О законѣ взаимности простыхъ чиселъ.

В. П. Алексѣевскаго.

Между доказательствами закона взаимности простыхъ чиселъ заслуживаютъ большого вниманія доказательства Эйзенштейна, Шеринга и Кронекера; не смотря на различіе ихъ по формѣ, можно установить между ними преемственную связь. Къ этому же кругу идей относится и предлагаемое доказательство, которое мнѣ кажется болѣе простымъ и естественнымъ.

Пусть p и q числа простыя, h — одно изъ чиселъ натуральнаго рода отъ 1 до $\frac{p-1}{2}$, g_h — наиболѣе подходящее цѣлое число къ дроби $\frac{hq}{p}$, такъ что остатокъ r отъ дѣленія hq на p можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ, но абсолютная его величина меньше $\frac{p}{2}$; слѣдовательно

$$-\frac{p}{2} < hq - g_h p < \frac{p}{2},$$

откуда

$$g_h = E\left(\frac{hq}{p} + \frac{1}{2}\right).$$

Наименьшее значеніе g_h можетъ быть нулемъ; наибольше получится, полагая $h = \frac{p-1}{2}$, и изъ тождества

$$\frac{(p-1)q}{2p} + \frac{1}{2} = \frac{q-1}{2} + \frac{2p-q}{2p}$$

видно, что maximum g_h не можетъ быть болѣе $\frac{q-1}{2}$.

Изъ равенства

$$hq = g_h p + r$$

слѣдуетъ, что знакъ остатка r одинаковъ со знакомъ $(hq - g_h p)$, вслѣдствіе чего предыдущее равенство можно представить въ видѣ сравненія

$$hq \equiv \varrho \cdot \operatorname{sgn}(hq - g_h p)\,, \qquad (\text{mod. } p)$$

гдѣ $\varrho = |r|$, а $\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = \pm 1$.

Если въ этомъ сравненіи дадимъ h всѣ значенія отъ 1 до $\dfrac{p-1}{2}$ и перемножимъ результаты, то, основываясь на извѣстныхъ предложеніяхъ, получимъ:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} (hq - g_h p).$$

Каковъ бы ни былъ знакъ разности

$$hq - g_h p\,,$$

произведеніе

$$[hq - (g_h - 1)p]\,[hq - (g_h - 2)p] \ldots [hq - p]$$

состоитъ изъ положительныхъ множителей, когда $g_h > 1$, поэтому

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{g_h} (hq - kp)\,,$$

или, переставивъ члены бимоновъ во второй части,

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = (-1)^{g_h} \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{g_h} (kp - hq).$$

Число множителей второй части можно сдѣлать постояннымъ, каково-бы ни было h. Дѣйствительно, maximum $g_h \leq \dfrac{q-1}{2}$, и въ произведеніи

$$[(g_h + 1)\,p - hq] \ldots \left[\frac{q-1}{2}\,p - hq\right]$$

всѣ множители положительные, поэтому отъ присоединенія ихъ къ предыдущему произведенію знакъ его не нарушится; слѣдовательно, можно написать:

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = (-1)^{g_h} \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} (kp - hq).$$

Не трудно убѣдиться, что формула эта остается справедливой и въ случаяхъ $g_h = 0$ или 1.

Отсюда, на основанiи замѣченнаго выше, находимъ, что

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum g_h} \prod_{k,h} (kp - hq),$$

$$k = 1, 2 \ldots \frac{q-1}{2}, \quad h = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}.$$

Складывая равенства вида

$$hq = g_h p + r$$

находимъ

$$q \sum h = p \sum g_h + \sum r.$$

Такъ какъ въ числѣ остатковъ существуютъ положительные ϱ' и отрицательные $-\varrho''$, а сумма абсолютныхъ величинъ всѣхъ вычетовъ, какъ извѣстно, равна $\sum h$, то предыдущее равенство можно написать въ видѣ:

$$q \sum h = p \sum g_h + \sum h - 2 \sum \varrho'',$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\sum g_h \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2)$$

когда $q > 2$. Поэтому выраженiе для символа Лежандра принимаетъ видъ:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k,h} (kp - hq).$$

Вслѣдствiе этого и

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k,h} (hq - kp).$$

Перемноживъ эти равенства и замѣтивъ, что соотвѣтственныя пары множителей правыхъ частей отличаются знакомъ, а число ихъ $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$, получимъ:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити.

Н. Н. Салтыкова.

1. Вопросъ о разысканіи интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, рѣшается въ этомъ изслѣдованіи по способу А. Н. Коркина, основанному, какъ извѣстно, на его же теоріи интегрированія системъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи *).

2. Назовемъ черезъ X_1, X_2, X_3 проекціи силы на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3, отнесенной къ единицѣ массы гибкой, нерастяжимой нити, плотность которой есть k, натяженіе — T, дуга, отсчитываемая отъ нѣкоторой ея данной точки, — x_0. Полагая

$$T\frac{dx_i}{dx_0}=x_{3+i}, \qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

представимъ дифференціальныя уравненія равновѣсія нити въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{dx_0}{T}=\frac{dx_1}{x_4}=\frac{dx_2}{x_5}=\frac{dx_3}{x_6}=\frac{dx_4}{-kTX_1}=\frac{dx_5}{-kTX_2}=\frac{dx_6}{-kTX_3},$$

гдѣ

$$T=\sqrt{x_4^2+x_5^2+x_5^2}.$$

*) А. Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. С.-Пб. 1867.

Изслѣдуемый вопросъ состоитъ въ разысканіи интеграловъ послѣдней системы дифференціальныхъ уравненій, общихъ со всякой другой системой, отличной отъ нея значеніями функцій k, X_1, X_2, X_3. Назовемъ соотвѣтствующія послѣднимъ значенія функцій для всякой другой подобной системы уравненій черезъ k_1, Y_1, Y_2, Y_3. Если уравненіе

$$z(x_0, x_1, \dots x_6) = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная, представляетъ интегралъ, общій обѣимъ указаннымъ системамъ уравненій, то, очевидно, функція z есть частный интегралъ системы двухъ линейныхъ, однородныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными $p_0, p_1, \dots p_6$ функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_0, x_1, \dots x_6$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - kTX_i\, p_{3+i}) = 0,$$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - k_1 TY_i\, p_{3+i}) = 0.$$

Вмѣсто второго уравненія возьмемъ разность обоихъ уравненій

$$S_1 p_4 + S_2 p_5 + S_3 p_6 = 0,$$

гдѣ введены обозначенія

$$S_i = kX_i - k_1 Y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Мы предполагаемъ, что силы, приложенныя къ единицѣ длины нити, въ сравниваемыхъ задачахъ различны. Поэтому одна, по крайней мѣрѣ, изъ функцій S_i отлична отъ нуля. Очевидно, не нарушая общности рѣшенія, мы можемъ положить, что

$$S_1 \lessgtr 0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} x_{3+i}\, p_i + T(U_1 p_5 + U_2 p_6) = 0, \\ &p_4 + V_1 p_5 + V_2 p_6 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ мы положили

$$\frac{S_2}{S_1} = V_1, \qquad \frac{S_3}{S_1} = V_2,$$

$$k(X_1 V_1 - X_2) = U_1, \qquad k(X_1 V_2 - X_3) = U_2. \tag{2}$$

Всякая задача интегрированія дифференціальныхъ уравненій равновѣсія гибкой, нерастяжимой нити разрѣшается вполнѣ шестью интегралами. Поэтому задачи эти не мотутъ имѣть болѣе пяти общихъ интеграловъ. Система уравненій (1), въ зависимости отъ значеній своихъ коэффиціентовъ, можетъ имѣть отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ. Соотвѣтственно этому задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити имѣютъ столько же общихъ интеграловъ. Условія существованія опредѣленнаго числа частныхъ интеграловъ системы (1) даютъ уравненія для опредѣленія функцій V и U. Присоединивъ къ послѣднимъ равенства (2), получимъ условія, при которыхъ эти интегралы имѣютъ мѣсто. Дальнѣйшее изложеніе состоитъ въ изслѣдованіи всѣхъ указанныхъ возможныхъ случаевъ. При этомъ мы будемъ предполагать, *что k есть функція дуги x_0, а силы X_1, X_2, X_3 зависятъ отъ дуги и координатъ, такъ что функціи V и U зависятъ только отъ перемѣнныхъ* x_0, x_1, x_2, x_3.

3. Частные интегралы y_4, y_5 второго уравненія (1), гдѣ

$$y_4 = x_5 - V_1 x_4, \qquad y_5 = x_6 - V_2 x_4, \tag{3}$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто x_4, x_5, x_6. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ q_i, $V_{1i}, \ldots$ частныя производныя функцій z, $V_1, \ldots$ по перемѣннымъ значка i. Второе уравненіе (1) утождествляется, а первое принимаетъ видъ

$$\sqrt{ax_4^2 + 2bx_4 + d}\,(A + Bx_4) + C + Dx_4 + Ex_4^2 = 0, \tag{4}$$

гдѣ

$$a = 1 + V_1^2 + V_2^2,$$

$$b = y_4 V_1 + y_5 V_2,$$

$$d = y_4^2 + y_5^2,$$

$$A = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5,$$

$$B = -(V_{10} q_4 + V_{20} q_5),$$

$$C = y_4 q_2 + y_5 q_3,$$

$$D = q_1 + V_1 q_2 + V_2 q_3 - (V_{12} y_4 + V_{13} y_5) q_4 - (V_{22} y_4 + V_{23} y_5) q_5,$$

$$E = -[(V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}) q_4 + (V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}) q_5].$$

По теоріи Коркина уравненіе (4) не должно зависѣть отъ x_4. Выраженіе

$$b^2 - ad = -[y_4^2 + y_5^2 + (y_4 V_2 - y_5 V_1)^2]$$

равняется нулю только при условіяхъ

$$y_4 = 0, \quad y_5 = 0.$$

Исключая послѣдній случай, какъ невозможный, заключаемъ, что выраженіе

$$ax_4^2 + 2bx_4 + d$$

не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Поэтому, для того чтобы равенство (4) не зависѣло отъ x_4, необходимо должны имѣть мѣсто равенства

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

которыя и представляютъ уравненія, опредѣляющія искомые интегралы. Изъ второго и пятаго уравненій послѣдней системы заключаемъ, или

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0,$$

или

$$\frac{V_{10}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}} = \frac{V_{20}}{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}. \tag{5}$$

Первое предположеніе не имѣетъ мѣста, ибо ведетъ къ интегралу

$$z = \text{пост.},$$

каковой мы исключаемъ изъ разсмотрѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ перваго уравненія слѣдуетъ $q_0 = 0$, изъ третьяго, такъ какъ z не зависитъ отъ y_4, y_5, слѣдуетъ $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ и, наконецъ, изъ четвертаго получаемъ $q_1 = 0$.

Итакъ, искомые интегралы опредѣляются системой уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0, \\
&q_1 + V_1 q_2 + V_2 q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0, \\
&y_4 q_2 + y_5 q_3 = 0, \\
&V_{10} q_4 + V_{20} q_5 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при чемъ функціи V удовлетворяютъ уравненію (5).

Выполненное преобразованіе всегда имѣетъ мѣсто, когда функціи V конечны, опредѣленны и дифференцируемы, что мы разумѣемъ при всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ. Это преобразованіе справедливо въ частности и для значеній $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, такъ какъ при этихъ условіяхъ выраженія (3) принимаютъ видъ x_5, x_6 и представляютъ частные интегралы уравненія $p_4 = 0$, къ которому приводится въ этомъ случаѣ второе уравненіе системы (1). Такимъ образомъ уравненія (6) опредѣляютъ всѣвозможные интегралы, общіе задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, и мы приходимъ къ изслѣдованію всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда система (6) имѣетъ отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ.

4. Если система (6) имѣетъ пять частныхъ интеграловъ, то три изъ ея уравненій должны уничтожаться, или въ силу остальныхъ уравненій, или тождественно, при чемъ всѣ q_i сохраняютъ значенія, отличныя отъ нуля. Если число частныхъ интеграловъ системы (6) должно быть четыре, то, или два изъ ея уравненій должны уничтожаться, при чемъ всѣ $q_i \lesseqgtr 0$, или уничтожаются три изъ ея уравненій и одна изъ производныхъ q_i. Очевидно, ни одинъ изъ указанныхъ случаевъ не можетъ имѣть мѣста. Поэтому заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити, не могутъ имѣть пяти и четырехъ общихъ интеграловъ.

5. Если система уравненій (6) имѣетъ три частныхъ интеграла, то одно изъ ея уравненій должно быть слѣдствіемъ остальныхъ. Составляя функціональные опредѣлители четвертаго порядка изъ первыхъ частей уравненій (6) по перемѣннымъ $q_0, q_1, \dots q_5$, заключаемъ, что единственное условіе, при которомъ система (6) приводится къ тремъ уравненіямъ, выражается равенствами

$$V_{10} = 0, \qquad V_{20} = 0. \tag{7}$$

По той же самой причинѣ и принимая во вниманіе разсужденія, изъ которыхъ мы пришли къ условіямъ (5), получаемъ

$$V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13} = 0, \qquad V_{21} + V_1 V_{22} + V_{23} = 0. \tag{8}$$

Уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0,\\
&F_1 = q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0,\\
&F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти уравненія должны представлять якобіевскую систему, т. е. равенства

$$\left.\begin{aligned}(F_0, F_2) = \frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4}U_1 - U_2\right)q_3 + \left(U_{12} + \frac{y_5}{y_4}U_{13}\right)q_4 + \\ + \left(U_{22} + \frac{y_5}{y_4}U_{23}\right)q_5 = 0\,, \\ (F_0, F_1) = 0\,, \qquad (F_1, F_2) = 0\,,\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

должны удовлетворяться тождественно. Такъ какъ функціи V, U не зависятъ отъ y_4, y_5, то изъ перваго равенства заключаемъ

$$U_1 = 0\,, \qquad U_2 = 0\,.$$

Такимъ же образомъ изъ остальныхъ двухъ равенствъ находимъ

$$V_{13} = 0\,, \qquad V_{12} = V_{23}\,, \qquad V_{22} = 0\,, \qquad V_{122} = 0\,.$$

Послѣднія уравненія совмѣстно съ (7) и (8) приводятъ опредѣленіе функцій V къ интегрированію точныхъ дифференціаловъ

$$dV_1 = -\frac{V_1 dx_1}{x_1 + a_1} + \frac{dx_2}{x_1 + a_1}\,,$$

$$dV_2 = -\frac{V_2 dx_1}{x_1 + a_1} + \frac{dx_3}{x_1 + a_1}\,,$$

гдѣ a_1 — произвольная постоянная. Отсюда

$$V_1 = \frac{x_2 + a_2}{x_1 + a_1}\,, \qquad V_2 = \frac{x_3 + a_3}{x_1 + a_1}\,,$$

гдѣ a_2, a_3 — произвольныя постоянныя.

Искомые интегралы опредѣляются интегрированіемъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_3 - \frac{x_3 + a_3 - \dfrac{y_5}{y_4}(x_2 + a_2)}{x_1 + a_1}dx_1 - \frac{y_5}{y_4}dx_2 = 0\,,$$

$$dy_4 + \frac{y_4}{x_1 + a_1}dx_1 = 0\,,$$

$$dy_4 + \frac{y_5}{x_1 + a_1}dx_1 = 0\,.$$

Интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидны. Первое же уравненіе въ силу послѣднихъ двухъ интеграловъ становится точнымъ дифференціаламъ. Такимъ образомъ искомые интегралы принимаютъ видъ

$$y_4(x_1+a_1)=C_1\,,$$

$$y_5(x_1+a_1)=C_2\,,$$

$$\frac{x_3+a_3}{x_1+a_1}-\frac{y_5}{y_4}\frac{x_2+a_2}{x_1+a_1}=C_3\,,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — произвольныя постоянныя. Возвращаясь къ исходной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой X_1, X_2, X_3 *на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ* x_1, x_2, x_3 *выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити* x_0, *удовлетворяющими условіямъ*

$$\frac{X_1}{x_1+a_1}=\frac{X_2}{x_2+a_2}=\frac{X_3}{x_3+a_3}\,,$$

имѣютъ три общихъ интеграла

$$T\left[(x_2+a_2)\frac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\frac{dx_2}{dx_0}\right]=C_1\,,$$

$$T\left[(x_3+a_3)\frac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\frac{dx_3}{dx_0}\right]=C_2\,,$$

$$\frac{(x_2+a_2)\dfrac{dx_3}{dx_0}-(x_3+a_3)\dfrac{dx_2}{dx_0}}{(x_2+a_2)\dfrac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\dfrac{dx_2}{dx_0}}=C_3\,,$$

гдѣ T — *натяженіе нити*, C_1, C_2, C_3 — *произвольныя постоянныя.*

Очевидно, послѣдній результатъ остается безъ измѣненія и въ томъ случаѣ, когда нить однородна, т. е. k — постоянная величина, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги.

6. Если изслѣдуемыя задачи имѣютъ два общихъ интеграла, то уравненія (6) должны представлять замкнутую систему. Составляя скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей ея уравненій третьяго и четвертаго, заключаемъ, такъ какъ эти скобки должны уничтожаться въ силу тѣхъ же уравненій третьяго и четвертаго, что и въ разсматриваемомъ случаѣ должны имѣть мѣсто уравненія (7) и (8). Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями (9), которые въ этомъ случаѣ приводятся къ замкнутой системѣ прибавленіемъ одного изъ равенствъ (10), положимъ перваго.

