\gamma_0: E=E_v$ (30), где E_v — напряженность поля в объеме жидкости вне ионного облака. Из (27) следует, что $E_v=E_v(t)$ и не зависит от x .

Подставляя n из (27) в (26), получаем для $x \leq x_0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + b E \frac{\partial E}{\partial x} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial E}{\partial t} + b E \frac{\partial E}{\partial x} = \dot{E}_v. \quad (31)$$

Здесь точка обозначает производную по t . В том, что константа интегрирования равна $\dot{E}_v$, легко убедиться, вычислив производную от E вдоль характеристики γ_0 и используя (30).

Пусть $x=d$ — координата другой пластины конденсатора, V — разность потенциалов на электродах. Тогда

$$\int_0^d E dx = \int_0^{x_0} E dx + E_v (d - x_0) = U. \quad (32)$$

Из (26), (27) нетрудно получить

$$\int_0^{x_0} n dx = b \int_0^t n_a E(t, 0) dt, \quad (33)$$

$$E_v = E(t, 0) + \frac{4\pi e}{\varepsilon} \int_0^{x_0} n dx = E(t, 0) + \frac{4\pi e b}{\varepsilon} \int_0^t n_a E(t, 0) dt. \quad (34)$$

Интегрируя (31) от $x=0$ до $x=d$ с учетом (32), (33), (34) и уравнение движения фронта ионного облака $x_0=bE_v$, получаем после некоторых преобразований

$$\ddot{x}_0 d - \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{1}{2} b^2 E^2(t, 0) = \dot{U}; \quad (35)$$

$$\dot{x}_0 = b \left(E(t, 0) + \frac{4\pi eb}{\varepsilon} \int_0^t n_a E(t, 0) dt \right). \quad (36)$$

Начальные условия имеют вид $t=0$: $x_0=0$, $E(t, 0)=E_0 \equiv U(0)/d$ (37).

После нахождения $x_0(t)$, $E(t, 0)$ из (35)–(37) по (34) находим $E_v(t)$, после чего находим напряженность поля по формуле

$$E(t, x) = E(t, 0) + \int_{t_1}^t E(t, 0) dt, \quad (38)$$

где $t_1=t_1'(x)$ и находится из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = bE(t, x) \quad (t \geq t_1), \quad x(t_1) = 0. \quad (39)$$

Обозначим $y=E(t, 0)$. Тогда из (35), (36) следует

$$\dot{y} + \frac{4\pi eb}{\varepsilon} n_a y - b \frac{4\pi eb}{\varepsilon d} y \int_0^t y n_a dt - \frac{b}{2d} \left(\frac{4\pi eb}{\varepsilon} \int_0^t n_a y dt \right)^2 = \dot{U}/d. \quad (40)$$

Пусть n_i — характерная плотность инжектируемых ионов, $\tau_e = \varepsilon/4\pi e b n_i$; τ — полупериод колебаний внешнего поля. Тогда интегральными членами в (40) можно пренебречь, если

$$\frac{bE_0\tau}{2d} \ll 1, \quad \frac{bE_0\tau^2}{2d\tau_e} \ll 1. \quad (41)$$

Нетрудно видеть, что всегда можно так подобрать параметры, чтобы (41) выполнялись. При выполнении (41) задача о нахождении формулируется как

$$\dot{y} + \frac{4\pi eb}{\varepsilon} n_a y = \dot{U}/d, \quad y(0) = U(0)/d. \quad (42)$$

Предположим, что 1) потенциал $U(t)$ кусочно-постоянный, так что на полупериоде $0 \leq t \leq \tau: \dot{U}=0$; 2) все инжектируемые заряды на другом полупериоде $\tau \leq t \leq 2\tau$, когда внешнее поле меняет знак, полностью разряжаются на электроде, а инжекции отрицательных ионов нет. Тогда ВАХ полностью определяется током инжекции на полупериоде $0 \leq t \leq \tau$. При постоянной плотности инжектируемых ионов $n_a = n_i = \text{const}$ имеем $y = E_0 e^{-t/\tau_e}$, $\tau_e = \varepsilon/4\pi e b n_i$. Средний ток $\langle j \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e n_a y dt$ выражается как

$$\langle j \rangle = j_0 \alpha (1 - e^{-1/\alpha}), \quad j_0 = e b n_i E_0, \quad \alpha = 2v\tau_e, \quad (43)$$

где $v=1/2\tau$ — число колебаний за 1 с. Из (43) видно, что в низкочастотной области $\alpha \ll 1$ ток линейно возрастает с частотой:

$\langle j \rangle \approx j_0 \alpha$; в высокочастотной области $\alpha \gg 1$ ток постоянен $\langle j \rangle \approx j_0$. При любой частоте ВАХ линейна по напряжению.

При линейном законе инжекции $n_a = \eta_i E(t, 0)$ имеем $y = E_0 / (1 + t/\tau_e)$, $\tau_e = \varepsilon / 4\pi e b \eta_i E_0^2$. Средний ток выражается как

$$\langle j \rangle = j_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad j_0 = e b \eta_i E_0^2, \quad \alpha = 2\nu \tau_e. \quad (44)$$

Из (44) видно, что в низкочастотной области $\alpha \ll 1$ ток линеен по частоте и по полю; $\langle j \rangle = j_0 2\nu \tau_e = \nu E_0 / 2\pi$; в высокочастотной области $\alpha \gg 1$ ток не зависит от частоты и квадратично возрастает с ростом напряжения: $\langle j \rangle = e b \eta_i E_0^2$. Формулы (43), (44) в силу условий (41) справедливы для частот $\nu \gg 2d/bE_0$, $\nu^2 \gg 2d\tau_e/bE_0$. Принимая $d \approx 0,1$ см, $b = 10^{-4}$ см²/В·с, $E_0 \approx 20$ кВ/см, $\tau_e \leq 1$ с, получаем $\nu \gg 0,1$ 1/с. Из этих оценок видно, что на основании измерения зависимости $\langle j \rangle$ от ν можно установить закон инжекции. С физической точки зрения зависимость $\langle j \rangle$ от ν объясняется экранирующим действием поля объемного заряда, что приводит к уменьшению миграционного тока либо к уменьшению интенсивности инжекции. При высоких частотах, когда приэлектродный слой инжектируемых зарядов весьма тонкий, его индуцируемое поле значительно меньше внешнего. По этой причине в этой области частот $\langle j \rangle$ выходит на насыщение, т. е. не зависит от ω .

5. Об измерении зависимости константы скорости диссоциации от напряженности электрического поля по затуханию звуковой волны. В достаточно сильных полях ($E \geq 100$ кВ/см) константа скорости диссоциации k_d может возрасти в сотни и тысячи раз [10]. Эту зависимость можно найти, измеряя коэффициент поглощения звуковой волны α . Измерения α необходимо проводить на малых промежутках времени $t_0 \sim 1-2$ с, чтобы величина джоулева нагрева $\Delta T \sim \sigma E^2 t_0 / \rho c_p$ была пренебрежимо мала. Для типичных значений $\sigma \approx 10^{-12}$ см/см, $E \approx 100$ кВ/см, $\rho \approx 1$ г/см³, $c_p \approx 1$ дж/г·град, $t \approx 1$ с имеем $\Delta T \approx 10^{-2}$ град. За 1 с волна проходит расстояние $\sim 10^5$ см, что вполне достаточно для измерения α .

По аналогии с [11] получаем $\gamma = \gamma_0 + \gamma_r$, где γ_0 — декремент затухания в отсутствие электрического поля; γ_r — добавочный член, обусловленный зависимостью $k_d(E)$ и имеющий вид

$$\gamma_r = \cos^2 \vartheta \frac{\sigma E^2}{2\rho a_s^2} f(x), \quad x = \frac{\omega_0^2}{\omega_e^2}, \quad \omega_e = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon},$$

$$f(x) = \frac{x[(R-1)x + 4R - 1 + (2R+1)\cos^2 \vartheta Z]}{9x + [x - (2 + \cos^2 \vartheta Z)]^2},$$

$$Z = \frac{1}{k_d} \frac{dk_d}{dE} E.$$

Здесь ϑ — угол между $\vec{E}$ и волновым вектором $\vec{k}$; $R = \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)/\varepsilon$, a_s — скорость звука. В области сильных полей, когда $Z \gg 1$, функ-

ция $f(x)$ имеет максимум при $x_* = \cos \vartheta z$, что говорит о резонансном характере поглощения звука при варьировании частоты. Резонансная частота и максимальное значение коэффициента затухания в сильных полях выражаются как

$$\omega_* = \omega_e \cos \vartheta \left(\frac{1}{k_d} \frac{dk_d}{dE} E \right)^{1/2}, \quad \alpha_* = \cos^2 \vartheta \frac{\sigma E^2}{2\rho a_s^3} \frac{R}{3} \frac{1}{k_d} \frac{dk_d}{dE} E.$$

Так как в жидких диэлектриках обычно $\omega_e \ll 10 \text{ с}^{-1}$, то максимальное поглощение будет в низкочастотной области. Полагая $\sigma \sim 10^{-9} \text{ см/см}$, $E \approx 600 \text{ кВ/см}$, $a_s = 10^5 \text{ см/с}$, $\rho \sim 1 \text{ г/см}^3$, $R \sim 1$, $Z \sim 5$, получаем $\alpha_* \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-1}$. В течение 1 с, когда волна пройдет $\sim 10^5 \text{ см}$, ее амплитуда уменьшится в $\sim 1,5$ раза. Эти оценки показывают, что ультразвуковым методом можно изучать зависимость $k_d(E)$.

Список литературы: 1. Мелчер Дж. Электрогидродинамика//Магн. гидродинамика. 1974. № 2. С. 3—30. 2. Жакин А. И. Устойчивость горизонтальной свободной поверхности слабопроводящей жидкости в тангенциальном переменном электрическом поле//Магн. гидродинамика. 1981. № 3. С. 74—80. 3. Yavorskaya I. M., Fomina N. I., Belyaev Yu. N. A simulation of central-symmetry convection in microgravity conditions//Acta Astronautica. 1984. 11, N 3—4. P. 179—183. 4. Melcher I. R., Firebaugh M. S. Traveling-Wave Bulk Electroconvection Induced across a Temperature Gradient//Phys. Fluids. 1967. 10, N 6. P. 1178—1185. 5. Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев, 1977. 320 с. 6. Теплообмен при кипении и конденсации в электрическом поле/М. К. Болога, Г. Ф. Смирнов, О. Б. Дидковский, С. М. Климов. Кишинев, 1987. 240 с. 7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1973. 208 с. 8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974. 504 с. 9. Жакин А. И. Электрогидродинамика жидких диэлектриков на основе диссоциационно-инжекционной модели проводимости//Изв. АН СССР, МЖГ. 1986. № 4. С. 3—13. 10. Onsager L. Deviation from Ohm's Law in Weak Electrolytes//J. Chem. Phys. 1934. 2, N 9. P. 599—615. 11. Жакин А. И. Линейные и нелинейные волны в жидких диэлектриках//Изв. АН СССР, МЖГ. 1983. № 1. С. 98—106.

Поступила в редколлегию 28.03.88

УДК 517.994

Л. В. ФАРДИГОЛА

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛОЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе исследуется вопрос о существовании для уравнения вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(D_x) u(x, t), \quad (x, t) \in R^n \times [0, T] = \Pi_T, \quad (1)$$

($P(\sigma)$ — произвольный полином с комплексными коэффициентами, $\sigma \in R^n$) корректной нелокальной двухточечной задачи:

$$Au(x, 0) - u(x, T) = u_0(x), \quad x \in R^n, \quad A \in C, \quad A \neq 0. \quad (2)$$

Очевидно, к такому виду приводится любое нелокальное двухточечное краевое условие $Au(x, 0) + Bu(x, T) = u_0(x)$, $x \in R^n$, $AB \neq 0$.

Обозначим $H_m = \{f(x) \in C^m(R^n) : \|f\|_m = \max_{|a| \leq m} \sup_{R^n} |D^a f(x)| < \infty\}$.

Аналогично постановке корректной задачи Коши [1] введем следующее

Определение 1. Задача (1)–(2) называется корректной в слое Π_T , если для $\forall t \in N \exists t_1 \in N$ такое, что если $u_0(x) \in H_{m_1}$, то уравнение (1) имеет единственное решение $u(x, t) \in H_m$ (при каждом $t \in [0, T]$), удовлетворяющее условию (2), причем $\kappa \sup_{t \in [0, T]} \|u(x, t)\|_m \leq C \|u_0(x)\|_{m_1}$.

Каждому полиному $P(\sigma)$ сопоставим множество $\tau_P = \{T > 0 : \text{задача (1)–(2) корректна в слое } \Pi_T \text{ при некотором } A \in C\}$.

В § 1 данной работы обсуждаются некоторые свойства множеств τ_P .

В § 2 показано, что для задачи (1)–(2) в полосе ($n=1$) всегда $\tau_P = R_+ =]0 + \infty[$; для уравнений (1) первого и второго порядка установлено, что $\tau_P \neq \emptyset \iff \tau_P = R_+$ (в общем случае, как показано в § 1, это не так) и найдены критерии того, что $\tau_P \neq \emptyset$.

При исследовании множеств τ_P основную роль играет условие

$$\Delta(\sigma) \equiv A - \exp\{TP(i\sigma)\} \neq 0, \quad \sigma \in R^n, \quad (3)$$

которое является [2] необходимым и достаточным для единственности решения задачи (1)–(2) в классе ограниченных функций. Оказывается, это же условие достаточно (а в силу теоремы единственности, очевидно, и необходимо) и для корректности этой задачи (соответствующий результат находится в печати в совместной с В. М. Борок статье).

В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$\tau_P(\rho) = \{T > 0 : \exists A = A(T) \in C : |A| = \exp\{T\rho\} \wedge \Delta(\sigma) \neq 0, \sigma \in R^n\};$$

Π — множество всех полиномов $P(\sigma)$ с комплексными коэффициентами;

$$\Pi_{p,n} = \{P(\sigma) \in \Pi : \deg P(\sigma) = p, \sigma \in R^n\}; \quad \Pi^a = \{P(\sigma) \in \Pi : \tau_P \neq \emptyset\};$$

$$\Pi^{Ba} = \{P(\sigma) \in \Pi : \tau_P = R_+\}; \quad \hat{\Pi} = \{P(\sigma) \in \Pi : P(0) = 0\};$$

$$\Pi_{p,n}^a = \Pi^a \cap \Pi_{p,n}; \quad \hat{\Pi}_{p,n}^a = \Pi_{p,n}^a \cap \hat{\Pi}; \quad \Pi_{p,n}^{Ba} = \Pi^{Ba} \cap \Pi_{p,n};$$

$$\hat{\Pi}_{p,n}^{Ba} = \Pi_{p,n}^{Ba} \cap \hat{\Pi}; \quad P_1(\sigma) \equiv \operatorname{Re} P(i\sigma); \quad P_2(\sigma) \equiv \operatorname{Im} P(i\sigma);$$

$$\rho = \ln |A|; \quad \varphi = \arg A \in [0, 2\pi[; \quad W_\psi = \{\psi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} (\psi \in [0, 2\pi[);$$

$$N_P = \{\sigma \in R^n : P(\sigma) = 0\} (P(\sigma) \in \Pi);$$

$L(R^n, R^n)$ — множество невырожденных линейных операторов, действующих из R^n в R^n ; $\operatorname{lin}\{r_1, \dots, r_p\}$ — линейная оболочка векторов $r_1, \dots, r_p \in R^n$.

§ 1. Свойства множеств τ_P

Теорема 1. Если $P(\sigma) \in \Pi^a$, то $\exists \rho \in R$ такое, что множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ ограничено.

Доказательство. Из определения множества $\tau_P(\rho)$ очевидно, что

$$T \in \tau_P(\rho) \Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi[: TP_2(N_{T(P_1-\rho)}) \cap W_\varphi = \emptyset. \quad (4)$$

Из критерия (3) корректности задачи (1) — (3) следует, что $\tau_P = \bigcup_{\rho \in R} \tau_P(\rho)$.

Если $P(\sigma) \in \Pi^a$, то $\exists \rho \in R$ такое, что $\tau_P(\rho) \neq \emptyset$, следовательно, $T_0 P_2(N_{T_0(P_1-\rho)}) \cap W_{\varphi_0} = \emptyset$ при некоторых $\varphi_0 \in [0, 2\pi[$, $T_0 > 0$. Учитывая то, что всякое алгебраическое множество имеет конечное число компонент связности (см. [3, дополнение А]) и каждая связная компонента R/W_{φ_0} ограничена, получаем требуемое.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 видно, что если $\tau_P(\rho) \neq \emptyset$, то множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ является ограниченным.

Рассмотрим примеры множеств τ_P .

Пример 1. $\tau_P = \emptyset$, $P(\sigma) \equiv \sigma_1 + i\sigma_2$. Поскольку при $\forall \rho \in R$ множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ неограничено, то $\tau_P = \emptyset$ (см. теорему 1).

Этот пример показывает, что $\Pi \setminus \Pi^a \neq \emptyset$.

Пример 2. $\tau_P = R_+$, $P(\sigma) \equiv \sigma_1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2$. При $\rho < 0$ $N_{P_1-\rho} = \emptyset$ ($P_1(\sigma) \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2$), следовательно, $P_2(N_{P_1-\rho}) = \emptyset$. Откуда следует, что $\tau_P(\rho) = R_+$ при $\rho < 0$, а $\tau_P = \bigcup_{\rho \in R} \tau_P(\rho) = R_+$.

Таким образом, $\Pi^{Ba} \neq \emptyset$.

Примеры 3—6 показывают, что $\Pi^a / \Pi^{Ba} \neq \emptyset$. В этих случаях множества τ_P являются объединением конечного числа отрезков (сегментов, интервалов, полуинтервалов, изолированных точек).

Пример 3. $\tau_P =]0, 2\pi[$, $P(\sigma) \equiv i(\sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_1^3 - \sigma_1^2 + \sigma_1)$. Очевидно, $P_1(\sigma) \equiv \sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_1^3 - \sigma_1$, $P_2(\sigma) \equiv \sigma_1^2$. При $\forall \rho \in R$, $\rho \neq 0$, $P_2(N_{P_1-\rho}) =]0, h(\rho)[$, где $h(\rho) = \max \{ \xi^2 \in R_+ : \xi^3 - \xi = \rho \} > 1$, при $\rho = 0$ $P_2(N_{P_1-\rho}) =]0, 1]$. Значит, $\tau_P(\rho) \subset \tau_P(0)$ при $\forall \rho \in R$, следовательно, $\tau_P = \tau_P(0) =]0, 2\pi[$.

Пример 4. $\tau_P =]0, 2\pi[$, $P(\sigma) \equiv \sigma_2^2 \sigma_2^2 + \sigma_1 - i\sigma_1 \sigma_2^2$. Здесь $P_1(\sigma) \equiv \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2^2$, $P_2(\sigma) \equiv \sigma_1$. При $\rho \geq 0$ множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ неограничено, следовательно (см. замечание 1), $\tau_P(\rho) = \emptyset$. При $\rho < 0$ $P_2(N_{P_1-\rho}) =]0, 1[$, значит, $\tau_P(\rho) =]0, 2\pi[$. Откуда получаем $\tau_P =]0, 2\pi[$.

Пример 5. $\tau_P =]0, 2\pi[\cup \{3\pi\}$, $P(\sigma) \equiv \sigma_1 - i\sigma_2^2 \sigma_1 \left(i\sigma_1 + \frac{2}{3} \right) \left(i\sigma_1 + \frac{4}{3} \right) (i\sigma_1 + 2)$. Здесь $P_1(\sigma) \equiv \sigma_2^2 \sigma_1 \left(\sigma_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\sigma_1 - \frac{4}{3} \right) (\sigma_1 - 2)$, $P_2(\sigma) \equiv \sigma_1$.

При $\rho \geq 0$ множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ неограничено, следовательно, $\tau_\rho(\rho) = \emptyset$ (см. замечание 1). При $\rho < 0$ $P_2(N_{P_1-\rho}) =]0, \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}, 2[$, значит, $\tau_\rho(\rho) =]0, 2\pi] \cup \{3\pi\}$. Откуда получаем $\tau_\rho =]0, 2\pi] \cup \{3\pi\}$.

Пример 6. $\tau_\rho =]0, 2\pi] \cup \left[\frac{12}{5}\pi, 3\pi\right]$, $P(\sigma) \equiv \sigma_1 - i\sigma_2^2\sigma_1\left(i\sigma_1 + \frac{2}{3}\right) \times$
 $\times \left(i\sigma_1 + \frac{3}{2}\right)(i\sigma_1 + 2)$. Здесь $P_1(\sigma) \equiv \sigma_2^2\sigma_1\left(\sigma_1 - \frac{2}{3}\right)\left(\sigma_1 - \frac{3}{2}\right)(\sigma_1 - 2)$,
 $P_2(\sigma) \equiv \sigma_1$. При $\rho \geq 0$ множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ неограничено, следовательно, $\tau_\rho(\rho) = \emptyset$ (см. замечание 1). При $\rho < 0$ $P_2(N_{P_1-\rho}) =]0, \frac{2}{3}[\cup]\frac{3}{2}, 2[$, значит, $\tau_\rho(\rho) =]0, 2\pi] \cup \left[\frac{12}{5}\pi, 3\pi\right]$.
 Откуда получаем $\tau_\rho =]0, 2\pi] \cup \left[\frac{12}{5}\pi, 3\pi\right]$.

Свойство 1. Если $\tau_\rho \neq \emptyset$, то $\exists \gamma > 0$ такое, что $]0, \gamma[\subset \tau_\rho$.

