УДК 517.5

О. М. КАТКОВА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИА

В связи с задачей Лагерра о точном определении числа корней вещественного полинома с помощью правила Декарта в работах Фекете, Полиа и Балинта (см. [1], отд. V, гл. 3, § 2) была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть P — полином с вещественными коэффициентами. Положим $f_k(z)=e^{kz}$, $k\in \boldsymbol{R}_+$; $g_k(z)=(1-z)^{-k-1}$, $k\in \boldsymbol{R}_+$; $h_k(z)=(1+z)^{k-1}$, $k\in \boldsymbol{N}$. При достаточно большом $k>0$ число перемен знака в последовательности коэффициентов функций Pf_k, Ph_k совпадает с числом положительных корней полинома P, а число перемен знака в последовательности коэффициентов функции Pg_k — с числом корней полинома P на интервале* $[0, 1)$.

В случае, когда положительных корней у полинома P нет, теорема А утверждает лишь, что все коэффициенты функций Pf_k, Pg_k, Ph_k при достаточно большом k неотрицательны. Целью настоящей статьи является доказательство того, что в этом случае имеет место более сильное утверждение. Для формулировки результата нам понадобится введенное Фекете в работе [2] понятие, обобщающее понятие положительной последовательности.

Определение 1. *Пусть m — натуральное число. Последовательность $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\} \in l^1$ называется частотной последовательностью Полиа порядка m, если все миноры порядков $\nu = 1, 2, \ldots, m$ матрицы*

$$B = \| b_{j-i} \|_{i,\, j \in Z}, \text{ где } b_n = 0,\ n < 0 \tag{1}$$

*неотрицательны**.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть m — натуральное число, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_t z^t$ — полином, такой что $P(x) > 0$, $x \in [0, \infty)$. При достаточно большом $k \geqslant k_0(m)$ последовательности коэффициентов функций $f_k P$, $h_k P$ являются частотными последовательностями Полиа порядка m. Для $g_k P$ это верно в предположении, что $P(x) > 0$, $x \in [0, 1)$.*

Доказательство. Следуя ([1], отд. I, гл. 1, § 2), будем обозначать $x^{n|\omega} = x(x-\omega) \ldots (x-(n-1)\omega)$, $x^{0|\omega} = 1$, и так же, как и в ([1], отд. V, гл. 3, § 2), введем «сопровождающие» полиномы:

$$P(x, \omega) = \sum_{l=0}^{t} a_l x^{l|\omega}; \quad Q(x, \omega) = \sum_{l=0}^{t} a_l (1 + x - l\omega)^{(t-l)|\omega} x^{l|\omega};$$

$$R(x, \omega) = \sum_{l=0}^{t} a_l (1 - x + (t-1)\omega)^{(t-l)|\omega} x^{l|\omega}. \tag{2}$$

В [1] было показано, что

$$(f_k P)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} P\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n;$$

$$(g_k P)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1-t)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^t}{n!} Q\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n;$$

$$(h_k P)(x) = \sum_{n=0}^{k+t-1} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t)} \frac{k^t}{n!} R\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n.$$

Для доказательства того, что коэффициенты этих функций при достаточно большом k образуют частотные последовательности Полиа порядка m, нам понадобится лемма, близкая к одной лемме Шёнберга [3], позволяющая свести проверку неотрицательности всех миноров матрицы (1) к проверке строгой положительности лишь некоторых.

Лемма 1. *Пусть $\{b_k\}_{k=0}^{N}$, $N \leqslant \infty$, — последовательность положительных чисел, такая что $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$. Рассмотрим матрицу из ν строк и $\nu + N + 1$ столбцов*

$$B_\nu = \| b_{j-i} \|_{i=0, \ldots, \nu-1,\ j=0, 1, \ldots, \nu+N} \quad (b_k = 0 \text{ при } k < 0,\ k > N).$$

---

* В работе [2] Фекете называл такие последовательности m-кратно положительными.

Предположим, что для любого $\nu = 1, 2, \ldots, m$ матрица B_ν удовлетворяет условию: все ее миноры порядка ν, составленные из соседних столбцов, положительны. Тогда последовательность $\{b_k\}$ является частотной последовательностью Полиа порядка m.