Излѣдуемая система уравненій становится

$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0\,,\\
&F_1 = q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0\,,\\
&F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0\,,\\
&F_3 = \frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) q_3 + \left(U_{12} + \frac{y_5}{y_4} U_{13}\right) q_4 +\\
&\qquad + \left(U_{22} + \frac{y_5}{y_4} U_{23}\right) q_5 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Условія замкнутости послѣдней системы

$$(F_0\,,\ F_3) = 0\,,\qquad (F_1\,,\ F_2) = 0\,,$$

$$(F_0\,,\ F_1) = 0\,,\qquad (F_1\,,\ F_3) = 0\,,\qquad (F_2\,,\ F_3) = 0$$

должны быть слѣдствіями уравненія $F_3 = 0$. Такъ первое изъ этихъ условій даетъ

$$\frac{\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2}{U_{20} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{10} + \dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U - U_2\right) U_1} =$$

$$= \frac{U_{12} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{13}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{13} - U_{120} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{130}} =$$

$$= \frac{U_{22} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{23}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{23} - U_{220} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{230}}\,.$$

Функціи U_1, U_2 независятъ отъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Поэтому изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуютъ новыя

$$U_2 U_{13} + U_1 U_{12} = 0,$$

$$U_2 U_{120} - U_{20} U_{12} = 0,$$

$$U_2 U_{130} - U_1 U_{120} + U_{10} U_{12} - U_{20} U_{13} = 0,$$

$$U_{10} U_{13} - U_1 U_{130} = 0,$$

$$U_2 U_{23} + U_1 U_{22} = 0,$$

$$U_2 U_{220} - U_{20} U_{22} = 0,$$

$$U_2 U_{230} - U_1 U_{220} + U_{10} U_{22} - U_{20} U_{23} = 0,$$

$$U_{10} U_{23} - U_1 U_{230} = 0.$$

Изъ условія $(F_2, F_3) = 0$ подобнымъ же образомъ получаемъ уравненія

$$U_2 U_{122} - 2U_{22} U_{12} = 0,$$

$$-U_1 U_{122} + 2U_2 U_{132} + 2(U_{12} - U_{23}) U_{12} - 2U_{22} U_{13} = 0,$$

$$U_2 U_{133} - 2U_1 U_{132} + 2U_{13} U_{12} + 2(U_{12} - U_{23}) U_{13} = 0,$$

$$-U_1 U_{133} + 2U_{13}^2 = 0,$$

$$U_2 U_{222} - 2U_{22}^2 = 0,$$

$$-U_1 U_{222} + 2U_2 U_{232} + 2(U_{12} - U_{23}) U_{22} - 2U_{22} U_{23} = 0,$$

$$U_2 U_{233} - 2U_1 U_{232} + 2U_{13} U_{22} + 2(U_{12} - U_{23}) U_{23} = 0,$$

$$-U_1 U_{233} + 2U_{13} U_{23} = 0.$$

Эти 16 уравненій выведены въ предположеніи, что $U_1 \lessgtr 0$, $U_2 \lessgtr 0$. Въ противномъ предположеніи всѣ они удовлетворяются тождественно и послѣдній случай является частнымъ случаемъ разсматриваемаго. Будемъ называть эти уравненія соотвѣтственно ихъ порядку первымъ, вторымъ,... шестнадцатымъ. Легко видѣть, что уравненія второе и шестое, девятое и тринадцатое, двѣнадцатое и шестнадцатое и, наконецъ, первое и пятое даютъ два интегральныхъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} U_{22} &= \psi U_{12} \\ U_{23} &= \psi U_{13}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

гдѣ ψ — произвольная функція одной только перемѣнной x_1. Въ силу послѣднихъ уравненій, разсматриваемая система 16 уравненій приводится къ пяти независимымъ между собой уравненіямъ

$$U_2 U_{13} + U_1 U_{12} = 0\,,$$
$$U_2 U_{120} - U_{20} U_{12} = 0\,,$$
$$U_1 U_{130} - U_{10} U_{13} = 0\,,$$
$$U_2 U_{122} - 2 U_{22} U_{12} = 0\,,$$
$$U_1 U_{133} - 2 U_{13}^2 = 0\,.$$

Изъ первыхъ трехъ послѣдней системы уравненій и изъ (12) получаемъ

$$\left.\begin{aligned} U_{12} &= f U_2\,, & U_{13} &= -f U_1\,, \\ U_{22} &= \psi f U_2\,, & U_{23} &= -\psi f U_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

гдѣ f — произвольная функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Внося эти значенія въ четвертое и пятое уравненія послѣдней системы пяти уравненій и полагая $U_1 \lesseqgtr 0$, $U_2 \lesseqgtr 0$, получаемъ два уравненія, опредѣляющія функцію f,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \psi f^2 = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} + f^2 = 0\,. \tag{14}$$

Выраженіе $\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2$ отлично отъ нуля, ибо функціи U неравны нулю. Поэтому уравненіе $F_3 = 0$, въ силу равенствъ (13), принимаетъ видъ

$$F_3' = q_3 - y_4 f (q_4 + \psi q_5) = 0\,.$$

Условіе $(F_1\,, F_2) = 0$ должно удовлетворяться въ силу послѣдняго уравненія. Отсюда получаемъ шесть уравненій, опредѣляющихъ функціи V,

$$\left.\begin{aligned} V_{122} &= 2 f V_{22}\,, \\ V_{132} &= f (V_{23} - V_{12})\,, \\ V_{133} &= -2 f V_{13}\,, \\ V_{222} &= \psi V_{122}\,, \\ V_{232} &= \psi V_{132}\,, \\ V_{233} &= \psi V_{133}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Условіе $(F_0, F_1) = 0$ приводитъ къ четыремъ уравненіямъ. Въ силу равенствъ (13), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, а два остальные принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} U_{11} + (V_{12} - fV_2)U_1 + (V_{13} + fV_1)U_2 = 0\,, \\ U_{21} + (V_{22} - \psi f V_2)U_1 + (V_{23} + \psi f V_1)U_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Наконецъ, условіе $(F_1, F_3') = 0$ даетъ четыре уравненія. Въ силу равенствъ (14) и (15), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, остальныя же приводятся къ виду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + f(V_{12} + \psi V_{13}) - f^2(V_2 - \psi V_1) = 0\,, \tag{17}$$

$$f[\psi' + \psi(V_{23} - \psi V_{13}) + V_{22} - \psi V_{12}] = 0\,, \tag{18}$$

гдѣ ψ' обозначаетъ производную по x_1 функціи ψ.

7. Мы приходимъ къ разсмотрѣнію двухъ случаевъ, соотвѣтствующихъ равенству нулю каждого изъ двухъ множителей лѣвой части уравненія (18). Вычисливъ значенія функцій V, U въ предположеніи, что первый изъ этихъ множителей равенъ нулю, легко заключить, что эти значенія представляютъ частный случай значеній, которыя мы получимъ приравнивая нулю второй множитель лѣвой части уравненія (18). Въ самомъ дѣлѣ, если

$$f = 0\,,$$

то изъ уравненій (7) и (15) слѣдуетъ

$$V_{12} = v_1\,, \quad V_{13} = v_2\,, \quad V_{22} = v_3\,, \quad V_{23} = v_4\,,$$

гдѣ v_1, v_2, v_3, v_4 — произвольныя функціи одной только перемѣнной x_1. Обозначая по Лагранжу производныя по x_1 послѣднихъ функцій, мы получимъ для вычисленія ихъ, въ силу уравненій (8), слѣдующую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned} v_1' &= -(v_1^2 + v_2 v_3)\,, \\ v_2' &= -v_2(v_1 + v_4)\,, \\ v_3' &= -v_3(v_1 + v_4)\,, \\ v_4' &= -(v_4^2 + v_2 v_3)\,. \end{aligned}$$

Общій интегралъ послѣдней системы уравненій представляется слѣдующимъ образомъ

$$v_1 = \frac{x_1 + a_1}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_2 = \frac{a_2}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_3 = \frac{a_3}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_4 = \frac{x_1 + a_4}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольныя постоянныя. Наконецъ, интегрируя систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dV_1 = V_{11} dx_1 + V_{12} dx_2 + V_{13} dx_3,$$
$$dV_2 = V_{21} dx_1 + V_{22} dx_2 + V_{23} dx_3,$$

которая рѣшеніемъ относительно выраженій $dx_2 - V_1 dx_1$, $dx_3 - V_2 dx_1$, приводится къ двумъ точнымъ дифференціаламъ, находимъ:

$$V_1 = \frac{(x_1 + a_1)(x_2 + a_5) + a_2(x_3 + a_6)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$V_2 = \frac{(x_1 + a_4)(x_3 + a_6) + a_3(x_2 + a_5)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3}.$$

Изъ уравненій (13) и (16) слѣдуетъ

$$U_{12} = 0, \quad U_{13} = 0, \quad U_{22} = 0, \quad U_{23} = 0,$$
$$U_{11} + v_1 U_1 + v_2 U_2 = 0,$$
$$U_{21} + v_3 U_1 + v_4 U_2 = 0.$$

Уравненія, представляющія результаты рѣшенія послѣднихъ двухъ уравненій относительно U_1, U_2, легко представляются въ видѣ точныхъ производныхъ по перемѣнной x_1. Отсюда получаемъ

$$U_1 = \frac{(x_1 + a_1)\Psi_1(x_0) + a_2 \Psi_2(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$U_2 = \frac{(x_1 + a_4)\Psi_2(x_0) + a_3 \Psi_1(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ Ψ_1, Ψ_2 — произвольныя функціи перемѣнной x_0.

8. Если $f \lessgtr 0$, то изъ уравненія (18) слѣдуетъ

$$\psi' + \psi(V_{23} - \psi V_{13}) + V_{22} - \psi V_{12} = 0. \tag{19}$$

Полагаемъ

$$V_2 - \psi V_1 = Z.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій (15) и уравненій (8) получаемъ

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} + Z\frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0.$$

Слѣдовательно

$$Z = \frac{c_2 x_2 + x_3 + c_3}{x_1 + c_1}\,,$$

и потому изъ уравненія (19) находимъ

$$\psi = \frac{c_4 - c_2 x_1}{x_1 + c_1}\,,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя.

Функція V_1 опредѣляется первымъ уравненіемъ (8) и тремя первыми (15), которыя легко приводятся къ слѣдующему виду

$$V_{11} + V_1 V_{12} + (Z + \psi V_1) V_{13} = 0\,,$$

$$V_{122} = 2f\left(\frac{c_2}{x_1 + c_1} + \psi V_{12}\right),$$

$$V_{132} = f\left(\frac{1}{x_1 + c_1} + \psi V_{13} - V_{12}\right),$$

$$V_{133} = -2f V_{13}.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій получаемъ, исключая V_{12}, V_{13},

$$V_{122} + 2\psi V_{123} + \psi^2 V_{133} = 2nf\,,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(V_{12} + \psi V_{13}) + \psi\frac{\partial}{\partial x_3}(V_{12} + \psi V_{13}) = 2nf\,,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$n = \frac{c_1 c_2 + c_4}{(x_1 + c_1)^2}.$$

Изъ уравненій (14) заключаемъ, что

$$f = \frac{1}{x_3 - \psi x_2 + \varphi},$$

гдѣ φ — произвольная функція перемѣнной x_1. Поэтому, интегрируя послѣднее уравненіе въ частныхъ производныхъ функціи $V_{12} + \psi V_{13}$, мы получимъ, въ силу уравненій (7),

$$V_{12} + \psi V_{13} = [2nx_2 + \Pi(x_1, \omega)]f,$$

гдѣ Π — произвольная функція перемѣнной x_1 и перемѣннаго аргумента $\omega = x_3 - \psi x_2$. Внося значенія функцій f, $V_{12} + \psi V_{13}$, Z, ψ въ уравненіе (17), получаемъ

$$\Pi(x_1, \omega) = \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + \varphi',$$

гдѣ φ' представляетъ производную функціи φ по перемѣнной x_1. Такимъ образомъ опредѣленіе функціи V_1 приводится къ интегрированію системы трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &V_{12} + \psi V_{13} - Nf = 0, \\ &V_{11} + Z V_{13} + Nf V_1 = 0, \\ &V_{133} + 2f V_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

гдѣ мы положили

$$N = nx_2 + Z + \varphi'.$$

Если уравненіе $\Psi(V_1, x_1, x_2, x_3) = 0$ есть общій интегралъ первыхъ двухъ уравненій (20), то функція Ψ опредѣляется уравненіями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + Nf \frac{\partial \Psi}{\partial V_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + Z \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} - Nf V_1 \frac{\partial \Psi}{\partial V_1} = 0.$$

Частные интегралы ω, ω_1 перваго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega = x_3 - \psi x_2, \qquad \omega_1 = V_1 - (Z + \psi') x_2 f,$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто перемѣнныхъ x_2, x_3, V; значеніе функціи Ψ въ новыхъ перемѣнныхъ назовемъ чрезъ Φ. Первое изъ нашихъ уравненій утождествляется, второе же принимаетъ видъ

$$C + Dx_2 = 0,$$

гдѣ

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{\omega_1}{\omega + \varphi} \left(\frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + \varphi' \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1},$$

$$D = 2n \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{\varphi'' + 2n\omega_1}{\omega + \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}.$$

По теоріи Коркина слѣдуетъ

$$C = 0, \qquad D = 0. \tag{21}$$

Такъ какъ выраженіе (C, D) зависитъ только отъ $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}$, линейно и однородно по нимъ, то равенство $(C, D) = 0$ не можетъ давать новаго уравненія, но должно уничтожаться въ силу уравненія $D = 0$.

Отсюда получаемъ уравненіе

$$3\varphi'' + (x_1 + c_1)\varphi''' = 0,$$

которое даетъ значеніе функціи φ

$$\varphi = \frac{c_5'}{x_1 + c_1} + c_6 x_1 + c_7',$$

гдѣ c_5', c_6, c_7' — произвольныя постоянныя. Система уравненій (21) имѣетъ одинъ только частный интегралъ, который находится интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_1 + \frac{1}{\omega + \varphi} \left[\frac{c_5(\omega + c_3)}{(x_1 + c_1)^2} + \omega_1 \varphi' \right] dx_1 +$$

$$+ \frac{1}{\omega + \varphi} \left(\omega_1 - \frac{c_5}{x_1 + c_1} \right) d\omega = 0,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$c_5 = -\frac{c_5'}{c_1 c_2 + c_4}.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія есть

$$\omega_1(\omega + \varphi) - c_5 \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} = h,$$

гдѣ h — произвольная постоянная. Поэтому для функціи V_1 получаемъ слѣдующее значеніе

$$V_1 = [(Z+\varphi')\,x_2 + c_5\,\frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + a_8]\,f\,,$$

гдѣ a_8 — произвольная постоянная. Легко убѣдиться непосредственной подстановкой, что послѣднее значеніе V_1 утождествляетъ также и третье уравненіе (20). Вводя обозначеніе

$$c_7 = c_7' - c_2 c_5$$

и пользуясь уравненіемъ $V_2 - \psi V_1 = Z$, получаемъ значенія функцій V въ слѣдующемъ видѣ

$$V_1 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)\,(x_2 + c_5) + (c_6 x_2 + c_8)\,(x_1 + c_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)\,(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)\,(x_2 + c_5)}\,,$$

$$V_2 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)\,(x_3 + c_6 x_1 + c_7) + (c_6 x_2 + c_8)\,(c_4 - c_2 x_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)\,(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)\,(x_2 + c_5)}\,.$$

Значенія функцій U вычисляются изъ уравненій (13) и (16). Вводя новую функцію W, опредѣляемую уравненіемъ

$$U_2 - \psi U_1 = W\,,$$

получаемъ изъ указанныхъ уравненій

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{W}{x_1 + c_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_3} = 0\,.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$W = \frac{\Psi_1(x_0)}{x_1 + c_1}\,,$$

гдѣ Ψ_1 — произвольная функція перемѣнной x_0. Функція U_1 опредѣляется уравненіями

$$U_{11} = -\left[\frac{(c_1 c_2 + c_4)\,(x_2 + c_5)}{x_1 + c_1} + c_6(x_1 + c_1)\right]\frac{U_1}{S} - \frac{\Psi_1(x_0)(x_2 + c_5)}{(x_1 + c_1)\,S}\,,$$

$$U_{12} = \frac{(c_4 - c_2 x_1)\,U_1 + \Psi_1(x_0)}{S}\,,$$

$$U_{13} = -\frac{(x_1 + c_1)\,U_1}{S}\,,$$

гдѣ

$$S=(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5).$$

Поэтому легко получить

$$U_1=\frac{(x_2+c_5)\Psi_1(x_0)+(x_1+c_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

$$U_2=\frac{(x_3+c_6x_1+c_7)\Psi_1(x_0)+(c_4-c_2x_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

гдѣ Ψ_2 — вторая произвольная функція x_0.

Теперь легко убѣдиться, что выраженія функцій V, U, полученныя въ n^0 7 настоящаго изслѣдованія, представляютъ частный случай послѣднихъ значеній. Въ самомъ дѣлѣ, они получаются какъ предѣлы послѣднихъ выраженій, когда $c_2=0$, а постоянныя c_5', c_6, c_7, c_8 и функція $\Psi_2(x_0)$, независимо отъ значеній перемѣнной x_0, которая измѣняется между нѣкоторыми двумя конечными предѣлами, стремятся къ ∞, при томъ такъ, что отношенія величинъ c_5, c_7, c_8 къ c_6 стремятся къ конечнымъ предѣламъ, а отношеніе функціи $\Psi_2(x_0)$ къ c_6 стремится къ конечной, но вполнѣ произвольной функціи перемѣнной x_0.

9. Возвращаемся къ уравненіямъ (11), и внесемъ въ нихъ найденныя значенія функцій V, U. Искомые интегралы опредѣляются интегрированіемъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dy_4+U_1dx_0+(Ay_4+By_5)dx_1-y_5fdx_2+y_4fdx_3=0,$$

$$dy_5+U_2dx_0+(Cy_4+Dy_5)dx_1-y_5\varphi fdx_2+y_4\varphi fdx_3=0,$$

гдѣ введены обозначенія

$$A=\frac{c_2(x_2+c_5)+c_6(x_1+c_1)}{S},$$

$$B=\frac{x_2+c_5}{S},$$

$$C=\frac{c_2(x_3+c_7)+c_4c_6}{S},$$

$$D=\frac{x_3+c_6x_1+c_7}{S},$$

а выраженіе S имѣетъ прежнее значеніе. Интегралы послѣдней системы уравненій суть

$$(c_2x_1 - c_4)y_4 + (x_1 + c_1)y_5 + \int \Psi_1(x_0)dx_0 = \alpha,$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)y_4 - (x_2 + c_5)y_5 + \int \Psi_2(x_0)dx_0 = \beta,$$

гдѣ α, β — произвольныя постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождества

$$(c_2x_1 - c_4)U_1 + (x_1 + c_1)U_2 = \Psi_1(x_0),$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)U_1 - (x_2 + c_5)U_2 = \Psi_2(x_0).$$

Поэтому сумма произведеній перваго изъ нашихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ на $c_2x_1 - c_4$ и второго на $x_1 + c_1$ представляетъ точный дифференціалъ. Сумма произведеній перваго уравненія на $x_3 + c_6x_1 + c_7$ и второго на $-(x_2 + c_5)$ тоже — точный дифференціалъ.

Принимаемъ во вниманіе тождества

$$(c_2x_1 - c_4)V_1 + (x_1 + c_1)V_2 = x_3 + c_2x_2 + c_3,$$
$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)V_1 - (x_2 + c_5)V_2 = c_6x_2 + c_8,$$

и возвращаемся къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ; вводя новыя обозначенія

$$c_3 = \frac{a_1}{a_4}, \quad c_4 = \frac{a_2}{a_4}, \quad c_1 = -\frac{a_3}{a_4}, \quad c_2 = -\frac{a_5}{a_4},$$

$$c_8 = \frac{a_6}{a_9}, \quad c_7 = -\frac{a_7}{a_9}, \quad c_5 = \frac{a_8}{a_9}, \quad c_6 = -\frac{a_{10}}{a_9},$$

$$a_4\Psi_1(x_0) = F_1(x_0), \qquad a_9\Psi_2(x_0) = F_2(x_0),$$

$$\alpha a_4 = C_1, \qquad \beta a_9 = C_2,$$

приходимъ къ заключенію:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ массы нити, проекціи которой X_1, X_2, X_3 на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3 выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити x_0, удовлетворяющими условіямъ

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_3 X_1 - x_1 X_3) + a_5(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_1(x_0),$$
$$k[a_6 X_1 + a_7 X_2 + a_8 X_3 + a_9(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_{10}(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_2(x_0),$$

имѣютъ два общихъ интеграла

$$T\left[a_1\frac{dx_1}{dx_0} + a_2\frac{dx_2}{dx_0} + a_3\frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_3\frac{dx_1}{dx_0} - x_1\frac{dx_3}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_5\left(x_1\frac{dx_2}{dx_0} - x_2\frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_1(x_0)\,dx_0 = C_1,$$
$$T\left[a_6\frac{dx_1}{dx_0} + a_7\frac{dx_2}{dx_0} + a_8\frac{dx_3}{dx_0} + a_9\left(x_2\frac{dx_3}{dx_0} - x_3\frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{10}\left(x_1\frac{dx_2}{dx_0} - x_2\frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_2(x_0)\,dx_0 = C_2,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C_1, C_2 — произвольныя постоянныя.