Доказательство. $\exists \rho \in \mathbf{R}$ такое, что множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ ограничено (см. теорему 1), т. е. $\exists M > 0 : x \in P_2(N_{P_1-\rho}) \Rightarrow |x| < M$. Тогда для $\forall T \in]0, \gamma[$, $\gamma = \pi/M$, $TP_2(N_{P_1-\rho}) \cap W_\pi = \emptyset$. Применив утверждение (4), получим требуемое.

Свойство 2. Если $R_+ \setminus \tau_\rho \neq \emptyset$, то $\exists \nu > 0$, удовлетворяющее условию $\tau_\rho \subset]0, \nu[$.

Доказательство. Для пустого множества τ_ρ утверждение тривиально. Предположим, что $\tau_\rho \neq \emptyset$ и $\tau_\rho \neq R_+$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall \rho \in \mathbf{R} \text{ mes } P_2(N_{P_1-\rho}) \geq \delta$, где mes — мера Лебега в $\mathbf{R}$. Кроме того, $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что для $\forall \rho \in \mathbf{R}$ число компонент связности множества $N_{P_1-\rho}$ не больше N_0 (см., например, [4]), следовательно, множество $P_2(N_{P_1-\rho})$ состоит не более чем из N_0 отрезков. Поэтому при $\forall \rho \in \mathbf{R}$ существует отрезок, содержащийся в $P_2(N_{P_1-\rho})$, длина которого не меньше δ/N_0 . Тогда для $\forall T > \nu$, $\nu = 2\pi N_0/\delta$, для $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$ $TP_2(N_{P_1-\rho}) \cap W_\varphi \neq \emptyset$.

Применив утверждение (4), получим требуемое.

Таким образом, установлено, что если в некотором слое для уравнения (1) можно поставить корректную задачу (1) — (2), то корректную задачу (1) — (2) для этого уравнения можно поставить в любом достаточно узком слое. С другой стороны, если в некотором слое для данного уравнения (1) невозможно поставить корректную задачу (1) — (2), то этот же факт верен в любом достаточно широком слое.

Легко видеть, что верны следующие утверждения:

Свойство 3. Если для полиномов $P(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ верно $P(\sigma) - Q(\sigma) \equiv \text{const}$, то $\tau_P = \tau_Q$.

Если $P(\sigma) \in \Pi^a(\Pi^{Ba})$, то $P(\sigma) - P(0) \in \dot{\Pi}^a(\dot{\Pi}^{Ba})$; если $P(\sigma) \in \dot{\Pi}^a(\dot{\Pi}^{Ba})$, то $P(\sigma) + C \in \Pi^a(\Pi^{Ba})$ при $C \in \mathbb{C}$.

Свойство 4. Если полиномы $P(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ таковы, что $P(\sigma) \equiv CQ(\sigma)$, где $C \in \mathbb{R}$ и $C \neq 0$, то τ_P и τ_Q связаны соотношением $\tau_Q = \{T > 0: |C| T \in \tau_P\}$.

Если $P(\sigma) \in \Pi^a(\Pi^{Ba})$, то $CP(\sigma) \in \Pi^a(\Pi^{Ba})$ при $C \in \mathbb{R}$.

Свойство 5. Если для полинома $P(\sigma)$ $P_1(R^n) = \mathbb{R}$ и $|P_2(\sigma)| \rightarrow \infty$ при $\|\sigma\| \rightarrow \infty$, то $P(\sigma) \notin \Pi^a$.

Доказательство. Докажем сначала, что для $\forall r \in \mathbb{R}$ множество N_{P_1-r} неограничено. Предположим противное. Тогда $\exists U(0)$ — шар с центром в 0 такой, что $N_{P_1-r_0} \subset U(0)$ при некотором $r_0 \in \mathbb{R}$. Вне шара $U(0)$ полином $P_1(\sigma)$ принимает значения одного знака, на множестве $U(0)$ $P_1(\sigma)$ ограничен. Значит, $P_1(R^n) \neq \mathbb{R}$, что противоречит условию.

Поскольку N_{P_1-r} неограничено, а $|P_2(\sigma)| \rightarrow \infty$ при $\|\sigma\| \rightarrow \infty$, множество $P_2(N_{P_1-r})$ неограничено при $\forall r \in \mathbb{R}$. В силу теоремы 1 $\tau_P = \emptyset$.

Замечание 2. Отметим, что условие $P_1(R^n) = \mathbb{R}$ заведомо выполняется, если, например, степень $P_1(\sigma)$ нечетна; свойство $|P_2(\sigma)| \rightarrow \infty$ при $\|\sigma\| \rightarrow \infty$ выполняется, если, например, старшая однородная компонента $P_2(\sigma)$ определена.

Свойство 6. Если полином $P_1(\sigma)$ ограничен сверху или снизу, то $P(\sigma) \in \Pi^{Ba}$ (в частности, если старшая однородная компонента $P_1(\sigma)$ определена, то $P(\sigma) \in \Pi^{Ba}$).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $P_1(\sigma)$ ограничен снизу, т. е. $\exists r \in \mathbb{R}$ такое, что $P_1(\sigma) \geq r$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Выберем $\rho \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\rho < r$. Тогда множество $N_{P_1-\rho} = \emptyset$, следовательно, $TP_2(N_{P_1-\rho}) \cap W_\varphi = \emptyset$ при $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \forall T \in \mathbb{R}_+$. Согласно утверждению (4) $\tau_P = \mathbb{R}_+$.

Определение 2. Обозначим $T_\alpha^B: \Pi \rightarrow \dot{\Pi}$, где $T_\alpha^B P(\sigma) \equiv P(B\sigma + \alpha) - P(\alpha) \in \dot{\Pi}$, $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что полином $P(\sigma)$ приводится к виду $\hat{P}(\sigma)$, если $\exists B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \exists \alpha \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\hat{P}(\sigma) \equiv T_\alpha^B P(\sigma)$.

Свойство 7. Для $\forall B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ справедливо утверждение: $P(\sigma) \in \Pi^a(\Pi^{Ba}) \leftrightarrow T_\alpha^B P(\sigma) \in \dot{\Pi}^a(\dot{\Pi}^{Ba})$.

Доказательство. Зафиксируем $\forall B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $Q(\sigma) \equiv P(\sigma) - P(\alpha)$, $R(\sigma) \equiv Q(B\sigma + \alpha) \equiv T_\alpha^B P(\sigma)$. Со-

гласно свойству 3 $\tau_P = \tau_Q$. Легко видеть, что $R_2(N_{R_1-p}) = Q_2(N_{Q_1-p})$ при $\forall p \in R$, где $R_1(\sigma) \equiv \operatorname{Re} R(i\sigma)$, $R_2(\sigma) \equiv \operatorname{Im} R(i\sigma)$, $Q(\sigma) \equiv \operatorname{Re} Q(i\sigma)$, $Q_2(\sigma) \equiv \operatorname{Im} Q(i\sigma)$, следовательно, $\tau_R = \tau_Q = \tau_P$, что и требовалось доказать.

Таким образом, достаточно исследовать условия принадлежности полинома классу $\Pi^a(\Pi^{Ba})$ лишь для полиномов $P(\sigma) \in \dot{\Pi}$.

§ 2. Исследование $\Pi_{p,1}^a$, $\Pi_{1,n}^a$, $\Pi_{2,n}^a$

Теорема 2. $\Pi_{p,1} \equiv \Pi_{p,1}^{Ba} (\forall p \geq 0)$.

Другими словами, в любой полосе для любого уравнения (1) ($n=1$) существует корректная задача (1) — (2).

Доказательство. При $n=1$ для $\forall p \in R$ множество $P_2(N_{P_1-p})$ конечно, поэтому всегда $\exists \varphi \in [0, 2\pi]$ [такое, что $TP_2(N_{P_1-p}) \cap W_\varphi = \emptyset$ для $\forall T \in R_+$. Применив утверждение (4), получим требуемое.

В нижеследующих теоремах 3 и 4 речь идет о полиномах $P(\sigma) \in \dot{\Pi}$, что в силу свойства 7 не ограничивает общности.

Теорема 3. При $n \geq 2$ $P(\sigma) \in \dot{\Pi}_{1,n}^a$ тогда и только тогда, когда

$$\exists (\beta, \gamma) \in R^2, \beta^2 + \gamma^2 > 0: \beta P_1(\sigma) + \gamma P_2(\sigma) \equiv 0. \quad (5)$$

Доказательство. Достаточность условия (5) очевидна.

Докажем необходимость. Пусть $P_l(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^n c_{lj} \sigma_j$ ($l=1, 2$). Рассмотрим систему

$$C\sigma = \begin{pmatrix} p \\ \varphi + 2\pi k \end{pmatrix}, \quad C = (c_{lj})_{l=1,2}^{j=1,n}. \quad (6)$$

Ясно, что $\operatorname{rg} C \geq 1$. Если $\operatorname{rg} C = 1$, то $P_1(\sigma)$ и $P_2(\sigma)$ линейно зависимы, т. е. выполнено условие (5). Если $\operatorname{rg} C = 2$, то система (6) разрешима при любой правой части, т. е. уравнение $\exp\{TP(i\sigma)\} = \exp\{\rho + i\varphi\}$ разрешимо при $\forall p \in R \forall \varphi \in [0, 2\pi] \forall T \in R_+$. Используя критерий (3), получаем $P(\sigma) \in \Pi^a$, что противоречит условию теоремы.

Следствие 1. $\Pi_{1,n}^a = \Pi_{1,n}^{Ba} (n \geq 2)$.

Доказательство. По определению $\Pi_{1,n}^a \supset \Pi_{1,n}^{Ba}$. Докажем обратное включение: $\Pi_{1,n}^a \subset \Pi_{1,n}^{Ba}$. Пусть $P(\sigma) \in \dot{\Pi}_{1,n}^a$, тогда выполнено условие (5), откуда получаем $P(\sigma) \in \dot{\Pi}_{1,n}^{Ba}$. В силу свойства 7 $\Pi_{1,n}^a \subset \Pi_{1,n}^{Ba}$.

Теорема 4. При $n \geq 2$ $P(\sigma) \in \Pi_{2,n}^a$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий:

$$(i) P_1(\sigma) \equiv 0;$$

$$(ii) \exists B \in L(R^n, R^n) \exists \alpha \in R^n: T_\alpha^B P_1(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^k a_j \sigma_j,$$

$$1 \leq k \leq n, \operatorname{sgn} a_p = \operatorname{sgn} a_q \neq 0 (p, q = \overline{1, k});$$

$$(iii) \exists Q(\sigma) \in \Pi \exists (\beta, \gamma) \in R^2: P_2(\sigma) - \gamma \equiv Q(\sigma) (P_1(\sigma) - \beta).$$

Доказательство. Достаточность условий (i) и (ii) следует из свойства 6. Достаточность условия (iii) очевидна.

Докажем необходимость одного из условий (i), (ii) или (iii).

1. Если $\deg P_1(\sigma) = 0$, то $P_1(\sigma) \equiv 0$, т. е. выполнено условие (i).

2. Если $\deg P_1(\sigma) = 1$, то $\deg P_2(\sigma) = 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $P_1(\sigma)$ приводится к виду $\tilde{P}_1(\sigma) \equiv \sigma_1$.

Предположим, что условие (iii) не выполнено.

Лемма. Пусть V — вещественное алгебраическое множество, определяемое одним полиномиальным уравнением $H(\sigma) = 0$, причем $H(\sigma)$ не имеет кратных полиномиальных делителей. Тогда если V содержит хотя бы одну регулярную точку каждого полиномиального делителя $H(\sigma)$, то всякий полином, обращающийся в 0 на V , кратен $H(\sigma)$.

Доказательство. Для неприводимого полинома $H(\sigma)$ утверждение верно (см. [3, с. 19]). Отсюда, как легко видеть, следует требуемое.

Применяя лемму и учитывая наше предположение, получаем, что на множестве $N_{P_1 - \rho} \tilde{P}_2(\sigma) \neq \text{const}$ при $\forall \rho \in R$. Используя то,

что $\tilde{P}_1(\sigma) \equiv \sigma_1$, получаем, что множество $\tilde{P}_2(N_{P_1 - \rho})$ неограничено

при $\forall \rho \in R$ и поэтому $P(\sigma) \notin \Pi^a$ (см. теорему 1). Значит, в этом случае условие (iii) выполнено.

3. Пусть $\deg P_1(\sigma) = 2$. Любой вещественный полином $H(\sigma)$ $\deg H(\sigma) = 2$, можно привести к одному из видов (см. [5, гл. 7, §7])

$$\hat{H}(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j^2, \quad 1 \leq k \leq n; \quad (7)$$

$$\hat{H}(\sigma) \equiv -\sum_{j=1}^k \sigma_j^2, \quad 1 \leq k \leq n; \quad (7')$$

$$\hat{H}(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 + \sigma_n, \quad 1 \leq k < n; \quad (8)$$

$$\hat{H}(\sigma) \equiv - \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 - \sigma_n, \quad 1 \leq k < n; \quad (8')$$

$$\hat{H}(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^s \sigma_j^2 - \sum_{j=s+1}^k \sigma_j^2 + a\sigma_n, \quad 1 \leq s < k \leq n, \quad (9)$$

причем если $k = n$, то $a = 0$.

Случаи (7') и (8') сводятся соответственно к (7) и (8) (см. свойство 4), поэтому их можно не рассматривать.

Если $\deg P_2(\sigma) = 0$, то выполнено условие (iii), а если $P_1(\sigma)$ приводится к виду (7), то выполнено условие (ii). Итак, осталось рассмотреть случаи, когда $P_1(\sigma)$ приводится к виду (8) или (9), а $\deg P_2(\sigma) \geq 1$.

3. 1. Пусть $P(\sigma)$ приводится к виду $\tilde{P}(\sigma)$, где $\tilde{P}_1(\sigma)$ совпадает с (8), $\deg P_2(\sigma) = 1$. Покажем, что в этом случае $P_1(\sigma) \notin \Pi^a$. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис R^n . Применяя поочередно линейные ортогональные преобразования, инвариантами которых являются соответственно пространства $\text{lin}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$, $\text{lin}\{e'_1, \dots, e'_k, e'_n\}$ (e'_j — образ e_j после линейного преобразования, $j = \overline{1, n}$) $P_2(\sigma)$ можно привести к виду $\hat{P}_2(\sigma) \equiv b\sigma_1 + c\sigma_l + d\sigma_n$, где $k < l < n$ (если такие неравенства невозможны, то $c = 0$) $b^2 + c^2 + d^2 > 0$. Вид полинома $\tilde{P}_1(\sigma)$ эти преобразования не изменяют: $\tilde{P}_1(\sigma) \equiv \hat{P}_1(\sigma)$. Зафиксируем $\forall p \in R$. Рассмотрим не все множество $N_{\hat{P}_1 - p}^{\wedge}$, а некоторое его сечение. Если на этом сечении полином $\hat{P}_2(\sigma)$ не ограничен, то множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1 - p}^{\wedge})$, тем более, неограничено. Обозначим $S_{jm}(H, \delta) = \{\sigma \in R^n : H(\sigma) = \delta \wedge \sigma_p = 0, p \neq j, m\}$, где $H(\sigma) \in \Pi$, $\delta \in R$.

Если $d \neq 0$, то на множестве $S_{1n}(\hat{P}_1, \rho)$ $\hat{P}_2(\sigma) \equiv d(\rho - \sigma_1^2) + b\sigma_1$, поэтому множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1 - \rho}^{\wedge})$ неограничено.

Пусть $d = 0$, а $c \neq 0$. Тогда множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1 - \rho}^{\wedge})$ неограничено.

Если $d = 0$, $c = 0$, то $b \neq 0$. Тогда на множестве $S_{1n}(\hat{P}_1, \rho)$ $\hat{P}_2(\sigma) \equiv \pm b\sqrt{\rho - \sigma_n}$, следовательно, множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1 - \rho}^{\wedge})$ неограничено.

3. 2. Пусть $P(\sigma)$ приводится к виду $\tilde{P}(\sigma)$, где $\tilde{P}_1(\sigma)$ совпадает с (9), $\deg P_2(\sigma) = 1$. Покажем, что в этом случае $P(\sigma) \notin \Pi^a$. $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис R^n . Применяя поочередно ортогональные

преобразования, относительно которых инвариантами являются соответственно пространства: $\text{lin}\{e_{s+1}, \dots, e_n\}$, $\text{lin}\{e'_1, \dots, e'_s, e'_{k+1}, \dots, e'_n\}$, $\text{lin}\{e'_1, \dots, e'_k, e'_n\}$ (штрихом снабжается образ вектора базиса после очередного линейного преобразования), получим $\hat{P}_2(\sigma) \equiv b\sigma_1 + c\sigma_k + d\sigma_l + e\sigma_n$, где $k < l < n$ (если такие неравенства невозможны, то $d=0$), $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > 0$, а $\hat{P}_1(\sigma) \equiv \tilde{P}_1(\sigma)$.

Будем, как и в случае 3.1, рассматривать сечения множества $N_{\hat{P}_1-\rho}$ при произвольном фиксированном $\rho \in R$.

Если $b \neq 0$, то на множестве $S_{1k}(\hat{P}_1, \rho)$ $\hat{P}_2(\sigma) \equiv \pm b \sqrt{\rho + \sigma_k^2} + c\sigma_k$, поэтому множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1-\rho})$ неограничено.

Если $b=0$, а $c \neq 0$, то на множестве $S_{1k}(\hat{P}_1, \rho)$ $\hat{P}_2(\sigma) \equiv \pm c \sqrt{\sigma_1^2 - \rho}$, следовательно, $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1-\rho})$ неограничено.

Если $b=0$, $c=0$ и $d \neq 0$ или $b=0$, $c=0$, $d=0$, $e \neq 0$ и $a=0$, то множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1-\rho})$, очевидно, неограничено.

Если $b=0$, $c=0$, $d=0$, $e \neq 0$ и $a \neq 0$, то на множестве $S_{1n}(\hat{P}_1, \rho)$ $\hat{P}_2(\sigma) \equiv \frac{e}{a}(\rho - \sigma_l^2)$, откуда заключаем, что множество $\hat{P}_2(N_{\hat{P}_1-\rho})$ и в этом случае неограничено.

3.3. Пусть $P(\sigma)$ приводится к виду $\tilde{P}(\sigma)$, где $\tilde{P}_1(\sigma)$ имеет вид (8), $\deg P_2(\sigma) = 2$. Тогда при $\forall \rho \in R$ имеем

$$N_{\tilde{P}_1-\rho} = \left\{ (\hat{\sigma}, \sigma_n) : \sigma_n = \rho - \sum_{j=1}^k \sigma_j^2, \hat{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in R^{n-1} \right\}. \quad (10)$$

В случаях $\deg_{\sigma_n} \tilde{P}_2(\sigma) = 2$ и $\deg_{\sigma_n} \tilde{P}_2(\sigma) = 0$ ($\tilde{P}_2(\sigma) \equiv \tilde{P}_2(\hat{\sigma}) \neq 0$), очевидно, в силу (10), что $\tilde{P}_2(N_{\tilde{P}_1-\rho})$ — неограниченное множество при $\forall \rho \in R$, откуда (см. теорему 1) $P(\sigma) \notin \Pi^a$ в этих случаях.

В случае $\deg_{\sigma_n} \tilde{P}_2(\sigma) = 1$, $\frac{\partial \tilde{P}_2(\sigma)}{\partial \sigma_n} \neq \text{const}$, снова множество $\tilde{P}_2(N_{\tilde{P}_1-\rho})$ неограничено при $\forall \rho \in R$. Если же $\frac{\partial \tilde{P}_2(\sigma)}{\partial \sigma_n} \equiv \text{const}$, то при $\sigma \in N_{\tilde{P}_1-\rho}$

получаем $\tilde{P}_2(\sigma) \equiv R_p(\hat{\sigma})$, где $R_p(\hat{\sigma}) \in \Pi$. Здесь возможны 2 случая:
 $R_p(\hat{\sigma}) \neq \text{const}$ при $\forall p \in R$, тогда в силу (10) вновь множество $\tilde{P}_2(N_{\sim_{P_1-p}})$ неограничено; во втором случае $\exists p \in R$ такое, что $R_2(\hat{\sigma}) \equiv \gamma = \text{const}$, тогда в силу леммы полином $\tilde{P}_2(\sigma) - \gamma$ кратен $\tilde{P}_1(\sigma) - p$, т. е. выполнено условие (iii).

3. 4. Пусть $P(\sigma)$ приводится к виду $\tilde{P}(\sigma)$, где $\tilde{P}_1(\sigma)$ имеет вид (9), $\deg P_2(\sigma) = 2$. Если $\deg \tilde{P}_2(\sigma) = 0$, то множество $\tilde{P}_2(N_{\sim_{P_1-p}})$ неограничено при $\forall p \in R$ и согласно теореме 1 $P(\sigma) \in \Pi^a$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\deg \tilde{P}_2(\sigma) \geq 1$.

Зафиксируем $\forall p \in R$. Из (9) получаем

$$\sigma \in N_{\sim_{P_1-p}} \leftrightarrow \sigma_1 = \pm \sqrt{\rho - \sum_{j=2}^s \sigma_j^2 + \sum_{j=s+1}^k \sigma_j^2 - a\sigma_n} \equiv \pm S(\tilde{\sigma}), \quad (11)$$

где $\tilde{\sigma} = (\sigma_2, \dots, \sigma_n) \in R^{n-1}$. Обозначим $h_{\pm}^p(\tilde{\sigma}) \equiv \tilde{P}_2(\pm S(\tilde{\sigma}), \tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in R^{n-1}$. Тогда

$$\hat{P}_2(N_{\sim_{P_1-p}}) = h_+^p(R^{n-1}) \cup h_-^p(R^{n-1}). \quad (12)$$

Если $\deg_{\sigma_1} \tilde{P}_2(\sigma) = 1$, то $h_{\pm}^p(\tilde{\sigma}) \equiv \pm S(\tilde{\sigma}) T(\tilde{\sigma}) + H(\tilde{\sigma})$, где $T(\tilde{\sigma})$,

$H(\tilde{\sigma}) \in \Pi$, $\deg T(\tilde{\sigma}) \leq 1$, $\deg H(\tilde{\sigma}) \leq 2$, $T(\tilde{\sigma}) \neq 0$. Очевидно, хотя бы одно из множеств $h_+^p(R^{n-1})$ или $h_-^p(R^{n-1})$ неограничено. Учитывая то, что это верно при $\forall p \in R$ и равенстве (12), получаем в силу теоремы 1 $P(\sigma) \in \Pi^a$.

