УДК 517.555/983

С. Т. НОРВИДАС

ВАРИАЦИИ НОРМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть K — компакт в $\boldsymbol{R}^n$ и B_K — совокупность всех ограниченных непрерывных функций на $\boldsymbol{R}^n$, преобразование Фурье которых в смысле распределений сосредоточенно на K. Функции из B_K продолжаются в $\boldsymbol{C}^n$ до целых функций с оценкой $|f(z)| \leqslant M \exp H_K(\operatorname{Im} z)$ (1), где M — неотрицательная константа, зависящая лишь от функции f; $H_K(t)$ — опорная функция компакта K. Отметим, что совокупность всех целых функций, удовлетворяющих оценке (1), совпадает с B_K лишь тогда, когда K является выпуклым компактом. Относительно поточечных операций и sup-нормы на $\boldsymbol{R}^n$ класс B_K образует банахово пространство.

Пусть $D = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ где $\frac{\partial}{\partial x_m}$ — оператор частной производной. Максимальным классом функций, который можно «применять» к коммутирующему набору D во всех пространствах B_K, оказывается класс функций F локально принадлежащих алгебре $B(\boldsymbol{R}^n)$ преобразований Фурье—Стилтьеса регулярных комплексных борелевских мер $\nu \in M(\boldsymbol{R}^n)$ ограниченной вариации $\|\nu\|$ [1]. В частности, такой вид имеют все дифференциальные операторы в B_K с постоянными коэффициентами. Если в окрестности компакта $K \subset \boldsymbol{R}^n$ имеет место равенство $F = \hat{\nu}$, где $\hat{\nu}$ — преобразование Фурье—Стилтьеса, то в пространстве B_K оператор $F(D)$ отождествляется с оператором типа свертки $T_\nu : u \to u * \nu$. Спектр $F(D)$ совпадает с множеством $\{\lambda \in \boldsymbol{C} : \lambda = \hat{\nu}(x),\ x \in K\}$, а для нормы очевидна оценка $\|F(D)\|_K \leqslant \|\nu\|$. Фактически $\|F(D)\|_K = \|\nu\|_{M(R^n)/J(K)}$, где $J(K)$ — наименьший замкнутый идеал в $M(\boldsymbol{R}^n)$, содержащий все меры ν, для которых $\hat{\nu}=0$ в окрестности K [1]. Если K — множество спектрального синтеза относительно алгебры $M(\boldsymbol{R}^n)$ [2, с. 579], то $\|F(D)\|_K=\|\nu\|_{M(R^n)/I(K)}$, где $I(K)$ — идеал тех $\nu\in M(\boldsymbol{R}^n)$, для которых $\hat{\nu}=0$ на K.

2. Меру μ среди мер, задающих на B_K один и тот же оператор $F(D)$, будем называть *экстремальной*, если $\|F(D)\|_K=\|\mu\|$. Экстремальная мера существует не всегда (даже для конечного K), а если существует, то является, вообще говоря, не единственной. Например, если K — шар в $\boldsymbol{R}^n$, $n>1$ и $F(D)$ — оператор Лапласа. При $n=1$, согласно теореме М. Г. Крейна [3], единственность имеет место каждый раз, когда $\|F(D)\|_K>|F(D)|_K$, где $|F(D)|_K$ — спектральный радиус $F(D)$ на B_K. Множество $M\subset\boldsymbol{R}^n$ называется *нормальной звездой*, если $tx\in\operatorname{int}M$, где $x\in M$, $t\in[0,1)$, и — *звездой*, если $M=a+M_1$, где $a\in\boldsymbol{R}^n$, а M_1 — нормальная звезда.

Если K — компактная нормальная звезда, то следующая теорема отмечалась в [4].