10. Предположимъ, что нить однородна, т. е. k — величина постоянная, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги. Легко видѣть, что для этого случая въ предыдущихъ формулахъ $n^0 n^0$ 7, 8 произвольныя функціи $\Psi_1(x_0)$, $\Psi_2(x_0)$ должны быть замѣнены произвольными постоянными.

11. Переходимъ, наконецъ, къ разсмотрѣнію случая, когда изслѣдуемыя задачи имѣютъ одинъ общій интегралъ. Система уравненій (6) въ этомъ предположеніи должна имѣть одинъ частный интегралъ и, слѣдовательно, приводится къ якобіевской прибавленіемъ одного уравненія. За послѣднее мы возьмемъ уравненіе, лѣвая часть котораго представляетъ скобки Пуассона, составленная изъ лѣвыхъ частей третьяго и четвертаго уравненій (6). Въ предыдущихъ вычисленіяхъ это уравненіе удовлетворялось тождественно въ силу уравненій (6) и приводило, такимъ образомъ, къ условіямъ (7). Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе является независимымъ отъ уравненій (6) и, слѣдовательно, вообще функціи V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Воспользовавшись этимъ замѣчаніемъ, положимъ

$$\frac{V_{20}}{V_{10}} = W_1 \tag{22}$$

и замѣтимъ, что въ изслѣдуемомъ случаѣ функція W_1 сохраняетъ конечное и опредѣленное значеніе. Искомый интегралъ мы будемъ вычислять по способу Коркина, исходя изъ системы уравненій (6). Частный интегралъ ω_4 послѣдняго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega_4 = y_4 W_1 - y_5,$$

принимаемъ независимой перемѣнной вмѣсто двухъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ s_i, $W_{1i}, \ldots$ частныя производныя функцій z, $W_1, \ldots$ по перемѣннымъ значка i. Система уравненій (6) преобразовывается въ слѣдующую:

$$A + By_4 = 0\,,$$

$$C + Dy_4 = 0\,,$$

$$E + Fy_4 + Gy_4^2 = 0\,,$$

гдѣ легко составить выраженія значеній A, $B, \ldots G$. По теоріи Коркина необходимо

$$A = 0, \qquad B = 0, \ldots \qquad G = 0. \tag{23}$$

Если введемъ новыя функціи W_2, W_3, опредѣляемыя уравненіями

$$U_1 W_1 - U_2 = W_2\,, \qquad V_1 W_1 - V_2 = W_3\,,$$

то изъ уравненій (23) получаются слѣдующія уравненія, опредѣляющія искомый интегралъ

$$\left.\begin{aligned} &s_0 - W_2 s_4 = 0\,, \\ &s_1 - \omega_4 W_{33} s_4 = 0\,, \\ &s_2 - \omega_4 W_{13} s_4 = 0\,, \\ &s_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и уравненія, опредѣляющія функціи W_1, W_3,

$$W_{10} = 0\,,$$

$$W_{12} + W_1 W_{13} = 0\,,$$

$$W_{11} - W_3 W_{13} - W_1 W_{33} - W_{32} = 0.$$

Изъ уравненій (5) и (22) въ силу послѣднихъ уравненій, получаемъ

$$W_{31} - W_3 W_{33} = 0\,,$$

$$W_{30} = 0.$$

Наконецъ, система уравненій (24) должна быть якобіевской. Составляя равенства, выражающія послѣднее условіе, получимъ уравненія, опредѣляющія функціи W,

$$W_{23}=0\,,\qquad W_{333}=0\,,\qquad W_{133}=0\,,$$

$$W_{21}-W_2W_{33}=0\,,$$

$$W_{22}+W_2W_{13}=0\,,$$

$$W_{332}+W_{131}=0\,.$$

Интегрируя послѣднюю систему одиннадцати уравненій въ частныхъ производныхъ трехъ функцій W, легко получимъ ихъ значенія

$$W_1=\frac{x_3+c_3x_1+c_4}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

$$W_3=\frac{c_3x_2-c_1x_3+c_5}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

$$W_2=\frac{F(x_0)}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя, F — произвольныя функція x_0.

Искомый интегралъ опредѣляется интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_4+\frac{1}{x_2+c_1x_1+c_2}[\omega_4dx_2+\omega_4c_1dx_1+F(x_0)dx_0]=0$$

и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\omega_4(x_2+c_1x_1+c_2)+\int F(x_0)dx_0=\alpha\,,$$

гдѣ α — произвольная постоянная. Вводимъ новыя обозначенія

$$c_1=-\frac{a_5}{a_4},\quad c_2=\frac{a_3}{a_4},\quad c_3=-\frac{a_6}{a_4},\quad c_4=-\frac{a_2}{a_4}\,,$$

$$c_5=\frac{a_1}{a_4},\quad a_4F(x_0)=\Psi(x_0),\quad \alpha=\frac{C}{a_4}\,;$$

возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой X_1, X_2, X_3 на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3 выражаются функціями послѣднихъ и дуги x_0, удовлетворяющими условію

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_5(x_3 X_1 - x_1 X_3) + \\ + a_6(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = \Psi(x_0),$$

имѣютъ одинъ общій интегралъ

$$T\left[a_1 \frac{dx_1}{dx_0} + a_2 \frac{dx_2}{dx_0} + a_3 \frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_2 \frac{dx_3}{dx_0} - x_3 \frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right. \\ \left. + a_5\left(x_3 \frac{dx_1}{dx_0} - x_1 \frac{dx_3}{dx_0}\right) + a_6\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int \Psi(x_0) dx_0 = C,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C — произвольная постоянная.

12. Преобразованія предыдущаго n^0 11 возможны только въ предположеніи, что V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Если же функціи V_1, V_2 не зависятъ отъ x_0, какъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда нить однородна и силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги x_0, то для разысканія одного интеграла въ этомъ случаѣ возвращаемся къ системѣ пяти уравненій n^0 3

$$A = 0, \qquad B = 0, \ldots \qquad E = 0.$$

При нашемъ условіи второе изъ этихъ урявненій уничтожается тождественно, остальные же принимаютъ видъ:

$$q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0,$$

$$q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0,$$

$$q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0,$$

$$q_4 + W_1 q_5 = 0,$$

гдѣ

$$W_1 = \frac{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}},$$

при чемъ функція W_1 зависитъ только отъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Принимаемъ частный интегралъ послѣдняго изъ уравненій разсматриваемой системы за независимую перемѣнную вмѣсто y_4, y_5. Очевидно дальнѣйшія вычисленія будутъ тѣ же, что и въ n^0 11, лишь только произвольная функція $F(x_0)$ должна быть замѣнена въ разсматриваемомъ случаѣ произвольной постоянной.

Обобщенiе перваго способа Якоби интегрированiя дифференцiальнаго уравненiя съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функцiи.

Н. Н. Салтыкова.

Въ предлагаемой статьѣ преслѣдуется мысль распространить первый способъ Якоби интегрированiя одного уравненiя съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функцiи на случай системы нѣсколькихъ уравненiй.

Назовемъ черезъ $p_1, p_2, \dots p_n$ частныя производныя перваго порядка неизвѣстной функцiи z по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots x_n$. Возьмемъ систему m уравненiй, не заключающихъ явно перемѣнной z,

$$\left.\begin{array}{c} p_h + H_h(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots m;\ m < n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Предполагаемъ, что эти уравненiя находятся въ *инволюцiи*, т. е. равенства

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0 \qquad (2)$$

имѣютъ мѣсто тождественно для всѣхъ различныхъ значенiй h и k отъ 1 до m. Составляемъ уравненiя

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+i} &= \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\, dx_h\,, \\ dp_{m+i} &= -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\, dx_h\,, \\ i &= 1\,,\ 2\,, \ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Послѣднія представляютъ, какъ извѣстно, въ силу равенствъ (2), систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи имѣется въ виду установить зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) и (3), вводя въ теорію разсматриваемыхъ уравненій понятіе о *главной функціи*. При этомъ въ излагаемомъ обобщеніи принимается за исходное то выраженіе *главной функціи* Якоби для одного уравненія, которое указано Майеромъ *). Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что съ равнымъ успѣхомъ можно пользоваться и соображеніями Бертрана и Дарбу **) отросительно вида послѣдней. Рѣшеніе вопроса о связи между задачами интегрированія уравненій (1) и (3) вытекаетъ изъ справедливости слѣдующихъ предложеній.

Теорема первая. *Если значеніе*

$$z = V(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m}) + b\,, \tag{4}$$

гдѣ $b\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m}$ — *произвольныя постоянныя, представляетъ полный интегралъ уравненій (1), при чемъ функціональный опредѣлитель*

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}\,,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}\,, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1\,,\ \ b_2\,, \ldots b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

отличенъ отъ нуля, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}\,,\quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \\ i = 1\,,\ 2\,, \ldots n-m\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

*) Math. An., Bd. 3, S. 433.

**) Comptes R., t. LXXIX, p. 1488, t. LXXX, p. 160, t. LXXXII, p. 641. Bullet. des sciences math. et astron., t. 8. p. 249.

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-m}$ — *новыя произвольныя постоянныя, опредѣляютъ значенія* x_{m+i}, p_{m+i}, *представляющія общій интегралъ* *) *уравненій (3).*

Въ силу послѣднихъ значеній x_{m+i}, p_{m+i}, уравненія (6) становятся тождествами. Дифференцируя ихъ по перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, получаемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=0.$$

Дифференцируя по x_{m+i}, b_i тождества, получаемыя подстановкой въ уравненія (1) ихъ рѣшенія (4), и принимая во вниманіе выраженія (6) функцій p_{m+i}, получаемъ новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial x_{m+i}}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial b_i}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial b_i}=0.$$

Изъ двухъ послѣднихъ системъ тождествъ легко получаются слѣдующія

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}},$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=0,$$

$$i=1, 2, \ldots n-m.$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (5), приходимъ къ тождествамъ

$$\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}},\quad \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}=-\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}, \tag{7}$$

*) Подъ общимъ интеграломъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ разумѣемъ рѣшеніе ихъ, представляющее значенія зависимыхъ перемѣнныхъ въ функціяхъ независимыхъ и произвольныхъ постоянныхъ, число которыхъ равно числу зависимыхъ перемѣнныхъ и которыя изъ этихъ интегральныхъ уравненій не исключаются.

показывающимъ, что значенія x_{m+i}, p_{m+i}, опредѣляемыя уравненіями (6), утождествляютъ уравненія (3) и представляютъ, стало быть, ихъ общій интегралъ.

Лемма. *Если уравненія*

$$x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \quad (8)$$

$$p_{m+i} = F_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ a_i, b_i *— произвольныя постоянныя, представляютъ общій интегралъ уравненій (3), то выраженіе*

$$\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h, \quad (10)$$

гдѣ коэффиціенты при dx_h *— функціи перемѣнныхъ* $x_1, x_2, \dots x_m$ *и постоянныхъ* a_i, b_i, *въ силу уравненій (8) и (9), есть точный дифференціалъ.*

Положимъ

$$\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h = U_h.$$

Въ силу тождествъ (7) имѣемъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}},$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k \partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}.$$

По условію равенства (2) имѣютъ мѣсто тождественно, слѣдовательно, они остаются таковыми и для (8), (9) значеній перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_h}$$

для всѣхъ одновременно различныхъ значеній h и k отъ 1 до m, т. е. выраженіе (10) представляетъ точный дифференціалъ. Назовемъ его черезъ dU

$$dU = \sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h.$$

Теорема вторая. *Пусть въ уравненіяхъ (8), (9) произвольныя постоянныя a_i, b_i представляютъ соотвѣтственно начальныя значенія перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Выполнивъ квадратуру точнаго дифференціала dU, составляемъ выраженіе*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i + b\,,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная. Если исключить изъ послѣдняго, въ силу уравненій (8), величины a_i, то полученное выраженіе V есть полный интегралъ уравненій (1).

Въ самомъ дѣлѣ, условившись, согласно установившемуся обычаю, называть черезъ d дифференціалы, соотвѣтствующіе приращеніямъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, черезъ δ дифференціалы, соотвѣтствующіе измѣненіямъ постоянныхъ a_i, b_i и, наконецъ, черезъ Δ —, соотвѣтствующіе приращеніямъ обѣихъ системъ перемѣнныхъ, получаемъ *)

$$\Delta V = dU + \int_{U_0}^{U} d\delta U + \sum_{i=1}^{n-m} (b_i \delta a_i + a_i \delta b_i)\,,$$

гдѣ

$$d\delta U = \sum_{h=1}^{m} \delta U_h dx_h\,.$$

Такъ какъ уравненія (3) и (7) имѣютъ мѣсто тождественно, то по приведеніи находимъ

$$dU = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} dx_{m+i} - \sum_{h=1}^{m} H_h dx_h\,,$$

$$\delta U_h = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i} \delta \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}} \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i} \delta \frac{dx_{m+i}}{dx_h} + \frac{dp_{m+i}}{dx_h} \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \frac{d}{dx_h} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \delta x_{m+i} \right),$$

*) Прибавочная постоянная b остается безъ измѣненія.

$$d\delta U = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) dx_h =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right),$$

$$\int_{U_0}^{U} d\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\delta x_{m+i} - b_i\,\delta a_i).$$

Итакъ,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + a_i\,\delta b_i) - \sum_{h=1}^{m} H_h\,dx_h.$$

Какъ уже раньше можно было замѣтить, уравненія (4) всегда разрѣшаются относительно a_i, ибо функціональный опредѣлитель функцій x_{m+i} относительно a_i, для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, принимаетъ отличное отъ нуля значеніе, равное 1. Поэтому, разсматривая V какъ функцію всѣхъ x и b, получаемъ иначе

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i}\,\delta b_i\right) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_h}\,dx_h.$$

Изъ сопоставленія обоихъ выраженій ΔV заключаемъ о существованіи слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ i = 1, 2, \ldots n-m. \end{array}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial x_h} + H_h = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Уравненія (11) представляютъ $2n-2m$ различныхъ зависимостей между перемѣнными x, p_{m+i} и произвольными постоянными a_i, b_i, ибо каждое изъ этихъ уравненій заключаетъ одну изъ величинъ, или p, или a такихъ, которыя не входятъ во всѣ остальныя; они являются интегральными уравненіями системы (3), отличными по виду отъ (8) и (9). Равенства (12), въ силу значеній (11) p_{m+i}, представляютъ результатъ подстановки въ уравненія (1) разсматриваемаго значенія V и тѣмъ доказываютъ, что послѣднее—ихъ интегралъ. Легко видѣть, что это—

полный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, онъ зависитъ отъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$, и функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \ldots b_{n-m}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, такъ какъ для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ функціи $\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}}$ обращаются въ b_i и разсматриваемый опредѣлитель становится равнымъ 1.

Такимъ образомъ, при помощи функціи V, мы получаемъ какъ полный интегралъ уравненій (1), такъ и интегральныя уравненія для системы (3). Эта функція въ предлагаемой теоріи представляетъ полную аналогію съ упомянутой якобіевской, и мы можемъ, по справедливости назвать ее *главной функціей* разсматриваемыхъ уравненій.

Въ заключеніе изложенной теоріи легко вывести изъ нея нѣсколько слѣдствій, касающихся интегрированія уравненій (3), или, какъ разсматриваетъ С. Ли, соотвѣтствующей имъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными *). Замѣтимъ прежде всего, что система (3) представляетъ обобщеніе *канонической* системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, получаемой изъ нея при $m=1$. Поэтому можно предложить называть эти уравненія *канонической системой въ полныхъ дифференціалахъ*, а перемѣнныя x_{m+i}, p_{m+i} каноническими перемѣнными соотвѣтственно положительнаго и отрицательнаго классовъ.

Слѣдствіе первое. *Если уравненія*

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = b_i, \\ &i = 1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

*гдѣ b_i — произвольныя постоянныя, — независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи **) и разрѣшающіеся относительно всѣхъ p, то остальные ея $n-m$ интеграловъ находятся при помощи квадратуръ.*

---

*) Math. An., Bd. 11, S. 464. Система линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (3), представляется въ видѣ

$$(p_h + H_h, \varphi) = 0,\ h = 1, 2, \ldots m,$$

гдѣ φ — неизвѣстная функція.

**) Т. е. удовлетворяющіе тождественно условіямъ

$$(\psi_k, \psi_h) = \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до $n-m$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождества

$$(p_h + H_h\,,\ \psi_k) = 0\,,$$

$$h = 1, 2, \ldots m; \quad k = 1, 2, \ldots n - m.$$

Поэтому, въ силу условій (2) и инволюціи интеграловъ (13), уравненія (1) и (13) представляютъ систему въ инволюціи n дифференціальныхъ уравненій, разрѣшающихся относительно всѣхъ частныхъ производныхъ p. Слѣдовательно, полный интегралъ уравненій (1), удовлетворяющій требованіямъ *теоремы первой*, получается квадратурой точнаго дифференціала

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s\,.$$

Если интегралъ послѣдняго есть $z = V + b$, гдѣ b—новая произвольная постоянная, то искомые интегралы опредѣляются по формуламъ

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i\,,\ i = 1\,,\ 2, \ldots n - m\,,$$

гдѣ a_i — новыя произвольныя постоянныя.

Доказанное предложеніе есть очевидное обобщеніе извѣстной *теоремы Ліувилля* *) относительно интегрированія канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Высказано и доказано оно было впервые С. Ли **) въ нѣсколько иной формѣ, и представляетъ, несомнѣнно, одно изъ важнѣйшихъ его открытій въ теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Предлагаемыя здѣсь формулировка получаемаго результата и самое его доказательство отличаются простотой и краткостью сравнительно съ первыми.

Слѣдствіе второе. *Если уравненія*

$$\left.\begin{aligned} &\psi_i(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ p_{m+1}\,,\ p_{m+2}\,, \cdots p_n) = b_i\,, \\ &i = 1, 2, \ldots k; \quad k < n - m\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

гдѣ b_i — произвольныя постоянныя,—независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи и разрѣшающіеся относительно k изъ перемѣнныхъ p, то разысканіе остальныхъ ея интеграловъ приводится къ интегрированію канонической системы $2n - 2m - 2k$ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть уравненія (14) разрѣшаются относительно $p_{m+1}, p_{m+2}, \cdot\cdot p_{m+k}$. Уравненія (1), (14), а потому и получаемыя изъ нихъ слѣдующія

---

*) Journal de Lionville, 1-re série, t. XX. p. 137.