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом Фекете [2]: Если все миноры порядка ν, составленные из соседних столбцов матрицы B_ν, положительны, то и все ее миноры порядка ν положительны. Возьмем, как и в [3], вспомогательную матрицу $M(\gamma) = \| \exp(-(j-i)^2/\gamma) \|_{i,j=-\infty}^{\infty}$, $\gamma > 0$, у которой все миноры положительны [3], и положим $B(\gamma) = BM(\gamma)$, где B — матрица (1) с $b_k = 0$ при $k < 0$ и $k > N$. Формула Бине — Коши показывает, что из положительности всех миноров порядка ν матрицы B_ν следует положительность всех составленных из соседних строк и соседних столбцов миноров порядка ν матрицы $B(\gamma)$. Таким образом, положительны все миноры порядка $\leqslant m$ матрицы $B(\gamma)$, составленные из соседних строк и соседних столбцов. Шенберг [3] показал, что если положительны все миноры порядка $\leqslant m$ некоторой матрицы, составленные из соседних строк и соседних столбцов, то положительны все ее миноры порядка $\leqslant m$. Применяя эту теорему к матрице $B(\gamma)$, заключаем, что все ее миноры порядка $\leqslant m$ положительны. Устремляя $\gamma \to +0$ и замечая, что при этом $B(\gamma) \to B$ поэлементно, видим, что все миноры порядка $\leqslant m$ матрицы B неотрицательны. Лемма доказана.

В силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно убедиться в положительности следующих определителей:

$$\Phi_n^\nu(k) = \left| \frac{k^{n+j-i}}{\Gamma(n+j-i+1)} P\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leqslant i,\, j \leqslant \nu},$$

$$\Psi_n^\nu(k) = \left| \frac{\Gamma(k+n+j-i+1-t)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^t}{\Gamma(n+j-i+1)} \times \right.$$

$$\left. \times Q\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leqslant i,\, j \leqslant \nu},$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$X_n^\nu(k) = \left| \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n-j+i+t)} \cdot \frac{k^t}{\Gamma(n+j-i+1)} \times \right.$$

$$\left. \times R\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leqslant i,\, j \leqslant \nu},$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $n = 0, 1, 2, \ldots, k+t-1$.

Заметим, что доказательство положительности всех трех определителей проводится с помощью сходных рассуждений. Поэтому приведем подробные пояснения лишь к выкладкам, относящимся к определителям $\Phi_n^\nu(k)$.

Вынося из j-столбца $\dfrac{k^n}{(n+j-1)!}$, получим

$$\Phi_n^\nu(k) = \left(\prod_{j=1}^{\nu} \frac{k^n}{(n+j-1)!} \right) F^\nu\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$F^{\nu}(x,\ \omega)=\left|\frac{1}{\omega^{j-1}}(x+(j-1)\omega)^{(i-1)|\omega}P(x+(j-i)\omega,\ \omega)\right|_{1<i,\ j<\nu}.$$

Теорема будет доказана, если установить, что при достаточно большом $k>0$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $F^{\nu}\left(x,\ \frac{1}{k}\right)>0$, $x\geqslant 0$ **(3)**. Этим мы и будем дальше заниматься.

Прибавляя к каждому столбцу предыдущие, умноженные на соответствующие константы, получим

$$F^{\nu}(x,\ \omega)=\left|\frac{1}{\omega^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}C_{j-1}^{s}(-1)^{s}(x+(j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega}\times\right.$$

$$\left.\times P(x+(j-i-s)\omega,\ \omega)\right|_{1<i,\ j<\nu}. \tag{4}$$

Нам понадобятся некоторые свойства $x^{n|\omega}$. Легко проверить следующее равенство:

$$x^{n|\omega}(x-n\omega)^{l|\omega}=x^{(n+l)|\omega}. \tag{5}$$

Очевидно,

$$x^{n|\omega}=x^{n}+\omega t(x,\ \omega) \tag{6}$$

здесь и далее через $t(x,\ \omega)$ (возможно с индексами) будем обозначать полиномы от x и ω.

Лемма 2. *Для любых $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ r\in \boldsymbol{Z}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{1}{\omega^{n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}C_{n}^{s}(x+(n-s)\omega)^{p|\omega}(1\pm x\mp(r+s-n)\omega)^{q|\omega}\right)=$$

$$=(x^{p}(1\pm x)^{q})^{(n)}, \tag{7}$$

где предел равномерный на любом компактном множестве значений $x\in\boldsymbol{C}$.