Теорема 1. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:* а) *K — конечное объединение непересекающийся компактных звезд в $\boldsymbol{R}^n$;* б) *K — выпуклый компакт в $\boldsymbol{R}^n$. Тогда для каждого оператора $F(D)$, действующего на классе B_K, существует экстремальная мера.*

Доказательство. Пусть B_K^0 — подпространство (возможно, тривиальное) в B_K, состоящее из тех функций $f\in B_K$, для которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\boldsymbol{R}^n$. Известно (Е. А. Горин), что если подпространство B_K^0 плотно в B_K относительно $M(\boldsymbol{R}^n)$ — слабой топологии, т. е. топологии, порожденной семейством всех функционалов интегрирования по мерам $\mu\in M(\boldsymbol{R}^n)$, то для каждого оператора $F(D)$ на B_K существует экстремальная мера. Например, это имеет место, если K — компактная нормальная звезда в $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть K_p, $p=1,\ldots,m$ — непересекающиеся компактные звезды в $\boldsymbol{R}^n$ и $K=\bigcup\limits_{p=1}^{m}K_p$. Если $m=1$, то $K=a+L$, где $a\in\boldsymbol{R}^n$, а L — нормальная звезда в $\boldsymbol{R}^n$. Поскольку оператор $S_a: f(x)\to e^{-i\langle x,a\rangle}f(x)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$, является изоморфизмом пространств B_K и B_L, отображающим B_K^0 на B_L^0, то B_K^0 будет $M(\boldsymbol{R}^n)$ — слабо плотным в B_K. Пусть $m>1$. Если $f\in B_K$, то, согласно определению класса B_K, существует такая обобщенная функция S с компактным носителем в K, для которой $f(z)=S(e_z)$, $z\in\boldsymbol{C}^n$, где $e_z(\lambda)=e^{i\langle z,\lambda\rangle}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}^n$. С другой стороны, существуют такие финитные гладкие функции φ_p, $p=1,\ldots,m$, для которых $\varphi_p(x)=1$, если $x\in K_p$, и $\varphi_p(x)=0$, если $x\in K\setminus K_p$. Тогда

$$f(z)=S(e_z)=S\Big(\Big(\sum_{p=1}^{m}\varphi_p\Big)e_z\Big)=\sum_{p=1}^{m}f_p(z),$$

где $f_p\in B_{K_p}$. Отсюда следует, что B_K^0 будет $M(\boldsymbol{R}^n)$ — слабо плотным в B_K тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждая пара $B^0_{K_p}$ и B_{K_p}, $p=1, \ldots, m$, что, в свою очередь, нами уже установлено.

Пусть K — выпуклый компакт, не являющийся звездой в $\boldsymbol{R}^n$, и в некоторой окрестности K имеет место равенство $F=\hat{\nu}$, где $\nu \in M(\boldsymbol{R}^n)$. Если K состоит из одной точки, то пространство B_K отождествляется с $\boldsymbol{C}$ и, следовательно, теорема 1 — тривиальна. Пусть K состоит более чем из одной точки. Теперь воспользуемся тем, что для каждого оператора $F(D)$, действующего в B_K, экстремальная мера существует лишь тогда, когда это имеет место одновременно во всех пространствах вида $B_{a+A(K)}$, где $a \in \boldsymbol{R}^n$, а $A \in GL(n, \boldsymbol{R})$, т. е. A — невырожденное линейное преобразование в $\boldsymbol{R}^n$. Поэтому можно считать, что K содержится в подпространстве $\boldsymbol{R}^m=\{x \in \boldsymbol{R}^n : x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$, где $0<m<n$, и является компактной нормальной звездой в $\boldsymbol{R}^m$. Тогда пространства $B_K(\boldsymbol{R}^n)$ и $B_K(\boldsymbol{R}^m)$ естественным образом отождествляются. Следовательно, оператор $F(D)=\hat{\nu}(D)$ совпадает на классе $B_K(\boldsymbol{R}^m)$ с каждым из операторов $\hat{\mu}(D)$, где $\mu \in M(\boldsymbol{R}^m)$ и $\hat{\mu}=\hat{\nu}$ в некоторой m-мерной окрестности K. Поскольку K — компактная звезда в $\boldsymbol{R}^m$, то для оператора $\nu(D)$ на $B_K(\boldsymbol{R}^m)$ существует экстремальная мера $\nu_0 \in M(\boldsymbol{R}^m)$. Тогда мера $\nu_0 \otimes \delta^{n-m} \in M(\boldsymbol{R}^n)$, где δ^{n-m} — дельта-мера на ортогональном дополнении в $\boldsymbol{R}^n$ к подпространству $\boldsymbol{R}^m$, будет экстремальной для $F(D)$ в $B_K(\boldsymbol{R}^n)$. Действительно, $\|F(D)\|_K = \|\nu(D)\|_K=\|\nu_0(D)\|_K=\|\nu_0\|=\|\nu_0 \otimes \delta^{n-m}\|$. Теорема 1 доказана.