**) Math. An., Bd. 11, S. 469, Theorem I и Satz 4, или ср. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 329, n° 138.

$$\left.\begin{array}{c} p_h + H'_h(b_1, b_2, \ldots b_k, x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \ldots p_n) = 0\,, \\ h = 1,\ 2, \ldots m+k\,, \end{array}\right\} \quad (15)$$

находятся въ инволюціи. Очевидно, если значеніе

$$z = V(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_k\,,\ b_{k+1}\,, \ldots b_{n-m}) + b\,,$$

гдѣ $b\,,\ b_{k+1}\,,\ b_{k+2}\,, \ldots b_{n-m}$ — новыя произвольныя постоянныя,—полный интегралъ послѣдней системы, при чемъ опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+k+1}}\,,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+k+2}}\,, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_{k+1}\,,\ b_{k+2}\,, \ldots b_{n-m}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, то это же значеніе z есть полный интегралъ системы (1), удовлетворяющій условіямъ *теоремы первой*. Такимъ образомъ задача приводится къ разысканію указанной функціи V, или къ интегрированію канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{c} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H'_h}{\partial p_{m+i}}\, dx_h\,, \\[2ex] dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H'_h}{\partial x_{m+i}}\, dx_h\,, \\[2ex] i = k+1\,,\ k+2\,, \ldots n-m\,. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Итакъ, если извѣстны k интеграловъ (14), то порядокъ (т. е. число уравненій) разсматриваемой канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ понижается на $2k$ единицъ.

Слѣдствіе третье. *Задача интегрированія канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ (3) состоитъ въ выполненіи ряда $n-m$ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ* *) $2n-2m\,,$ $2n-2m-2\,, \ldots 4\,,\ 2$ *и одной квадратуры.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе

$$\psi_1(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ p_{m+1}\,,\ p_{m+2}\,, \ldots p_n) = b_1\,, \quad (17)$$

гдѣ b_1 — произвольная постоянная, — интегралъ системы (3). Функція ψ_1 есть интегралъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи ψ

---

*) Согласно установившемуся обычаю, называемъ *операціей интегрированія μ-аго порядка* операцію вычисленія одного интеграла системы μ-аго порядка уравненій въ полныхъ дифференціалахъ $\mu+\nu$ перемѣнныхъ, гдѣ ν — произвольное цѣлое число.

$$(p_h + H_h, \psi) = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m.$$

Послѣдняя, извѣстно *), имѣетъ $2n - 2m$ различныхъ интеграловъ, независимыхъ между собой относительно x_{m+i}, p_{m+i}. Предположимъ, что интегралъ (17) разрѣшается относительно p_{m+1}. Въ силу предыдущаго предложенія, порядокъ разсматриваемой системы (3) понижается на двѣ единицы. Съ полученной системой въ полныхъ дифференціалахъ вида (16), при $k = 1$, поступаемъ какъ съ (3). Продолжая эти вычисленія далѣе, мы придемъ, очевидно, къ задачѣ разысканія полнаго интеграла n уравненій съ частными производными въ инволюціи, какъ въ *слѣдствіи первомъ*, и, стало быть, разрѣшимъ, при помощи указанныхъ операцій, задачу интегрированія системы (3).

Примѣчаніе. По предположенію интегралы (13), (14) и (17) заключаютъ перемѣнныя p. Если эти интегралы не содержатъ ихъ вовсе, то послѣдній случай приводится, какъ показалъ Майеръ **), къ первому переводомъ всѣхъ или части каноническихъ перемѣнныхъ положительнаго класса въ отрицательный и наоборотъ.

Слѣдствіе четвертое. *Если функціи H_h не зависятъ отъ k какихъ-нибудь перемѣнныхъ изъ ряда $x_1, x_2, \ldots x_n$, то число и порядокъ всѣхъ операцій, необходимыхъ для интегрированія уравненій (3), понижаются соотвѣтственно на k единицъ.*

Пусть перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_k$ не входятъ въ выраженія функцій H_h. Слѣдуя Якоби ***), принимаемъ за новую неизвѣстную функцію выраженіе

$$y = z - \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

и вмѣсто независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ — за новыя независимыя перемѣнныя $p_1, p_2, \ldots p_k$. Задача интегрированія m уравненій (1), находящихъ въ инволюціи, приводится такимъ образомъ къ интегрированію системы m уравненій, также въ инволюціи, но гдѣ число независимыхъ перемѣнныхъ есть $n - k$.

По условію функція z не входитъ явно въ уравненія (1). Легко распространить изложенную теорію съ соотвѣтствующими измѣненіями и на тотъ случай, когда разсматриваемыя уравненія зависятъ явно отъ неизвѣстной функціи.

---

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. III, p. 74–5.

**) Math. An., Bd. VIII, S. 313.

***) Vorlesungen über Dynamik, zweite Ausgabe 1884, S. 164.

Теорія капиллярности и гидростатика.

А. П. Грузинцева.

I.

Задача о равновѣсіи жидкостей встрѣчается въ механикѣ и физикѣ. Въ первой — она составляетъ предметъ гидростатики, — во второй-же разсматривается какъ съ точки зрѣнія гидростатики, такъ и съ точки зрѣнія такъ называемой теоріи капиллярности.

Такимъ образомъ задача о равновѣсіи жидкостей въ обычномъ изложеніи разбивается на двѣ, независимыя одна отъ другой. Въ гидростатикѣ теорія строится на понятіи о гидростатическомъ давленіи или, другими словами, на *опредѣленіи* жидкости, какъ деформирующагося тѣла, характеризующагося способностью передавать давленіе равномѣрно ко всѣмъ направленіямъ нормально къ элементу поверхности. Въ ученіи же о капиллярности вводятся внутреннія молекюлярныя силы и молекюлярное давленіе, на *опредѣленіи* которыхъ и основывается вся теорія.

Эти внутреннія молекюлярныя силы разсматриваются или сами по себѣ,—это молекюлярная теорія капиллярности (Ляпласа, Пуассона и Гаусса) или со стороны того поверхностнаго натяженія, которое онѣ вызываютъ.

И результаты гидростатики и теоріи капиллярности совершенно различны: въ то время, какъ первая, основанная на понятіи о гидростатическомъ давленіи, только и даетъ рядъ заключеній объ этомъ давленіи въ извѣстныхъ простѣйшихъ случаяхъ,—вторая даетъ полную теорію явленій въ жидкостяхъ при ихъ равновѣсіи. Можно сказать болѣе: гидростатика даетъ условія равновѣсія жидкости только для особаго частнаго случая, давая въ остальныхъ случаяхъ невѣрныя слѣдствія, между тѣмъ какъ теорія капиллярныхъ явленій, дополняя результаты гидростатики, тѣмъ самымъ даетъ условія равновѣсія для общаго случая.

Но мнѣ кажется, что должна существовать такая *общая теорія равновѣсія жидкостей,* которая обнимала бы всѣ случаи, т. е. должна быть построена на самомъ общемъ опредѣленіи того аггрегатнаго состоянія, которое мы называемъ жидкимъ.

Въ этой статьѣ мы и попытаемся дать такую теорію жидкостей.

Какое же опредѣленіе жидкости положить въ основаніе новой теоріи? Опредѣленіе, принимаемое въ гидростатикѣ, представляетъ въ сущности законъ Паскаля, но понятно, что въ раціональной теоріи равновѣсія жидкостей, этотъ законъ долженъ быть полученъ, какъ слѣдствіе теоріи вмѣстѣ съ другими законами, управляющими явленіями равновѣсія жидкостей,—слѣдовательно, этимъ закономъ не должно пользоваться, какъ основаніемъ теоріи. Тѣмъ болѣе имъ нельзя пользоваться, что онъ имѣетъ мѣсто лишь *внутри* свободной массы жидкостей.

Мы положимъ въ основаніе новой теоріи слѣдующее опредѣленіе жидкости, вытекающее изъ простѣйшихъ явленій. *Жидкость мы будемъ разсматривать, какъ систему матеріальныхъ точекъ, сплошнымъ образомъ наполняющихъ данный объемъ и между которыми дѣйствуютъ внутреннія силы, работа которыхъ зависитъ отъ плотности жидкости и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.*

Первая часть этой зависимости вытекаетъ изъ того опытнаго факта, что давленіе въ жидкости не зависитъ отъ формы или вида сосуда, въ которомъ она находится, а лишь отъ ея плотности, а вторая—изъ факта существованія поверхностнаго натяженія въ жидкостяхъ.

Что же касается вообще внутреннихъ силъ, то мы принимаемъ, что эти силы, хотя *не сами по себѣ,* а лишь вслѣдствіе *связей,* существующихъ между частицами тѣлъ во всякомъ аггрегатномъ состояніи, суть силы, имѣющія потенціалъ. Для твердаго упругаго тѣла, напримѣръ, эти силы или, лучше, этотъ потенціалъ есть функція шести деформацій, т. е. трехъ коэффиціентовъ измѣненія длины и трехъ коэффиціентовъ скашиванія. Для жидкостей же—это функція плотности и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.

II.

Облечемъ теперь сказанное въ математическую форму и сдѣлаемъ общіе выводы.

Пусть имѣемъ жидкость въ сосудѣ и пусть въ эту жидкость погружена какая-нибудь система твердыхъ тѣлъ; для краткости рѣчи въ послѣдующемъ мы будемъ говорить просто „твердое тѣло" вмѣсто сосуда (стѣнки его) и система твердыхъ тѣлъ. Сосудъ и твердые тѣла будемъ предполагать для простоты разсужденій уравновѣшенными самостоятельной системой силъ. Сверхъ того, мы предположимъ, что на свободной поверхности разсматриваемая жидкость соприкасается съ другой,—скажемъ, съ воздухомъ.

Разсмотримъ какую-нибудь точку жидкости M съ координатами

$$x, \quad y, \quad z$$

и пусть

$$X_e, \quad Y_e, \quad Z_e$$

будутъ составляющія внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ жидкости, а

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i$$

составляющія внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ той же точкѣ.

При этомъ подъ первыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, источникъ происхожденія которыхъ лежитъ *внѣ* нашей системы (напримѣръ, это силы тяжести) и мы будемъ считать ихъ *заданными* напередъ. Подъ вторыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, происходящія отъ взаимодѣйствій между точками системы; это, слѣдовательно, силы, источникъ происхожденіе которыхъ лежитъ *внутри* системы. Аггрегатное состояніе системы и обусловлено характеромъ этихъ послѣднихъ силъ.

Теперь основная теорема статики даетъ для равновѣсія точки M слѣдующія условія:

$$\left.\begin{aligned} X_e + X_i &= 0 \\ Y_e + Y_i &= 0 \\ Z_e + Z_i &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

О внутреннихъ силахъ *отдѣльно* мы ничего не знаемъ, а можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія лишь объ *ихъ работѣ*, такъ какъ на опытѣ мы наблюдаемъ обыкновенно не самыя силы, а ихъ дѣйствіе, т. е. работу. Поэтому вообразимъ, что точка M получила нѣкоторое *возможное безконечно-малое перемѣщеніе*, проекціи котораго на координатныя оси пусть будутъ:

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z.$$

Напишемъ далѣе уравненія (a) *во 1-хъ*, для всякой точки *внутри массы* жидкости, *во 2-хъ*, для всѣхъ точекъ *свободной поверхности* жидкости, т. е. для точекъ соприкосновенія разсматриваемой жидкости съ другой жидкостью (обыкновенно съ воздухомъ) и наконецъ *въ 3-хъ*, для точекъ, лежащихъ на *поверхности соприкосновенія жидкости съ „твердымъ тѣломъ“* (т. е. со стѣнками сосуда и погруженныхъ въ жидкость твердыхъ тѣлъ); затѣмъ умножимъ полученныя уравненія на соотвѣтственныя перемѣщенія:

$$\delta x\,,\quad \delta y\,,\quad \delta z$$

каждой точки этихъ трехъ областей и результаты сложимъ; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum(X_e\delta x+Y_e\delta y+Z_e\delta z)+\sum\nolimits_M(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)+\\&+\sum\nolimits_S(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)+\sum\nolimits_{S'}(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

при чемъ для *внѣшнихъ силъ* всѣ три суммы обозначены пока однимъ символомъ,—это *заданныя силы* и ими нечего заниматься. Что же касается *внутреннихъ силъ*, то руководствуясь *принципомъ сохраненія энергіи*, прилагаемомъ и къ случаю *возможныхъ перемѣщеній* системы и *опредѣленіемъ* жидкости, какъ такого аггрегатнаго сотоянія, при которомъ работа внутреннихъ силъ выражается измѣненіемъ нѣкоторой опредѣленной функціи, называемой внутреннимъ термодинамическимъ потенціаломъ, можемъ написать, что

$$\sum\nolimits_M(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_M\,,$$

$$\sum\nolimits_S(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_S\,,$$

$$\sum\nolimits_{S'}(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_{S'}\,.$$

Количества:

$$U_S,\quad U_{S'}$$

могутъ быть выражены при помощи плотности и толщины того поверхностнаго слоя на свободной поверхности жидкости и на поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“, въ которомъ проявляется *поверхностное натяженіе*. Понятно, что эта толщина зависитъ отъ радіуса сферы молекюлярнаго притяженія.

Что же касается количества

$$U_M,$$

то его мы должны считать функціей лишь плотности жидкости внутрь ея массы.

Пусть

$$U, \quad U_n, \quad U_{n'}$$

будутъ *удѣльныя* значенія функцій

$$U_M, \quad U_S, \quad U_{S'},$$

т. е. значенія этихъ функцій, разсчитанныхъ на единицу объема жидкости и единицу ея свободной поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ"; вслѣдствіе сплошности жидкости получаемъ:

$$U_M = \int U d\tau, \quad U_S = \int U_n dS, \quad U_{S'} = \int U_{n'} dS' \tag{2}$$

при чемъ $d\tau$ есть элементъ объема внутри жидкости, dS — элементъ свободной поверхности жидкости, а dS' — элементъ поверхности соприкосновенія ея съ „твердымъ тѣломъ". Кромѣ того, если плотность жидкости внутри ея массы будетъ ϱ, плотности въ поверхностныхъ слояхъ ϱ_1 и ϱ', а толщина ихъ ε_1 и ε', то будемъ имѣть:

$$U = F(\varrho), \quad U_n = G(\varrho_1, \varepsilon_1), \quad U_{n'} = H(\varrho', \varepsilon'). \tag{3}$$

Положимъ еще для краткости письма:

$$\sum (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z) = R_e. \tag{4}$$

Подставляя теперь все это въ равенство (1), получимъ *основное уравненіе* нашей теоріи въ слѣдующемъ видѣ:

$$R_e - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \tag{5}$$

Здѣсь первый интегралъ долженъ быть распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки поверхности, ограничивающей жидкость.

Необходимо замѣтить, что слои перемѣнной толщины ε_1 и ε' должны при всѣхъ перемѣщеніяхъ состоять изъ однихъ и тѣхъ же точекъ. Этимъ замѣчаніемъ мы ниже воспользуемся при опредѣленіи $\delta\varepsilon_1$ и $\delta\varepsilon'$.

Преобразуемъ теперь R_e. Мы приняли, что къ свободной поверхности изслѣдуемой жидкости прилегаетъ другая жидкость, напримѣръ воздухъ; но мы можемъ отвлечься отъ этой жидкости,— стоитъ только вообразить себѣ приличнымъ образомъ выбранную систему силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ свободной поверхности жидкости; эта система силъ должна быть, слѣдовательно, подобрана такъ, что равновѣсіе жидкости не нарушится, если воздухъ надъ жидкостью будетъ устраненъ.

На основаніи сказаннаго можно положить:

$$R_e = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) dS \tag{6}$$

при чемъ первый интегралъ распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки свободной поверхности ея, а силы X_n, Y_n, Z_n и представляютъ ту систему поверхностныхъ силъ, которая замѣняетъ дѣйствіе жидкости, прилегающей къ изслѣдуемой.

Соединяя теперь все сказанное вмѣстѣ, мы напишемъ основное уравненіе нашей теоріи жидкостей въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned}&\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z)\, dS - \\ &\qquad - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0.\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Это уравненіе должно дать *полную теорію равновѣсія жидкостей*, т. е. оно должно дать какъ уравненія гидростатики въ обычномъ смыслѣ этого слова, такъ и основныя уравненія теоріи каппиллярности. И оно даетъ все это.

Если разсматриваемая жидкость несжимаемая, то къ уравненію (A) надо присоединить условіе несжимаемости, — условіе, представляющее разницу между капельно-жидкимъ и газообразнымъ состояніями тѣлъ.

Это условіе можно написать, какъ извѣстно, въ формѣ слѣдующаго равенства:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

или, лучше, въ видѣ интеграла, распространеннаго на всѣ точки объема жидкости:

$$\int P\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) d\tau = 0\,, \tag{8}$$

при чемъ P будетъ нѣкоторая, неизвѣстная пока, функція координатъ.

Условіе (8) при помощи извѣстнаго пріема Грина „интегрированія по частямъ" можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\int P\{[\cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z]\, dS + \\ &\quad + [\cos(n'x)\,\delta x + \cos(n'y)\,\delta y + \cos(n'z)\,\delta z]\, dS'\} + \\ &\qquad + \int \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z\right) d\tau = 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

гдѣ n и n' суть направленія нормаловъ къ dS и dS', проведенныхъ внутрь жидкости.

III.

Теперь намъ надо преобразовать уравненіе (A), т. е. составить варіаціи входящихъ въ него интеграловъ.

Мы подробно остановимся на опредѣленіи варіаціи интеграла:

$$\int U_n dS = \int G(\varrho_1 , \varepsilon_1)\, dS$$

и по ней уже легко составимъ варіацію интеграла:

$$\int U_{n'} dS' = \int H(\varrho' , \varepsilon')\, dS' .$$

Мы имѣемъ:

$$\delta \int U_n dS = \int \left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1} \delta \varrho_1 + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 \right) dS + \int G(\varrho_1 , \varepsilon_1)\, \delta . dS. \qquad (9)$$

Составимъ сначала варіацію элемента dS свободной поверхности S жидкости. Эта поверхность S ограничена нѣкоторымъ контуромъ, а именно линіей пересѣченія свободной поверхности жидкости со стѣнками сосуда и съ поверхностями, ограничивающими погруженныя въ нее твердыя тѣла; поэтому $\delta . dS$ будетъ состоять изъ двухъ частей: одной, происходящей отъ возможныхъ перемѣщеній точекъ свободной поверхности жидкости и другой—отъ перемѣщеній точекъ, лежащихъ на контурѣ, ограничивающемъ свободную поверхность жидкости.

Обозначимъ эти варіаціи знаками (1) и (2); тогда

$$\delta . dS = \delta_1 . dS + \delta_2 dS .$$

Первую изъ этихъ варіацій найдемъ по геометрическому способу, данному еще въ 1832 году Бертраномъ *).

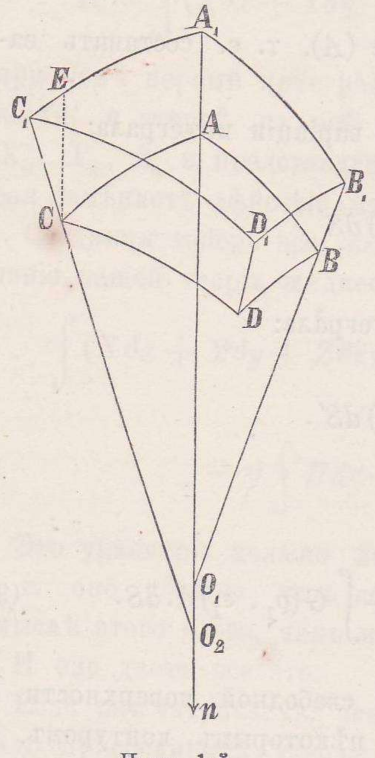
Пусть $ABCD = dS$ будетъ элементъ свободной поверхности жидкости до перемѣщенія (т. е. до деформаціи жидкости), ограниченный линіями кривизны; $A_1B_1C_1D_1 = dS_1$ тотъ-же элементъ послѣ деформаціи и пусть $AA_1 = \delta n$ будетъ нормальное перемѣщеніе точки A; тогда:

$$\delta_1 . dS = dS_1 - dS .$$

---

*) Journal de Liouville, t. XIII; p. 117. Можно опредѣлить эти варіаціи и аналитически.