Если $\deg_{\sigma_1} \tilde{P}_1(\sigma) = 2$, то функции $h_{\pm}^p(\tilde{\sigma})$ принимают вид $h_{\pm}^p(\tilde{\sigma}) \equiv b(\pm S(\tilde{\sigma}))^2 \pm S(\tilde{\sigma}) T(\tilde{\sigma}) + H(\tilde{\sigma})$, где $b \neq 0$, $T(\tilde{\sigma}), H(\tilde{\sigma}) \in \Pi$, $\deg H(\tilde{\sigma}) \leq 2$, $\deg T(\tilde{\sigma}) \leq 1$. Если $\deg T(\tilde{\sigma}) = 1$, то, как и в предыдущем случае, множество $\tilde{P}_2(N_{\sim_{P_1-p}})$ неограничено при $\forall p \in R$,

следовательно (см. теорему 1), $P(\sigma) \in \Pi^a$. Пусть $\deg T(\tilde{\sigma}) = 0$, тогда $h_+^p(\tilde{\sigma}) \equiv h_-^p(\tilde{\sigma}) \in \Pi$. Если при некотором $p \in R$ $h_+^p(\tilde{\sigma}) \equiv \gamma = \text{const}$, то (см. лемму) $\tilde{P}_2(\sigma) - \gamma$ делится на $\tilde{P}_1(\sigma) - p$, т. е. выполняется

условие (iii). Если при $\forall \tau \in R \deg h_{+}^{\tau}(\tilde{\tau}) > 0$, то множество $\tilde{P}_2(N_{P_1 \rightarrow 2})$ неограничено и согласно теореме 1 $P(\tau) \in \Pi^a$. Теорема доказана.

Следствие 2. $\Pi_{2,n}^a = \Pi_{2,n}^{Ba} (n \geq 2)$.

Доказательство. По определению, $\Pi_{2,n}^a \supset \Pi_{2,n}^{Ba}$. Докажем обратное включение. В силу свойства 7 для этого достаточно показать, что $\Pi_{2,n}^a \subset \Pi_{2,n}^{Ba}$. Пусть $P(\tau) \in \Pi_{2,n}^a$, тогда выполнено одно из условий: (i), (ii) или (iii) теоремы 4. Учитывая свойство 6, получаем $P(\tau) \in \Pi_{2,n}^{Ba}$, что и требовалось доказать.

Список литературы: 1. Петровский И. Г. О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций//Бюлл. Моск. ун-та (А), 1938, 1, № 7. С. 1—72. 2. Антыпко И. И. О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных//Вестн. Харьк. ун-та. 1971. № 67: Мат и механика. Вып. 36. С. 62—72. 3. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М., 1971. 124 с. 4. Хованский А. Г. Об одном классе систем трансцендентных уравнений//Докл. АН СССР. 1980. 255, № 4. С. 804—807. 5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М., 1984. 296 с.

Поступила в редколлегию 15.01.88

УДК 681.3.06

В. Ф. КОРОП, С. Н. ЕПИШЕВ

ТРИОДНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

Здесь описывается одна система триодного структурного программирования. Это обозначает, что в качестве базисных управляющих структур употребляются триоды*, т. е. фрагменты алгоритмов, имеющие один вход и два выхода. Эта система является модификацией системы Голлера [1]. В упомянутой системе нециклические базисные структуры являются триодами, а циклическая — диодом (классический цикл типа WHILE). Отмечается, что применение этой системы для расширения «Фортрана» значительно повысило эффективность программирования, причем это повышение обусловлено не только мощностью и естественностью триодных базисных структур, но и возможностью триодного осмысливания алгоритмов на высших уровнях при проектировании сверху вниз. В предлагаемой нами системе триодами являются также и циклические базисные структуры, что еще больше повышает мощность и удобство системы.

Для изображения алгоритмов мы применяем алгоритмические чертежи, называемые Т-схемами (триодные схемы). Т-схемы являются модификацией известных Р-схем И. В. Вельбицкого [2].

* Термины триод и диод введены Голлером [1].

Т-схемы (как и Р-схемы) гораздо лаконичнее блок-схем, они легче составляются, легче воспринимаются и т. п. Кроме того, они лучше приспособлены для машинной поддержки (построение на экране дисплея, распечатка, программное преобразование в линейную форму и т. д.).

В течение нескольких лет на кафедре моделирования Харьковского университета применяется следующая Т-технология программирования: 1) составление Т-схемы (алгоритмизация); 2) написание программы на требуемом конкретном языке программирования (кодирование). Эта технология позволяет практически избежать алгоритмических ошибок программы. Кроме того, Т-схема продолжает обслуживать программу в качестве основного документа. В частности, Т-схема делает возможным коллективное обсуждение программы, облегчается сопровождение программы.

Т-схема применима также для описания исчислений. В частности, они могут заменить виртовские синтаксические диаграммы для описания синтаксиса алгоритмических языков.

Элементы Т-схемы. Т-схема является ориентированным графом, некоторые дуги которого снабжены записями. Исполнение алгоритма связано с построением (в зависимости от состояния данных) некоторого пути по графу. Вершины графа не нагружены — они являются лишь пунктами ветвления или разделителями отдельных фрагментов алгоритма. Для вершин с несколькими выходными дугами установлена строгая очередность их просмотра. В случае нескольких входов эта очередность зависит, вообще говоря, от того, по какой дуге произошел вход.

Вершины изображаются явно вертикальными отрезками прямой. Дугами являются горизонтальные отрезки, причем имеются три типа дуг: триоды, возвраты и счетчики. Они изображаются по-разному.

Триоды. Возвраты. Триод изображается явно горизонтальным отрезком прямой, упирающимся в две вершины, снабженному некоторой записью Т (рис. 1). Справа, для лучшего понимания мы

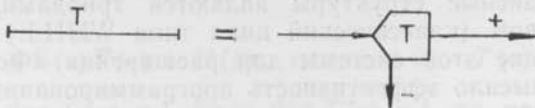


Рис. 1

приводим блок-схемное изображение триода, предложенное Голлером [1]. Запись Т состоит из одной или нескольких строк текста, примыкающих к дуге сверху и (или) снизу. Дуга правонаправлена. Левый ее конец является входом и одновременно минус-выходом, правый является плюс-выходом. При передаче управления на триод (вход в триод), на основе состояния данных происходит преобразование этих данных, а также определение типа выхода. При плюс-выходе происходит переход на правую вершину, а при ми-

нус-выходе — на нижележащий триод левой вершины, а при отсутствии такового — на возврат.

Возврат является левонаправленной дугой, начало которой изображается маленькой стрелкой: $\leftarrow|$. Правый конец — вход, левый конец — выход.

Путь начинается входом самого верхнего триода самой левой вершины графа. Триоды просматриваются сверху вниз, т. е. управление передается триодам последовательно до тех пор, пока очередной триод не даст плюс — выход, в этом случае происходит переход на правую вершину этого триода и просмотр сверху вниз триодов этой новой вершины.

Если в некоторой вершине не удалось пройти направо по триоду, то управление передается возврату, выходящему из этой вершины, что приводит к переходу на более левую вершину с дальнейшим просмотром сверху вниз триодов этой вершины, нижележащих возврату. Таким образом, при приходе на вершину по возврату, из просмотра исключаются вышележащие триоды, но выходной возврат остается (его очередь последняя), даже если он выше.

Если из очередной вершины не удалось выйти по триоду, а возврата она не имеет, но путь заканчивается. Это конец работы алгоритма (или фрагмента), причем это плюс или минус — конец в зависимости от того, каким был выход последнего работающего триода. Пример (рис. 2):

Алгоритм начинается с T_1 . Если T_1 даст плюс-выход, то это плюс-конец алгоритма, а если минус-выход, то идем на T_2 . Если T_2 даст плюс, то на T_3 , иначе — на T_4 . Если T_3 плюс, то плюс-конец, иначе — T_2 (T_1 отсекается). Если плюс, то плюс-конец, иначе — минус-конец.

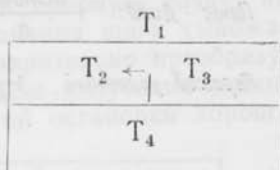
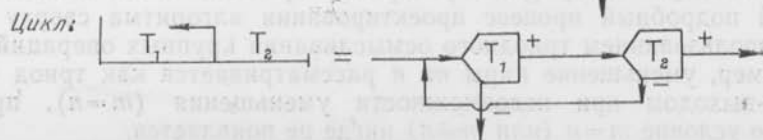
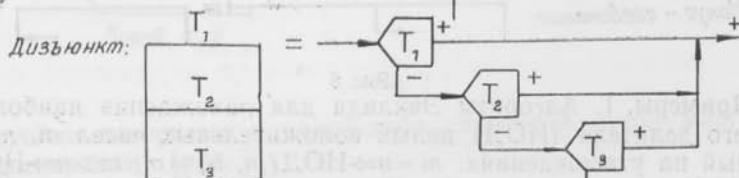


Рис. 2

Базисные структуры. Определения будут даны при помощи блок-схем (рис. 3). Конъюнкт и дизъюнкт могут быть n -местными, $n=1, 2, \dots$ (на рисунке $n=3$), а цикл существенно двухместный.



Т-схема структурирована, если она либо является базисной структурой, либо может быть получена из базисной применением, возможно многократном, операции вложения (детализации), заключающейся в замене любого триода на базисную структуру. Т-схема из примера выше структурирована, так как она может

быть получена из дизъюнкта $\begin{matrix} T_1 \\ T_{23} \\ T_4 \end{matrix}$ заменой T_{23} на цикл $T_2 \leftarrow T_3$.

Частные случаи. Если триод является условной операцией, то он записывается так (рис. 4): условие c может отсутствовать

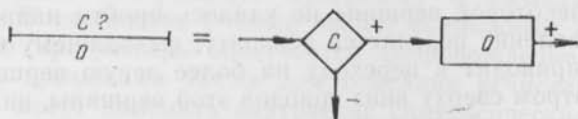


Рис. 4

($c \leftrightarrow$ истина); операция o может отсутствовать (пустой оператор). Если c ложь, то триод вообще опускается. Все это приводит к следующим частным структурам и их схемам (рис. 5):



Рис. 5

Примеры. 1. Алгоритм Эвклида для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) целых положительных чисел m, n , основанный на утверждениях: $m=n \Rightarrow \text{НОД}(m, n)=m$, $m>n \Rightarrow \text{НОД}(m, n)=\text{НОД}(m-n, n)$ (рис. 6): Пример простой, но мы показали самый подробный процесс проектирования алгоритма сверху вниз с использованием триодного осмысливания крупных операций. Например, уменьшение пары m, n рассматривается как триод с минус-выходом при невозможности уменьшения ($m=n$), причем само условие $m=n$ (или $m \neq n$) нигде не появляется.

2. Поиск локального минимума функции одного переменного $f(x)$ методом адаптирующегося множителя. На вход подается начальная точка x и начальный шаг dx . Поиск заключается в производстве последовательности пробных шагов со следующими действиями после каждого шага: 1) если шаг удачен (значение $f(x)$

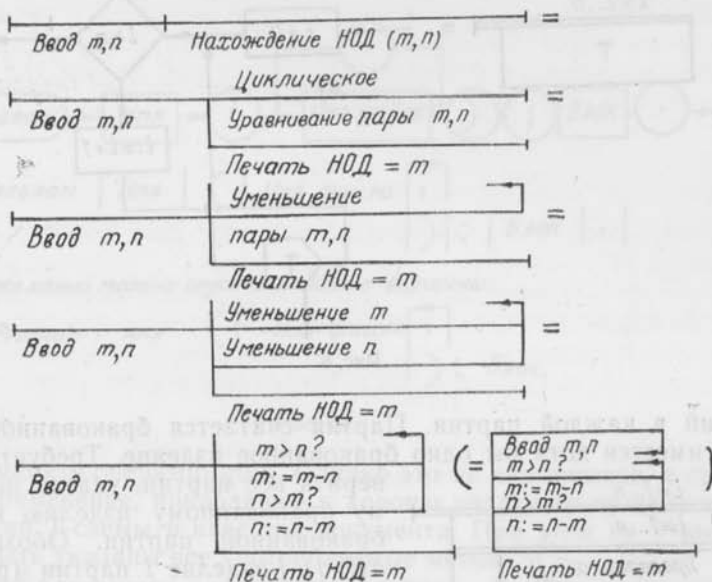


Рис. 6

уменьшилось), то происходит переход в пробную точку, иначе поиск остается в прежней точке; 2) величина шага умножается на некоторый множитель, который предварительно преобразуется (адаптируется). Поиск заканчивается после получения заданного числа n неудачных шагов (этот критерий остановки хорош при

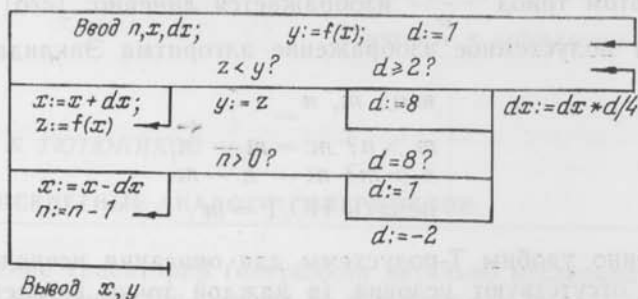


Рис. 7

встройке алгоритма в какой-либо спусковой метод многомерной минимизации) (рис. 7).

Дополнительная структура — счетчиковый цикл (рис. 8). Цикл дает плюс-выход при исчерпании значений счетчиковой переменной и минус-выход при минус-выходе триода T (тело цикла). Пример: проверка партий изделий. Имеется n партий изделий по m

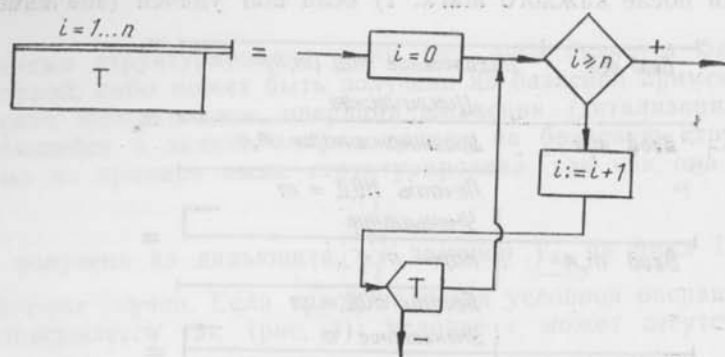


Рис. 8

изделий в каждой партии. Партия считается бракованной, если в ней имеется хотя бы одно бракованное изделие. Требуется проверить все партии, указав по одному бракованному изделию каждой бракованной партии. Обозначаем $a(i, j)$ j -изделие i партии (рис. 9).

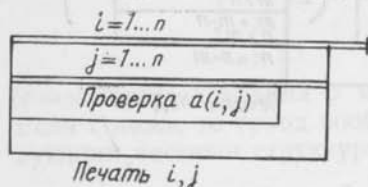


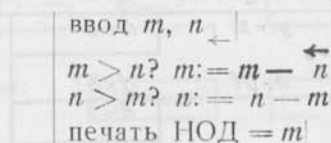
Рис. 9

Проверка $a(i, j)$ -триод, дающий плюс-выход, если изделие годно, и минус-выход — в противном случае.

T-полусхемы. Синтаксические T-схемы. T -полусхемы отличаются от

T -схем отсутствием горизонтального отрезка прямой при изображении триода — его заменяет строка текста.

При этом триод $\frac{c?}{o}$ изображается линейно: $|c?o|$. Вот как выглядит полусхемное изображение алгоритма Эвклида:

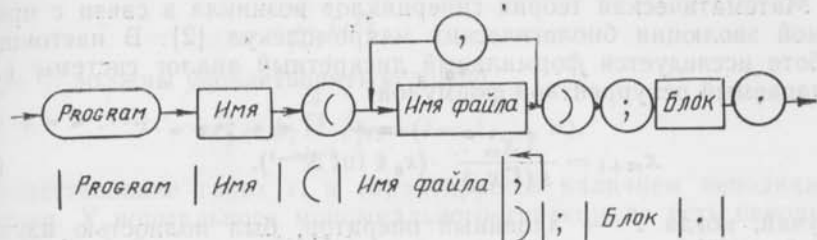


Особенно удобны T -полусхемы для описания исчислений, так как там отсутствуют условия (в каждой точке ветвления алгоритм предписывает определенный вариант из допустимых, а исчисление разрешает их все).

Приводим пример синтаксической диаграммы для определения программы в языке ПАСКАЛЬ и соответствующую синтаксическую

Т-схему (рис. 10). Заметим, что синтаксические диаграммы являются блок-схемами (не структурированными).

Кодирование. Так как предположенная система структурного программирования намного мощнее системы существующих алгоритмических языков, то при переводе Т-схем на эти языки прихо-



При желании можно опускать малые вершины:

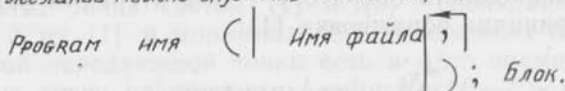


Рис. 10

дится применять оператор goto. Однако это не хаотическое, а стандартное применение, приводящее к хорошо читаемым программам при наличии Т-схемы в качестве документа. При этом на Т-схеме должны быть указаны все употребляемые метки.

Большие алгоритмы описываются набором Т-схем: схема верхнего уровня и детализирующие схемы разного уровня. В этом случае соответствующая программа должна в качестве комментариев содержать заголовки фрагментов, соответствующих детализирующим Т-схемам.

Список литературы: 1. Goller N. E. Triodic Logic and its Use in Structured Program Design//The computer journ. 1982. 25, № 2. P. 218—226. 2. Вельбицкий И. В. Технология программирования. К., 1984. 279 с.

Поступила в редколлегию 28.03.88

УДК 517.9

Р. Б. ТЮТЮНИКОВ

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ГИПЕРЦИКЛОВ

1. Поведение траекторий гиперцикла детально исследовано ранее [1]. Эта динамическая система во внутренности $\text{int}\Delta^{n-1}$ ($n-1$)-мерного базисного симплекса $\Delta^{n-1} \subset R^n$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \Gamma x - s(\Gamma x)x, \quad (1)$$

Здесь $s(x) = \sum x_i$, Γ — гладкий оператор роста, отображающий открытый конус R_+^n в себя и позитивно однородный некоторой степени $p > 0$:

$$\Gamma(\lambda z) = \lambda^p \Gamma z \quad (\lambda > 0, z \in R_+^n). \quad (2)$$

Математическая теория гиперциклов возникла в связи с проблемой эволюции биологических макромолекул [2]. В настоящей работе исследуется формальный дискретный аналог системы (1), задаваемый рекуррентной формулой

$$x_{m+1} = \frac{\Gamma x_m}{s(\Gamma x_m)} \quad (x_0 \in \text{int } \Delta^{n-1}). \quad (3)$$

Случай, когда Γ — линейный оператор, был полностью изучен в работе [3].

2. В силу однородности оператора Γ для итераций (3) выполняется аналог принципа нормировки [1]:

$$x_m = \frac{\Gamma^m x_0}{s(\Gamma^m x_0)} \quad (x_0 \in \text{int } \Delta^{n-1}). \quad (4)$$

3. Пусть $\bar{x} \in \text{int } \Delta^{n-1}$ — неподвижная точка оператора $G: x \rightarrow \Gamma x / s(\Gamma x)$. Очевидно, производная оператора G равна

$$G'_x = \frac{\Gamma'_x}{s(\Gamma x)} - \frac{(\Gamma'_x)^* s \otimes \bar{x}}{s^2(\Gamma x)},$$

откуда

$$G'_x = \frac{\Gamma'_x - (\Gamma'_x)^* s \otimes x}{s(\Gamma x)}. \quad (5)$$

Аналогично теореме 1 [1] устанавливается следующий факт.

Теорема 1. Характеристическое уравнение оператора G'_x в гиперплоскости $s(dx) = 0$ имеет вид $s(P(s(\Gamma x) \lambda) \bar{x}) = 0$ (6), где $P(\lambda)$ — числитель резольвенты $R(\lambda) = P(\lambda)/D(\lambda)$ оператора Γ'_x , $D(\lambda)$ — характеристический полином оператора Γ'_x .

4. Мономиальным гиперциклом называется гиперцикл, у которого

$$(\Gamma z)_i = k_i \prod_{j=1}^n z_j^{p_{ij}} \quad (1 \leq i \leq n), \quad (7)$$

где $k_i > 0$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = p$ ($1 \leq i \leq n$). Матрица показателей (p_{ij}) обозначается через P . Если $k_i = 1$ для всех i, j , то система (7) задает нормальный мономиальный гиперцикл.

Теорема 2. Мономиальный гиперцикл гладко сопряжен в $\text{int } \Delta^{n-1}$ нормальному гиперциклу с той же матрицей показателей P тогда и только тогда, когда он имеет неподвижную точку.