Доказательство. Обозначим $[x,\ \omega]_{1}=\dfrac{\varphi(x+\omega)-\varphi(x)}{\omega},\ \ldots$ $\ldots,\ [x,\ \omega]_{n+1}=\dfrac{[x+\omega,\ \omega]_{n}-[x,\ \omega]_{n}}{\omega}$ — разделенные разности некоторой функции φ. Хорошо известны следующие формулы:

$$[x,\ \omega]_{n}=\frac{1}{\omega^{n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}C_{n}^{s}\varphi(x+(n-s)\omega)=$$

$$=\frac{1}{\omega^{n}}\int_{0}^{\omega}\cdots\int_{0}^{\omega}\varphi^{(n)}(x+\omega_{1}+\cdots+\omega_{n})\,d\omega_{1}\cdots d\omega_{n}.$$

Положим $\varphi(x, \omega) = x^{p|\omega}(1 \pm x \mp r\omega)^{q|\omega}$ и рассмотрим ее n-ю разделенную разность по x:

$$[x, \omega]_n = \frac{1}{\omega^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_n^s (x + (n-s)\omega)^{p|\omega}(1 \pm x \mp (r+s-n)\omega)^{q|\omega} =$$

$$= \frac{1}{\omega^n}\int_0^\omega \ldots \int_0^\omega \{\varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \cdots + \omega_n, \omega) - \varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \cdots$$

$$\cdots + \omega_n, 0)\}\, d\omega_1 \ldots d\omega_n + \frac{1}{\omega^n}\int_0^\omega \ldots \int_0^\omega \varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \cdots$$

$$\cdots + \omega_n, 0)\, d\omega_1 \ldots d\omega_n.$$

К подынтегральному выражению в первом интеграле применим теорему Лагранжа о конечном приращении, а затем к обоим интегралам теорему о среднем значении. Получим

$$[x, \omega]_n = \omega \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n\, \partial\omega}\varphi(x + \zeta_1 + \cdots + \zeta_n, \eta) + \varphi_x^{(n)}(x + \xi_1 + \cdots + \xi_n, 0),$$

где $0 < \zeta_j < \omega$, $0 < \xi_j < \omega$, $j = 1, \ldots, n$; $0 < \eta < \omega$. Заметим, что при $\omega \to 0$ первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к $\varphi_x^{(n)}(x, 0)$. В силу (6) $\varphi(x, \omega) = x^p(1 \pm x)^q + \omega t_1(x, \omega)$, откуда $\varphi_x^{(n)}(x, \omega) = (x^p(1 \pm x)^q)^{(n)} + \omega t_2(x, \omega)$, следовательно, $\varphi_x^{(n)}(x, 0) = (x^p(1 \pm x)^q)^{(n)}$. Лемма доказана.

Подставляя в (4) выражение для $P(x, \omega)$ из (2) и используя затем (5), имеем

$$F^\nu(x, \omega) = \left|\sum_{l=0}^{t} a_l\left(\frac{1}{\omega^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s C_{j-1}^s (x + (j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times (x + (j-1-s)\omega - (i-1)\omega)^{l|\omega}\right)\right|_{1<i,\ j<\omega} =$$

$$= \left|\sum_{l=0}^{t} a_l\left(\frac{1}{\omega^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s C_{j-1}^s (x + (j-1-s)\omega)^{(l+i-1)|\omega}\right)\right|_{1<i,\ j<\nu}.$$