Такъ какъ здѣсь AB и AC будутъ элементы двухъ ортогональныхъ линій кривизны, проведенныхъ на поверхности черезъ подошву A нормала An, направленнаго внутрь жидкости, то:



Черт. 1-й.

$$dS = AB.AC; \quad dS_1 = A_1B_1.A_1C_1;$$

но очевидно, что:

$$A_1B_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_1}\right) AB,$$

$$A_1C_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_2}\right) AC,$$

при чемъ AO_1 и AO_2 будутъ радіусами кривизны нормальныхъ сѣченій AB и AC.

Подставляя это въ выраженіе $\delta_1.dS$, находимъ:

$$\delta_1.dS = \left(\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2}\right) dS.\delta n;$$

но, если обозначимъ R_1 и R_2 главные радіусы кривизны поверхности въ точкѣ $A(x, y, z)$, то по теоремѣ Эйлера имѣемъ:

$$\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

а потому

$$\delta_1.dS = \pm\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\delta n. \tag{10}$$

Мы написали въ кривой части два знака $\pm$, такъ какъ на чертежѣ взятъ случай *выпуклой* поверхности (знакъ $+$), т. е. такой, для которой радіусы кривизны совпадаютъ по направленію съ нормаломъ n къ поверхности; для *вогнутой-же* поверхности эти направленія прямо противоположны и придется взять знакъ $-$.

Опредѣлимъ теперь $\delta_2 dS$.

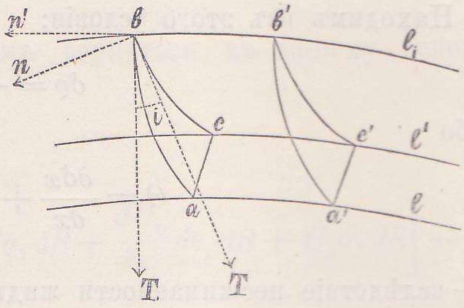
Пусть l будетъ кривая пересѣченія свободной поверхности жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда до перемѣщенія, а l_1 послѣ перемѣщенія, и l' безконечно-близкое положеніе l на свободной поверхности жидкости тоже послѣ деформаціи, но получаемое изъ l вслѣдствіе нормальныхъ перемѣщеній ея точекъ.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$aa' = dl\,, \qquad ab = \delta\lambda\,,$$

при чемъ $\delta\lambda$ будетъ возможное перемѣщеніе точки a на поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда.

Пусть, далѣе, bn и bn' будутъ направленія нормаловъ къ свободной поверхности жидкости и поверхности „твердаго тѣла“ и i будетъ уголъ между нами, — это такъ называемый *краевой уголъ* или *уголъ принаровленія*; тогда получимъ:



Черт. 2-й.

$$aa'bb' = \delta\lambda\, dl\,, \qquad bcc b' = \delta\lambda\, dl \cos i$$

и слѣдовательно:

$$\delta_2 . dS = \cos i . dl\delta\lambda. \tag{11}$$

Замѣтимъ кстати, что между δn и $\delta\lambda$ существуетъ простое соотношеніе; треугольникъ abc, прямоугольный при точкѣ c, даетъ:

$$ac = ab \sin i\,,$$

т. е.

$$\delta\lambda = \frac{\delta n}{\sin i}\,,$$

ибо

$$ac = \delta n\,, \qquad ab = \delta\lambda.$$

И такъ получаемъ для полной варіаціи элемента поверхности слѣдующее выраженіе:

$$\delta . dS = \pm\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\delta n + \cos i\, dl . \delta\lambda. \tag{12}$$

Отсюда-же мы найдемъ варіацію элемента поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или со стѣнками сосуда;—это будетъ на черт. 2 площадь $aa'bb'$,—слѣдовательно, получимъ:

$$\delta . dS' = \delta\lambda . dl. \tag{13}$$

Опредѣлимъ теперь варіаціи $\delta\varrho$, $\delta\varrho_1$ и $\delta\varrho'$.

Вслѣдстіе неразрывности массы имѣемъ условіе:

$$\delta.(\varrho d\tau) = 0,$$

гдѣ $d\tau$ элементъ объема жидкости.

Находимъ изъ этого условія:

$$\delta\varrho = -\varrho\Theta = 0 \tag{14}$$

ибо

$$\Theta = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0$$

— вслѣдствіе несжимаемости жидкости.

Далѣе для поверхностнаго слоя имѣемъ аналогичное равенство:

$$\delta.(\varrho_1 dn.dS) = 0,$$

откуда при помощи (12) находимъ:

$$\delta\varrho_1.dS = \mp\varrho_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\delta n.dS - \varrho_1\cos i\,\delta\lambda dl \tag{15}$$

и точно также для поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“:

$$\delta\varrho'.dS' = -\varrho'\delta\lambda dl \tag{16}$$

такъ какъ для поверхности твердаго тѣла или стѣнокъ сосуда частицы жидкости могутъ перемѣщаться лишь въ касательныхъ плоскостяхъ, то

$$\delta n = 0, \qquad i = 0.$$

Теперь надо выразить δn и $\delta\lambda$ въ функціи δx, δy, δz.

Очевидно имѣемъ:

$$\delta n = \cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z. \tag{17}$$

Величину $\delta\lambda$ найдемъ изъ равенства:

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z. \tag{18}$$

Точно также очевидно, что:

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\delta z, \tag{19}$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}\delta z. \tag{20}$$

IV.

Теперь, подготовивъ все, мы можемъ вернуться къ нашему основному уравненію (A).

Развивая его, получаемъ:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau - \int \left[\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\delta\varrho_1\, dS + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1\, dS + U_n \delta . dS\right] -$$

$$-\int \left[\frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\delta\varrho'\, dS' + \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\delta\varepsilon'\, dS' + U_{n'} \delta . dS'\right] +$$

$$+\int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\, dS = 0\,,$$

если воспользуемся равенствомъ (14) и условіемъ несжимаемости жидкости.

Пользуясь далѣе равенствами (12), (13), (15), (16), (17), (18), (19) и (20), получаемъ послѣ очевидныхъ приведеній слѣдующее равенство:

$$\left.\begin{aligned}
&\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau - \\
&-\iint\Bigg\{\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\cos(nx) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\right]\delta x + \\
&+\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\cos(ny) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\right]\delta y + \\
&+\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\cos(nz) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}\right]\delta z\Bigg\} dS - \\
&-\int\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z}\delta z\right]\frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon'} . dS' - \\
&-\iint\Bigg\{\left[\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\cos i + \left(U_{n'} - \varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\right)\right]\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\delta x + \right. \\
&\left.+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\delta z\right]\Bigg\} dl + \int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\, dS = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (A\ \text{bis})$$

Входящія сюда варіаціи должны удовлетворять еще условію (B).

Вычитая равенство (B) изъ $(A$ bis), получимъ уравненіе, въ которомъ варіаціи δx, δy, δz, какъ въ объемномъ интегралѣ, такъ и въ поверхностныхъ и въ интегралѣ по контуру будутъ *совершенно произвольны*, а потому коэффиціенты при нихъ будутъ отдѣльно равны нулю.

Отсюда находимъ: *во первыхъ, внутри* жидкой массы должны существовать уравненія:

$$X-\frac{\partial P}{\partial x}=0\,,\quad Y-\frac{\partial P}{\partial y}=0\,,\quad Z-\frac{\partial P}{\partial z}=0\,. \tag{C}$$

Во вторыхъ, на свободной поверхности жидкости должны удовлетворяться уравненія:

$$P\cos(nx)\pm\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right)\cos(nx)+\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}-X_n=0 \tag{D}$$

и подобныя же уравненія для осей y и z.

Въ третьихъ, на поверхности твердаго тѣла и стѣнкахъ сосуда:

$$P\cos(n'x)+\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=0 \tag{E}$$

и подобныя уравненія для осей y и z.

И наконецъ *въ четвертыхъ, на контурѣ свободной поверхности жидкости* должны быть соблюдены условія:

$$\left[\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos i+\left(U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\right)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 \tag{F}$$

и подобныя же для осей y и z.

Положимъ теперь:

$$U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}=P_1\,,\qquad U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}=P'\,. \tag{21}$$

Замѣтимъ еще, что ε_1 и ε', какъ толщины слоевъ жидкости, измѣряются по нормаламъ къ ихъ поверхностямъ, а потому всегда можно опредѣлить такихъ два вектора K и K', чтобы:

$$\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}=K\cos(nx)\,,\quad \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}=K\cos(ny)\,,\quad \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}=K\cos(nz) \tag{22}$$

и

$$\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=K'\cos(n'x),\quad \frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}=K'\cos(n'y),\quad \frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}=K'\cos(n'z). \tag{23}$$

При такихъ положеніяхъ уравненія (D), (E) и (F) обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nx) \\ Y_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(ny) \\ Z_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nz) \end{aligned}\right\} \qquad (D \text{ bis})$$

на *свободной поверхности* жидкости.

$$P + K' = 0 \qquad (E \text{ bis})$$

на *поверхности прикосновенія* жидкости съ „твердымъ тѣломъ".

На контурѣ:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \qquad (F \text{ bis})$$

V.

И такъ уравненія равновѣсія жидкости будутъ:

Внутри жидкой массы:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z. \qquad (\text{I})$$

Функція P есть такъ называемое *гидростатическое давленіе*. Изъ этихъ уравненій вытекаетъ *законъ Паскаля*.

На свободной поверхности жидкости изъ $(D$ bis$)$ находимъ для давленія $P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$

$$P_n = P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (\text{II})$$

Это давленіе состоитъ изъ двухъ главныхъ частей:

$$P,$$

не зависящаго отъ формы свободной поверхности и давленія:

$$K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

зависящаго отъ формы свободной поверхности жидкости; это такъ называемое *капиллярное давленіе въ жидкости.*

Давленіе K есть такъ называемое *поверхностное натяженіе* жидкости.

По равенству (II) полное *капиллярное давленіе,*—назовемъ его P_k, будетъ:

$$P_k = K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Очевидно, что K будетъ капиллярнымъ давленіемъ на *плоской свободной поверхности* т. е., когда имѣемъ:

$$R_1 = R_2 = \infty.$$

Давленіе K происходитъ отъ поверхностнаго натяженія въ поверхностномъ слоѣ жидкости.

На контурѣ поверхности существуетъ условіе для краеваго угла:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \tag{III}$$

Этотъ уголъ i зависитъ отъ поверхностныхъ плотностей жидкости ϱ_1 и ϱ' и толщинъ поверхностныхъ слоевъ, ε_1 и ε', т. е.

$$\cos i = \Phi(\varrho_1, \varrho'; \varepsilon_1, \varepsilon'). \tag{III bis}$$

Значитъ уголъ i постояненъ по стольку, по скольку постоянны ϱ_1, ϱ', ε_1 и ε'. Здѣсь, намъ кажется и лежитъ разгадка того факта, что краевой уголъ жидкости, напр. ртути, измѣняется со временемъ; понятно, что окисленіе ртути, запыленіе и т. п. измѣняютъ и поверхностную плотность и сцѣпленіе частицъ поверхностнаго слоя, т. е. его толщину.

Точно также, замѣчая, что плотности ϱ и толщины ε суть функціи температуры, мы всегда можемъ допустить такое значеніе для температуры, при которомъ функція Φ обращается въ нуль, т. е. тогда получимъ:

$$i = \frac{\pi}{2},$$

другими словами жидкость не будетъ смачивать твердаго тѣла.

У насъ еще осталось уравненіе (E'), но его смыслъ очевиденъ: оно даетъ давленіе жидкости на поверхности „твердаго тѣла“.

VI.

Въ предыдущемъ мы принимали, что наша жидкость несжимаема; но наши общія выводы получатся и для случая сжимаемой жидкости. Разница анализа будетъ *во 1-хъ*, въ томъ, что равенство (B) надо отбросить и *во 2-хъ*, что членъ:

$$\delta \int U d\tau$$

не изчезаетъ, а потому къ лѣвой части равенства (A bis) надо приложить

$$-\delta \int U d\tau .$$

Но:

$$\delta . \int U d\tau = \int \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \delta \varrho + U \Theta \right) d\tau = \int \Theta \left(U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right) d\tau ,$$

ибо

$$\delta . d\tau = \Theta d\tau , \quad \delta \varrho = - \varrho \Theta .$$

Положимъ:

$$U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} = - P . \tag{24}$$

Подставляя значеніе Θ и примѣняя пріемъ преобразованія Грина, находимъ:

$$-\delta . \int U d\tau = - \int P \{ [\cos(nx)\, \delta x + \cos(ny)\, \delta y + \cos(nz)\, \delta z]\, dS -$$

$$- [\cos(n'x)\, \delta x + \cos(n'y)\, \delta y + \cos(n'z)\, \delta z]\, dS' \} -$$

$$- \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau .$$

Вводя это выраженіе въ лѣвую часть равенства (A bis) и приравнивая нулю коэффиціенты при δx, δy, δz во всѣхъ интегралахъ, получимъ тѣже уравненія (C), (D), (E) и (F) съ той лишь разницей, что функція P опредѣляется равенствомъ (24). Это равенство можно написать въ видѣ:

$$P = f(\varrho) . \tag{25}$$

Это есть равенство характеризующее газы.

VII.

Изложенная теорія помимо того, что она сводитъ къ одному источнику и теорію гидростатики, и теорію капиллярности, обладаетъ въ сравненіи съ старыми теоріями Ляпляса и Гаусса тѣмъ преимуществомъ, что сразу вводитъ поверхностное натяженіе, чего нѣтъ въ теоріи Гаусса и даетъ очень просто условіе (III) для краеваго угла, чего непосредственно теорія Ляпляса не даетъ. Наша теорія имѣетъ пунктъ соприкосновенія съ теоріей капиллярности Пуассона въ томъ обстоятельствѣ, что у насъ поверхностная плотность не равна плотности внутри жидкости.

Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ.

Дмитрія Граве.

I.

Настоящая статья представляетъ опытъ установленія основаній общей теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ, независимой отъ какого либо аналитическаго ихъ представленія.

Будемъ разсматривать функцію $f(x, y)$ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y, которая обращается въ нуль для всѣхъ точекъ нѣкотораго замкнутаго контура C. Внутри контура функція однозначна, конечна и непрерывна вмѣстѣ съ ея частными производными перваго порядка. Относительно производныхъ порядка выше перваго мы не дѣлаемъ никакихъ предположеній. Эти производныя могутъ переставать быть конечными и непрерывными и даже могутъ не существовать.

И такъ, мы имѣемъ, очевидно, право предполагать, что функція $f(x, y)$ имѣетъ внутри контура положительныя значенія, ибо если бы функція была отрицательна или нуль для всѣхъ точекъ внутри контура, то мы перемѣнили бы ея знакъ, разсматривая $-f(x, y)$.

Будемъ разсматривать касательную къ контуру C, опредѣляя этимъ терминомъ такую прямую, которая имѣетъ одну или нѣсколько общихъ съ контуромъ точекъ, и относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону. Такое опредѣленіе будетъ годиться для всевозможныхъ контуровъ: когда контуръ имѣетъ точки перегиба, особенныя точки или прямолинейныя части.

Очевидно, что каждому направленію, проведенному на плоскости, соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемый контуръ. Сопоставимъ различныя касательныя къ контуру значеніямъ нѣкотораго угла.

Возьмемъ начало прямоугольныхъ координатъ гдѣ нибудь внутри контура. Обозначимъ черезъ ω уголъ, образуемый положительнымъ направленіемъ оси x-овъ съ направленіемъ перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ начала координатъ, причемъ это направленіе будемъ считать идущимъ отъ касательной къ началу координатъ.

Кромѣ того, обозначимъ черезъ p разстояніе этой касательной отъ начала координатъ.

Обозначая черезъ α линейную функцію

$$p + x\cos\omega + y\sin\omega,$$

получимъ уравненіе касательной въ видѣ

$$\alpha = 0,$$

причемъ $\alpha > 0$ съ той стороны, гдѣ находится контуръ.

Разсмотримъ теперь функцію

$$F = f - \lambda\alpha,$$

гдѣ λ произвольный параметръ.

Относительно новой функціи F легко замѣтить, что ея первыя производныя выражаются такъ:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega$$

$$F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega.$$

Будемъ давать параметру λ возрастающія положительныя значенія, начиная отъ нуля.

При $\lambda = 0$ функція F совпадаетъ съ f и по предположенію имѣетъ внутри контура положительныя значенія.

При положительныхъ значеніяхъ λ для всѣхъ точекъ внутри контура $\lambda\alpha > 0$.

При достаточно малыхъ положительныхъ значеніяхъ λ будутъ оставаться внутри контура положительныя значенія функціи F.

Очевидно, что всякому значенію угла ω будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное предѣльное значеніе λ, для котораго F перестаетъ имѣть положительныя значенія внутри контура.

Обозначимъ предѣльное значеніе λ, соотвѣтствующее углу ω, черезъ λ_ω. Это предѣльное значеніе можетъ быть, конечно, безконечностью. Давая углу ω всевозможныя значенія отъ 0 до 2π, мы будемъ разсматривать соотвѣтственныя значенія λ_ω. Нетрудно видѣть, что λ_ω имѣетъ отличную отъ нуля нижнюю границу λ_0.

Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенства

$$\lambda_\omega > \frac{f(x_1, y_1)}{\varDelta}$$

гдѣ $f(x_1, y_1)$ одно изъ положительныхъ значеній функціи внутри контура, а $\varDelta$ наибольшее изъ разстояній между параллельными касательными къ контуру.

Будемъ разсматривать на вспомогательной плоскости Π величины ω и λ, какъ полярныя координаты: ω полярный уголъ и λ радіусъ-векторъ.

Проведемъ въ плоскости Π кругъ Q радіуса λ_0 изъ полюса, какъ центра. Тогда каждой точкѣ внутри круга Q соотвѣтствуетъ своя функція F. Эта функція F обращается въ нуль на нѣкоторомъ контурѣ C_1, лежащемъ внутри контура C, и имѣетъ положительныя значенія внутри этого контура; на самомъ контурѣ C значенія F отрицательны и равны нулю въ точкахъ общихъ контуру и касательной.

Разсмотримъ функцію F, соотвѣтствующую нѣкоторой точкѣ G внутри круга Q.

Мы видимъ, что внутри даннаго контура C функція F имѣетъ положительныя значенія, но такъ какъ она конечна и непрерывна внутри этого контура, то она достигаетъ гдѣ нибудь внутри контура своего наибольшаго положительнаго значенія. Это значеніе можетъ достигаться функціею въ одной точкѣ или въ нѣсколькихъ.

Доказательство то-же, что и данное Вейерштрассомъ для случая функціи отъ одной перемѣнной независимой.