Доказательство этой теоремы также аналогично соответствующему доказательству из работы [1]. Сопрягающее отображение дробно-линейно и имеет вид

$$x_i \rightarrow \frac{c_i x_i}{\sum_{j=1}^n c_j x_j} \quad (x \in \text{int } \Delta^{n-1}), \quad (8)$$

где C_i должны удовлетворять условию

$$c_i = k_i \prod_{j=1}^n c_{ij}^p \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Существование таких c_i и гарантируется наличием неподвижной точки. У нормального мономиального гиперцикла есть неподвижная точка $\hat{e} = (1/n, \dots, 1/n)$ — центр симплекса Δ^{n-1} . Так как неподвижные точки систем (1) и (3) совпадают, то по предложению 3 из [1] в мономиальном гиперцикле при наличии хотя бы одной неподвижной точки есть в Δ^{n-1} подмногообразие неподвижных точек размерности $\delta = \dim \text{Ker}(P - E)$, где E — единичная матрица.

Теорема 3. *Спектр линейного приближения нормального мономиального гиперцикла в неподвижной точке $\bar{x}$ не зависит от неподвижной точки и совпадает со спектром матрицы P , из которого удалено собственное значение $\lambda = p$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор Γz нормального мономиального гиперцикла в R_+^n .

$$d(\Gamma z)_i = (\Gamma z)_i \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{dz_j}{z_j} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (10)$$

В точке $\bar{x}$

$$d(\Gamma z)_i / \bar{x}_i = s(\Gamma \bar{x}) \bar{x}_i \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{dz_j}{x_j} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (11)$$

Таким образом, $\Gamma'_{\bar{x}} = s(\Gamma \bar{x}) \bar{X} P \bar{X}^{-1}$ (12), где $\bar{X} = \text{diag}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Числитель резольвенты оператора $\Gamma'_{\bar{x}}$ равен $s(\Gamma \bar{x})^{n-1} \pi_{\bar{x}}(\lambda \setminus s(\Gamma \bar{x}))$, где $\pi_{\bar{x}}(\lambda)$ — числитель резольвенты оператора $\bar{X} P \bar{X}^{-1}$. Так как $(\bar{X} P \bar{X}^{-1} - \lambda E) \bar{x} = (p - \lambda) \bar{x}$, то для резольвенты $\bar{R}_{\lambda}^{\bar{x}}$ оператора $\bar{X} P \bar{X}^{-1}$ выполняется равенство

$$\bar{R}_{\lambda}^{\bar{x}} \bar{x} = \frac{\bar{x}}{p - \lambda}. \quad (13)$$

Тогда

$$\pi_{\bar{x}}(\lambda) \bar{x} = \frac{d(\lambda) \bar{x}}{p - \lambda}. \quad (14)$$

Здесь $d(\lambda)$ — характеристический полином матрицы P . Значит, числитель резольвенты оператора Γ'_x , примененный к точке $\bar{x}$, равен

$$s(\Gamma\bar{x})^{n-1} \frac{d(\lambda) s(\Gamma\bar{x}) \bar{x}}{p - \lambda}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6), получаем для собственных значений оператора G'_x уравнение

$$\frac{d(\lambda)}{p - \lambda} = 0. \quad (16)$$

5. Частным случаем нормального мономиального гиперцикла является гиперцикл с циклической симметрией

$$(\Gamma z)_i = z_i z_{i-1} \dots z_{i-p+1} (z_{-k} \equiv z_{n-k}, p \geq 2). \quad (17)$$

Для циклически симметричного гиперцикла $P = Z^{p-1} + Z^{p-2} + \dots + E$, где Z — матрица циклической подстановки n -го порядка. Из теоремы 3 следует, что собственные значения G'_x в любой неподвижной точке $\bar{x}$ равны

$$\lambda(\omega) = \frac{\omega^p - 1}{\omega - 1} \quad (\omega^p = 1, \omega \neq 1). \quad (18)$$

Исследуем устойчивость неподвижных точек циклически симметричного гиперцикла.

а) При $p=n$ неподвижная точка единственна (это $\hat{e}$), спектр G'_e в $s(dx)=0$ состоит из нуля кратности $n-1$. Поскольку $(\Gamma x)_i = (\Gamma x)_j$ для всех i, j , то траектория любой точки $x_0 \in \text{int} \Delta^{n-1}$ сходится к $\hat{e}$ за один шаг.

б) При $p=n-1$ многообразие неподвижных точек одномерно при четном n и состоит из одной точки $\hat{e}$ при нечетном n (см. [1]). Собственные значения $\lambda(\omega) = -1/\omega$ и весь спектр лежит на единичной окружности.

Покажем, что для циклически симметричного гиперцикла при $p=n-1$ траектория любой точки $x_0 \in \text{int} \Delta^{n-1}$ образует цикл длины не больше n при n четном и не больше $2n$ при n нечетном. Возьмем произвольную точку x_0 из $\text{int} \Delta^{n-1}$. Положение точки x_m полностью определяется отношениями $(x_m)_i / (x_m)_j$. Обозначим через $r(m|i, j, l)$ разность степени множителя $(x_0)_l$ в $(\Gamma^m x_0)_i$ и $(\Gamma^m x_0)_j$. Легко проверяется, что при $p=n-1$ для всех i, j верно равенство

$$r(m+2|i, j, L) = r(m|i, j, L-2), \quad (19)$$

где для L предполагается $0 \equiv n$ и $-1 \equiv n-1$.

в) При $2 \leq p < n-1$ многообразие неподвижных точек имеет размерность $\delta = d(n, p-1) - 1$ ($d(n, p-1)$ — наибольший общий делитель n и $p-1$) [см. 1]. Пусть $\omega_k = \exp(i2\pi k/p)$. Тогда при данных ограничениях на p

$$|\omega_1^p - 1| = |e^{\frac{2\pi p i}{n}} - 1| > |e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1| = |\omega_1 - 1|$$

и $|\lambda(\omega_1)| > 1$. Следовательно, в случае (b) все неподвижные точки гиперцикла неустойчивы.

Замечание. В спектре линейного приближения любой неподвижной точки есть нуль кратности $k = d(n, p) - 1$.

6. Опишем глобальное поведение траекторий циклически симметричных гиперциклов малых размерностей.

1) При $n=p=2$ траектории всех точек из $\text{int}\Delta^1$ сходятся к точке $(1/2, 1/2)$ за один шаг.

2) При $n=3, p=3$ наблюдается сходимость всех траекторий к центру Δ^2 за один шаг, а при $n=3, p=2$ есть единственная неподвижная точка $(1/3, 1/3, 1/3)$ и траектории всех остальных точек образуют циклы длины не больше шести.

3) Более содержательным является случай $n=4$.

а) При $p=4$ сходимость за один шаг всех траекторий к единственной неподвижной точке — центру симплекса.

б) При $p=3$ есть одномерное многообразие неподвижных точек, а траектории всех остальных точек из $\text{int}\Delta^3$ представляют собой циклы длины не больше четырех.

γ) При $p=2$ неподвижная точка единственна и в спектре линейного приближения в ней есть нуль кратности один. Траектория любой начальной точки, кроме e , попадает на многообразие $x_1x_3 = x_2x_4$ за один шаг и в нем циклически (порядка не больше восьми) встретится к вершинам Δ^3 или к центрам соответствующих граней.

Список литературы: 1. Любич Ю. И. К динамике гиперциклов//Докл. АН СССР. 1986. 288. № 6. С. 1301—1304. 2. Эйсен М., Шустер П. Гиперцикл. М., 1982. 270 с. 3. Любич Ю. И. Дарвиновские системы и их дискретные аналоги//Вестн. Харьк. ун-та. 1986. № 286. Математика и механика. С. 70—76.

Поступила в редколлегию 20.01.87

УДК 519.9+575.1

А. А. КРАПИВИН

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ГЕНЕТИЧНОСТИ БЕРНШТЕЙНОВСКОЙ АЛГЕБРЫ

1. Коммутативная (неассоциативная) алгебра A над полем K ($\text{char } K \neq 2$) называется *барической*, если на ней зафиксирован ненулевой характер (вес) $\sigma: A \rightarrow K$. Барическими являются все алгебры, появляющиеся в математической генетике. В то же время эти алгебры часто оказываются *генетическими*, т. е. обладают базисом, проходящим через баридел $B = \text{Ker } \sigma$, в котором таблица умножения треугольна, причем в B она нильтреугольна [1]. Бернштейновские алгебры связаны с известной проблемой С. Н. Бернштейна [2]. Мы будем пользоваться их теорией, изложенной в [1]. Напомним, что барическая алгебра (A, σ) называется *бернштейновской*, если в ней выполняется тождество $(x^2)^2 = \sigma^2(x) \cdot x^2$ (1).

Если $e \neq 0$ — идемпотент в A (например, $e = x_0^2$, где $\sigma(x_0) = 1$), то $A = Ke + B$, а $B = U + W$, где U, W соответственно образы и ядро проектора $L_e = 2e \cdot$, действующего в B . При этом

$$U^2 \subset W, W^2 \subset U, WU \subset U \quad (2)$$

выполняется тождество Якоби:

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0, \quad (3)$$

а также тождества

$$u_1(u_2w) + u_2(u_1w) = 0, \quad (4)$$

$$(u_1w_1)(u_2w_2) + (u_2w_1)(u_1w_2) = 0 \quad (5), \quad u(w_1w_2) = 0, \quad (u_1u_2)(w_1w_2) = 0 \quad (6)$$

$$(u_1u_2)(u_3u_4) + (u_1u_3)(u_2u_4) + (u_1u_4)(u_2u_3) = 0 \quad (7)$$

Здесь и далее все $u_i \in U$, все $w_k \in W$.

Линейная форма g на A называется *исчезающей*, если $g(x^2) = 0$. Исчезающие линейные формы образуют подпространство $N \subset A^*$. Если $N = 0$, то алгебра A называется алгеброй без исчезающих линейных форм и это равносильно равенству $A^2 = A$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $U^2 = W$.

В монографии [1] Ю. И. Любич сформулировал следующий эффективный признак генетичности бернштейновской алгебры: каждая (конечномерная) бернштейновская алгебра без исчезающих линейных форм — генетическая. Эта гипотеза была недавно доказана А. Н. Гришковым [3]. В этой работе высказано предположение о справедливости результата и для конечнопорожденных алгебр, причем в «количественной» форме, т. е. с оценкой показателя нильпотентности в зависимости от числа образующих. В настоящей работе мы доказываем это предположение, а также дополняем результат А. Н. Гришкова оценкой показателя нильпотентности в зависимости от размерностных инвариантов алгебры (ее типа). Мы будем пользоваться следующим критерием генетичности [1]:

Теорема 1. Для того чтобы бернштейновская алгебра A была генетической, необходимо и достаточно, чтобы ее баридеал B был нильпотентен.

2. Пусть A — бернштейновская алгебра, $\dim A = n < \infty$. Обозначим размерности подпространств U, W через $m-1$ и δ соответственно. Пара чисел (m, δ) не зависит от выбора идемпотента e и называется согласно [1] *типом* алгебры A . Очевидно, $m + \delta = n$.

Для подмножества $C \subset A$ определим k -ю главную степень C^k , полагая $C^1 = C$, $C^k = C \cdot C^{k-1}$ ($k = 2, \dots$).

Теорема 2. Если A — бернштейновская алгебра типа (m, δ) без исчезающих линейных форм, то при $v = m(\delta + 1) + 2$ имеет место равенство $B^v = 0$.

Доказательство теоремы распадается в цепочку лемм. Первые две из них были доказаны в работе [4].

Лемма 1. Произведения $P_k = u_0(u_1(w_2(\dots(w_k u_1)\dots)))$ антисимметричны по $w_1, \dots, w_k$.

Замечание. Если $A^2=A$, то в P_k внешний множитель u_0 можно заменить на $\omega_0 \in W$. Это немедленно следует из тождества Якоби. Если $C, D \subset A$, то определим $C^{(0)}D = D$, $C_{(k)}D = C(C^{(k-1)}D)$ ($k = 1, 2, \dots$).

Следствие. $U(W^{(k)}U) = 0$ ($k \geq \delta + 1$).

Лемма 2.

$$(W^{(k)}u) \cdot (W^{(l)}U) = U(W^{(k+l)}U).$$

Лемма 3. $U(W(U^{(2k)}(W^{(l)}U))) \subset \sum_{s=0}^k U(U^{(2s)}(W^{(l+1)}U))$ (8).

Доказательство проводится индукцией по k и опирается на леммы 1, 2, включения (2) и тождество Якоби.

Лемма 4. Если A — бернштейновская алгебра типа (m, δ) , то $U^{m(\delta+1)+1} = 0$. (9).

Доказательство. Определим подпространства $L_1, \dots, L_{\delta+1}$, полагая

$$L_1 = \sum_{l=1}^{[m/2]} U^{(m-2l-1)}(WU^{2l-1}), \quad L_i = \sum_{l=1}^{[m/2]} U^{(m-2l-1)}(W(U^{(2l-1)}L_{i-1}))$$

$$(i = 2, \dots, \delta + 1) \quad (10)$$

и наряду с ними подпространства $M_i = U^{(q-mi)}L_i$ ($i = 1, \dots, \delta + 1$) (11), где $q = m(\delta + 1) + 1$. Рассмотрим произведение $Q = u_{i_q}(\dots(u_{i_2}u_{i_1})\dots)$ (12), составленное из базисных векторов $u_1, \dots, u_{m-1}$ подпространства U . Из тождества (4) следует, что в Q множители $u_{i_{2l+2}}, u_{i_{2l+1}}$ антикоммутируют, а из тождества Якоби следует, что произведение $Q_1 = u_{i_m}(\dots(u_{i_2}u_{i_1})\dots) \in L_1$, поскольку в нем есть повторяющиеся множители, т. е. $Q \in M_1$. Переходя в произведении (12) к следующему отрезку длины m , по этой же причине получаем включение $Q \in M_q$ и, наконец, переходя к $(\delta + 1)$ -отрезку произведения Q , получаем включение $Q \in M_{\delta+1}$. Остается заметить, что в $M_{\delta+1}$ все множители W разделены четным числом множителей U , что позволяет, следовательно, применяя лемму 3, получить включение

$$M_{\delta+1} \subset \sum_{0 \leq 2s \leq (m-2)(\delta+1)-1} U^{(t)}(U^{(2s)}(W^{(\delta+1)}U)), \quad (13)$$

где $t = m(\delta + 1) - [((m-2)(\delta + 1) - 1)/2]$. Из следствия леммы 1 получаем $M_{\delta+1} = 0$, т. е. $U^q = 0$.

Доказательно теоремы завершает (ср. [3])

Лемма 5. Если $A^2 = A$, то $B^k \subset W^2 + U^k + U^{k+1}$ ($k \geq 1$) (14). В частности, если $U^v = 0$, то $B^{v+1} = 0$.

Для доказательства достаточно провести индукцию по k , учитывая, что равенство $A^2 = A$ и тождества (6) обеспечивают включение $W^2 \subset \text{Ann } B$.

3. Бернштейновская алгебра A называется конечнопорожденной с системой образующих $x_1, \dots, x_n$, если наименьшая подалгебра,

содержащая $\{x_1, \dots, x_n\}$, совпадает с A . Конечнопорожденность алгебры A равносильна тому, что каждый элемент $x \in A$ можно представить в виде $x = F(x_1, \dots, x_n)$, где F — неассоциативный полином.

Легко видеть, что конечнопорожденность бернштейновской алгебры A равносильна конечнопорожденности ее баридеала B .

Неассоциативный полином вида

$F(t_1, \dots, t_n) = \sum \lambda_{i_k \dots i_1} t_{i_k} (\dots (t_{i_2} t_{i_1}) \dots) (t_{i_j} \in \{t_1, \dots, t_n\})$ назовем *главным* полиномом от $t_1, \dots, t_n$.

Теорема 3. Если A — конечнопорожденная бернштейновская алгебра без исчезающих линейных форм, то ее баридеал B нильпотентен.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, но дополнительно используются следующие леммы.

Лемма 6. Если $A^2 = A$ и $F(y_1, \dots, y_k)$, $G(z_1, \dots, z_l)$ — главные полиномы ($y_i, z_j \in B$), то $u_0(F(y_1, \dots, y_k) \cdot G(z_1, \dots, z_l)) = u_0(H(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l))$, где H — главный полином.

Доказательство проводится индукцией по $\deg G$.

Следствие 1. Если $y_i, z_j \in U \cup W$, то для главных полиномов F, G произведение $w_0(F(y_1, \dots, y_k) \cdot G(z_1, \dots, z_l))$, либо равно $w_0(H(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l))$ (H — главный полином), либо принадлежит $\text{Ann } B$.

Действительно, если $F(y_1, \dots, y_k) \cdot G(z_1, \dots, z_l) \in U$, то условие $A^2 = A$ позволяет считать, что $w_0 = u_0 \cdot u_0$ и результат следует из тождества Якоби и леммы 6, а, если $F(y_1, \dots, y_k) \times G(z_1, \dots, z_l) \in W$, то $w_0(F(y_1, \dots, y_k) \cdot G(z_1, \dots, z_l)) \in W^2 \subset \text{Ann } B$.

Следствие 2. Если $F(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l)$ — произвольный неассоциативный полином, то $u_0(F(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l)) = u_0(F_1 \times (u_1, \dots, w_l))$, (F_1 — главный полином) и либо $w_0(F(u_1, \dots, w_l)) = w_0(F_2(u_1, \dots, w_l))$ (F_2 — главный полином), либо $w_0(F(u_1, \dots, w_l)) \in \text{Ann } B$.

Если $x_1, \dots, x_n$ — система образующих в баридеале B , то в соответствии с разложением $x_i = u_i + w_i$ приходим к новой системе образующих $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_n$. При этом имеет место

Лемма 7. Если $A^2 = A$, то в баридеале B существует система образующих $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l$ такая, что $w_i = F_i(u_1, \dots, u_k)$, где F_i — главные полиномы ($i = 1, \dots, l$).

Действительно, если $u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_p$ — система образующих в B , то искомая система получается присоединением к $u_1, \dots, u_q$ всех произведений $w_{i_1} (\dots (w_{i_l} u_j) \dots)$ (в силу леммы 1 лишь конечное число таких произведений отлично от нуля).

Замечание. Из доказательства теоремы 3 может быть получена оценка показателя нильпотентности $\varphi(n)$ баридеала B . А именно, если A имеет n образующих, то

$$\varphi(n) \leq (m+1)(C_m^2 \sum_{0 \leq 2k \leq m} A_m^{2k} + 1) + 1,$$

где $m = n^4(n-1)^2$.

Список литературы: 1. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. К., 1983. 296 с. 2. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности//Учен. зап. н.и. каф. Украины. 1924. 1. С. 83—115. 3. Гришков А. Н. О генетичности бернштейновских алгебр//Докл. АН СССР. 1987. 294. № 1. С. 27—30. 4. Крапивин А. А., Любич А. А., Любич Ю. И. Оценка числа инвариантных линейных форм для бернштейновских алгебр//Вести. Харьк. ун-та. 1985. № 277: Пробл. управления и механики сплошных сред. С. 85—91.

Поступила в редколлегию 14.01.88

УДК 512.547.214

Я. Г. БЕРКОВИЧ, Э. М. ЖМУДЬ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЯДЕР НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ

§ 1. Пусть G — конечная группа (в статье рассматриваются только конечные группы), $\text{Irr}(G)$ — множество всех ее неприводимых характеров, $k(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G ($=G$ -классов). Известно, что $|\text{Irr}(G)| = k(G)$. Ядром группы G назовем ядро ее неприводимого характера. Понятно, что $j(G)$ — число ядер группы G — не превосходит $k(G) = |\text{Irr}(G)|$. Если $x \in G$, то $\langle\langle x \rangle\rangle$ — нормальная оболочка x в G называется антиядром группы G . Ясно, что $j^*(G)$ — число антиядер группы G — не превосходит $k_G(G)$ — числа классов сопряженных циклических подгрупп группы G , и поэтому $j^*(G) \leq k(G)$. Имеет место следующий важный для дальнейшего факт [1]:

Теорема 1. $j(G) = j^*(G)$ для любой конечной группы G .

Пусть n — натуральное число. Группу G назовем SM_n -группой, если любой ее нормальный делитель является ядром не более n ее неприводимых характеров. Положим $\gamma(G) = \min\{n | G - SM_n\text{-группа}\}$.

Лемма 2. Если $N \trianglelefteq G$, то $\gamma(G/N) \leq \gamma(G)$; в частности, если $G - SM_n$ -группа, то и $G/N - SM_n$ -группа.

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны:

(а) $G - SM_1$ -группа.

(б) $j(G) = k(G)$.

(в) $j^*(G) = k(G)$.

(г) $x, y \in G$, $\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle y \rangle\rangle \Rightarrow x, y$ сопряжены в G (пишем $x \sim y$).

Пусть M — ядро группы G . Классом характеров в $\text{Irr}(G)$ (принадлежащим M) назовем множество всех тех неприводимых характеров группы G , чьи ядра совпадают с M . Отметим, что SM_n -группы — это в точности те группы G , для которых классы характеров в $\text{Irr}(G)$ имеют длины, не превосходящие n .

В дальнейшем мы часто используем без ссылки такой очевидный факт. Если G — абелева группа экспоненты n , то $\gamma(G) = \varphi(n)$, где $\varphi(\cdot)$ — теоретико-числовая функция Эйлера.