2. Вычисление норм операторов $F(D)$ в пространствах типа B_K берет свое начало от исследований С. Н. Бернштейна. В частности, классический результат (неравенство Бернштейна) заключается в том, что при $n=1$, $K=[-\sigma, \sigma]$, $\sigma>0$, будет $\|D\|_K=\sigma$. Отсюда следует, что для произвольного компакта $K \subset \boldsymbol{R}^n$ имеет место равенство

$$\left\| \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} \right\|_K = \max_{t \in K} |t_m|,$$

где $t=(t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_n)$, $m=1, \ldots, n$. Явное вычисление величины $\|F(D)\|_K$ является нетривиальной задачей даже тогда, когда F — многочлен. Оказалось, однако, что в терминах положительной определенности легко описать все случаи совпадения нормы и спектрального радиуса [1].

Пусть f — непрерывная функция на компакте K. Будем говорить, что f продолжается характеристически с K (с окрестности K), если либо $f\equiv 0$ на K (в окрестности K), либо функция $g(x)$, где $g(x)f(x_1)=f(x+x_1)$, а x_1 — произвольная точка максимума функции $|f(x)|$ на K, продолжается с множества $-x_1+K$ (с некоторой окрестности множества $-x_1+K$) до положительно определенной, вообще говоря, разрывной, функции на $\boldsymbol{R}^n$. Однако, если для любой окрестности V точки x_1 множество $(K \cap V)-(K \cap V)$ содержит окрестность нуля в $\boldsymbol{R}^n$, то, согласно неравенству М. Г. Крейна [2, с. 302] $|\varphi(a)-\varphi(b)|^2 \leqslant 2\varphi(0)|\varphi(0)-\operatorname{Re}\varphi(a-b)|$ **(2)**, где $a, b \in \boldsymbol{R}^n$, а φ — произвольная положительно определенная функция на $\boldsymbol{R}^n$, непрерывность продолжения возникает автоматически.

Напомним, что оператор T банахова пространства называется эрмитовым, если $\| \exp itT \| = 1$ при всех $t \in \boldsymbol{R}$. Операторы $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_m}$ — эрмитовы во всех B_K и это лежит в основе следующего частного случая теоремы Е. А. Горина [1]: если функция F продолжается непрерывно и характеристически с окрестности K (если K — множество спектрального синтеза), то $\| F(D) \|_K = |F(D)|_K$ **(3)**; обратно: если выполнено (3), то F продолжается характеристически с K. Отметим, что непрерывность продолжения равенством (3) не гарантируется и, вообще говоря, не имеет места [1]. В частности, равенство (3) имеет место для любого K, если $F(D)$ — эрмитов оператор во всех B_K (см., например, [1, с. 88]). Таковым будет каждый оператор вида $F(D) = \langle D, a \rangle$, где $a \in \boldsymbol{R}^n$.

Нас будет интересовать вопрос о поведении $\| F(D) \|_K$ при вариациях компакта K и фиксированной функции F, локально принадлежащей алгебре $B(\boldsymbol{R}^n)$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(n)$ — множество всех компактов в $\boldsymbol{R}^n$ и ρ_n — метрика Хаусдорфа на $\mathcal{K}(n)$.

Теорема 2. *Функция $K \to \| F(D) \|_K$ является полунепрерывной сверху на $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть в некоторой открытой окрестности U фиксированного компакта K имеет место равенство $F = \hat{\nu}$, где $\nu \in M(\boldsymbol{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая мера $\mu \in M(\boldsymbol{R}^n)$, для которой функция $\hat{\mu}$ обращается в нуль в некоторой открытой окрестности V компакта K и

$$\| F(D) \|_K = \| \hat{\nu}(D) \|_K \geqslant \| \nu + \mu \| - \varepsilon. \tag{4}$$

Теперь найдется такое $\delta > 0$, для которого из условий $M \in \mathcal{K}$ и $\rho_n(K, M) < \delta$ следует, что $M \subset U \cap V$. Тогда $\hat{\nu}(D)$ совпадает на классе B_M с оператором $(\nu + \mu)^{\wedge}(D)$ и, следовательно, верно $\| F(D) \|_M \leqslant \| \nu + \mu \|$. Отсюда и из (4) следует, что функция $K \to \| F(D) \|_K$ полунепрерывна сверху в точке K. Так как это верно для каждого $K \in \mathcal{K}$, то теорема 1 доказана.