Отсюда в силу (7) и (2) равномерно на любом компакте комплексной x-плоскости имеем

$$F^\nu(x, \omega)_{\omega\to 0} \to \left|\sum_{l=0}^{t} a_l (x^{l+i-1})^{(j-1)}\right|_{1<i,\ j<\nu} = |(x^{i-1}P(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}.$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^{(\nu-1)}$, $x \in C$, $\Pi_\nu(f, x) = |(x^{i-1}f(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}$, $\nu \in N$. *Тогда*

$$\Pi_\nu(f, x) = C(\nu)(f(x)^\nu), \tag{8}$$

где $C(\nu) = (\nu-1)!\,(\nu-2)! \ldots 2!\,1!$

Действительно, так как $(xf(x))^{(j)} - x(f(x))^{(j)} = jf^{(j-1)}(x)$, то $(x^i f(x))^{(j)} - x(x^{i-1}f(x))^{(j)} = j(x^{i-1}f(x))^{(j-1)}$. Вычитая из каждой следующей строки определителя $\Pi_\nu(f, x)$ предыдущую, умноженную на x, получим

$$\Pi_\nu(f, x) = \begin{vmatrix} f & f' & f' & \dots & f^{(\nu-1)} \\ 0 & f & 2f' & \dots & (\nu-1)f^{(\nu-2)} \\ 0 & xf & 2(xf)' & \dots & (\nu-1)(xf)^{(\nu-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^{\nu-2}f & 2(x^{\nu-2}f)' & \dots & (\nu-1)(x^{\nu-2}f)^{(\nu-2)} \end{vmatrix}.$$

Пользуясь индукцией, получаем утверждение леммы 3.

Применяя лемму 3, видим, что

$$\lim_{\omega\to 0} F^\nu(x, \omega) = C(\nu)(P(x))^\nu,$$

где предел равномерный на любом компактном множестве значений $x \in \boldsymbol{C}$. Так как полином P не имеет положительных корней, то в силу леммы Гурвица для любого $\nu = 1, 2, \dots, m$ существует k_ν такое, что при $k \geqslant k_\nu$, $x \geqslant 0$ имеем $F^\nu\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0$, что и доказывает (3).

Перейдем теперь к определителям $\Psi_n^\nu(k)$, $X_n^\nu(k)$. Из i-х строк $\Psi_n^\nu(k)$ и $X_n^\nu(k)$ вынесем соответственно

$$\frac{\Gamma(k+n-t+2-i)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+\nu-i)!}, \quad \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t+i-1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+\nu-i)!}.$$

Получим

$$\Psi_n^\nu(k) = \left(\prod_{j=1}^{\nu} \frac{\Gamma(k+n-t+2-i)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+\nu-i)!}\right) G^\nu\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$G^\nu(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{\nu-1}} (1 + x - (t - j + i)\omega)^{(j-1)|\omega} (x + (\nu - i)\omega)^{(\nu-j)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times Q(x + (j-i)\omega, \omega) \right|_{1<i,\, j<\nu},$$

$$X^\nu(k) = \left(\prod_{j=1}^{\nu} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t+i-1)} \frac{(k-1)!}{(n+\nu-i)!}\right) H^\nu\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$H^\nu(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{\nu-i}} (1 - x + (t+i-2)\omega)^{(j-1)|\omega} (x + (\nu - i)\omega)^{(\nu-j)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times R(x + (j-i)\omega, \omega) \right|_{1<i,\, j<\nu}.$$

Покажем, что при больших k $\nu = 1, 2, \ldots, m$:

$$G^{\nu}\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0, \; x \geqslant 0, \tag{9}$$

$$H^{\nu}\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0, \; 0 \leqslant x \leqslant 1 + (t-1)\frac{1}{k}. \tag{10}$$

Так как $\det \| C_{ij} \|_{1 < i,\, j < \nu} = \det \| C_{\nu-j+1,\, \nu-i+1} \|_{1 < i,\, j < \nu}$, то

$$G^{\nu}(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} (1 + x - (t - j + i)\,\omega)^{(\nu-i)|\omega} (x + (j-1)\,\omega)^{(i-1)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times\, Q(x + (j-i)\,\omega, \omega) \right|_{1 < i,\, j < \nu},$$

$$H^{\nu}(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} (1 - x + (t + \nu - j - 1)\,\omega)^{(\nu-i)|\omega} (x + (j-1)\,\omega)^{(i-1)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times\, R(x + (j-i)\,\omega, \omega) \right|_{1 < i,\, j < \nu}.$$