Лемма 4. Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда $\gamma(G)$ не меньше числа степеней точных характеров в $\text{Irr}(N)$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что N имеет неединичное пересечение с любым нетривиальным нормальным делителем группы G . Пусть φ_1 — точный характер в $\text{Irr}(N)$, χ^1 — неприводимая компонента индуцированного характера φ_1^G . Из теоремы Клаффорда следует, что $\ker \chi^1 \cap N = 1$, и поэтому, согласно нашему предположению, характер χ^1 точен. Пусть $\varphi_2 \neq \varphi_1$ — точный характер в $\text{Irr}(N)$, $\varphi_2(1) \neq \varphi_1(1)$, а χ^2 — неприводимая компонента характера φ_2^G . Снова χ^2 точен. По теореме Клиффорда $\chi^2 \neq \chi^1$. Поэтому существует инъективное отображение множества степеней точных характеров из $\text{Irr}(N)$ в множество точных характеров из $\text{Irr}(G)$. //

Пусть $\text{cd} G = \{\chi(1) | \chi \in \text{Irr}(G)\}$. Если $|\text{cd} G| < 4$, то G разрешима (см. гл. 12 в [2]). Из этого результата и леммы 4 вытекает

Следствие 5. CM_2 -группы разрешимы.

Приведем еще одно доказательство следствия 5. Предположим, что G — неразрешимая CM_2 -группа наименьшего порядка. Если R, R_1 — различные минимальные нормальные делители группы G , то $G/R, G/R_1$, являясь CM_2 -группами, разрешимы по индукции. Но тогда G , изоморфная подгруппе прямого произведения $G/R^1 \times G/R$, тоже разрешима — противоречие. Итак, G содержит лишь один минимальный нормальный делитель R , и он неразрешим. Так как G имеет не более двух точных неприводимых характеров, то $k(G) \leq k(G/R) + 2$. Так как порядок R делится, по крайней мере, на три различных простых числа, то R^* распадается как минимум на три G -класса, и поэтому $k(G) \geq k(G/R) + 3$ — противоречие.

Замечание. Из классификации конечных простых групп следует, что если G — неабелева простая группа и $|\text{cd} G| < 5$, то $G \cong A_5$.

Отсюда и из леммы 4 легко вывести, что и CM_3 -группы разрешимы.

Лемма 6. $\gamma(G) \geq \varphi(\exp Z(G))$.

Это легко следует из теоремы Клиффорда и того факта, что все характеры центра $Z(G)$ группы G инвариантны относительно G (см. доказательство леммы 4). Если G — CM_2 -группа, то $\exp Z(G), \exp G/G' \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Если G — p -группа, то $\gamma(G) \geq p - 1$ (далее p, q, r — всегда означают простые числа).

Пример. Пусть $G = \text{PEQ}$ (так мы обозначаем полупрямое произведение с ядром Q) — минимальная ненильпотентная группа, $Q \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда Q — CM_{p-1} -группа.

Лемма 7. Пусть M нормальна в G , $\{\chi^i\}_1^s$ — множество всех тех характеров в $\text{Irr}(G)$, которые не содержат M в своих ядрах. Если p делит все $\chi^i(1)$, то M имеет нормальное p -дополнение (из условия следует, что $M \leq G'$, где G' — коммутант группы G).

Доказательство. Предположим, что M не имеет нормального p -дополнения. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$; тогда $P \cap M > 1_p$. По теореме Тейта (теорема 6.31 в [2]) имеем $P \cap M \leq P'$. Пусть $\text{Lin}(P)$ — множество всех линейных характеров группы P . По сказанному существует $\lambda \in \text{Lin}(P)$ с $P \cap M \leq \ker \lambda$. Рассмотрим разложение $\lambda^G = a_1 \tau^1 + \dots + a_m \tau^m$, где все $\tau^i \in \text{Irr}(G)$ попарно различны; $a_i > 0$, $i \in 1, m$. Так как $1_p \neq \lambda \in \tau^i_p$, то $P \leq \ker \tau^i$ для всех i . Так как $P \cap M \leq \ker \lambda$, то $P \cap M \leq \ker \tau^i$ для всех i , и те. более $M \leq \ker \tau^i$. Поэтому $\{\tau^i\}_1^m \subseteq \{\chi^i\}_1^s$. По условию простое число p делит все $\tau^i(1)$; поэтому p делит $\lambda^G(1) = |G:P| \neq 0 \pmod{p}$ — противоречие.

Теорема 8. Пусть группа G обладает следующим свойством: (*) Для любого класса $\{\chi^i\}_1^s$ характеров в $\text{Irr}(G)$ существует $k \in 1, s$ такое, что $\prod_{i=1}^s \pi(\chi^i(1)) = \pi(\chi^k(1))$. Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Свойство (*) переносится на факторгруппы. Предположим, что (*)-группа G — неразрешимая (*)-группа наименьшего порядка. Тогда G содержит единственный минимальный нормальный делитель R , G/R — разрешимая (*)-группа, R — прямое произведение неабелевых простых групп. Из точности регулярного характера группы G следует, что G имеет точный неприводимый характер. Пусть $\{\chi^i\}_1^s$ — класс точных неприводимых характеров группы G . Множество $\{\chi^i\}_1^s$ совпадает со множеством всех тех характеров в $\text{Irr}(G)$, которые не содержат R в своих ядрах. Пусть $\prod_{i=1}^s \pi(\chi^i(1)) = \pi(\chi^k(1)) \neq \emptyset$ (последнее неравенство верно, так как все $\chi^i(1) > 1$). Рассмотрим клиффордово разложение $\chi_R^k = e(\psi_1 + \dots + \psi_l)$. Так как $\psi_1(1)$ делит $\chi^k(1)$ и $|R|$, то $\psi_1(1) = 1$ по лемме 7. Поэтому Ψ_1 — главный характер подгруппы R , и из приведенного выше клиффордова разложения вытекает $R \leq \ker \chi^k = 1$ — противоречие. //

Следствие 9. Пусть p — простой делитель $|G|$. Следующие условия эквивалентны:

(а) $|G/\ker \chi| = p\chi(1)^2$ для всех неглавных $\chi \in \text{Irr}(G)$.

(б) G — p -группа с $\gamma(G) = p - 1$.

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условию (а). По теореме 8 группа G разрешима. Предположим, что G не удовлетворяет условию (б) и является контрпримером наименьшего порядка. Тогда G неабелева. Из предположения следует, что G содержит единственный минимальный нормальный делитель R . По условию p делит $|G/R|$; поэтому по индукции G/R — p -группа. Следовательно, $|R| = r^t$, где простое число r отлично от p . Из точности регулярного характера группы G следует, что в $\text{Irr}(G)$ имеется точный характер χ . По условию $|G| = p\chi(1)^2$, так что r делит $\chi(1)$. Но по теореме Ито (теорема 6.15 из [2]) $\chi(1)$ делит $|G/R|$, так что $\chi(1)$ — степень p . Получилось противо-

речие. Итак, G — p -группа. Остается показать, что $\gamma(G) = p - 1$. Пусть неглавный $\chi \in \text{Irr}(G)$. Можно считать, что χ точен (G является SM_n -группой $\leftrightarrow G/\ker \chi$ — SM_n -группа $\forall \chi \in \text{Irr}(G)$). Положим $|G| = p^n$. Если χ линейен, то $n = 1$ и $\gamma(G) = p - 1$. Пусть χ нелинеен и $\chi^1 = \chi, \dots, \chi^k$ — класс точных характеров в $\text{Irr}(G)$. По условию, $p^n = p\chi^i(1)^2, i \in \overline{1, k}$. Так как $|G/Z(G)| \geq \chi^i(1)^2$, то $|Z(G)| = p$, так что $\chi^i(1)^2 = p^{n-1}$. Поэтому $|G| - |G/Z(G)| = (p-1)p^{n-1} = \chi^1(1)^2 + \dots + \chi^k(1)^2 = kp^{n-1}$, откуда $k = p - 1$. Итак, (а) $\Rightarrow$ (б).

Пусть теперь G удовлетворяет условию (б), т. е. G — p -группа с $\gamma(G) = p - 1$. Так как для неглавного $\chi \in \text{Irr}(G)$, $Z(G/\ker \chi)$ циклическая, то $|Z(G/\ker \chi)| = p$ по лемме 6. Пусть $\chi = \chi^1, \dots, \chi^{p-1}$ — все точные характеры в $\text{Irr}(G/\ker \chi)$, $\chi^i(1) = p^{\alpha_i}, \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{p-1}$, $|G/\ker \chi| = p^n, i \in \overline{1, p-1}$. Тогда $(p-1)p^{n-1} = |G/\ker \chi| - |G/\ker \chi : Z(G/\ker \chi)| = p^{2\alpha_1} + \dots + p^{2\alpha_{p-1}}, (p-1)p^{n-1-2\alpha_1} = 1 + p^{2(\alpha_2-\alpha_1)} + \dots + p^{2(\alpha_{p-1}-\alpha_1)}$, откуда $n = 2\alpha_1 + 1, \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1}, p^n = |G/\ker \chi| = p^{1+2\alpha_1} = p\chi(1)^2$. //

Можно показать, что прямое произведение SM_1 -групп является SM_1 -группой [4]. Но $\gamma(A_5) = 4, \gamma(A_5 \times A_5) = 16$, так что при $n > 1$ прямое произведение SM_n -групп не обязательно является SM_n -группой. Если неабелева p -группа G является SM_{p-1} -группой, то для нелинейного $\chi \in \text{Irr}(G)$ группа $G/\ker \chi$ центрального типа (следствие 9).

Следствие 10. Если степени любых двух равноядерных неприводимых характеров группы G равны, то G разрешима.

Теорема 11. Если для каждого класса характеров в $\text{Irr}(G)$ существуют такие простые числа $p = p(M), q = q(M)$, что $\pi(G/Z(\chi)) - \pi(\chi(1)) \subseteq \{p, q\}$ для любого $\chi \in M$ (здесь $Z(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ — квазиядро характера χ), то группа G разрешима.

См. доказательства леммы 7 и теоремы 8. Теорему 11 можно фразмативать как небольшое усиление $\{p, q\}$ -теоремы Бернсайда.

Следствие 12. Группа G нильпотентна $\leftrightarrow \pi(G/Z(\chi)) = \pi(\chi(1))$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Leftarrow$. Группа G разрешима по теореме 11. Предположим, что G — ненильпотентная группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условию, стоящему справа от знака $\leftrightarrow$. Тогда она содержит единственный минимальный нормальный делитель R , и пусть $|R| = p^2$. Так как G ненильпотентна, а G/R нильпотентна, то $R \leq Z(G), R \leq \Phi(G)$ (здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G). Поэтому $G = M \langle R \rangle$, M максимальна в G . Если $P \in \text{Syl}_p(M)$, то $N_G(P) \geq \langle M, N_R(P) \rangle > M$, т. е. P нормальна в G . Из единственности R следует, что $P = 1$, и поэтому $R \in \text{Syl}_p(G)$. Из точности регулярного характера группы G сле-

дует, что в $\text{Irr}(G)$ имеется точный характер χ . По теореме Ито p не делит $\chi(1)$. Так как $Z(\chi) = 1$, то $p \in \pi(G) = \pi(\chi(1))$ — противоречие. //

§ 2. Ниже передоказываются многие результаты работ [3, 4]. В этом параграфе G всегда означает SM_1 -группу.

Лемма 13. $\pi(G) \subseteq \{2, 3\}$.

Доказательство. Так как G разрешима, то $G/G' > 1$, и теперь из леммы 6 следует, что $\exp G/G' = 2$, так что $2 \in \pi(G)$. Предположим, что $\pi(G) \neq \{2, 3\}$, и G — SM_1 -группа наименьшего порядка, удовлетворяющая этому неравенству. Тогда она содержит ровно один минимальный нормальный делитель R , и пусть $|R| = p^a$. По индукции $\pi(G/R) \subseteq \{2, 3\}$. Поэтому $p > 3$. Теперь ясно, что R — силовская p -подгруппа в G , так что $G = H \ltimes R$, $\pi(H) \subseteq \{2, 3\}$. Предположим, что G — не группа Фробениуса. Тогда она содержит элемент x порядка qp , $q \in \{2, 3\}$, и поэтому $k(G) > k(G/R) + 1$. С другой стороны, G имеет ровно один точный неприводимый характер по условию, так что $k(G) = k(G/R) + 1$ — противоречие с ранее доказанным. Итак, $G = (H, R)$ — группа Фробениуса с ядром R . Если H — 2-группа, то она содержит ровно одну инволюцию, и теперь легко проверяется, что $H \in \{C(2), Q(8)\}$; здесь $C(m)$ — циклическая группа порядка m , $Q(8)$ — обычная группа кватернионов. Тогда, так как $R^* = G$ -класс, то $p^a = |R| = 1 + |H|$, откуда $|R| \in \{3, 9\}$ (см. замечание перед леммой 14), $p = 3$ — противоречие. Итак, пусть $\pi(H) = \{2, 3\}$, и $P \in \text{Syl}_3(H)$, $Q \in \text{Syl}_2(H)$.

Отметим, что $H \cong G/R$ — SM_1 -группа. Предположим, что P нормальна в H . Так как $H' \leq C_H(P)$, то $|H:C_H(P)| = 2$. Так как $\varphi(|P|)$ — число образующих циклической подгруппы P — не превосходит $|H:C_H(P)| = 2$, то P имеет порядок 3. Из свойств дополнительного множителя группы Фробениуса следует, что подгруппа порядка 6 из H циклическая; поэтому $Q = Q(8)$. Тогда $C_H(P)$ — циклическая подгруппа порядка 12 и индекса 2 в H . Так как $C_H(P)$ имеет 4 образующих, они не сопряжены относительно H , и H — не SM_1 -группа. Предположим, что P неинвариантна в H . Тогда $O_2(H)P < H$ (это следует из централизованных свойств подгруппы Фиттинга разрешимой группы), и, так как P неинвариантна в $O_2(H)P$, то $O_2(H) = Q(8)$. Если x — элемент порядка 6 в $O_2(H)P$, то $\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle x^2 \rangle\rangle$, хотя $x \sim x^2$ в G — противоречие. //

Отметим следующий известный теоретико-числовой факт. Если p, q — различные простые числа и $p^a = q^b + 1$, α, β — натуральные числа, то, если $\alpha > 1$, то $p^a = 9$, $q^b = 8$, или $p = 2$ и $\beta = 1$. Если же $\alpha = 1$, то $q = 2$.

Лемма 14. Если f — индекс главного ряда SM_1 -группы G , то $f \in \{2, 3, 9\}$ и $P \in \text{Syl}_3(G)$ нормальна в G .

Доказательство. Пусть еще $Q \in \text{Syl}_2(G)$. Можно считать, что R — минимальный нормальный делитель группы G —

имеет порядок f . Пусть $|R|=2^a$. Тогда для $x \in R^\# \cap Z(Q)$ имеем $2^a - 1 = |R^\#| = |G:C_G(x)|$ — степень 3 (так как в CM_1 -группе минимальный нормальный делитель, лишенный единицы, является классом сопряженных элементов), откуда $a \leq 2$. Если $|R|=3^3$, то для $y \in R^\# \cap Z(P)$ имеем $3^3 - 1 = |R^\#| = |G:C_G(y)|$ — степень 2, откуда $\beta \leq 2$ (здесь мы дважды воспользовались замечанием перед леммой). Итак, $f \in \{2, 4, 3, 9\}$. Допустим, что $f=4$. Можем считать, что R — единственный минимальный нормальный делитель в G (если это не так, то G/M , где M — наибольший нормальный делитель в G с $M \cap R = 1$, имеет единственный минимальный нормальный делитель $MR/M \cong R$ порядка 4). Положим $N = N_G(P)$. Тогда $G = N[R]$. Так как $N_G = \bigcap_{x \in G} N^x = 1$, то G изоморфна подгруппе из $S_{G:N} = S_4$ порядка, кратного 12. Но S_4 и A_4 — не CM_1 -группы, и это приводит к противоречию. Утверждение о том, что P нормальна в G , теперь очевидно. //

Лемма 15. Пусть $G = P[Q]$, где $P \in \text{Syl}_p(G)$ — элементарная, $Q \in \text{Syl}_q(G)$, $q \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что G — контрпример минимального порядка. Тогда она содержит единственный минимальный нормальный делитель R , при этом $|R|=q^3$, $\beta > 1$. Вначале пусть $R=Q$. Если $|P|=p$, то G — минимальная ненильпотентная группа, а из свойств последних выводим $\beta=1$ — противоречие. Пусть $|P| > p$. Тогда G — не группа Фробениуса, и поэтому в $P^\#$ имеется элемент x такой, что $C_G(x) \geq \langle P, C_Q(x) \rangle = G$ (так как P максимальна в G), $x \in Z(G)$, $\langle x \rangle$ нормальна в G и $\langle x \rangle \neq R$ — противоречие. Пусть теперь $R < Q$. Тогда $R \leq Z(Q)$. Так как PR сверхразрешима по доказанному (ибо R — минимальный нормальный делитель в PR), то в R содержится PR -допустимая подгруппа R_1 порядка q . Тогда $N_G(R_1) \geq \langle P, Q \rangle = G$, R_1 нормальна в G и $R_1 < R$ — противоречие. //

Теорема 16. P — элементарная абелева 3-группа.

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда G содержит единственный минимальный нормальный делитель R , при этом $|R|=3^3$, $\beta \leq 2$ (см. лемму 14). Так как $\text{Irr}(G)$ содержит ровно один точный характер, то $k(G) = k(G/R) + 1$, и поэтому $QR = (Q, R)$ — группа Фробениуса с ядром R , так что $Q \cong \{C(2), Q(8)\}$ (используется строение группы автоморфизмов группы R , строение силовских подгрупп дополнительного множителя группы Фробениуса и тот факт, что $Q \cong G/P$ — CM_1 -группа).

Пусть $Q = \langle u \rangle = C(2)$. Так как $R^\#$ — G -класс (по теореме 1) и $R \leq Z(P)$, то $\beta=1$. Положим $D = \langle\langle u \rangle\rangle$. Так как $\exp G/G' = 2$, то $D = G$. Из сказанного видно, что u инвертирует P , так что P абелева, и теперь ясно, что она даже элементарная.

Пусть $Q = Q(8)$, $Z(Q) = \langle u \rangle$. Положим снова $D = \langle\langle u \rangle\rangle$. Так как G — CM_1 -группа, то $D = \langle\langle u \rangle, P_1 \rangle$ — группа Фробениуса.

Предположим вначале, что $P_1 = P$. Тогда P — абелева, $G = (Q(8), P)$, $R = E(9)$. Так как R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G , то по теореме Машке о полной приводимости $R = \langle x \in P | x^3 = 1 \rangle$, так что P порождается двумя элементами. По индукции $P/R \in \{C(3), E(9)\}$. Так как G/R — SM_1 -группа, то, как мы видели ранее, $|P/R| > 3$. Итак, $P/R = E(9)$, $P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, где $0(x) = 9 = 0(y)$. Если a — элемент порядка 9 в P , то $\langle\langle a \rangle\rangle = P$, так как R — единственная нетривиальная G -допустимая подгруппа в P . Так как 72 элемента порядка 9 в P распадаются на девять G -классов, то G — не SM_1 -группа — противоречие.

Пусть теперь $P_1 < P$. Так как G — SM_1 -группа, u инвертирует P_1 . Отметим, что P_1 нормальна в G . Группа G/D сверхразрешима по лемме 15. Но тогда и G/P_1 сверхразрешима. Поэтому P/P_1 содержит G/P_1 -допустимую подгруппу P_2/P_1 с $|P:P_2| = 3$. Так как $G/P_2 \cong Q(8) [C(3)]$ не является SM_1 -группой, то и G — не SM_1 -группа — противоречие. //

Лемма 17. Пусть $G = (Q, P)$ — группа Фробениуса с ядром $P \in \text{Syl}_3(G)$, $Q \in \text{Syl}_2(G)$. Тогда $G = (C(2), E(3^m))$ или $G = (Q(8), E(9))$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 16 видно, что лемма верна, если $Q = C(2)$.

Пусть $Q = Q(8)$. Тогда $P = F_1 \times \dots \times F_n$, все F_i нормальны в G и изоморфны $E(9)$ (применяется лемма 14 и теорема Машке). Предположим, что $n > 1$. Факторизуя G по $F_3 \times \dots \times F_n$, можем считать, что $n = 2$. Пусть $Q = \langle i, j, k \rangle$, где i, j, k — базисные кватернионы. Возьмем $x_1 \in F_1^\#$ и положим $x_1^i = y_1$; тогда $F = \langle x_1 \rangle \times \langle y_1 \rangle$, $y_1^i = x_1^{-1}$, $(x_1^{-1})^i = y_1^{-1}$, $x_1^j = x_1 y_1$, $(x_1 y_1)^j = x_1^{-1}$, $(x_1^{-1})^j = x_1^{-1} y_1^{-1}$, $x_1^k = x_1 y_1^{-1}$, $(x_1 y_1^{-1})^k = x_1^{-1}$, $(x_1^{-1})^k = x_1^{-1} y_1$. Так как $(Q, F_1) \cong (Q, F_2)$, то в $F_2^\#$ найдутся такие элементы x_2, y_2 , которые удовлетворяют равенствам, полученным из выписанных выше, заменой индекса 1 на 2. Тогда $\Delta = Q$ — орбита элемента $x_1 y_2$, состоит из таких 8 элементов: $x_1 y_2, y_1 x_2^{-1}, x_1^{-1} y_2^{-1}, y_1^{-1} x_2, x_1 y_1 x_2 y_2^{-1}, x_1^{-1} y_1^{-1} x_2^{-1} y_2, x_1 y_1^{-1} x_2^{-1} y_2^{-1}, x_1^{-1} y_1 x_2 y_2$. Так как $x_1 y_1 \times \times y_1^{-1} x_2^{-1} \in \Delta \cup \{1\}$, то $\Delta \cup \{1\}$ — не подгруппа в P (но это множество инвариантно относительно G). Так как все нетривиальные G -допустимые подгруппы из P имеют порядок 9, то $\langle\langle x_1 y_2 \rangle\rangle = P$. Так как G — SM_1 -группа, то из $x_1 y_2^{-1} \sim x_1 y_2$ следует, что $P = \langle\langle x_1 y_2 \rangle\rangle \neq \langle\langle x_1 y_2^{-1} \rangle\rangle$. Но, как и выше, показывается, что $\langle\langle x_1 y_2^{-1} \rangle\rangle = P$. Полученное противоречие завершает доказательство. //

Отметим без доказательства, что если G — ненильпотентная SM_1 -группа, то $G/O_2(G)$ — прямое произведение SM_1 -групп, являющихся группами Фробениуса (см. [4]).