Оператор $F(D)$ будем называть *$\mathcal{K}$-устойчивым на классе B_{K_1}*, если функция $K \to \| F(D) \|_K$ непрерывна в точке K_1 относительно семейства $\mathcal{K}$ и *$\mathcal{K}$-устойчивым*, если он $\mathcal{K}$-устойчив на каждом B_{K_1}, $K_1 \in \mathcal{K}$. Теорема 2 позволяет оценить снизу величину $\| F(D) \|_K$ через норму оператора $F(D)$ в пространстве B_M, когда компакт M (например, многогранник) достаточно близок в метрике Хаусдорфа к K. Если оператор $F(D)$ является $\mathcal{K}$-устойчивым на B_K, то таким путем можно получить сколь угодно точную оценку.

Теорема 3. *Оператор $F(D)$ является $\mathcal{K}$-устойчивым на B_K тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3).

Доказательство. Необходимость. Для любого компакта $K \subset \boldsymbol{R}^n$ существуют такие конечные множества Кронекера K_m, $m = 1, \ldots$, для которых $\rho_n(K, K_m) < \frac{1}{m}$ [2]. Поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \| F(D) \|_{K_m} = \| F(D) \|_K, \quad \lim_{m \to \infty} | F(D) |_{K_m} = | F(D) |_K. \tag{5}$$

Однако для любого множества Кронекера M верно $\|F(D)\|_M = |F(D)|_M$ [1]. Теперь из (5) следует равенство (3).

Достаточность. Предположим, что выполняется равенство (3), а функция $M \to \|F(D)\|_M$ разрывна в точке K. Тогда, согласно теореме 2, существуют такие последовательность компактов $\{K_m\}_1^\infty$ в $\boldsymbol{R}^n$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_n (K, K_m) = 0$ и

$$\lim_{m\to\infty} \| F(D) \|_{K_m} = \| F(D) \|_K - \varepsilon. \tag{6}$$

Теперь найдется такое $m_1 \in \boldsymbol{N}$, для которого при $m > m_1$ верно $\|F(D)\|_{K_m} < \|F(D)\|_K - \frac{\varepsilon}{2}$, $|F(D)|_{K_m} > |F(D)|_K - \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из (6) следует, что $\|F(D)\|_{K_m} < |F(D)|_{K_m}$. Это противоречие доказывает достаточность. Теорема 3 доказана.

В оставшейся части этой работы мы исследуем более подробно свойства тех функций F, для которых оператор $F(D)$ является $\mathcal{K}$-устойчивым. Согласно теореме Горина, эти функции содержатся в классе тех функций $f \in C(\boldsymbol{R}^n)$, где $C(\boldsymbol{R}^n)$ — множество всех непрерывных комплекснозначных функций на $\boldsymbol{R}^n$, которые продолжаются характеристически с любого $K \in \mathcal{K}$. Отметим, что этот класс достаточно широк. Так, в случае одного переменного ему принадлежит, в частности, любая неотрицательная монотонная выпуклая книзу функция. В этом легко убедится, пользуясь, например, критерием Пойа [5, с. 108].

Ниже мы будем ссылаться на следующую лемму [2, с. 303].