Будемъ называть совокупность точекъ внутри контура C, соотвѣтствующихъ maximum'у функціи F *фигурою maximi функціи F*.

И такъ, мы видимъ, что каждой точкѣ G внутри круга Q соотвѣтствуетъ нѣкоторая фигура maximi внутри контура C.

Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ изученію различныхъ фигуръ maximi, соотвѣтствующихъ разнымъ точкамъ G плоскости Π, и къ изученію перемѣщенія ихъ въ зависимости отъ перемѣщенія точки G, укажемъ на извѣстное обобщеніе теоремы Ролля, состоящее въ томъ, что для каждой точки фигуры maximi, обѣ частныя производныя F'_x, F'_y должны равняться нулю т. е. должно быть:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega = 0\,, \qquad F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega = 0\,.$$

И такъ, мы видимъ, что прямоугольныя координаты точки G

$$p = \lambda \cos\omega\,, \qquad q = \lambda \sin\omega$$

опредѣляютъ значенія производныхъ f'_x, f'_y заданной функціи въ точкахъ фигуры maximi функціи F, соотвѣтствующей точкѣ G.

Обратимся къ изученію главнѣйшихъ свойствъ фигуръ maximi. Прежде всего надо сказать о видѣ фигуры maximi.

Можетъ произойти нѣсколько случаевъ.

Во первыхъ maximum функціи можетъ соотвѣтствовать конечному числу отдѣльныхъ точекъ внутри контура. Будемъ говорить, что имѣетъ мѣсто случай *обыкновеннаго пунктирнаго maximum'а*.

Словомъ обыкновенный мы будемъ отличать этотъ случай отъ случая *особеннаго пунктирнаго maximum'а*, когда число точекъ, соотвѣтствующихъ наибольшему значенію функціи безконечно велико. Очевидно, что въ особенномъ пунктирномъ maximum'ѣ точки должны асимптотически группироваться или около отдѣльныхъ точекъ, или около цѣлыхъ линій, ибо иначе не можетъ въ конечномъ пространствѣ заданнаго контура помѣститься безчисленное множество отдѣльныхъ точекъ, разстоянія между которыми конечныя.

Можетъ случиться, что maximum функціи соотвѣтствуетъ точкамъ, заполняющимъ конечное число отдѣльныхъ замкнутыхъ линій, или же не замкнутыхъ частей прямыхъ или кривыхъ линій какого либо вида и взаимнаго расположенія. Такой maximum мы будемъ называть *обыкновеннымъ линейнымъ maximum'омъ. Особеннымъ линейнымъ maximum'омъ* будемъ называть случай безчисленнаго множества линій.

Наконецъ мы будемъ называть maximum *обыкновеннымъ поверхностнымъ*, если соотвѣтствующія ему точки, заполняютъ конечное число площадокъ ограниченныхъ нѣкоторыми контурами. *Особеннымъ поверхностнымъ maximum'омъ* мы будемъ называть maximum въ случаѣ безчисленнаго множества отдѣльныхъ площадокъ. При счетѣ числа отдѣльныхъ площадокъ могутъ встрѣтиться площадки не сплошь занятыя точками, такъ что внутри площадки могутъ быть пустыя мѣста не занятыя точками фигуры.

Мыслимы самые разнообразные случаи, представляющіе комбинаціи указанныхъ трехъ основныхъ видовъ расположенія фигуры maximi, причемъ въ случаѣ линейныхъ maximum'овъ линіи могутъ обладать самыми разнообразными особенностями вида и особенными точками самыхъ разнообразныхъ свойствъ. Подобнымъ же образомъ контуры, ограничивающіе отдѣльныя части поверхностнаго maximum'а могутъ быть самаго разнообразнаго вида.

Введемъ теперь новое понятіе, которое позволитъ наши разсужденія значительно упростить, а именно понятіе о касательной прямой къ фигурѣ maximi.

Мы будемъ называть прямую L касательною къ фигурѣ maximi, если по одну сторону прямой L нѣтъ точекъ фигуры и кромѣ того существуютъ точки фигуры, разстояніе которыхъ до прямой меньше произвольно выбраннаго положительнаго числа.

. Нетрудно видѣть, что каждому направленію на плоскости соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемая фигура maximi.

Доказательство существованія этихъ двухъ касательныхъ то-же, что и данное Вейерштрассомъ для существованія верхней и нижней границы конечной перемѣнной.

Будемъ теперь непрерывно измѣнять направленіе пары касательныхъ. При такомъ измѣненіи касательныя будутъ огибать часть плоскости, ограниченную нѣкоторымъ контуромъ, неимѣющимъ выпуклости во внутрь.

Будемъ называть полученный такимъ образомъ контуръ *внѣшнимъ контуромъ фигуры maximi.*

Внѣшній контуръ обращается въ точку, если мы имѣемъ дѣло съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ одной точки. Внѣшній контуръ обращается въ отрѣзокъ прямой, если имѣемъ дѣло съ прямолинейнымъ maximum'омъ, или же съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ точекъ, расположенныхъ вдоль по прямой или же наконецъ только изъ двухъ точекъ.

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ внѣшній контуръ, представляетъ фигуру выпуклую со всѣхъ сторонъ, состоящую изъ ряда прямолинейныхъ или криволинейныхъ частей.

Такъ для фигуры, состоящей изъ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, внѣшній контуръ обращается въ треугольникъ, вершинами котораго служатъ три точки.

Дуга круга даетъ черезъ прибавленіе хорды сегментъ какъ внѣшній контуръ.

Итакъ, назвавъ касательною къ внѣшнему контуру прямую, имѣющую одну или нѣсколько съ нимъ общихъ точекъ, относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону, мы замѣтимъ, что касательная къ внѣшнему контуру касается его или въ одной точкѣ, или вдоль по прямой сторонѣ. Будемъ въ первомъ случаѣ называть точку касанія *выходящею* точкою внѣшняго контура.

Очевидно, что касательная къ внѣшнему контуру есть въ тоже время касательная къ соотвѣтственной фигурѣ maximi.

Нетрудно убѣдиться, что если функція f непрерывна, то всѣ выходящія точки должны быть въ то же время точками соотвѣтственной фигуры maximi. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, одну изъ выходящихъ точекъ. Къ ней можно провести одну или нѣсколько касательныхъ. Пусть будетъ указана какая нибудь касательная L выходящей точки $M_0(x_0, y_0)$ внѣшняго контура. По предыдущему должны существовать точки фигуры maximi безконечно близкія къ касательной L. Эти точки должны быть безконечно близки къ точкѣ M_0, ибо всѣ остальныя точки прямой L находятся внѣ контура и, слѣдовательно, на конечномъ разстояніи отъ всѣхъ точекъ фигуры maximi. Можетъ произойти, слѣдовательно, одно изъ двухъ: или точка M_0 есть точка фигуры maximi, и тогда теорема доказана, или же точка M_0 такова, что къ ней асимптотически приближаются точки $M_i(x_i, y_i)$ фигуры maximi. Нетрудно убѣдиться, что во второмъ случаѣ мы приходимъ къ противорѣчію.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ рядъ точекъ фигуры maximi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3), \ldots$, неопредѣленно приближающихся къ точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, при чемъ, очевидно, будетъ:

$$\lim \{x_i\}_{i=\infty} = x_0, \qquad \lim \{y_i\}_{i=\infty} = y_0.$$

Разсмотримъ функцію $F(x, y)$, соотвѣтствующую данному внѣшнему контуру. Если функція f непрерывна, то, очевидно, должна быть непрерывна и функція F.

Далѣе

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = \ldots = F(x_i, y_i) = A,$$

гдѣ A наибольшее значеніе F внутри контура, ибо точки (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ и т. д. принадлежатъ фигурѣ maximi.

На основаніи непрерывности функціи $F(x, y)$ значеніе $F(x_0, y_0)$ будетъ предѣльнымъ для значеній $F(x_i, y_i)$, которыя всѣ равны A; слѣдовательно, это предѣльное значеніе будетъ A, и точка M_0 принадлежитъ фигурѣ maximi, что противорѣчитъ предположенію.

Точки внутри внѣшняго контура и на самомъ контурѣ, неоотвѣтствующія фигурѣ maximi, будемъ называть *свободными* точками.

Докажемъ нѣсколько весьма важныхъ предложеній относительно фигуръ maximi и внѣшнихъ контуровъ.

Для удобства дальнѣйшихъ разсужденій вмѣсто функціи $F(x, y)$, достигающей наибольшаго значенія A въ нѣкоторой точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, соотвѣтственной фигурѣ maximi Ξ, будемъ разсматривать функцію

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0).$$

Новая функція $\Phi(x, y)$ имѣетъ ту же фигуру maximi что и функція $F(x, y)$; только она равна нулю для всѣхъ точекъ фигуры maximi и удовлетворяетъ неравенству

$$\Phi(x, y) < 0$$

для всѣхъ остальныхъ точекъ внутри контура C.

Нетрудно видѣть, что функція Φ выражается слѣдующимъ образомъ

$$\Phi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda[(x - x_0)\cos\omega + (y - y_0)\sin\omega] =$$
$$= f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

гдѣ p_0 и q_0 значенія частныхъ производныхъ f'_x, f'_y для точекъ фигуры maximi Ξ.

Лемма I. Двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ G_1, G_2 плоскости Π не могутъ имѣть общихъ точекъ.

Доказательство очень просто. Предположимъ обратное; пусть будетъ существовать общая точка $M_1(x_1, y_1)$ у двухъ фигуръ maximi. Обозначая прямоугольныя координаты точекъ G_1, G_2 черезъ (p_1, q_1), (p_2, q_2), получимъ равенства

$$f'_x(x_1, y_1) = p_1, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_1,$$
$$f'_x(x_1, y_1) = p_2, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_2,$$

которыя противорѣчатъ существованію для точки M_1 опредѣленныхъ частныхъ производныхъ перваго порядка, ибо точки G_1 и G_2 по предположенію различны между собою и, слѣдовательно, не могутъ удовлетворяться заразъ неравенства $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

Изъ этой леммы, какъ слѣдствіе, вытекаетъ, что двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ плоскости Π, должны лежать одна внѣ другой. При этомъ линейныя или площадныя части одной фигуры не могутъ касаться подобныхъ же частей другой, ибо при переходѣ черезъ точку касанія съ одной фигуры на другую частныя производныя перваго порядка переставали бы быть непрерывными.

Лемма II. Пусть будутъ даны двѣ фигуры maximi Ξ_1 и Ξ_2, соотвѣтствующія двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$ $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π. Возьмемъ любую точку фигуры Ξ_1 и обозначимъ ея координаты черезъ x_1, y_1; подобнымъ же образомъ, пусть будутъ координаты произвольной точки фигуры Ξ_2 обозначены черезъ x_2, y_2.

Будетъ всегда имѣть мѣсто неравенство

$$(x_1 - x_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(q_1 - q_2) < 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи того, что точка (x_1, y_1) принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтственной точкѣ G_1, имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1) \leqq 0,$$

гдѣ знакъ равенства относится къ точкамъ фигуры maximi Ξ_1. Взявъ точку (x_2, y_2) второй фигуры maximi, получаемъ неравенство

$$(1) \qquad f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - p_1(x_2 - x_1) - q_1(y_2 - y_1) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ для фигуры maximi Ξ_2 имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) \leqq 0.$$

Примѣненное къ точкѣ (x_1, y_1) первой фигуры, оно даетъ

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) - p_2(x_1 - x_2) - q_2(y_1 - y_2) < 0.$$

Складывая неравенства (1) и (2), получимъ

$$(p_2 - p_1)(x_2 - x_1) + (q_2 - q_1)(y_2 - y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что имѣетъ мѣсто всегда неравенство

$$\Delta x \Delta p + \Delta y \Delta q < 0,$$

гдѣ Δx и Δy суть приращенія координатъ, соотвѣтствующія переходу отъ точки одной фигуры maximi Ξ_1 къ точкѣ другой фигуры Ξ_2, а Δp и Δq суть соотвѣтственныя приращенія первыхъ частныхъ производныхъ.

Обращаемся теперь къ закону перемѣщенія внѣшнихъ контуровъ при перемѣщеніи точки G внутри круга Q.

Лемма III. Два внѣшнихъ контура Ξ_1, Ξ_2, соотвѣтствующіе двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$, $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π, не пересѣкаются между собою, а лежатъ одинъ внѣ другого.

Разсмотримъ на плоскости даннаго контура прямую L, опредѣляемую уравненіемъ

$$p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = 0,$$

гдѣ x_1, y_1 координаты какой нибудь точки фигуры maximi Ξ_1; x_2, y_2 координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2. Покажемъ теперь, что всѣ точки фигуры Ξ_1 лежатъ по одну сторону прямой L на конечномъ разстояніи; подобнымъ же образомъ, всѣ точки фигуры Ξ_2 лежатъ по другую сторону этой прямой.

Обозначимъ черезъ x_1', y_1' координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_1, отличной отъ точки (x_1, y_1); если фигура Ξ_1 будетъ состоять изъ одной точки, то будетъ $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$.

Обозначая первую часть уравненія прямой L черезъ $\omega(x, y)$, получимъ

$$\omega(x_1', y_1') = p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) - p_2(x_1' - x_2) - q_2(y_1' - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi(x, y)$, соотвѣтствующую фигурѣ maximi Ξ_1 и ея точкѣ (x_1, y_1), и обозначимъ ее черезъ

$$\Phi_{x_1, y_1}(x, y).$$

Получаемъ

$$\Phi_{x_1 y_1}(x, y) = f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1),$$

$$\Phi_{x_2 y_2}(x, y) = f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2).$$

Но $\Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') = 0$ и слѣдовательно,

$$f(x_1, y_1) + p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) = f(x_1', y_1').$$

Слѣдовательно

$$\omega(x_1', y_1') = \Phi_{x_2 y_2}(x_1', y_1') \leqq - \delta_1,$$

гдѣ δ_1 есть разность между $F_{x_2 y_2}(x_2, y_2)$ и наибольшимъ значеніемъ $F_{x_2 y_2}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_1.

Нетрудно видѣть, съ другой стороны, что $\omega(x_2', y_2')$, гдѣ x_2', y_2 суть координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2, можетъ быть выражена черезъ значеніе функціи $\Phi_{x_1, y_1}(x, y)$, а именно

$$\omega(x_2', y_2') = - \Phi_{x_1 y_1}(x_2', y_2') \geqq + \delta_2,$$

гдѣ δ_2 есть разность между $F_{x_1 y_1}(x_1, y_1)$ и наибольшимъ значеніемъ функціи $F_{x_1 y_1}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_2. Отсюда мы видимъ, что $\omega(x_1', y_1')$ и $\omega(x_2', y_2')$ разныхъ знаковъ и по абсолютной величинѣ не меньше меньшаго изъ чиселъ δ_1, δ_2. Слѣдовательно, двѣ фигуры maximi Ξ_1, Ξ_2, а слѣдовательно, и ихъ внѣшніе контуры лежатъ по разныя стороны прямой L. Кромѣ того, если мы проведемъ прямыя параллельныя прямой L: одну со стороны контура Ξ_1 на разстояніи

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}},$$

другую со стороны контура Ξ_2 на разстоянiи

$$\frac{\delta_2}{\sqrt{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2}},$$

то въ пространствѣ между этими прямыми не будетъ точекъ принадлежащихъ контурамъ Ξ_1 и Ξ_2, что и требовалось доказать.

Введемъ теперь въ разсмотрѣнiе *разстоянiе* между двумя внѣшними контурами, разумѣя подъ нимъ кратчайшее разстоянiе между точками этихъ двухъ контуровъ.

Будемъ теперь двѣ точки плоскости Π сближать; покажемъ, что разстоянiе между соотвѣтственными контурами можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ при достаточномъ сближенiи точекъ. Докажемъ для этой цѣли слѣдующую лемму.

Лемма IV. При безпредѣльномъ приближенiи точки G_2 къ точкѣ G_1 соотвѣтственный контуръ Ξ_2 безпредѣльно приближается къ контуру Ξ_1.

Эта лемма можетъ быть точнѣе формулирована такъ: при достаточномъ сближенiи точекъ G_1 и G_2 можно сдѣлать разстоянiе между двумя соотвѣтственными контурами меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа. Допустимъ обратное, а именно, что вокругъ контура Ξ_1 можно описать контуръ C, всѣ точки котораго на конечномъ разстоянiи отъ точекъ контура Ξ_1, и внутрь котораго не могутъ попадать точки контура Ξ_2, какъ бы мы близко отъ точки G_1 ни выбирали точку G_2.

Возьмемъ неравенство

$$\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q<\Phi_{x_1y_1}(x_2,\ y_2).$$

Тогда, принимая во вниманiе, что

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2,\ y_2)=F_{x_1y_1}(x_2,\ y_2)-F_{x_1y_1}(x_1,\ y_1),$$

гдѣ $F_{x_1y_1}(x_1,\ y_1)=A$ есть maximum функцiи $F_{x_1y_1}(x,\ y)$, получимъ

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2,\ y_2)<B-A,\quad \text{гдѣ } B<A.$$

Въ самомъ дѣлѣ, точка $(x_2,\ y_2)$ по предположенiю остается всегда внѣ контура C; слѣдовательно, $F_{x_1y_1}(x_2\ y_2)$ не превосходитъ нѣкотораго положительнаго числа B меньшаго A.

И такъ, мы видимъ, что

$$|\Phi_{x_1y_1}(x_2,\ y_2)|>A-B,$$

откуда

$$|\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q|>A-B.$$

Мы приходимъ къ очевидному противорѣчію, ибо при достаточномъ сближеніи точекъ G_1 и G_2 приращенія Δp и Δq могутъ быть сколь угодно малы.

Лемма V. При приближеніи точки $G_i (i = 1, 2, 3 \ldots)$ къ точкѣ G_0 соотвѣтственный внѣшній контуръ Ξ_2 приближается къ внѣшнему контуру Ξ_0 такимъ образомъ, что точка фигуры maximi Ξ_i не можетъ приближаться къ точкамъ свободной стороны контура Ξ_0.

Допустимъ обратное. Предположимъ, что точка $(x_i\ y_i)$ фигуры maximi Ξ_i приближается къ точкѣ (x_0', y_0') свободной стороны контура Ξ_0. Будемъ обозначать черезъ x_0, y_0 координаты какой нибудь изъ точекъ фигуры maximi Ξ_0, не указывая которой именно.

Разсмотримъ тождество

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0', y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) = \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') + \\ + (p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0).$$

Точку (x_0, y_0) можно всегда выбрать такимъ образомъ, чтобы было

$$(p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0) \leqq 0\,;$$

для этой цѣли достаточно указать касательную къ контуру Ξ_0 параллельную прямой

$$(p_0 - p_i)\xi + (q_0 - q_i)\eta + K = 0,$$

такую, чтобы точки $(x_i\ y_i)$ и контуръ Ξ_0 лежали по разныя стороны этой касательной.

Получаемъ неравенство

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) \leqq \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0').$$

Такъ какъ точка (x_0', y_0') не принадлежитъ фигурѣ maximi Ξ_0, то существуетъ такое положительное число δ, что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') < -\delta.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $\Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) < 0$, получимъ

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')| > \delta.$$

И такъ, мы пришли къ очевидному противорѣчію, ибо послѣднее неравенство должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ i. Но при увеличенiи значка i имѣемъ, что $\lim(x_i)=x_0'$, $\lim(y_i)=y_0'$. Отсюда на основанiи непрерывности функцiи $f(x, y)$ и конечности величинъ p_i и q_i получимъ, что при достаточно большихъ значенiяхъ i будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')|=|f(x_0'\ y_0')-f(x_i\ y_i)-p_i(x_0'-x_i)-q_i(y_0'-y_i)|<\varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно малое положительное число, что противорѣчитъ неравенству, написанному раньше.