§ 3. В этом параграфе мы перенесем на SM_{2p+1} -группы G , где

$p > 2$ — наименьший простой делитель $|G|$, некоторые результаты § 2. Почти все результаты этого параграфа неверны при $p=2$.

Пусть $x \in G^\#$. Через $k_G(x)$ обозначим число G -классов, содержащих образующие подгруппы $\langle x \rangle$. Положим $i_G(x) = |N_G(\langle x \rangle) : C_G(x)|$.

Лемма 18. Для $x \in G^\#$ имеем $k_G(x) = \varphi(0(x))/i_G(x)$.

Доказательство. Подгруппа $\langle x \rangle$ имеет $\varphi(0(x))$ образующих. Пусть $\langle x^a \rangle = \langle x \rangle = \langle x^b \rangle$ и $x^a \sim x^b$ в G . Тогда для некоторого $y \in G$ имеем $y^{-1}x^ay = x^b$, так что $y \in N_G(\langle x \rangle)$. Поэтому, не уменьшая общности, считаем, что $\langle x \rangle$ нормальна в G . Теперь утверждение становится очевидным. //

Отметим без доказательства такой факт:

Лемма 19. Если p — такой простой делитель $|G|$, что $(p-1, |G|) = 1$, то $\gamma(G) \geq p-1$.

Лемма 20. Пусть $p > 2$ — наименьший простой делитель порядка ненильпотентной группы $G = P|Q$, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$ циклическая. Если $\gamma(G) \leq 2p+1$, то $|Q| = q$.

Доказательство. Так как G ненильпотентна и сверхразрешима, то $q \equiv 1 \pmod{p}$. Положим $\bar{G} = G/C_p(Q) = \bar{P}|\bar{Q}$, где $\bar{P} \in \text{Syl}_p(\bar{G})$, $\bar{Q} \in \text{Syl}_q(\bar{G})$. Тогда $\bar{D}$ — циклическая и $\gamma(\bar{P}) = \varphi(|\bar{P}|)$ (лемма 6). Так как $\bar{P}$ изоморфна эпиморфному образу группы G , то $|\bar{P}| = p$, если $p > 3$. Пусть $p > 3$, $|\bar{Q}| = q^3$. Тогда в $\text{Irr}(\bar{G})$

имеется $\frac{|\bar{G}| - |\bar{G}|/q}{p^2} = \frac{q^{3-1}(q-1)}{p}$ точных характеров, и из $\frac{q^{3-1}(q-1)}{p} \leq 2p+1$ и $q \geq 2p+1$ следует $\beta = 1$. Пусть $p = 3$.

Тогда $|\bar{P}| \in \{3, 9\}$. Если $|\bar{P}| = 3$, аналогично показывается, что $|Q| = q$. Пусть $|\bar{P}| = 9$, $|\bar{Q}| = q^3$. Тогда $\text{Irr}(\bar{G})$ имеет $\frac{1}{9^2}(9q^3 - 9q^{3-1}) = \frac{1}{9}q^{3-1}(q-1)$ точных характеров. В нашем случае

$q \equiv 1 \pmod{9}$, так что $q \geq 19$. По условию $\frac{q^{3-1}(q-1)}{9} \leq 7$, откуда снова следует, что $\beta = 1$. //

Лемма 21. Пусть $p > 2$ — наименьший простой делитель порядка группы $G = PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Тогда G сверхразрешима, если выполнено одно из условий:

(а) $p = 3$ и $\gamma(G) < 6$.

(б) $p > 3$ и $\gamma(G) \leq 2p+1$.

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда она содержит единственный минимальный нормальный делитель R . По индукции G/R сверхразрешима; в частности, QR нормальна в G . Так как $\text{Irr}(G)$ имеет не более $\gamma(G)$

точных характеров, справедливо такое неравенство: $k(G) \leq k(G/R) + \gamma(G)$ (1) (ибо все характеры из $\text{Irr}(G)$, которые не содержат R в своих ядрах, точны).

(i) p не делит $|G/R|$, т. е. $R=P$.

Так как $(p-1)(q-1) > 2p+1$, то из леммы 18 следует, что $G=(Q, R)$. Поэтому Q циклическая и $|Q|=q$ по лемме 6. Положим $|R|=p^a$. Так как $p^a \equiv 1 \pmod{q}$, то $a \geq 3$. Так как $\gamma(G/R) = \gamma(Q)$, то $q \leq 5$, если $p=3$, и $q \leq 2p+1$, если $p > 3$.

Поэтому $R^\#$ распадается на $\frac{1}{q}(p^a-1) > \gamma(G)$ G -классов—противоречие. /ii/ $|R|=q^3$, $\beta > 1$.

Так как G не сверхразрешима, то $R \leq \Phi(G)$ по теореме Хуперта; поэтому $G=M[R]$. Так как $M \cap Q$ нормальна в G , то $R=Q$ ввиду единственности R . Итак, $G=P[R=P|Q]$. По лемме 18 множество $R^\#$ распадается не менее чем на два G -класса. Предположим, что G содержит элемент x порядка pq . Тогда $k_G(x) \geq 2(p-1)$, так что $k(G) - k(G/R) \geq 2p$, откуда следует, что $p > 3$. Предположим, что P содержит нормальную подгруппу T порядка p^3 и экспоненты p . Пусть $T_1—P$ -допустимая подгруппа порядка p^2 в T . Тогда T_1R содержит элемент y порядка pq . Из единственности R следует, что $x^q \in Z(P)$. Отметим, что $k_G(y) \geq 2(p-1)$. Если $T_2—$ отличная от T_1 подгруппа порядка p^2 в T , то T_2R содержит элемент z порядка pq . Так как $\langle z^q \rangle \sim \langle y^q \rangle$, то $\langle z^q \rangle \sim \langle y^q \rangle$ и $\langle z \rangle \approx \langle y \rangle$. Так как $k_G(z) \geq 2(p-1)$, то $k(G) - k(G/R) \geq 4(p-1) > \gamma(G)$ — противоречие с (1). Итак, P не содержит нормальную подгруппу порядка p^3 и экспоненты p . Поэтому P по теореме Блэкберна ([5], теорема 3.12.4) метациклическая. Так как $P/D'—$ элементарная (лемма 6), то P содержит циклическую подгруппу индекса p . Так как $\gamma(P) = \gamma(G/Q) \leq 2p+1$, то $|P| \leq p^3$. Если $x—$ элемент порядка pq в G , то применение (1) и леммы 18 показывает, что $k_G(x) = 2(p-1)$, $k_G(x^p) = 2$. Из леммы 18 и строения P видно, что $q = 2p+1$, и все подгруппы порядка q сопряжены относительно G . Поэтому, если $|R|=q^3$, то, $\frac{q^3-1}{q-1} = p^2$,

откуда получается, что q делит q^2-1 , что невозможно, так как $2 < p < q$. Итак, можем считать, что G не содержит элемент порядка pq . Тогда $G=(P, Q)$, P циклическая, $|P|=p$

(лемма 6). В этом случае $\text{Irr}(G)$ содержит $\frac{1}{p}(q^3-1)$ точных характеров. Но $\frac{1}{p}(q^3-1) \geq 2(q-1) \geq 2p+2 > \gamma(G)$ — противоречие с (1).

/iii/ $|R|=p^a$, p делит $|G/R|$, $a > 1$.

Если $N=N_G(Q)$, то $G=N[R]$ (лемма Фраттини). Множество $R^\#$ распадается как минимум на $p-1$ G -классов. Поэтому

QR не содержит элемента порядка pq по лемме 18 и (1), так что $QR = (Q, R)$, Q циклическая и $|Q| = q$ по лемме 20. Так как $O_p(N) = 1$, то p^2 не делит $|N|$ по лемме 6. Если x — элемент порядка p в N , то инвариантное множество xG' распадается как минимум на p G -классов. Отсюда следует, что $k(G) \geq$

$\geq \frac{q-1}{p} + (p-1)p + p = k(G/R) + (p-1)p > k(G/R) + \gamma(G)$ — противоречие с (1). //

Теорема 22. Пусть $p > 2$ — наименьший простой делитель порядка группы G . Тогда $G = P|Q$ сверхразрешима, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$, если выполнено одно из следующих условий:

(а) $p = 3$ и $\gamma(G) < 6$.

(б) $p > 3$ и $\gamma(G) < 2p + 2$.

В обоих случаях $\gamma(P) = p - 1$.

Доказательство. Мы далее везде считаем, что $p > 3$ (так как при $p = 3$ доказательство значительно проще). Доказательство того, что $\gamma(P) = p - 1$, предоставляем читателю.

Благодаря лемме 21 достаточно показать, что G — бипримарная, т. е. ее порядок делится не более чем на два различных простых числа. Предположим, что G — контрпример минимального порядка. По условию группа G разрешима. Пусть R — минимальный нормальный делитель в G . Тогда $|R|$ — степень простого числа.

(i) $|R| = p^\alpha$.

Пусть q — наименьший простой делитель $|G/R|$. Тогда $\gamma(G/R) < \gamma(G) \leq 2p + 1 \leq 2q + 1$, так что по индукции $|G/R| = q^\beta r^\gamma$, $R \in \text{Syl}_p(G)$, $p < q < r$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Предположим, что G содержит отличный от R минимальный нормальный делитель R_1 . Так как G/R_1 бипримарна, что $R_1 \in \text{Syl}(G)$. Из $p < q < r$ следует ввиду сверхразрешимости G/R_1 , что она нильпотентна. Тогда G/R_1 имеет фактор-группу $\bar{G}$ порядка pq или pr , которая циклическая. Так как $(p-1)(q-1) \leq \gamma(\bar{G}) \leq \gamma(G) \leq 2p + 1$, получается противоречие. Итак, R — единственный минимальный нормальный делитель в G . Множество $R^\#$ распадается как минимум на $p-1$ G -классов (лемма 18). Применение этой леммы к p -дополнению H -группы G показывает, что H не содержит элемента порядка pq ; поэтому H — группа Фробениуса. По этой же причине G не содержит элементов порядков pq и pr ; поэтому $G = (H, R)$. Так как дополнительный множитель группы Фробениуса не может быть группой Фробениуса, получается противоречие.

Итак, $O_p(G) = 1$.

(ii) Предположим, что G содержит отличный от R минимальный нормальный делитель R_1 . Пусть для определенности $R \in \text{Syl}_r(G)$, $R_1 \in \text{Syl}_q(G)$. По лемме 21 имеем $|R| = r$, $|R_1| = q$. Очевидно, $R \times R_1$ — цокль группы G . Так как $C_G(R \times R_1) = R \times R_1$, то $|P| \leq p^2$, где $P \in \text{Syl}_p(G)$. Очевидно, $q, r \equiv 1 \pmod{p}$, так что, если $q < r$, то $q \geq 2p + 1$, $r \geq 4p + 1$.

Если $|P|=p$, то $G=(P, R \times R_1)$ и в $\text{Irr}(G)$ имеется

$$\frac{(q-1)(r-1)}{p} \geq \frac{2p \cdot 4p}{p} = 8p$$

точных характеров — противоречие, так как $8p > \gamma(G)$.

Пусть $|P|=p^2$. Тогда P — нециклическая (лемма 6) и подгруппа порядка p выделяется в G/R_1 прямым множителем. Поэтому $\text{Irr}(G/R_1)$ содержит

$$\frac{(p-1)(r-1)}{p} \geq 4(p-1) > 2p+1$$

точных характеров — противоречие.

(iii) G содержит лишь один минимальный нормальный делитель R порядка r^t , $|G/R|=p^a q^b$, p, q, r — попарно различные простые числа. Так как $C_G(R)=R$, то $\gamma > 1$. Пусть $G=N[R]$, $N=P[Q]$, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$.

Предположим, что PR — не группа Фробениуса. Тогда она содержит элемент x порядка pr и $k_G(x) \geq 2(p-1)$ по лемме 18. Если $v \in R^*$, то $k_G(v) \geq 2$ по лемме 18. По (1) и лемме 18 в QR нет элемента порядка qr , так что $QR=(Q, R)$, Q — циклическая и $|Q|=q$ (лемма 20). Допустим, что $|P|>p$.

Как и при доказательстве леммы 21, группа P не содержит нормальную подгруппу порядка p^3 и экспоненты p , и поэтому, как и выше, она содержит циклическую подгруппу индекса p , $|P|<p^3$. Если x — элемент порядка pr , то из того, что $k_G(x)$ делится на 2 ($p-1$), и (1) следует, что $r-1=2p^s$, где s — натуральное число. Из $\gamma(G/R) \leq \gamma(G) \leq 2p+1$ следует, что $q=2p+1$. Поэтому из $q \neq r$ следует, что $s > 1$. Из $C_G(R)=R$ и строения G/R видно, что $\gamma > 2$. Тогда R^* распадается более

чем на $\frac{r^t-1}{p^3(2p+1)}$ G -классов, а из $\frac{r^t-1}{p^3(2p+1)} > \frac{8p^6}{p^3(2p+1)} > 2p+1 \geq \gamma(G)$ — получается противоречие.

Пусть теперь $|P|=p$. Тогда $|G|=pqr^t$, $|G'|=qr^t$. Из (1) и леммы 18 следует, что в этом случае G не содержит элемента порядка pr .

Итак, PR не содержит элемента порядка pr , $PR=(P, R)$, P — циклическая, $|P|=p$ (лемма 6). Так как $q \equiv 1 \pmod{p}$, то $q \geq 2p+1$. Предположим, что QR содержит элемент порядка qr (обозначим этот элемент через z). Тогда

$k_G(z) \geq \frac{(q-1)(r-1)}{p} \geq 2(r-1) > 2p+1 \geq \gamma(G)$ — противоречие.

Итак, $QR=(Q, R)$ и $|Q|=q$ (лемма 20). По доказанному $G=(PQ, R)$, $|PQ|=pq$. Из свойств групп Фробениуса следует, что PQ — циклическая, так что $\gamma(PQ)=(p-1)(q-1) > \gamma(G) \geq \gamma(G/R) = \gamma(PQ)$ — противоречие. //

Отметим без доказательства такой результат:

Теорема 23. Пусть p — простой делитель порядка группы G .

Следующие условия эквивалентны:

(а) G — p -группа с $\gamma(G) < p^2 + p - 2$.

(б) G — p -группа с $\gamma(G) \in \{p-1, p(p-1)\}$.

(в) $|G/\ker \chi| = p^2 \chi(1)^2$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\varepsilon \in \{1, 2\}$.

Пусть G — расширение элементарной абелевой группы порядка 27 посредством неабелевой группы порядка 39, $Z(G)=1$. Тогда G является SM_2 -группой и она не сверхразрешима. Итак, теорему 22 нельзя усилить для $p=3$. Неизвестно, можно ли ее усилить при $p>3$.

Практически ничего не известно о строении O -инвариантной силовской q -подгруппы ненильпотентной SM_{2p+1} -группы G , где $p>2$ — наименьший простой делитель $|G|$. Даже если $\gamma(G) = p-1$, Q не обязана быть абелевой. В самом деле, пусть $G = \langle x, a, b, c \rangle$, где $c = [a, b]$, $x^3 = a^7 = b^7 = c^7 = [a, c] = [b, c] = 1$, $[a, x] = ac$, $[b, x] = b$, $[c, x] = c^3$. Тогда G является SM_2 -группой порядка $3 \cdot 7^3$ с неабелевой силовской 7-подгруппой.

Отметим несколько нерешенных вопросов:

1. Найти наибольший простой делитель порядка SM_n -группы в случае, если она разрешима. Мы предполагаем, что он равен 13 при $n=2$.

2. Ограничены ли сверху экспонента, класс и производная длина p -группы G с $\gamma(G) = p-1$? Отметим, что существует SM_1 -группа порядка 2^7 и класса 3. Авторы не располагают примером 2-группы G с $\gamma(G)=1$, имеющей неабелев коммутант.

3. Какие значения может принимать функция γ на множестве p -групп? Существует ли p -группа G с $\gamma(G) \neq \varphi(p^a)$ для некоторого натурального a ?

4. Если n — такое наименьшее натуральное число, что любое антиядро группы S порождается n различными G -классами, то пишем $\gamma^*(G) = n$. Легко видеть, что если $\gamma^*(G) \leq 2$, то G разрешима. Будет ли G разрешимой, если $\gamma^*(G) = 3$? Отметим, что $\gamma^*(A_5) = 4$.

Завершая работу, приведем без доказательства две теоремы.

Для $x \in G$ пусть k_x — соответствующая классовая сумма, а

$$\tilde{k}_x = \frac{1}{|G:C_G(x)|} k_x \text{ — «взвешенная классовая сумма»}.$$

Теорема 24. Следующие условия равносильны:

(а) G — SM_1 -группа, являющаяся 2-группой.

(б) $k_x^4 = k_x^2$ для любого $x \in G$.

(в) $\tilde{\chi}^4 = \tilde{\chi}^2$ для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$; здесь $\tilde{\chi} = \frac{1}{\chi(1)} \chi$ — «взвешенный неприводимый характер».

Скажем, что элементы $x, y \in G$ принадлежат одному и тому же слою, если $\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle y \rangle\rangle$. Пусть $\{S_1, \dots, S_m\}$ — множество всех слоев группы G . Для $i \in \overline{1, m}$ положим $s_i = \sum_{x \in S_i} x$ и $\tilde{s}_i =$

$= \frac{1}{|S_I|} s_i$. Пусть I — ядро группы G (т. е. ядро неприводимого характера группы G). Положим $\sigma_I = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G), \ker \chi = I} \chi(1) \chi$ и $\tilde{\sigma}_I = \frac{1}{\sigma_I(1)} \sigma_I$ для каждого ядра I группы G .

Теорема 25. Следующие утверждения равносильны: (а) G является 2-группой.

(б) $\tilde{s}_i^4 = s_i^2$ ($i \in \overline{1, m}$).

(в) $\tilde{\sigma}_I^4 = \sigma_I^2$ для каждого ядра I группы G .

Список литературы: 1. Жмудь Э. М. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп // *Мат. сб.* 1958. 44 (56). С. 353—408. 2. Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups // *Acad. Press.* 1976. N 4. P. 10—16. 3. Жмудь Э. М. Конечные группы с однозначно порожденными нормальными делителями // *Мат. с.* 1967. 72 (114). С. 135—147. 4. Жмудь Э. М. О строении конечных групп с однозначно порожденными нормальными делителями // *Вопр. теории групп и гомологической алгебры.* 1977. Вып. 12. С. 54—72. 5. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, 1967. S. 20—25.

Поступила в редколлегию 03.09.87

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.518.83:519.654

В. Н. ЗЕФИРОВ, Н. Т. КУЦЕНКО, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИПОЛИНОМА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Пусть (точно или приближенно)

$$f(t) = \sum_{m=0}^M \left[p_0^m + p_1^m \frac{t-T}{h} + p_2^m \frac{(t-T)(t-T+h)}{2!h^2} + \dots + p_{k_m}^m \frac{(t-T)(t-T+h)\dots(t-T+(k_m-1)h)}{k_m!h^{k_m}} \right] e^{\lambda_m(t-T)}.$$

Назовем вектором измерений

$$x = \begin{pmatrix} f(T) + \varepsilon_0 \\ f(T-h) + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ f(T-Nh) + \varepsilon_N \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i (i=0, N)$ — ошибки измерений (независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2).

Требуется по вектору измерений x найти постоянные P_j^m (и, возможно, все или часть λ_m). Метод наименьших квадратов — нахождение проекции вектора x на подпространство

$$L = \mathcal{L} \{a_j^m\}_{m=0, j=0}^{m=M, j=k_m},$$

где

$$a_j^m = ((-1)^j C_n^j z_m^n)_{n=0}^N, \quad z_m = e^{-\lambda_m h}$$

(для биномиальных коэффициентов C_n^j принято $C_n^j = 0$ при $j > n$).

Операция нахождения проекции на L плохо обусловлена, так как среди векторов a_j^m много почти коллинеарных между собой (например, $a_0^0, a_0^1, \dots, a_0^M$). Поэтому базис из векторов a_j^m заменяется новым базисом из разделенных разностей и производных [1], вектор-функции $a(z) = (z^n)_{n=0}^N$.

Векторы b_j^m строятся по следующему правилу: $b_j^m = a(z_0; \dots; z_0; z_1; \dots; z_1; \dots; z_{m-1}; \dots; z_{m-1}; z_m; \dots; z_m)$, где z_i повторяется $k_i + 1$ раз ($i=0, m-1$), а $z_m - j + 1$ раз.

Векторы b_j^m выражаются через $a(z)$ и ее производные по формулам

$$b_s^r = \sum_{m=0}^r \frac{1}{k(r, s, m)!} \left(\frac{d}{dz_m} \right)^{k(r, s, m)} \frac{a(z_m)}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq 1}}^r (z_m - z_q)^{k(r, s, m)+1}};$$

$$k(r, s, m) = \begin{cases} k_m & m=0, r-1 \\ s & m=r \end{cases}.$$

При этом входящие в окончательное выражение (после фактического дифференцирования) функции $a(z_m)$, $a'(z_m)$, ... выражаются через базис a_j^m следующим образом:

$$a(z_m) = a_0^m, \quad a'(z_m) = -\frac{1}{z_m} a_1^m, \dots, \quad a^{(j)}(z_m) = \frac{(-1)^j j!}{z_m^j} a_j^m, \dots$$

откуда получим

$$b_s^r = \sum_{m=0}^r \sum_{j=0}^{k(r, s, m)} \varphi_{mj}^{rs} a_j^m.$$

На самом деле для вычисления векторов b_j^m используются простые рекуррентные формулы. Расположим векторы b_j^m в лексикографическом порядке: $b_0^0, b_1^0, \dots, b_{k_0}^0, b_0^1, \dots, b_{k_1}^1, \dots, b_0^m, \dots, b_{k_m}^m$ и обозначим полученную матрицу через B , а компоненты этих векторов — через b_n^μ ($n=0, N$; $\mu=1, M + \sum k_m$). Обозначим через ξ_μ эле-

менты цепочки $z_0, \dots, z_0, z_1, \dots, z_1, \dots, z_M, \dots, z_M$, где z_m повторяется $k_m + 1$ раз ($m = \overline{0, M}$).