Лемма 1. *Пусть φ — положительно определенная функция на группе G. Если $\varphi(0) = 1$, то множество $G(\varphi) = \{g \in G : |\varphi(g)| = 1\}$ является подгруппой в G и для любых $g \in G$, $h \in G(\varphi)$ имеет место равенство $\varphi(g + h) = \varphi(g)\varphi(h)$.*

Лемма 2. *Пусть функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}$* (1). *Тогда функция $|f|$ постоянна в окрестности каждой точки своего локального максимума.*

Доказательство. Поскольку класс положительно определенных функций замкнут относительно умножения и перехода к сопряженному, то достаточно доказать утверждение леммы 2 для функции $g(x) = |f(x)|^2$, $x \in \boldsymbol{R}$. Пусть x_0 — точка нестрогого локального максимума g. Так как случай $g(x_0) = 0$ — тривиален, то можно считать, что $g(x_0) = 1$. Тогда существуют такие отрезок $[a, b]$, $a < x_0 < b$, и последовательность его точек $\{x_m\}_1^\infty$, для которых $x_m \to x_0$, $g(x_m) = 1$, $m = 1, \ldots$ и $g(x) \leqslant 1$, если $x \in [a, b]$. Поэтому функция $h(x) = g(x + x_0)$ продолжается с множества $-x_0 + [a, b]$ до непрерывной положительно определенной функции, для которой, согласно лемме 1, множество $G(h) = \boldsymbol{R}(h)$ является всюду плотным на $\boldsymbol{R}$. Отсюда получаем, что функция g постоянна на отрезке $[a, b]$.

Докажем, что функция g не имеет строгих локальных максимумов. Предположим противное. Пусть, например, в точке 0 функция g имеет строгий локальный максимум. Тогда существует такое $\sigma > 0$, для рторого $g(x) < 1$, если $x \in [-\sigma, \sigma]$ и $x \neq 0$. Напомним, что точка $\in [-\sigma, \sigma]$ называется видимой справа для функции g, если $g(t) \geqslant g(y)$, для всех $y \in [t, \sigma]$. Пусть Ω — множество точек в $[-\sigma, \sigma]$, идимых справа для g. Согласно лемме Ф. Рисса [6, с. 325], множество замкнуто в $[-\sigma, \sigma]$, а функция g монотонно не возрастает на Ω. Очевидно, что $0, \sigma \in \Omega$ и $\Omega \subset [0, \sigma]$. Поэтому достаточно рассмотреть ва случая, когда: а) существует такое $\sigma_1 > 0$, что $[0, \sigma_1] \subset \Omega$; б) существует такая последовательность интервалов $[a_m, b_m] \subset \Omega$, $m = 1, \dots$ для которой $0 < a_{m+1} < b_{m+1} < a_m < b_m \leqslant \sigma$ и $\lim\limits_{m \to \infty} b_m = 0$.

а) В этом случае существуют такие $\alpha \in [-\sigma, 0)$ и $\beta \in (0, \sigma_1]$, $0 < 2\beta - \alpha < \sigma_1$, для которых $g(\alpha) = g(\beta) > 0$. Тогда функция $h(x) = g(x + \beta) / g(\beta)$ продолжается с множества $-\beta + (\{\alpha\} \cup [\beta, \sigma_1])$ до положительно определенной функции на $\boldsymbol{R}$. Поэтому, согласно лемме 1, имеют место равенства $h(\alpha - \beta) = h(\beta - \alpha) = h(0)$ или $g(\alpha) = g(2\beta - \alpha) = g(\beta)$. Так как функция g монотонно убывает на $[0, \sigma_1]$, то отсюда следует, что она является постоянной на $[\beta, 2\beta - \alpha]$. Поскольку, согласно лемме 1, функция h продолжается с множества $-\beta + [\beta, \sigma_1]$ до положительно определенной функции на $\boldsymbol{R}$ лишь константой, то g постоянна и на $[\beta, \sigma_1]$. Так как β можно брать сколь угодно близко к 0, то 0 не является точкой строгого локального максимума g, что противоречит нашему предположению.

б) Из определения множества Ω следует, что $g(x) < g(a_m)$, если $x \in (b_{m+1}, a_m)$. Рассмотрим теперь функцию g на $[b_{m+1}, b_m]$. Тогда, как и в случае а), убеждаемся в том, что g постоянна на $[a_m, b_m]$. Поскольку $g(a_m) = g(b_{m+1})$, то функция g постоянна и на множестве

$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m]$, и так как $b_m \to 0$, когда $m \to \infty$, то 0 не является точкой строгого локального максимума g. Однако это противоречит нашему предположению. Лемма 2 доказана.