Лемма VI. При безпредѣльномъ приближенiи внѣшняго контура Ξ_2 къ контуру Ξ_1 точка G_2 приближается къ точкѣ G_1.

Эта лемма есть предложенiе обратное леммѣ IV и слѣдуетъ непосредственно изъ леммы V и непрерывности первыхъ производныхъ $f_x'(x_i\ y)$, $f_y'(x, y)$.

Возьмемъ на плоскости Π двѣ опредѣленныя точки G_1 и G_2. Пусть будутъ соотвѣтственные внѣшнiе контуры Ξ_1, Ξ_2. Нетрудно убѣдиться, что перемѣщенiю точки по прямой G_1G_2 будетъ соотвѣтствовать непрерывная полоса внѣшнихъ контуровъ, идущая отъ контура Ξ_1 къ контуру Ξ_2. Въ сказанномъ мы убѣдимся слѣдующимъ образомъ. Проведемъ произвольное поперечное сѣченiе P заданаго контура, дѣлящее внутренность контура на двѣ области A, B, въ которыхъ лежатъ: въ одной контуръ Ξ_1, въ другой контуръ Ξ_2. Покажемъ теперь, что, какъ бы ни было проведено поперечное сѣченiе P, будетъ существовать на прямой $G_1\ G_2$ между точками G_1 и G_2 такая точка G_0, соотвѣтственный контуръ которой Ξ_0 имѣетъ общiя точки съ линiею P.

Раздѣлимъ отрѣзокъ $G_1\ G_2$ пополамъ точкою G_3. Координаты этой послѣдней будутъ

$$\left(\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{q_1+q_2}{2}\right).$$

Разсмотримъ контуръ Ξ_3, соотвѣтствующiй точкѣ G_3.

Можетъ случиться одно изъ двухъ: или этотъ контуръ Ξ_3 будетъ имѣть точки общiя съ линiею P, и тогда теорема справедлива, или же нѣтъ. Тогда контуръ Ξ_3, не касаясь линiи P, долженъ лежать въ одной изъ областей A, B. Пусть Ξ_3 лежитъ въ области A; тогда возьмемъ за новыя точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точку G_3 и точку G_2, при чемъ первой соотвѣтствуетъ контуръ Ξ_3, лежащiй въ области A, а второй контуръ Ξ_2, лежащiй въ области B. Если контуръ Ξ_3 попадаетъ въ область B, то принимаемъ за точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точки G_1, G_3. Дѣлимъ теперь далѣе отрѣзокъ $G_1^{(1)}\,G_2^{(1)}$ точкою $G_3^{(1)}$ пополамъ и принимаемъ за новыя точки $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ или точки $G_1^{(1)}$, $G_3^{(1)}$, или точки $G_3^{(1)}$, $G_2^{(1)}$

такимъ образомъ, чтобы контуръ точки $G_1^{(2)}$ лежалъ въ области A, а контуръ точки $G_2^{(2)}$ въ области B. Мы предполагаемъ конечно, что контуръ точки $G_3^{(1)}$ не имѣетъ общихъ точекъ съ линіею P, ибо иначе справедливость теоремы слѣдуетъ непосредственно.

Продолжая далѣе сказанное дѣленіе промежутковъ, мы или придемъ непосредственно къ точкѣ $G_3^{(i)}$, контуръ которой имѣетъ общія точки съ линіею P, или же получимъ два безконечныхъ ряда точекъ

$$G_1, \; G_1^{(1)}, \; G_1^{(2)}, \; G_1^{(3)}, \ldots, G_1^{(i)}, \ldots,$$

$$G_2, \; G_2^{(1)}, \; G_2^{(2)}, \; G_2^{(3)}, \ldots, G_2^{(i)}, \ldots,$$

приближающихся къ нѣкоторой точкѣ G_0. Докажемъ, что эта предѣльная точка имѣетъ контуръ Ξ_0, имѣющій общія точки съ линіею P. Допустимъ обратное, а именно, что контуръ Ξ_0 не имѣетъ общихъ точекъ съ линіею P и что, слѣдовательно, онъ лежитъ въ одной изъ областей A, B. Предположимъ, что онъ лежитъ въ области A. Разсмотримъ контуры, соотвѣтствующіе ряду точекъ

$$G_2, \; G_2^{(1)}, \; G_2^{(2)}, \ldots G_2^{(i)} \ldots$$

Всѣ эти контуры лежатъ въ области B и, слѣдовательно, на конечномъ разстояніи отъ контура Ξ_0, что приводитъ къ противорѣчію, ибо точки $G_2^{(i)}$ съ увеличеніемъ значка i приближаются сколь угодно близко къ точкѣ G_0. И такъ, мы видимъ, что предѣльный контуръ Ξ_0 долженъ имѣть общія точки съ линіею P.

Высказанное предложеніе можетъ быть выражено еще такъ: при перемѣщеніи точки по прямой $G_1 G_2$ соотвѣтственный контуръ описываетъ нѣкоторую непрерывную полосу. Будемъ называть подобную полосу *прямолинейною полосою*, связывающею два контура Ξ_1 и Ξ_2. Очевидно, что всякіе два произвольныхъ контура могутъ быть связаны одною и только одною прямолинейною полосою.

Возьмемъ въ плоскости Π нѣкоторый сомкнутый криволинейный контуръ простого вида, т. е. такой, который пересѣкается всякою прямою въ двухъ точкахъ. Возьмемъ на этомъ контурѣ рядъ точекъ G_1, G_2, $G_3, \ldots, G_n$. Соединимъ эти точки прямыми линіями; тогда получимъ нѣкоторый многоугольникъ $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_1$, вписанный въ разсматриваемый контуръ. Построивъ внѣшніе контуры $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$, соотвѣтствующіе различнымъ вершинамъ нашего многоугольника, мы можемъ съ каждой изъ сторонъ многоугольника сопоставить прямолинейную полосу, связывающую каждые два послѣдовательные изъ ряда внѣшнихъ контуровъ $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$. Получимъ рядъ прямолинейныхъ полосъ, начинающійся съ нѣкотораго контура Ξ_i, непрерывно проходящій черезъ всѣ контуры $\Xi_{i+1}, \ldots, \Xi_n, \Xi_1, \ldots, \Xi_{i-1}$ и заканчивающійся въ томъ же контурѣ Ξ_i. Такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію о *многоугольномъ циклѣ* внѣшнихъ контуровъ.

Увеличивая до безконечности число сторонъ вписаннаго многоугольника такимъ образомъ, чтобы всѣ стороны безконечно уменьшались, мы приходимъ къ понятію о *криволинейномъ циклѣ*, какъ предѣльной фигурѣ по отношенію къ соотвѣтствующему многоугольному циклу.

Всякій криволинейный циклъ будетъ обладать свойствомъ, что изъ всякой его точки можно будетъ попасть въ другую, принадлежащую ему точку, непрерывнымъ передвиженіемъ по точкамъ цикла. Будемъ называть каждый изъ контуровъ, образующихъ циклъ, элементомъ цикла. Каждый криволинейный циклъ разбиваетъ всѣ контуры на двѣ категоріи: внутренніе относительно цикла и внѣшніе относительно него.

Мы будемъ называть контуръ внутреннимъ относительно цикла, если нельзя попасть изъ точекъ его на основной контуръ C непрерывнымъ движеніемъ, не пересѣкая цикла.

Нетрудно убѣдиться, что, если мы разсматриваемъ нѣкоторый циклъ L и соотвѣтственный контуръ Λ на плоскости Π, то контурамъ maximi, внутреннимъ относительно цикла L, будутъ соотвѣтствовать точки плоскости Π, лежащія внутри контура Λ, и обратно.

Мы докажемъ это предложеніе, проводя черезъ контуръ, лежащій внутри цикла L, всевозможныя прямолинейныя полосы и замѣчая, что каждая изъ этихъ полосъ должна пересѣкать циклъ по крайней мѣрѣ въ одномъ элементѣ.

Теперь обращаемся къ доказательству слѣдующаго весьма важнаго предложенія.

Теорема. Внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность цикла, соотвѣтствующаго кругу Q.

Можно было бы доказать предложеніе болѣе общее, что внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность заданнаго контура C. Въ виду того, что подобное доказательство должно, очевидно, основываться на свойствахъ даннаго контура, а также въ виду того, что это распространіе, не представляя особенной трудности, излишне для ближайшей цѣли, поставленной въ основаніе всего мемуара, мы здѣсь ограничимся доказательствомъ теоремы въ томъ видѣ, какъ она высказана.

Не трудно видѣть, что наша теорема можетъ быть иначе формулирована такъ: всякая точка плоскости внутри цикла K, соотвѣтствующаго кругу Q плоскости Π, должна принадлежать какому нибудь изъ внѣшнихъ контуровъ или лежать внутри его.

Возьмемъ произвольную точку W внутри цикла K. Разобьемъ фигуру Q плоскости Π сѣтью пересѣкающихся поперечныхъ сѣченій на меньшія части. Напримѣръ, для опредѣленности рѣчи можно будетъ разбить контуръ Q на квадраты сѣтью прямыхъ линій. Очевидно, что сѣти квадратовъ, проведенныхъ на плоскости Π, будетъ соотвѣтствовать на плоскости (x, y) сѣть, образованная двумя пересѣкающимися системами прямолинейныхъ полосъ, разбивающая внутренность цикла K на извѣстное число участковъ, ограниченныхъ циклами, соотвѣтствующими контурамъ квадратныхъ клѣтокъ нашей сѣти. Случится, очевидно, одно изъ двухъ: или точка W окажется принадлежащей какому либо контуру сѣти полосъ, или будетъ находиться внутри одного изъ этихъ участковъ N_1. Въ первомъ случаѣ точка W удовлетворяетъ высказанному предложенію, во второмъ же случаѣ беремъ соотвѣтственный квадратъ n_1 плоскости Π. Разобьемъ этотъ квадратъ на меньшіе; тогда внутренность цикла N_1 разобьется на систему новыхъ цикловъ, и опять возьмемъ тотъ изъ новыхъ цикловъ N_2, внутри котораго лежитъ разсматриваемая точка W, если только эта точка не попадаетъ на какой нибудь контуръ сѣти. Укажемъ квадратъ n_2, соотвѣтствующій циклу N_2, и будемъ его дѣлить на новые квадраты. Такимъ путемъ можетъ произойти одно изъ двухъ: или точка W попадетъ на одинъ изъ контуровъ одной изъ указанныхъ сѣтей, или же получимъ безконечный рядъ квадратовъ

$$n_1, \; n_2, \; n_3, \ldots,$$

обладающій слѣдующими свойствами:

1) каждый изъ этихъ квадратовъ заключаетъ внутри себя всѣ послѣдующіе,

2) этимъ квадратамъ соотвѣтствуютъ циклы $N_1, N_2, \ldots,$ обладающіе свойствомъ заключать внутри себя точку W.

Если стороны квадратовъ ряда $n_1, n_2, n_3, \ldots$ убываютъ такимъ образомъ, что отношеніе стороны каждаго слѣдующаго квадрата къ сторонѣ предыдущаго не превосходитъ нѣкотораго числа меньшаго единицы, то, очевидно, что такой рядъ квадратовъ опредѣляетъ нѣкоторую предѣльную точку n_0 плоскости Π или, другими словами, нѣкоторую пару чиселъ p и q.

Внѣшній контуръ, соотвѣтствующій точкѣ n_0 долженъ, очевидно, представлять изъ себя фигуру, къ которой приближается циклъ N_k по мѣрѣ увеличенія значка k и, слѣдовательно, предѣльный внѣшній контуръ долженъ представлять фигуру, заключающую внутри себя точку W. Въ частномъ случаѣ контуръ можетъ обратиться въ точку W.

Внѣшніе контуры, какъ мы уже видѣли, образуютъ всегда простую сомкнутую фигуру безъ входящихъ частей и, слѣдовательно, могутъ имѣть въ качествѣ предѣльныхъ фигуръ или точку, или отрѣзокъ прямой.

Будемъ называть случай внѣшняго контура, обращающагося въ точку, случаемъ *изолированнаго maximum'а.*

Прямолинейные внѣшніе контуры могутъ заполнять площадки конечныхъ размѣровъ, которыя будемъ называть *линейчатыми.*

Дадимъ теперь строгое доказательство существованія безчисленнаго множества изолированныхъ maxima.

Возьмемъ произвольный внѣшній контуръ A и на немъ выходящую точку M. Изъ точки M, какъ центра, опишемъ окружность B такого радіуса, чтобы она пересѣкала данный внѣшній контуръ. Я утверверждаю, что точкамъ круга B, лежащимъ внѣ контура A, долженъ соотвѣтствовать циклъ внѣшнихъ контуровъ, огибающій нѣкоторое пространство, заключенное внутри круга.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ касательную въ точкѣ M къ внѣшнему контуру A. Эта касательная пересѣкаетъ кругъ B въ двухъ точкахъ M_1 и M_2 діаметрально противоположныхъ. Точки встрѣчи N_1 и N_2 круга съ внѣшнимъ контуромъ A должны лежать по одну сторону касательной M_1M_2, ибо весь контуръ A лежитъ по одну сторону касательной. Точки N_1 и N_2 могутъ конечно совпадать, если данный контуръ прямолинейный. Возьмемъ на кругѣ B двѣ произвольныя точки, лежащія внѣ контура A, но съ той же стороны касательной, что и контуръ: одну P_1 между точками M_1 и N_1, другую P_2 между точками M_2 и N_2. Точки P_1 и P_2 не могутъ принадлежать одному и тому же внѣшнему контуру A_1, ибо въ обратномъ случаѣ прямая P_1P_2 пересѣкала бы контуръ A и, слѣдовательно, контуры A и A_1 имѣли бы общія точки. И такъ, двигаясь по кругу B въ обѣ стороны отъ контура A, мы получаемъ двѣ криволинейныя полосы контуровъ, которыя должны, очевидно, замкнуться въ циклъ. Нетрудно видѣть, что этому циклу G будетъ соотвѣтствовать замкнутый контуръ Z на плоскости Π. Возьмемъ внутри контура Z произвольную точку H. Этой точкѣ внутри цикла G соотвѣтствуетъ нѣкоторый внѣшній контуръ A'. Этотъ контуръ можетъ обращаться въ точку, и тогда существованіе изолированнаго maximum'а доказано. Если контуръ A' не обращается въ точку, то мы разсуждаемъ относительно его такъ же какъ относительно контура A. Беремъ на немъ выходящую точку M', проводимъ изъ точки M' какъ центра кругъ B' радіуса меньшаго половины радіуса круга B, пересѣкающій контуръ A' и не встрѣчающій цикла G, что всегда возможно, ибо контуры не касаются между собою. Кругу B' будетъ соотвѣтствовать новый циклъ G' и новый контуръ Z', лежащій внутри контура Z. Возьмемъ внутри контура Z' произвольную точку H'. Этой точкѣ будетъ соотвѣтствовать контуръ A''. Если контуръ A'' обращается въ точку, теорема доказана. Если же контуръ A'' не представляетъ точки, продолжаемъ разсужденіе далѣе. Беремъ на контурѣ

A'' выходящую точку M'', изъ этой точки какъ центра проводимъ кругъ B'' радіуса меньше половины радіуса круга B', не встрѣчающій цикла G'. Продолжая далѣе указанное построеніе, мы придемъ къ одному изъ двухъ случаевъ: или непосредственно укажемъ изолированный maximum, или рядъ круговъ B, B', B'', ... будетъ неопредѣлено продолжаться, и тогда эти круги приближаются къ нѣкоторой предѣльной точкѣ M_0. Докажемъ теперь, что предѣльная точка M_0 будетъ изолированнымъ maximum'омъ.

Докажемъ предварительно слѣдующую лемму.

Лемма VII. На всякомъ внѣшнемъ контурѣ, соотвѣтствующемъ точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π, можно указать точку (x_1, y_1), принадлежащую фигурѣ maximi, такую, что для всякой свободной точки (x_1', y_1') этого контура имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') < \Phi_{x_0, y_0}(x_1, y_1),$$

гдѣ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1)$$

функція, соотвѣтствующая точкѣ G_0 плоскости Π. Пусть будутъ координаты точки G_0 p_0 и q_0.

Тогда имѣемъ, очевидно,

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') - \Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) = \Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = (p_1 - p_0)(x_1' - x_1) + (q_1 - q_0)(y_1' - y_1).$$

Теперь мы видимъ, что

$$\Phi_{x_1 y_1}(y_1', y_1') < 0,$$

ибо точка (x_1', y_1') не принадлежитъ фигурѣ maximi.

Что же касается величины Δ, то мы всегда можемъ точкою (x_1, y_1) распорядиться такъ, чтобы было $\Delta \leqq 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ къ контуру, соотвѣтствующему точкѣ G_1, касательную, направленіе которой перпендикулярно къ прямой $G_0 G_1$, если оси координатъ плоскости Π считать совпадающими съ осями координатъ плоскости (x, y), заставляя, конечно, обѣ плоскости совпасть. Такихъ касательныхъ будетъ, очевидно, двѣ; возьмемъ ближайшую къ точкѣ (x_0, y_0). Точки касанія этой касательной съ соотвѣтственною фигурою maximi могутъ быть приняты за точку (x_1, y_1), ибо тогда для всѣхъ точекъ, принадлежащихъ контуру, имѣетъ мѣсто неравенство $\Delta \leqq 0$, что и требовалось доказать.

Продолжаемъ теперь прерванное доказательство. Возьмемъ произвольную точку внутри даннаго контура C; пусть координаты этой точки будутъ x_1, y_1. Эта точка M_1 будетъ находиться на площади нѣкотораго внѣшняго контура. Предположимъ, что точка M_1 принадлежитъ соотвѣтственной фигурѣ maximi; потомъ разсмотримъ случай, когда точка (x_1, y_1) будетъ свободная. Пусть точка M_1 принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтствующей точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π. Обозначимъ координаты предѣльной точки M_0 черезъ x_0, y_0. Разсмотримъ рядъ круговъ B, B', B'', ... Соединимъ на плоскости Π прямою точку G_1 съ точкою G_0, имѣющей координаты p_0, q_0, съ которою стремятся совпасть (на основанiи леммы VI) контуры Z, Z', Z'', ... Этой прямой соотвѣтствуетъ прямолинейная полоса контуровъ на плоскости x, y. Разсмотримъ циклы, соотвѣтствующiе кругамъ B, B', B'', ... Эти циклы пересѣкаются съ прямолинейною полосою по ряду контуровъ

$$\Xi, \Xi', \Xi'', \ldots .$$

Будемъ обозначать черезъ x_i, y_i координаты точки, принадлежащей фигурѣ maximi $\Xi^{(i)}$.—Контурамъ $\Xi^{(i)}$ будутъ соотвѣтствовать на прямой $G_0 G_1$ точки $G_i(p_i, q_i)$, приближающiяся съ возрастанiемъ числа i къ предѣльной точкѣ G_0.