Прибавляя к каждому столбцу предыдущие, умноженные на соответствующие константы, получим

$$G^{\nu}(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} C_{j-1}^{s} (-1)^{s} (1 + x - (t - j + i + s)\, \omega^{(\nu-i)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times (x + (j - 1 - s)\omega^{(i-1)|\omega}\, Q(x + (j - i - s)\,\omega, \omega) \right|_{1 < i,\, 1 < \nu};$$

$$H^{\nu}(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} C_{j-1}^{s} (-1)^{s} (1 - x + (t + \nu - j - 1 + s)\,\omega)^{(\nu-i)|\omega} \times \right.$$
$$\left. \times (x + (j - 1 - s)\,\omega)^{(i-1)|\omega}\, R(x + (j - i - s)\,\omega, \omega) \right|_{1 < i,\, j < \nu}.$$

Подставляя выражения для $Q(x, \omega)$ и $R(x, \omega)$ из (2), а затем используя (5), получим

$$G^{\nu}(x, \omega) = \left| \sum_{l=0}^{t} a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^{s} C_{j-1}^{s} (1 + x - (l - j + i + s)\omega)^{(t-l)|\omega} \times \right.\right.$$
$$\times (1 + x - (l - j + i + s)\,\omega - (t - l)\,\omega)^{(\nu-i)|\omega} (x +$$
$$\left. + (j - 1 - s)\,\omega)^{(i-1)|\omega} (x + (j - 1 - s)\,\omega - (i - 1)\,\omega^{l|\omega}) \right|_{1 < i,\, j < \nu} =$$
$$= \left| \sum_{l=0}^{t} a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^{s} C_{j-1}^{s} (x + (j - 1 - s)\omega)^{(l+i-1)|\omega} \right) (1 + x - \right.$$
$$\left. - (l - j + i + s)\,\omega)^{(t-l+\nu-i)|\omega} \right|_{1 < i,\, j < \nu};$$

$$H^{\nu}(x, \omega) = \left| \sum_{l=0}^{t} a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^{s}\, C_{j-1}^{s}\, (x + (j - 1 - s)\,\omega)^{(l+i-1)|\omega} \times \right.\right.$$
$$\left. \times (1 - x + (t + \nu - j - 1 + s)\,\omega)^{(t-l+\nu-i)|\omega} \right|_{1 < i,\, j < \nu}.$$

В силу (7) и (2) равномерно на любом компакте комплексной x-плоскости

$$G^{\nu}(x,\ \omega)_{\omega\to 0} \to |(x^{i-1}(1+x)^{\nu-i}Q(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}, \tag{11}$$

где $Q(x)=a_0(1+x)^t+a_1(1+x)^{t-1}x+\cdots+a_{t-1}(1+x)x^{t-1}+ + a_tx^t$,

$$H^{\nu}(x,\ \omega)_{\omega\to 0} \to |(x^{i-1}(1-x)^{\nu-i}R(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}, \tag{12}$$

где $R(x)=a_0(1-x)^t+a_1(1-x)^{t-1}x+\cdots+a_{t-1}(1-x)x^{t-1}+ + a_tx^t$. Так как $(x^{i-1}(1+x)^{\nu-i}Q(x))^{(j-1)}-(x^i(1+x)^{\nu-i-1}\times \times Q(x))^{(j-1)}=(x^{i-1}(1+x)^{\nu-i-1}Q(x))^{(j-1)}$, то, вычитая из каждой строки определителя, стоящего в правой части (11), следующую и повторяя эти операции, получим

$$|(x^{i-1}(1+x)^{\nu-i}Q(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}=$$

$$=\begin{vmatrix}((1+x)^{\nu-2}Q)^{(j-1)}\\ (x(1+x)^{\nu-3}Q)^{(j-1)}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (x^{\nu-3}(1+x)Q)^{(j-1)}\\ (x^{\nu-2}Q)^{(j-1)}\\ (x^{\nu-1}Q)^{(j-1)}\end{vmatrix}_{1<j<\nu}=\begin{vmatrix}((1+x)^{\nu-3}Q)^{(j-1)}\\ (x(1+x)^{\nu-4}Q)^{(j-1)}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (x^{\nu-3}Q)^{(j-1)}\\ (x^{\nu-2}Q)^{(j-1)}\\ (x^{\nu-1}Q)^{(j-1)}\end{vmatrix}_{1<j<\nu}=$$

$$=\cdots=|(x^{i-1}Q(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}=\Pi_{\nu}(Q,\ x).$$