Если $f \in C(\boldsymbol{R})$, то обозначим через M_f и m_f — соответственно множества (возможно, пустые) точек нестрогих глобального и локального минимумов функции $|f|$ на $\boldsymbol{R}$.

Лемма 3. *Пусть функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}$ (1). Тогда $M_f = m_f$ и является связным множеством. Функция $|f|$ строго монотонна и неограниченна на каждой компоненте связности множества $\boldsymbol{R} \setminus M_f$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = |f(x)|^2$, которая, как это уже отмечалось в доказательстве леммы 2, тоже удовлетворяет условию леммы. Докажем монотонность g. Первым рассмотрим тот случай, когда g имеет в точке x_0 локальный максимум. Согласно лемме 2, существует U — такая окрестность x_0, на которой функция g постоянна. Пусть, кроме того, U — наибольшая замкнутая связная окрестность x_0, где g — постоянна. Случай $U = \boldsymbol{R}$ — тривиален. Пусть U — ограниченно, например, справа и a — его правая крайняя точка. Сперва докажем, что $g(t) > g(a)$, если $t > a$. Предположим противное. Пусть существует такая точка $\lambda \in (a, \infty)$, для которой $g(\lambda) \leqslant g(a)$. Если $g(a) = 0$, то из леммы 2 следует, что g постоянна на $[a, \lambda]$. Однако это противоречит выбору a. Если $g(a) > 0$, то можно считать, что $g(a) = 1$. Тогда функция $h(x) = g(x + a)$ продолжается с множества $-a + ([x_0, a] \cup \{\lambda\}$ до положительно определенной функции на $\boldsymbol{R}$ лишь константой. Поэтому $g(\lambda) = g(a) = 1$. Отсюда и из леммы 2 следует, что g постоянна на $[a, \lambda]$, а это противоречит выбору a. Предположим теперь, что функция g не является строго монотонно возрастающей на $[a, \infty]$. Тогда существуют такие $b, c \in (a, \infty)$, $b < c$, для которых $g(a) < g(c) \leqslant g(b)$. Поэтому найдется такое $d \in (a, c)$, для которого величина $g(d)$ равна максимуму функции g на $[a, c]$. Согласно лемме 2, функция g постоянна в окрестности d. Поэтому функция $h(x) = g(x + d) / g(d)$ продолжается с множества $-d + [a, c]$ до положительно определенной функции на $\boldsymbol{R}$ лишь константой. Однако это противоречит тому, что $g(a) < g(c)$. Поэтому g строго монотонно возрастает на $[a, \infty)$. Если U — ограниченно слева, а b — левая крайняя точка U, то аналогично доказываем, что g строго монотонно убывает на $(-\infty, b]$.

Пусть функция g не имеет локальных максимумов. Если для любого отрезка $[a, b]$ имеет место равенство

$$\min_{x \in [a, b]} g(x) = \min\{g(a), g(b)\},$$

то функция g строго монотонна на $\boldsymbol{R}$ и $M_f = m_f = \varnothing$. В противном случае, если существуют такие отрезок $[a, b]$ и точка $c \in (a, b)$, для которых $g(c) < g(a)$, $g(c) < g(b)$, то аналогично тому, как делали выше, доказываем, что функция g строго монотонно убывает на $(-\infty, c]$ и строго монотонно возрастает на $[c, \infty)$. Следовательно, монотонность g на $\boldsymbol{R} \setminus M_f$ полностью доказана. Кроме того, $M_f = m_f$ и является связным множеством.

Пусть M_f — непустое ограниченное справа множество и a — его правая крайняя точка. Предположим, что $\sup\limits_{x \in [a, \infty]} g(x) = \alpha < \infty$. Тогда фиксируем точку $b \in (a, \infty)$ и рассмотрим g на отрезке $[a, \sigma]$, где $\sigma > b$. Поскольку g монотонно возрастает на $[a, \infty)$, функция $h(x) = g(x + \sigma) / g(\sigma)$ продолжается с множества $-\sigma + [a, \sigma]$ до положительно определенной функции на $\boldsymbol{R}$. Поэтому согласно неравенству Крейна (2) верно $|g(a) - g(b)|^2 \leqslant 2\alpha |g(\sigma) - g(\sigma + a - b)|$ (7). Так как непрерывная функция g монотонна и согласно предположению ограниченна на $[a, \infty)$, правая часть неравенства (7) стремится к нулю, когда $\sigma \to \infty$. Однако это противоречит тому, что $g(a) < g(b)$. Если множество M_f ограниченно слева, то доказательство аналогично. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что если функция, удовлетворяющая ее условию, принадлежит алгебре $B(\boldsymbol{R})$, то она имеет постоянный модуль. Оказывается, что верно даже более общее утверждение.