Тогда компоненты b_n^μ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$b_{n+1}^\mu = \xi_n b_n^{\mu+1} + b_n^\mu \quad \left(\begin{matrix} \mu = 1, 2, \dots \\ n = \overline{0, N} \end{matrix} \right)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} b_n^1 &= z_0^n \quad (n = \overline{0, N}) \\ b_0^\mu &= 0 \quad (\mu = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Обозначив искомую проекцию вектора измерений x на подпространство L через x_L , получим в базисе b_j^m

$$x_L = \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^{k_m} Q_j^m b_j^m,$$

где Q_j^m доставляет минимум функционалу

$$\|x - \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^{k_m} Q_j^m b_j^m\|^2 = \|x - BQ\|^2.$$

Через Q здесь обозначен вектор из постоянных Q_j^m , взятых в лексико-графическом порядке.

Как известно [2], $Q = (B^*B)^{-1}B^*x$, где матрица B^*B хорошо обусловлена.

После определения величин Q_j^m требуемые постоянные P_j^m находятся из равенства

$$\begin{aligned} x_L &= \sum_{r=0}^M \sum_{s=0}^{k_r} Q_s^r b_s^r = \sum_{r=0}^M \sum_{s=0}^{k_r} Q_s^r \sum_{m=0}^r \sum_{j=0}^{k(r,s,m)} \varphi_{mj}^{rs} a_j^m = \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^{k_m} P_j^m a_j^m. \end{aligned}$$

Преимущества описанного метода особенно ощутимы в случае, когда все или некоторые постоянные λ_m неизвестны.

Тогда эти неизвестные находятся из условия минимума

$$\min_{\{\lambda_m\}} \|x - B(B^*B)^{-1}B^*x\|^2 = \min_{\{\lambda_m\}} [(x, x) - ((B^*B)^{-1}B^*x, B^*x)].$$

Данная модификация метода наименьших квадратов существенно улучшает обусловленность системы линейных уравнений и в то же время не приводит к увеличению числа операций, что позволяет успешно применять ее в системе реального времени.

Список литературы: 1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1987. С. 47—49.
2. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений. М., 1962. С. 51, 137.

Поступила в редколлегию 28.03.88

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ БЫСТРОДЕЙСТВИЙ В КОМПАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПОЛУГРУППАМИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим управляемые процессы c_0 -непрерывными полугруппами $S(t)$, не являющимися равномерно непрерывными ни при каких t , с обобщенными решениями, заданными в форме Коши:

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где x_0 — начальное состояние процесса; $u(\tau)$ — управление; B — линейный, не обязательно ограниченный оператор.

Рассмотрим задачу на быстродействие из начального множества P на подвижное целевое множество M_t , с ограничениями на управление вида $u(\tau) \in \Omega_\tau$ $n \cdot b$ ($\Omega_\tau \subset U$ — семейство выпуклых, слабокомпактных множеств) и фазовыми ограничениями на траекторию: $x(t) \in C_t$ (C_t — слабозамкнутые множества).

Теорема 1. *Предположим, что P — компактное множество, M_t — семейство замкнутых множеств, непрерывных сверху по включению справа по t , семейство Ω_τ либо слабо измеримо в сепарабельном пространстве, либо слабо непрерывно в несепарабельном пространстве, $\|\Omega_\tau\| \leq c$ п. в. [3] и выполнено одно из следующих условий: а) Ω_τ — компактны почти всюду, $S(t) - c_0$ — непрерывны; б) $S(\tau)B$ — вполне непрерывны.*

Тогда из существования допустимого управления следует существование оптимального управления.

Замечание 1.1. Сформулированное утверждение остается в силе и для нестационарных процессов:

$$x(t, t_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

если в условиях (а, б) рассматривается оператор $\Phi(t, \tau)B(\tau)$.

Управляемые процессы вида (1) описывают, в частности, некоторые модели математической физики [1, 2], а также модели управляемых процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с распределенными на $[-h, 0]$ запаздыванием [4] вида

$$\dot{x}(t) = \int_{t-h}^t d\mu(t, \tau - t)x(\tau) + \int_{t-h}^t d\nu(t, \tau - t)u(t, \tau), \quad (2)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $\mu(t, s)$; $\nu(t, s)$ — матричные функции ограниченной вариации по $s \in [-h, 0]$, с начальными условиями $x(\tau) = \varphi(\tau)$,

$-h \leq \tau \leq 0$, $\varphi(\cdot) \in C([-h, 0], R^n)$.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 ограничения на управление $\Omega_\tau \subset C([-h, 0], R^m)$ слабо измеримы по t , выпуклые слабокомпактные множества, P — слабо компактно в $C([-h, 0], R^m)$, M_t — непрерывны в метрике Хаусдорфа и замкнуты при $t \geq h$, выпуклы и замкнуты при $0 \leq t \leq h$.

Фазовые ограничения на траекторию заданы в виде

$$\int_{t-h}^t f_x(t, x(\tau)) dv_x(\tau - t) \leq c_x,$$

$f_x(t, x)$ — непрерывны по (t, x) , выпуклы по x , принимающие только конечные значения.

Тогда из существования допустимого управления следует существование оптимального управления.

Замечание 2.1. Управляемые процессы вида (2) в случае

$u(s) = \sum_{i=1}^k A_i e(s + \theta_i)$, где $e(s)$ — „стандартная единичная ступенька“ в пространстве $C^*[-h, 0]$ ($\int_{-h}^0 x(s) de(s) = x_0$), описываются уравнением с запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k A_i x(t - \theta_i) + \sum_{j=1}^l B_j u(t, -\tau_{ij}). \quad (3)$$

В случае задания управляющей части (2) в форме

$$Bu(\tau) = \int_{t-h}^t dv(\tau - t) u(\tau), \quad v(s) = \sum_{j=1}^l B_j e(s + \tau_{ij})$$

система (3) приводится к виду

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k A_i x(t - \theta_i) + \sum_{j=1}^l B_j u(t - \tau_{ij})$$

управляемой системы с запаздыванием по управлению.

Список литературы: 1. Triggiani R. On the lack controllability for mild solutionst in Banach space//J. Math. Anal. Appl. 1975. 50, N 2. P. 438—446. 2. Ruth T. Curtain, A. I. Pritchard. An abstract theory for unbounded control actions for distributed parameter systems//SIAM J. Cont. Opt. 1977. 15, N 4. P. 556—611. 3. Приходько А. П. О существовании оптимальных быстрых действий в банаховом пространстве//Вестн. Харьк. ун-та. 1981. № 221: Прикл. мат. и мех. 46. С. 18—21. 4. Hale J. Theory of functional differential equations. N. Y., 1977. 401 p.

Поступила в редколлегию 22.06.88

С. Э. МАГАРАМ

ОБ АЛГОРИТМЕ РАСЧЕТА ДВУМЕРНОГО
ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ДИОДЕ

Как показано в работе [1], проведение двумерного электронного потока в замагниченном диоде можно описать с помощью самосогласованной системы уравнений, включающей в себя кинетическое уравнение для частиц пучка и уравнение Пуассона для потенциала. Далее в работе [1] получена система уравнений, описывающих динамику сильноточного пучка электронов вида

$$\frac{dp}{d\tau} eU/d + 4\pi e^2 \int dg'_0 f_0(g'_0) \int_0^\infty \lambda d\lambda \frac{J_0(\lambda r_0) J_0(\lambda r'_0)}{\text{sh}(\lambda d)} \times$$

$$\times \begin{cases} \text{ch}(\lambda z) \text{sh}(\lambda z' - \lambda d), & z(g_0, \tau) < z(g'_0, \tau) \\ \text{sh}(\lambda z') \text{ch}(\lambda z - \lambda d), & z(g_0, \tau) > z(g'_0, \tau) \end{cases} \quad (1)$$

$$g_0 = (r_0, p_0, t_0); \quad g'_0 = (r'_0, p'_0, t'_0)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{cp}{(m^2 c^2 + p^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

e — заряд электрона, m — его масса, c — скорость света, U — приложенное к диоду напряжение, d — размер зазора анод-катод, J_0 — функции Бесселя нулевого порядка, r_0 — начальный радиус частиц, p и z — импульс и координата частиц.

Решение системы (1)–(2) описывает поведение объемного заряда в диоде с бесконечно большим продольным магнитным полем.

Зависимость от радиуса позволяет учитывать распределение эмиссионной способности катода, а также учитывать радиальную неоднородность электрического поля, что особенно важно для исследования ускорения ионов в поле объемного заряда, релятивистского электронного пучка. Предложенный в [1] алгоритм, на наш взгляд, является более экономным, а следовательно, более предпочтительным по сравнению с алгоритмами, использующими фиксированные сетки для вычисления полей (например, [2]). В рассматриваемом алгоритме поле вычисляется только в тех точках, где находятся частицы в данный момент времени, это значительно сокращает время вычислений и потребности в оперативной памяти.

Настоящая работа посвящена численному анализу предложенного в [1] алгоритма расчета динамики электронного потока на основе численного решения системы (1)–(2). В данной системе в каждый момент времени начальными условиями являются зна-

чения координат и импульсов частиц, полученные на предыдущем шаге — z_0, p_0 . Интегрируя систему с помощью самостартующего, явного метода (это может быть либо метод Рунге—Кутты, либо метод Эйлера), получаем значения z и p (r_0 — для каждой частицы не меняется в процессе вычислений).

Самостартующий явный метод необходим для исследования отражений электронов от анода для изучения взаимодействия электронного пучка с нейтральными газами или плазмой, т. е. для тех случаев, когда параметры траекторий частиц могут меняться случайным образом.

Для решения системы (1)–(2) необходимо вычислить правую часть уравнения (1). Для простоты рассмотрим случай $f_0(g_{0i}) = \delta(p - p_{0i})$, тогда получим

$$\frac{dp}{d\tau} = eU/d + 4\pi e^2 \sum_{i=1}^N I_{0i}, \quad (3)$$

где

$$I_{0i} = \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \frac{J_0(\lambda r_0) J_0(\lambda r_{0i})}{\text{sh}(\lambda d)} \times \begin{cases} \text{ch}(\lambda z) \text{sh}(\lambda z_i - \lambda d) & z_i > z; \\ \text{sh}(\lambda z_i) \text{sh}(\lambda z - \lambda d) & z_i < z. \end{cases} \quad (4)$$

Вычисление I_{0i} является узловым моментом решения рассматриваемой системы. Оценим точность вычисления, с которой необходимо вычислить I_{0i} . Пусть $I_{0i} = I'_{0i} + \delta_i$, δ_i — ошибка вычисления I_{0i} , I_{0i} — вычисленное значение интеграла. Тогда выражение (3) можно записать в виде

$$\frac{dp}{d\tau} \approx eU/d + 4\pi e^2 \sum_{i=1}^N (I'_{0i} + \delta_i). \quad (5)$$

Ошибку вычисления правой части в уравнении (3) — δ можно оценить сверху, $\delta = \sum_i \delta_i \leq N \max |\delta_i|$, таким образом, задавая погрешность вычисления правой части (3), зная число частиц, можно получить верхнюю оценку погрешности:

$$\delta_i \leq \delta/N \quad (\text{для } N = 100, \delta / \sum_{i=1}^N I_{0i} < 0.01), \text{ тогда } \max |\delta_i| / \min |I_i| \leq 0.0001.$$

Для вычисления I_{0i} воспользуемся квадратурной формулой для интегралов вида $I = \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} dx$, следуя [3], интеграл (4) можно записать в виде

$$I_{0i} = \sum_{k=1}^M A_k f(x_k) + R_M(f), \quad (6)$$

где A_k — весовой множитель; x_k — узлы, в которых необходимо вычислить подынтегральную функцию;

$$R_M(f) = \frac{\Gamma(M+1)\Gamma(M+\alpha+1)}{(2M)!} f^{(2M)}(y), \quad y \in [0, \infty) \quad (7)$$

— остаточный член численного представления интеграла; $f(x)$ — подинтегральная функция. В методе выбор вида подинтегральной функции $f(x)$ оказывает существенное влияние на эффективность вычислений [3]. Было рассмотрено два вида $f(x)$:

$$f_1(\lambda) = \frac{2\lambda J_0(\lambda r_0) J_0(\lambda r_{oi})}{1 - e^{-2d\lambda}} \times \begin{cases} \text{ch}(\lambda z) \text{sh}(\lambda z_i - \lambda d), & z < z_i \\ \text{sh}(\lambda z_i) \text{ch}(\lambda z - \lambda d), & z > z_i \end{cases} \quad (8)$$

$$\alpha = 0 \quad f_2(\lambda) = \frac{2J_0(\lambda r_0) J_0(\lambda r_{oi})}{1 - e^{-2d\lambda}} \times \begin{cases} \text{ch}(\lambda z) \text{sh}(\lambda z_i - \lambda d), & z < z_i \\ \text{sh}(\lambda z_i) \text{ch}(\lambda z - \lambda d), & z > z_i \end{cases} \quad (9)$$

для $\alpha = 1$ (A_k и x_k взяты из [3]).

Как видно из анализа выражений (7), (8) и (9), непосредственно вычислить погрешность достаточно сложно. Поэтому точность оценивалась при сравнении результатов вычислений интеграла по M и $M+1$ узлам.

Из вида подинтегральной функции можно сделать вывод о достаточно быстром ее возрастании при $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому оказывается существенным выбор интервала изменений z и значений d . Рассматривались два случая: 1) $0 < z < 0,5$, $d = 0,5$; 2) $0 < z < 1$, $d = 1$.

Как показали результаты расчетов, для численного решения системы (1) — (2) необходимо использовать подинтегральную функцию $f(x) = f_2(x)$, интервал изменения координаты z должен меняться в пределах $0 < z < 1$, $d = 1$, а для достижения приемлемой точности число узлов должно удовлетворять условию $M \geq 7$.

Список литературы: 1. Курилко В. И., Кучеров В. И. К теории импульсного диода: Мат. междунар. конф. по коллектив. методам ускорения. Дубна, 1972. С. 149—151. 2. Головин Г. Т. Численное исследование стационарного движения РЭП в цилиндрическом вакуумном диоде с использованием метода макрочастот // Разност. методы мат. физики. М., 1979. С. 84—106. 3. Крылов В. И., Шульгина А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1969. 205 с.

Поступила в редакцию 12.02.88

УДК 517.948

Л. В. СТОЛБОВСКАЯ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕВНЕРА

В работе изучается поведение спектра при конечномерных возмущениях. В отличие от классических результатов Г. Вейля [1] о возмущении абсолютно непрерывного спектра операторов, действующих в бесконечных гильбертовых пространствах, исследуется поведение собственных значений конечномерных операторов в случае возмущения конечного ранга.

1. Напомним известные результаты Левнера [2]. Точная их формулировка состоит в следующем. Пусть дан положительный

оператор A , действующий в n -мерном пространстве H ($n < \infty$). Предположим, что спектр этого оператора прост, т. е. если $\sigma(A) = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$, то $\alpha_k \neq \alpha_s$ ($k \neq s$), и, кроме того, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Найдем собственные значения оператора: $B = A + c < \cdot, \varphi > \varphi$ (1), где $c \in C/\{0\}$, $\varphi \in H$. Нетрудно показать, что точками спектра оператора B будут нули функции $m(\lambda)$, где $m(\lambda) = \frac{1}{c} + \langle (A - \lambda I)^{-1} \varphi, \varphi \rangle$. Функция $m(\lambda)$ является неванлинновской [1], т. е.

$$Jmm(\lambda) \begin{cases} > 0, & \text{если } Jm\lambda > 0; \\ = 0, & \text{если } Jm\lambda = 0; \\ < 0, & \text{если } Jm\lambda < 0 \end{cases}$$

и, значит, ее можно представить в виде $\frac{1}{c} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\alpha_k - \lambda}$ ($\sigma_k > 0$).

Из неванлинновости функции $m(\lambda)$ следует, что собственные значения $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ оператора B вещественны и перемежаются с собственными значениями оператора A , т. е. $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n$ (при $c > 0$) или $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \alpha_n$ (при $c < 0$).

Особый интерес представляет обратная теорема, которая была доказана Левнером.

Теорема 1 Левнера. Пусть заданы $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, которые перемежаются с собственными значениями оператора A с простым спектром. Тогда существует оператор B вида (1) такой, что числа $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ являются его собственными значениями.

II. Теорема Левнера справедлива для случая, когда A возмущается одномерным оператором $c < \cdot, \varphi > \varphi$. Изучим, как меняется спектр этого оператора при двумерных возмущениях. Пусть оператор B имеет следующий вид: $B = A + c_1 < \cdot, \varphi_1 > \varphi_1 + c_2 < \cdot, \varphi_2 > \varphi_2$ (2), где $c_k \in C/\{0\}$, $\varphi_k \in H$ ($k = 1; 2$). Будем предполагать, что вектора φ_1, φ_2 неколлинеарны.

При нахождении собственных значений оператора B приходим к неванлинновской [1] матрице-функции:

$$m(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} + \langle (A - \lambda I)^{-1} \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle (A - \lambda I)^{-1} \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \langle (A - \lambda I)^{-1} \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \frac{1}{c_2} + \langle (A - \lambda I)^{-1} \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix},$$

нулями определителя которой и являются точки спектра оператора B .

В отличие от одномерных возмущений собственные значения оператора B в общем случае не будут перемежаться с собствен-

ными значениями оператора A , но можно указать необходимое и достаточное условие перемежаемости. Таким условием будет справедливость одной из следующих систем неравенств:

$$m_1 |\gamma_1|^2 + m_2 |\xi_1|^2 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1i}}{\alpha_i - \alpha_1} < 0,$$

$$\dots$$

$$m_1 |\gamma_k|^2 + m_2 |\xi_k|^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{a_{ki}}{\alpha_i - \alpha_k} < 0,$$

$$\dots$$

$$m_1 |\gamma_n|^2 + m_2 |\xi_n|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}}{\alpha_i - \alpha_n} < 0$$

или

[illegible]

где $a_{kl} = |\eta_k \xi_l - \xi_k \eta_l|^2$, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ — координаты векторов φ_1, φ_2 , соответственно в базисе собственных векторов оператора A .

Аналог теоремы 1 состоит в следующем.

Теорема 2. Предположим, что заданы числа $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, которые перемежаются с собственными значениями положительного оператора A с простым спектром. Зададим $b_k^{(s)}$ ($k = \overline{1, n}$) следующим рекуррентным соотношением:

$$b_k^{(1)} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} \left| \frac{\eta_{k1}}{\xi_k} \right|^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{\left| \frac{\eta_{k1}}{\xi_k} - \frac{\eta_{i1}}{\xi_i} \right|^2}{\alpha_i - \alpha_k},$$

$$b_k^{(s)} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} \left| \frac{\gamma_{ik}}{\xi_k} \right|^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{\Delta_i}{b_i^{(s-1)} \alpha_i - \alpha_k} \frac{\left| \frac{\gamma_{ik}}{\xi_k} - \frac{\gamma_{il}}{\xi_i} \right|^2}{\xi_i},$$

Будет справедлива и обратная теорема.

Теорема 4. Предположим, что заданы числа $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, которые перемежаются с собственными значениями $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ оператора A , причем кратность собственного значения α_1 равняется 2, а все остальные собственные значения простые. Тогда существует оператор $B(2)$ ($c_1 > 0, c_2 < 0$) такой, что числа $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ являются его собственными значениями.

Список литературы: 1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. С. 20—29. 2. Löwner K. Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Räume//Ann. of Math. 1939. (2) 40. P. 816—833.

Поступила в редколлегию 12.05.88

УДК 517.948

А. Б. АРКАДЬЕВА

О ТРЕУГОЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕКОММУТИРУЮЩИХ СИСТЕМ ОПЕРАТОРОВ

Для несамосопряженных систем линейных операторов модельные представления в общем виде получить не удастся. Однако для некоторых классов систем линейных операторов (дважды перестановочных операторов, т. е. для таких, что $C = A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0$ и $D = A_1^* A_2 - A_2^* A_1 = 0$ и др.) такие модели построены [1, 2]. В работе построена модель для более общего класса операторов $K_{1,1}^{2,1}$.

1. Будем говорить, что система линейных ограниченных операторов A_1, A_2 , определенных в гильбертовом пространстве H , принадлежит классу $K_{1,1}^{2,1}$, если

1) $\dim CH = 2, CH = \{h, g\}$ — порождено векторами h и g и $h \perp g, C^*H = \{\varphi, \psi\}$ и выполнено $C\varphi = \lambda_h h, C\psi = \lambda_g g, C^*h = \lambda_\varphi \varphi, C^*\psi = \lambda_\psi \psi$, где $\lambda_h, \lambda_g, \lambda_\varphi, \lambda_\psi \in \mathbb{C}$;

2) $C^2 = 0$;

3) $\dim DH = 1, DH = \{p\}$ — порождено вектором p и $D^*H = \{k\}$;

4) $D^2 = 0$;

5) Пространство $(h \vee DH)$ инвариантно относительно оператора $(A_1)_I$, где $(A_k)_I = \frac{A_k - A_k^*}{2i} (k = 1, 2)$;

6) Пространство $(g \vee D^*H)$ инвариантно относительно оператора $(A_2)_I$;

7) $D^*\psi = 0, D^*g = 0, D\varphi = 0, Dh = 0$.