Аналогично, прибавляя к каждой строке определителя, стоящего в правой части (12), следующую и повторяя эти операции, получим

$$|(x^{i-1}(1-x)^{\nu-i}R(x))^{(j-1)}|_{1<i,\ j<\nu}=\Pi_{\nu}(R,\ x).$$

В силу (8) равномерно на любом компакте будем иметь

$$G^{\nu}(x,\ \omega)_{\omega\to 0}\to C(\nu)(Q(x))^{\nu}, \tag{13}$$

$$H^{\nu}(x,\ \omega)_{\omega\to 0}\to C(\nu)(R(x))^{\nu}. \tag{14}$$

Легко видеть, что $Q(x)=(1+x)^tP\left(\frac{x}{1+x}\right)$, а $R(x)=(1-x)^tP\times \times\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Применяя лемму Гурвица к (13), получаем утверждение (9). Докажем теперь (10). Так как в этом случае

$0\leqslant x\leqslant 1+(t-1)\frac{1}{k}$, то $\frac{x}{1-x}\in\left[0,\ +\infty\right)\cup\left(-\infty,\ -\left(1+\frac{k}{t-1}\right)\right]$.

Поскольку при $k\to+\infty$ выражение $\left(-\left(1+\frac{k}{t-1}\right)\right)\to-\infty$, то можно подобрать такое k_0, что при $k\geqslant k_0$ интервал $\left(-\infty,\ -\left(1+\frac{k}{t-1}\right)\right]$ не содержит корней полинома P, причем если t — четно, то

$$P\left(\frac{x}{1-x}\right)>0 \text{ и } (1-x)^t>0,\ x\in\left(1,\ 1+(t-1)\frac{1}{k}\right],$$

а если — нечетно, то

$P\left(\frac{x}{1-x}\right)>0$ и $(1-x)^t>0$, $x\in\left(1,\ 1+(t-1)\frac{1}{k}\right]$. Применяя теперь лемму Гурвица к (14), получаем утверждение (10), что и завершает доказательство теоремы.

Список литературы: 1. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, т. 1, 2. М., 1978. 392 с., 432 с. 2. *Fekete M., Polya G.* Veber ein Problem von Laguerre // Rendiconti Cirs. Math. Palermo. 1912. **34**. P. 89—120. 3. *Schoenberg I. J.* On the zeros of generating functions of multiply positive sequences and functions // Annals. of Math. 1955. **62**, N 3. P. 447—471.

Поступила в редколлегию 21.10.87

УДК 517.9:532.2

И. Д. ЧУЕШОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПРЕДЕЛЕ

Динамика упругой пологой оболочки, защемленной по контуру в сверхзвуковом потоке газа, описывается следующей системой уравнений [1]:

$$L_t^\rho u+\Delta^2 u-[u+f,\ v+\theta]+\rho\frac{\partial u}{\partial x_1}=p(x), \tag{1}$$

$$\Delta^2 v+[u+2f,\ u]=0,\ x=(x_1,\ x_2)\in\Omega, \tag{2}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=v\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad \dot u\big|_{t=0}=u_1(x). \tag{4}$$

Здесь Ω — ограниченная область в R^2 с кусочногладкой границей, $\dot u=\frac{\partial u}{\partial t}$, $L_t^\rho u=(1-\alpha\Delta)\ddot u+\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1\sqrt{\rho}-\varepsilon_2\Delta\right)\dot u$, $\alpha>0$, $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2\geqslant 0$

$$[u,\ v]=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, x x_2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Предполагается, что $p(x)\in L^2(\Omega)$, $f\in(H^3\cap H_0^2)(\Omega)$, $\theta\in H^4$, $u_0\in H_0^2$, $u_1\in H_0^1$ (H^m — соболевское пространство порядка m). Параметр $\rho\geqslant 0$ определяется скоростью, набегающего вдоль оси x_1 потока. Случай α, $\varepsilon_2>0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки [2]. Как обычно [2—4], исключим функцию v из системы (1) — (4). При сделанных предположениях задача (1) — (4) однозначно разрешима [2] и можно определить [3, 4] сильно непрерывную нелинейную полугруппу S_t в пространстве $H=H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ так, что $S_t y_0=(u(t);\ \dot u(t))$, $u(t)$ — решение системы (1) — (4) с начальными