Теорема 4. *Ограниченная функция $f \in C(\boldsymbol{R}^n)$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}(n)$ тогда и только тогда, когда $f = c\chi$, где $c \in \boldsymbol{C}$, а χ — непрерывный характер группы $\boldsymbol{R}^n$.*

Доказательство. Так как ограничение функции $|f|^2$ на произвольную прямую в $\boldsymbol{R}^n$ удовлетворяет условию леммы 3, то $|f|^2$ постоянна на прямых в $\boldsymbol{R}^n$, а значит,— на всем $\boldsymbol{R}^n$. Если $f \not\equiv 0$, то можно считать, что $f(0) = 1$. Тогда f продолжается с любого замкнутого шара до положительно определенной функции в $\boldsymbol{R}^n$, равной согласно лемме 1 и неравенству Крейна (2) непрерывному характеру в $\boldsymbol{R}^n$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Оператор* $F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)$ *является* $\mathscr{K}$*-устойчивым тогда и только тогда, когда функция* F *продолжается характеристически с любого* $K \in \mathscr{K}$ (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Горина требуется доказать лишь достаточность. Если a и b — такие точки компакта K, для которых $K \subset [a, b]$, то из леммы 3 следует

$$\left|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right|_K = \max\{|F(a)|, |F(b)|\} = \left|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right|_{[a,b]}. \qquad (8)$$

Поскольку отрезок $[a, b]$ является множеством спектрального синтеза относительно алгебры $M(\boldsymbol{R})$, а функция F продолжается характеристически и согласно неравенству Крейна (2) непрерывно с $[a, b]$, то из теоремы Горина следует, что

$$\left\|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right\|_{[a,b]} = \left|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right|_{[a,b]}. \qquad (9)$$

С другой стороны, поскольку $\left\|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right\|_K \leqslant \left\|F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right\|_{[a,b]}$, то из соотношений (8) и (9) следует равенство (3). Так как это верно для любого $K \in \mathscr{K}$ (1), согласно теореме 3 оператор $F\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)$ является $\mathscr{K}$-устойчивым. Теорема 5 доказана.

Замечание. Если функция f удовлетворяет условию леммы 3, то, как видно из доказательства теоремы 5, для f существует хотя бы одно непрерывное характеристическое ее продолжение с любого $K \in \mathscr{K}$ (1).

Среди нетривиальных функций от одного переменного, порождающих $\mathscr{K}$-устойчивый оператор, оказывается, как легко проверить, четные полиномы с неотрицательными коэффициентами и полиномы, все нули которых лежат на некоторой прямой, параллельной мнимой оси. С другой стороны, было бы интересно найти полный набор инвариантов (например, в терминах нулей полиномов), характеризующий класс всех полиномов, порождающих $\mathscr{K}$-устойчивый оператор.

Список литературы: 1. *Горин Е. А.* Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов // Вестн. Харьк. ун-та. Прикл. математика и механика.— 1980.— Вып. 45.— С. 77—105. 2. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ.— Т. 2.— М., 1975.— 901 с. 3. *Крейн М. Г.* О представлении функций интегралами Фурье—Стилтьеса // Учен. зап. Куйбышевск. пед. ин-та им. В. В. Куйбышева.— 1943.— 7.— С. 123—147. 4. *Горин Е. А., Норвидас С. Т.* Экстремали некоторых дифференциальных операторов // Тез. докл. 7-й школы по теории операторов в функц. пространствах.— Минск, 1982.— С. 48—49. 5. *Лукач Е.* Характеристические функции.— М., 1979.— 424 с. 6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М., 1979.— 589 с.

Поступила в редколлегию 25.09.85