(Как обычно [3], символом $N \setminus M$ принято обозначать замкнутую линейную оболочку гильбертовых подпространств N и M).

Приведем важный пример системы операторов A_1, A_2 из класса $K_{1,1}^{2,1}$. Определим $L^2(\Omega)$ — пространство измеримых функций $f(x)$ на Ω таких, что $L^2(\Omega) = \{f(x): x = (x_1, x_2) \in \Omega: \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}$ $dx = dx_1 dx_2$ (1).

Где область Ω можно представить следующим образом.

Пусть $a_k > b_k > c_k > d_k > 0$ ($k = 1, 2$), тогда

$$\Omega = ([0, d_1] \times [0, b_2]) \cup ([d_1, c_1] \times [0, a_2]) \cup ([c_1, b_1] \times [0, c_2]) \cup ([b_1, a_1] \times [d_2, c_2]).$$

Зададим в $L^2(\Omega)$ два оператора:

$$(\dot{A}_1 f)(x) = a_1(x_1) f(x) + i \int_0^{x_1} f(t, x_2) dt; \quad (2)$$

$$(\dot{A}_2 f)(x) = a_2(x_2) f(x) + i \int_0^{x_2} f(x_1, t) dt,$$

где $a_h(x_h)$ — вещественная, неубывающая, ограниченная функция. Непосредственно проверяется, что система $\{\dot{A}_k\}_{k=1}^2$ (2) принадлежит классу $K_{1,1}^{2,1}$.

Теорема 1. Пусть система операторов A_1 и A_2 , каждый из которых вполне несамосопряжен [4], принадлежит классу $K_{1,1}^{2,1}$ и обладает свойствами: 1) спектр операторов A_1 и A_2 вещественен; 2) $\dim H_0 = 1$, где $H_0 = (\bar{A}_1)_I H \cap (\bar{A}_2)_I H$; 3) $(A_1)_I h = ah$, $(A_1)_I g = a'g$, $(A_2)_I \varphi = \gamma \varphi$, $(A_1)_I \psi = \gamma \psi$ и $a, a', \gamma, \gamma' \neq 0$; 4) спектр сужения $(A_1)_I((A_2)_I)$ на подпространство $(h \vee DH)((g \vee D^*H))$ прост.

Тогда существует область Ω , пространство $L^2(\Omega)$ (1) и операторы $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ (2), действующие в нем, а также изометрический оператор U , отображающий исходное гильбертово пространство H в $L^2(\Omega)$ такие, что $UA_k = \dot{A}_k U$ ($k = 1, 2$). Эта теорема показывает, что существует связь между алгебраическими свойствами исходной системы операторов A_1, A_2 из класса $K_{1,1}^{2,1}$ и конфигурацией области Ω модельного пространства $L^2(\Omega)$ (1).

2. В основе доказательства этой теоремы лежит следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть система операторов A_1 и A_2 находится в рамках предположений теоремы 1 (исключая п. 1). Тогда пространство H можно представить в виде ортогональной суммы подпространств $H = H_1 \oplus H_2$, причем пространство H_1 приводит A_1 и инвариантно относительно A_2 .

Кроме того, сужение $A_1, A_2|_{H_1}$ есть система операторов класса $K_{0,0}^{0,0}$, т. е. A_1 и A_2 дважды перестановочны, а $A_1, A_2|_{H_2}$ — система из класса $K_{1,1}^{1,1}$ и $\dim CH = \dim DH = 1$, $C^2 = D^2 = 0$.

В свою очередь доказательство теоремы 2 основано на доказательстве следующих лемм:

Введем пространства: $L_1 = \bigvee_{n \geq 0} A_2^n h$, $L_2 = \bigvee_{m \geq 0} A_1^m \varphi$. Пусть система операторов A_1 и A_2 находится в условиях предположений теоремы 2. Тогда выполняются следующие утверждения:

Лемма 1. Пространство $L_1(L_2)$ инвариантно относительно $(A_1)_I((A_2)_I)$, причем $(A_1)_I((A_2)_I)$ на $L_1(L_2)$ скалярен, т. е. $(A_1)_I l_1 = \alpha l_1$, $(A_2)_I l_2 = \gamma l_2$, $\forall l_1 \in L_1$, $\forall l_2 \in L_2$.

Лемма 2. Пусть $\hat{L}_2 = L_2 \oplus \{\lambda \varphi + \mu P_{L_2} p + \xi P_{L_2} \psi\}$. Тогда $\hat{L}_2 \subset \subset \text{Ker}(A_1)_I$, т. е. $(A_1)_I \hat{l}_2 = 0$, $\forall \hat{l}_2 \in \hat{L}_2$.

Лемма 3. Для пространств L_1 и L_2 выполнено: $L_1 \perp L_2$.

Из теоремы 2 следует, что, используя результаты работ [1, 2], нетрудно получить утверждение теоремы 1.

Список литературы: 1. Золотарев В. А. Многомерные треугольные модели систем линейных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Х., 1977. 142 с. 2. Золотарев В. А. Треугольные модели систем непрерывных операторов // Теория функций, функций, анализ и их прил. 1979. Вып. 31. С. 56—58. 3. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. С. 50—80. 4. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Х., 1971. С. 10—33.

Поступила в редколлегию 12.05.88

УДК 517

С. В. ЕРЕМЕНКО

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ

В работе дан вывод квадратурных формул для интеграла вида $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{(t_0 - t)^2} (1 - t^2)^{1/2} dt$, понимаемого в смысле конечной части по Адамару. Полученные квадратурные формулы с узлами в нулях полинома Чебышева второго рода степени $n-1$ имеют алгебраическую степень точности $n-2$.

1. Рассмотрим операторы

$$D^{(1)}(\gamma|t_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'(t)}{t_0 - t} (1 - t^2)^{1/2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t \gamma(t)}{t_0 - t} \frac{dt}{(1 - t^2)^{1/2}}; \quad (1.1)$$

$$D^{(2)}(\gamma|t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \gamma'(t_0)(t - t_0)}{(t_0 - t)^2} \times$$

$$\times (1 - t^2)^{1/2} dt - t_0 \gamma'(t_0) - \gamma(t_0); \quad (1.2)$$

$$D^{(3)}(\gamma|t_0) = -\frac{d}{dt_0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{t - t_0} (1 - t^2)^{1/2} dt, \quad (1.3)$$

определенные для функций $\gamma(t) \in C^{1,\alpha}[-1, 1]$ (первая производная удовлетворяет условию Гельдера с показателем α). Легко видеть, что $D^{(1)} = D^{(2)} = D^{(3)} = D$, где

$$D(\gamma|t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{(t_0 - t)^2} (1 - t^2)^{1/2} dt.$$

Последний интеграл надо понимать в смысле конечной части по Адамару. В приложениях оператор D встречается, например, при решении задачи Неймана для уравнений Лапласа или Гельмгольца. Для численного решения такой задачи необходимо уметь заменять интегралы вида (1.1—1.3) квадратурными формулами. Из (1.3) видно, как оператор D связан с сингулярным интегральным оператором с ядром Коши, который хорошо изучен. Все используемые в работе результаты для такого оператора содержатся в монографии [1]. В работе [2] приводится формула эквивалентная (2.3), но менее удобная для вычислений.

2. Квадратурную формулу получим, подставив в (1.3) вместо γ интерполяционный полином по узлам $t_{0j} = \cos \frac{j\pi}{n}$, $j = 1, \dots, n-1$ — нулям полинома Чебышева второго рода $U_{n-1}(t)$:

$$\gamma_{n-2}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(t_{0j}) \frac{U_{n-1}(t)}{(t - t_{0j}) U'_{n-1}(t_{0j})}. \quad (2.1)$$

Для наших целей удобно переписать (2.1) в следующем виде:

$$\gamma_{n-2}(t) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(t_{0j}) (1 - t_{0j}^2) \sum_{r=1}^{n-1} U_{r-1}(t_{0j}) U_{r-1}(t).$$

Используя вытекающее из (1.3) соотношение $D(U_{k-1}|t_0) = -kU_{k-1}(t_0)$, получим

$$D(\gamma_{n-2}|t_0) = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(t_{0j}) (1 - t_{0j}^2) \sum_{r=1}^{n-1} r U_{r-1}(t_{0j}) U_{r-1}(t_0).$$

После преобразования это выражение примет вид

$$\begin{aligned} D(\gamma_{n-2}|t_0) = & -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(t_{0j}) (1 - t_{0j}^2) \times \\ & \times \left[\frac{(-1)^j U_{n-1}(t_0)}{t_{0j} - t_0} + \frac{(-1)^j T_n(t_0) - 1}{(t_{0j} - t_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

при $t_0 \neq t_{0j}$, $j=1, \dots, n-1$.

Для $t_0 = t_{0k}$, $k=1, \dots, n-1$ эта формула существенно упрощается:

$$D(\gamma_{n-2}|t_{0k}) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} \gamma(t_{0j}) (1 - t_{0j}^2) \frac{(-1)^{k+j} - 1}{(t_{0k} - t_{0j})^2} - \frac{n}{2} \gamma(t_{0k}). \quad (2.3)$$

Полезно также записать формулу (2.2) в нулях полинома Чебышева первого рода: $T_n(t): \tau_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k=1, \dots, n$

$$D(\gamma_{n-2}|\tau_k) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(t_{0j}) (1 - t_{0j}^2) \left[\frac{1}{n(t_{0j} - \tau_k)^2} + \frac{(-1)^{k+j}}{(1 - \tau_k^2)^{1/2}(t_{0j} - \tau_k)} \right]. \quad (2.4)$$

Легко заметить, что квадратурная формула (2.2) и ее частные случаи (2.3), (2.4) имеют алгебраическую степень точности $n-2$.

3. Квадратурные формулы (2.3), (2.4) использовались для численного решения уравнения $D\gamma = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ (3.1) при различных α_1 и α_2 , где

$$f_1(t_0) = \sin t_0 \operatorname{ch}(1 - t_0^2)^{1/2} + \frac{t_0}{(1 - t_0^2)^{1/2}} \cos t_0 \operatorname{sh}(1 - t_0^2)^{1/2};$$

$$f_2(t_0) = -\operatorname{ch} t_0 \cos(1 - t_0^2)^{1/2} - \frac{t_0}{(1 - t_0^2)^{1/2}} \operatorname{sh} t_0 \sin(1 - t_0^2)^{1/2}.$$

Используя метод функции Келдыша—Седова, описанный в работе [3], получим точное решение уравнения (3.1):

$$\gamma(t) = \alpha_1 \frac{\sin t \operatorname{sh}(1 - t^2)^{1/2}}{(1 - t^2)^{1/2}} + \alpha_2 \frac{\operatorname{ch} t \sin(1 - t^2)^{1/2}}{(1 - t^2)^{1/2}}.$$

Приближенные решения сравнивались со значениями точного в узлах квадратурных формул. Используя квадратурную формулу (2.3) при $n=9$, получаем решение, содержащее 8, а при $n=12$ —12 точных значащих цифр. Используя же квадратурную формулу (2.4) при тех же n , получаем соответственно 5 и 6 точных значащих цифр.

Список литературы: 1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М., 1985. С. 10—35. 2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. К., 1984. С. 9—26. 3. Пыхтеев Г. Н. Методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск, 1980. 99 с.

Поступила в редколлегию 24.06.88

С. В. ЯКОВЛЕВ, О. В. ПАРШИН

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
НА ВЕРШИНАХ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО
МНОГОГРАННИКА

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество n действительных чисел. Положим $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Множество A порождает множество P_n , элементами которого являются всевозможные перестановки элементов из A .

Осуществим взаимоднозначное отображение множества перестановок P_n на множество $E_n \subset R^n$, поставив элементу $\pi = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ по правилу $x_i = a_{j_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Свойства множества E_n при указанном отображении исследовались, в частности, в работах [1, 2]. Известно, что выпуклой оболочкой множества E_n является так называемый перестановочный многогранник (обозначим его Π_n), описываемый системой

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{r_i} \geq \sum_{i=1}^n a_i, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad r_i = \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\forall i \neq j, \quad r_i \neq r_j$$

Лемма 1. Для любой точки $x \in E_n$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha = C_\alpha, \quad \text{где } C_\alpha = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Теорема 1. Точки множества E_n и только они удовлетворяют системе (1) и уравнению

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = C_2.$$

Экстремальные свойства некоторых классов функций на множествах E_n и Π_n рассматривались в [3—5]. В частности, воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. Минимум линейной формы

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

на множествах E_n и Π_n достигается в точке $x^* = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$, где последовательность $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ такова, что $b_{j_1} \geq b_{j_2} \geq \dots \geq b_{j_n}$.

Использование леммы 2 позволяет повысить эффективность ряда методов оптимизации выпуклых функций на перестановочном многограннике. Проиллюстрируем сказанное на примере метода условного градиента (Франка—Вулфа) [6]. Пусть $\varphi(x)$ вы-

пуклая на Π_n функция. Метод условного градиента предполагает для определения направления поиска решать задачу линейного программирования на каждой итерации, состоящую в оптимизации функции $f(x) = (\nabla \varphi(x^k), x)$ на множестве Π_n (k — номер итерации). Однако в силу леммы 2 решение задачи линейного программирования сводится к упорядочению элементов множества A в соответствии со значением компонент градиента функции $\varphi(x)$ в точке x^k .

Заметим, что согласно [7] для любой функции $\psi(x)$, определенной на вершинах Π_n , существует выпуклая на Π_n функция $\varphi(x)$, такая, что $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in E_n$. Этот факт позволяет предложить следующий подход к поиску начального приближения решения задачи оптимизации функции $\psi(x)$ на E_n . Сначала строится выпуклая на Π_n функция $\varphi(x)$, совпадающая с $\psi(x)$ в вершинах Π_n . Затем $\varphi(x)$ оптимизируется на Π_n . (Для этого можно использовать, в частности, метод условного градиента с учетом описанной выше специфики его применения на перестановочном многограннике).

Обозначим полученное решение через $x^{(0)}$. Теперь для получения приближенного решения на множестве E_n можно выбрать вершину Π_n , ближайшую к точке $x^{(0)}$. Имеем следующую задачу: $\|x - x^{(0)}\| \rightarrow \min_{x \in E_n} (3)$.

С учетом леммы 1 нетрудно видеть, что задача (3) сводится к оптимизации линейной функции

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n x_i^{(0)} x_i$$

на Π_n , которая, в свою очередь, решается простым упорядочением.

Однако такой подход дает хорошие приближения лишь в том случае, когда точка $x^{(0)}$ близка к границе многогранника Π_n . Более эффективным является приближенный подход, основанный на следующей схеме.

Пусть дана некоторая точка D , принадлежащая n -плоскости

$$\sum_{i=1}^n x_i = C_1. \quad (4)$$

Рассмотрим луч с началом в центре многогранника и проходящий через точку D . Грань Q многогранника Π_n назовем ближайшей к точке D в направлении $\overrightarrow{OD}$, если гиперплоскость, образующая грань Q , пересекается с указанным лучом, и расстояние от точки O до точки пересечения минимально.

Теорема 2. Пусть точка $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ принадлежит гиперплоскости (4). Тогда уравнение гиперплоскости, определяющей ближайшую в направлении $\overrightarrow{OD}$ грань многогранника, имеет вид

$$\sum_{i=1}^k x_{l_i} = \sum_{i=1}^k a_i,$$

где последовательность $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ такова, что $d_{l_1} \leq d_{l_2} \leq \dots \leq d_{l_n}$, а значение k определяется из соотношения $\rho_k = \min_{1 \leq t < n} \rho_t$, где

$$\rho_i = \frac{n \sum_{j=1}^i a_j - i C_1}{n \sum_{j=1}^i a_{l_j} - i C_1}.$$

Применим данную теорему при реализации следующего приближенного метода оптимизации на E_n . Пусть, как и раньше, $x^{(0)}$ — начальное приближение. Найдем гиперплоскость, определяющую ближайшую грань многогранника Π_n в направлении $Ox^{(0)}$, эта гиперплоскость будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{m_0} x_{r_i} = \sum_{i=1}^{m_0} a_i. \quad (5)$$

Решим задачу оптимизации функции $\varphi(x)$ на грани Q_1 многогранника Π_n , образованной гиперплоскостью (5). Получим точку $x^{(1)}$. Аналогично найдем ближайшую $(n-2)$ — грань многогранника Π_n в направлении $O_1x^{(1)}$, где O_1 — центр грани Q_1 и т. д. В результате $n-1$ шагов приведенного алгоритма будут найдены n гиперплоскостей, пересечение которых порождает вершину многогранника Π_n , т. е. приближенное решение исходной задачи.

Возможность аналитического описания множества E_n в виде системы равенств и неравенств позволяет использовать широкий круг градиентных методов для получения приближенного решения задачи оптимизации функции $\varphi(x)$ на E_n . Некоторые из этих методов предложены, в частности, в [8, 9].

Предложим следующую схему. Определим решение (точное или приближенное) задачи оптимизации функции $\varphi(x)$ при ограничении (2) при $\alpha=1$. Приняв данное решение за начальное приближение, найдем оптимум (локальный оптимум) функции $\varphi(x)$ при ограничении (2), полагая $\alpha=1, 2$. Далее, взяв указанное решение в качестве начальной точки, оптимизируем функцию при ограничениях (2), полагая $\alpha=1, 2, 3$, и т. д. Заметим, что с увеличением числа α в системе уравнений вида (2) последовательность решений промежуточных задач будет сходиться к некоторой точке множества E_n . Заметим также, что, начиная с некоторого α^* , все решения будут лежать в окрестности некоторой точки множества E_n , поэтому для получения допустимой точки достаточно взять ближайшую вершину многогранника Π_n .

Представление множества E_n в виде пересечения гиперболы и многогранника (теорема 1) позволяет использовать методы штрафных функций для поиска приближенных решений.

В качестве примера опишем следующую схему. Рассмотрим последовательность задач оптимизации функций

$$\psi_k(x) = \varphi(x) + \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - C_2 \right)^2$$

на множестве Π_n , где $\alpha_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Ясно, что если при каждом k задача оптимизации $\psi_k(x)$ на Π_n решается точно, то при выполнении достаточно общих условий последовательность решений будет сходиться к глобальному оптимуму исходной задачи. В общем случае, решая внутренние задачи приближенно, получим последовательность решений, сходящуюся при $k \rightarrow \infty$ к некоторой точке E_n .

Для определения последовательности α_k можно использовать общие рекомендации метода штрафных функций.

Список литературы: 1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. 344 с. 2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К., 1986. 268 с. 3. Супруненко Д. А., Айзенштат В. С., Лепешинский Н. А. Экстремальные значения функций на множествах перестановок: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. по исслед. операций. Минск, 1972. С. 61—64. 4. Тонаев В. С., Шкурба В. В. Введение в теорию расписаний. М., 1975. 256 с. 5. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике//Докл. АН УССР, сер. А. 1988. № 3. С. 69—72. 6. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 321 с. 7. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике//Докл. АН УССР, сер. А. 1988. № 5. С. 68—70. 8. Ковалев М. М., Котов В. М. Анализ градиентного метода решения задачи комивояжера//Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1981. № 4. С. 1035—1038. 9. Исаченко А. Н. Минимизация функций на выпуклом многограннике//Оптимизационные задачи в автоматизированной системе плановых расчетов. Минск, 1982. С. 104—108.

Поступила в редколлегию 30.05.87

СОДЕРЖАНИЕ

Власенко Л. А., Луценко А. В. О стабилизации линейной системы относительно подпространства	3
Чуприна В. Е. К решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости линейных стационарных дискретных систем	10
Горdevский В. Д., Лысенко Ю. В., Овчаренко И. Е., Павленко Л. Д. Применение методов функционального анализа к задачам обработки изображений	16
Скорик В. А., Сузиов Г. В. Об одном методе определения стационарного осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости	25
Гандель Ю. В., Полянская Т. С. О численном решении двумерных задач электростатики проводников	36
Жакин А. И. Электрогидродинамика жидких диэлектриков в переменных электрических полях	43
Фардигола Л. В. Критерий корректности краевой задачи в слое для уравнений первого и второго порядка	55
Короп В. Ф., Епишев С. Н. Триодные алгоритмические схемы	65
Тютюников Р. Б. Дискретные аналоги гиперциклов	71
Крапивин А. А. Об одном признаке генетичности бернштейновской алгебры	75
Беркович Я. Г., Жмудь Э. М. Конечные группы с большим числом ядер неприводимых характеров	79

Научные сообщения

Зефирев В. Н., Куценко Н. Т., Подольский Е. Н. Идентификация параметров квазиполинома по результатам наблюдений в реальном времени	91
Приходько А. П. Существование оптимальных быстрых действий в компактных задачах с управляемыми полугруппами линейных ограниченных операторов	94
Магарам С. Э. Об алгоритме расчета двумерного электронного потока в релятивистском диеде	96
Столбовская Л. В. Об одном обобщении теоремы Левнера	98
Аркадьева А. В. О треугольных моделях одного класса некоммутрующих систем операторов	102
Еременко С. В. Квадратурные формулы для интеграла в смысле конечной части по Адамару	104
Яковлев С. В., Паршин О. В. Приближенные методы оптимизации на вершинах перестановочного многогранника	107

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 334

Динамические системы

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *М. Ф. Христенко*

ОИБ № 13753

Сдано в набор 25.01.89. Подписано в печать 29.05.89. БЦ 15746.
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать
высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 8. Тираж
500 экз. Изд. № 1789. Зак. 414. Цена 1 р. 10 к. Заказное.

Издательство при Харьковском государственном университете
издательского объединения «Выща школа».
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