Докажемъ теперь, что точка M_0 будетъ представлять изолированный maximum.

Для этой цѣли достаточно показать, что функцiя

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0)$$

будетъ отрицательная для всякой точки (x_1, y_1) отличой отъ (x_0, y_0). Согласно условiю, мы предполагаемъ сначала, что (x_1, y_1) принадлежитъ нѣкоторой фигурѣ maximi Ξ_1. Покажемъ теперь, что, если

$$\Phi_{x_i y_i}(x, y) = f(x, y) - f(x_i, y_i) - p_i(x - x_i) - q_i(y - y_i),$$

гдѣ (x_i, y_i) одна изъ точекъ фигуры maximi $\Xi^{(i)}$, то будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0.$$

Послѣднее неравенство очевидно; что же касается перваго, то можно замѣтить, что будетъ имѣть мѣсто тождество

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) - \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) = \Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) + \Delta,$$

гдѣ

$$\varDelta = (p_i - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_i - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1}).$$

Нетрудно видѣть, что общая величина дробей

$$\frac{p_i - p_{i+1}}{p_1 - p_{i+1}}, \quad \frac{q_i - q_{i+1}}{q_1 - q_{i+1}}$$

есть число положительное α, представляющее отношеніе отрѣзковъ $G_i G_{i+1}$, $G_1 G_{i+1}$, вслѣдствіе чего получаемъ

$$\varDelta = \alpha[(p_1 - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_1 - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1})];$$

на основаніи же леммы II мы видимъ, что $\varDelta < 0$; кромѣ того, очевидно,

$$\varPhi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) < 0.$$

Слѣдовательно, неравенство доказано.

Будемъ безпредѣльно увеличивать число i. Тогда имѣемъ

$$\lim(x_i) = x_0, \qquad \lim(y_i) = y_0.$$

Съ другой стороны, на основаніи непрерывности функціи $f(x, y)$,

$$\lim f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0),$$

и наконецъ

$$\lim(p_i) = p_0, \qquad \lim(q_i) = q_0,$$

такъ что имѣемъ

$$\lim \varPhi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) = \varPhi_{x_0 y_0}(x_1, y_1).$$

На основаніи же неравенства, выведеннаго выше, получаемъ

$$\varPhi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) < \varPhi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Остается теперь разобрать случай, когда точка (x_1, y_1) свободная. Въ этомъ случаѣ, на основаніи леммы VII, получимъ для одной изъ точекъ (x_1', y_1'), принадлежащихъ фигурѣ maximi контура Ξ_1, неравенства

$$\varPhi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < \varPhi_{x_i x_i}(x_1' \, y_1') < 0$$

и доказывающія предложеніе.

Приведенное доказательство существованія изолированныхъ maxima показываетъ, что около каждой выходящей точки каждаго изъ внѣшнихъ контуровъ существуетъ безчисленное множество изолированныхъ maxima.

II.

Обратимся теперь къ геометрическому толкованію приведенныхъ общихъ изслѣдованій, а также сдѣлаемъ нѣкоторые выводы, относящіеся къ теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Если для всѣхъ точекъ внутри контура C задана однозначная непрерывная функція $f(x, y)$, обращающаяся въ нуль для точекъ контура и имѣющая опредѣленныя и непрерывныя внутри контура C частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, то тѣмъ самымъ задана часть поверхности, ограниченная плоскимъ контуромъ C. Подобная часть поверхности можетъ быть названа сегментомъ.

Независимыя перемѣнныя x и y можно разсматривать, какъ это мы и дѣлали въ первой главѣ, какъ прямоугольныя координаты на плоскости контура C. Если мы возставимъ въ началѣ координатъ перпендикуляръ къ плоскости x, y и примемъ его за ось z-овъ, то уравненіе поверхности будетъ

$$z = f(x, y),$$

при чемъ, по опредѣленію функціи, это уравненіе имѣетъ мѣсто лишь для точекъ лежащихъ внутри контура.

Возьмемъ какую нибудь точку $G_0(p_0, q_0)$ плоскости Π. Ей будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый внѣшній контуръ Ξ_0. Пусть будетъ одна изъ точекъ фигуры maximi этого контура $M_0(x_0, y_0)$.

Уравненіе

$$z = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

представляетъ уравненіе плоскости P, касательной къ поверхности въ ея точкѣ

$$[x_0, y_0, f(x_0, y_0)].$$

Эта касательная плоскость имѣетъ общими съ поверхностью всѣ точки, проекціи которыхъ на плоскость x, y принадлежатъ фигурѣ maximi Ξ_0. Будемъ называть фигуру на касательной плоскости, проекціею которой на плоскости x, y является внѣшній контуръ Ξ_0, *элементомъ касанія.*

Элементомъ касанія будетъ точка, если соотвѣтственный maximum будетъ изолированный. Въ послѣднемъ случаѣ мы будемъ называть точку касанія *выходящею* точкой поверхности.

Примѣры простѣйшихъ поверхностей: шара, эллипсоида и другихъ показываютъ, что выходящія точки могутъ заполнять собою всю поверхность.

Мы доказали въ первой главѣ необходимость существованія безчисленнаго множества выходящихъ точекъ поверхности. Является теперь важнымъ узнать, будутъ ли онѣ непрерывнымъ образомъ заполнять нѣкоторую часть конечныхъ размѣровъ.

Послѣ безуспѣшныхъ попытокъ доказать это свойство, не предполагая существованія вторыхъ производныхъ, я пришелъ къ убѣжденію, что оно, вообще говоря, не имѣетъ мѣста, т. е., что могутъ существовать поверхности, выходящія точки которыхъ не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакой площади конечныхъ размѣровъ.

Покажемъ достойный вниманія примѣръ поверхностей такого рода. Эти поверхности, которымъ я далъ названіе *полиэдральныхъ* *), обладаютъ слѣдующими свойствами.

Онѣ представляютъ нѣчто среднее между многогранниками съ одной стороны и кривыми поверхностями съ другой. Эти поверхности суть дѣйствительно кривыя, ибо при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія касательная плоскость всегда существуетъ и мѣняетъ свое направленіе непрерывно. Съ другой стороны эти поверхности заполнены сплошь плоскими частями, число которыхъ безконечно велико. По послѣднему свойству эти поверхности близки къ многогранникамъ.

Подъ сплошнымъ заполненіемъ плоскими гранями мы разумѣемъ слѣдующее свойство полиэдральныхъ поверхностей. Какую бы часть поверхности конечной площади мы ни взяли, въ нее попадаютъ плоскія грани. Это свойство можетъ быть формулировано еще точнѣе.

Какъ бы мала ни была площадь разсматриваемой части полиэдральной поверхности, эта часть или принадлежитъ вся плоской грани, или въ нее попадаетъ безчисленное множество плоскихъ граней или ихъ частей.

Поясннмъ теперь теоретическія соображенія первой части на примѣрѣ полиэдральныхъ поверхностей.

Возьмемъ функцію $\vartheta(x)$ опредѣляемую слѣдующимъ образомъ.

Опредѣлимъ ее для положительныхъ значеній x.

Всякое положительное число x можетъ быть представлено однимъ только образомъ при помощи ряда

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i},$$

*) *Gravé.* Sur les lignes composées de parties réctilignes. Comptes Rendus de l'Acad. de Paris (1898. n⁰ II).

гдѣ n нечетное число, а a_0, a_1, a_2, ... цѣлыя положительныя числа или нули, при чемъ $a_i < n$, если $i > 0$, и эти числа, начиная съ нѣкотораго, не равны всѣ $n-1$.

Нетрудно видѣть, что сказанное совпадаетъ съ представленіемъ числа x по системѣ счисленія, основаніе которой равно n.

Можетъ произойти одно изъ двухъ:

a) въ ряду чиселъ

$$a_1, \; a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

всѣ четныя, будетъ ли отличныхъ отъ нуля число конечное или нѣтъ, ибо мы причисляемъ нуль къ числамъ четнымъ;

b) существуютъ числа нечетныя, изъ которыхъ первое a_k.

Пусть будетъ $n = 2m - 1$, гдѣ m произвольное натуральное число.

Опредѣлимъ функцію $\vartheta(x)$ особенно для каждаго изъ двухъ случаевъ *a*), *b*).

Въ случаѣ *a*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \; \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_i}{2} = b_i, \ldots,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i}.$$

Въ случаѣ *b*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \; \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2} = b_{k-1}, \quad \frac{a_k + 1}{2} = b_k,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}.$$

Мы исключили случай, когда всѣ числа a_i, начиная съ нѣкотораго, равны $n-1$, но нетрудно видѣть, что опредѣленіе функціи $\vartheta(x)$ годится и для этого случая.

Разсмотримъ это обстоятельство.

Если въ рядѣ чиселъ a_1, a_2, a_3, ... число отличныхъ отъ нуля конечно, при чемъ послѣднее a_l, тогда число x можетъ быть представлено въ двухъ видахъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l}{n^l},$$

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l - 1}{n^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{n-1}{n^i}.$$

Если изъ чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ нечетное только послѣднее a_l, то число x по первому виду представленія принадлежитъ къ случаю b), а по второму—къ случаю a).

Нетрудно видѣть, что оба вида представленія числа x даютъ одно и тоже значеніе функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{l-1}}{2} = b_{l-1}, \quad \frac{a_l + 1}{2} = b_l$$

и замѣчая, что

$$\frac{a_l - 1}{2} = b_l - 1, \quad \frac{n-1}{2} = m - 1,$$

получимъ для $\vartheta(x)$ два равныхъ между собою значенія

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l}{m^l},$$

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l - 1}{m^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{m-1}{m^i}.$$

Подобнымъ же образомъ не приводятъ къ противорѣчію и случаи, когда въ ряду чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ или нѣтъ нечетныхъ, или нечетныя числа появляются раньше послѣдняго a_l.

Итакъ видимъ, что функція $\vartheta(x)$ опредѣлена вполнѣ.

По этому опредѣленію получаемъ

$$\vartheta(0) = 0, \qquad \vartheta(1) = 1, \qquad \vartheta(2) = 2 \qquad \text{и т. д.},$$

и, вообще говоря, для всякаго натуральнаго числа p получаемъ

$$\vartheta(p) = p.$$

Кромѣ того, справедливы слѣдующія неравенства: если $p<x<p+1$, то $p<\vartheta(x)<p+1$, а если

$$x=p+\alpha,$$

гдѣ

$$0<\alpha<1,$$

то

$$\vartheta(x)=p+\vartheta(\alpha).$$

Отсюда мы видимъ, что достаточно разсматривать значенія функціи при $x<1$, т. е. предполагать $a_0=0$.

Покажемъ, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Возьмемъ два значенія x

$$x_1=\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a_i}{n^i}, \quad x_2=\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a_i'}{n^i}.$$

Если $x_2>x_1$, то, очевидно, должно быть

$$a_1'=a_1, \quad a_2'=a_2, \ldots, a_{l-1}'=a_{l-1}, \quad a_l'>a_l,$$

гдѣ число l можетъ быть равнымъ единицѣ.

Если первое нечетное число въ этихъ двухъ разложеніяхъ будетъ $a_k'=a_k$, гдѣ $k<l$, то, очевидно, будетъ

$$\vartheta(x_2)=\vartheta(x_1).$$

Пусть теперь первое нечетное число въ рядѣ чиселъ $a_1, a_2, \ldots$ будетъ a_k, а въ рядѣ $a_1', a_2', a_3', \ldots$ будетъ a_s.

Придется разсмотрѣть четыре случая

I) $\quad k>l, \quad s>l,$

II) $\quad k=l, \quad s>l,$

III) $\quad k>l, \quad s=l,$

IV) $\quad k=s=l.$

I) $$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_k}{m^k},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=s-1} \frac{b'_i}{m^i} + \frac{b'_s}{m^s},$$

гдѣ

$$b_i = \frac{a_i}{2} \text{ при } i < k \quad \text{и} \quad b_k = \frac{a_k + 1}{2},$$

$$b'_j = \frac{a'_j}{2} \text{ при } j < s \quad \text{и} \quad b'_s = \frac{a'_s + 1}{2}.$$

Мы видимъ, что

$$b_j = b'_j \text{ при } j < l \quad \text{и} \quad b'_l > b_l;$$

слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Доказательство не нарушается, если одно изъ чиселъ k, s или оба безконечно велики.

II) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$2b'_l > 2b_l - 1,$$

$$b'_l \geqq b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) \geqq \vartheta(x_1).$$

III) $$a_l = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$b'_l > b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

IV) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l, \qquad b'_l > b_l,$$

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Итакъ доказано, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Легко теперь доказать непрерывность функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться въ справедливости неравенства

$$0 \leqq \vartheta\left(x+\frac{1}{n^k}\right)-\vartheta(x) \leqq \frac{1}{m^k},$$

гдѣ k произвольное цѣлое число.

Функція $\vartheta(x)$, какъ непрерывная, должна проходить черезъ всякое значеніе между 0 и 1 при измѣненіи x отъ 0 до 1.

Нетрудно найти значенія x, при которыхъ функція эта имѣетъ данное значеніе y.

Представимъ это значеніе y въ видѣ ряда

$$y=\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i},$$

гдѣ b_i цѣлыя числа меньшія m или нули.

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, то это значеніе y функція принимаетъ при значеніи x равномъ

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i}.$$

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ конечное число отличныхъ отъ нуля чиселъ, пусть послѣднее отличное отъ нуля число будетъ b_k; тогда это значеніе

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

функція принимаетъ для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ

$$\left(\sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{2b_i}{n^i}+\frac{2b_k-1}{n^k}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} \frac{2b_i}{n^i}\right).$$

Этотъ промежутокъ будетъ представлять изъ себя такъ называемый промежутокъ неизмѣняемости (Jnvariabilitätszug) функціи $\vartheta(x)$.

Такъ какъ числа вида

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i},$$

гдѣ въ ряду чиселъ $b_1, b_2, \dots$ безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакого промежутка между 0 и 1, то, слѣдовательно, какія бы два числа α и β мы ни взяли между 0 и 1, между ними будутъ существовать промежутки неизмѣняемости функціи.

Обращаемся къ разсмотрѣнію производной функціи $\vartheta(x)$.

Нетрудно видѣть, что, если въ ряду

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}$$

существуетъ по крайней мѣрѣ одно нечетное число a_k, при чемъ рядъ не обрывается на первомъ изъ этихъ чиселъ, то x_0 попадаетъ внутрь промежутка неизмѣняемости функціи $\vartheta(x)$, и производная равна нулю

$$\vartheta'(x_0) = 0.$$

Очевидно, что для начала каждаго промежутка неизмѣняемости существуетъ равная нулю правая производная, а для конца промежутка равная нулю лѣвая производная.

Покажемъ теперь, что для концовъ промежутка не существуетъ опредѣленной производной. Тогда не будетъ опредѣленной производной и для значеній x, для которыхъ всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \dots$ четныя.

Достаточно разсмотрѣть начало промежутка неизмѣняемости

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i},$$

гдѣ

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \dots, \; a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k = 2b_k - 1.$$

Возьмемъ два значенія

$$x_2 = x_0 + \xi,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{n^l},$$

гдѣ l цѣлое и безпредѣльно возрастающее число, при чемъ $l > k$, а ξ выражается такъ

$$\xi = \frac{1}{am^l} - \frac{1}{n^l}, \qquad a > 0.$$

Нетрудно видѣть, что можно число l подобрать настолько большимъ, что ξ будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$0 < \xi < \frac{1}{n^k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\xi > 0$, когда $am^l < n^l$, слѣдовательно, когда удовлетворяется неравенство

$$\left(\frac{n}{m}\right)^l > a,$$

а для этого достаточно положить

$$l > \frac{m(a-1)}{m-1}.$$

Съ другой стороны, всегда можно указать столь большое число l, что ξ будетъ меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ε. Слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго l, неравенства $0 < \xi < \frac{1}{n^k}$ будутъ удовлетворяться и должно быть

$$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i} - \frac{1}{m^l},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Но при безпредѣльномъ возрастаніи числа l имѣемъ

$$\lim x_1 = x_0, \quad \lim x_2 = x_0,$$

$$\lim \frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Вслѣдствіе совершенной произвольности числа a мы заключаемъ объ отсутствіи производной для значенія x_0.

Итакъ, опредѣленная нами функція $\vartheta(x)$, будучи непрерывною, имѣетъ производную равную нулю въ однихъ точкахъ, въ другихъ же точкахъ производная отсутствуетъ.

Разсмотримъ теперь опредѣленный интегралъ отъ нашей функціи, взятый въ границахъ отъ 0 до x:

$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\, dx.$$

Нетрудно видѣть, что этотъ интегралъ вычисляется безъ особаго затрудненія.

Пусть верхній предѣлъ интеграла будетъ равенъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}.$$

Если въ ряду чиселъ a_1, a_2, a_3, ... существуютъ нечетныя, то первое изъ нихъ пусть будетъ a_k; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega(x) = \frac{a_0^2}{2} + a_0 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i(a_i+1)}{n^i m^i} + \\ + \sum_{l=1}^{l=k} \frac{b_l}{m^l} \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ по прежнему

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \ldots, a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k + 1 = 2b_k.$$

Для случая, когда всѣ числа ряда a_1, a_2, ... четныя, получается формула аналогичная и отличающаяся отъ приведенной только тѣмъ, что $k = \infty$.

Приведенные ряды очень удобны для вычисленія значеній функціи $\omega(x)$. Необходимо замѣтить, что въ случаѣ раціональнаго значенія верхняго предѣла рядъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ... или конечный или періодическій; слѣдовательно, всѣ ряды въ (1) суммируются, и получается раціональное значеніе дли $\omega(x)$. Итакъ мы видимъ, что функція $\omega(x)$ имѣетъ раціональныя значенія при раціональныхъ значеніяхъ x.

Распространимъ функцію $\omega(x)$ на отрицательныя значенія x, предполагая ее четною т. е. удовлетворяющею равенству

$$\omega(-x) = \omega(x).$$

Нетрудно видѣть, что линія въ плоскости прямоугольныхъ координатъ x, y, опредѣляемая уравненіемъ

$$y = \omega(x),$$

обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами.

Въ каждой ея точкѣ существуетъ опредѣленная касательная, которая имѣетъ съ кривою общими или одну точку касанія, или безчисленное число точекъ касанія, сплошнымъ образомъ заполняющихъ нѣкоторую прямолинейную часть кривой. Касательная измѣняетъ свое направленіе непрерывно при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія по линіи. Линія вся состоитъ изъ прямолинейныхъ частей, соотвѣтствующихъ промежуткамъ неизмѣняемости производной

$$\omega'(x) = \vartheta(x).$$

Такимъ линіямъ можно дать названіе *полигональныхъ кривыхъ*.

Такъ какъ для полигональной кривой вторая производная функціи, ее опредѣляющей, отсутствуетъ въ безчисленномъ числѣ точекъ, то въ этихъ точкахъ отсутствуетъ само понятіе о кривизнѣ въ томъ смыслѣ, какъ оно дается въ геометрическихъ приложеніяхъ дифференціальнаго исчисленія. Понятіе о выпуклости и вогнутости можетъ быть установлено, при чемъ придется судить, понятно, не по второй производной, а по приращенію первой производной.

Сдѣлаемъ еще нѣсколько весьма важныхъ замѣчаній относительно функціи $\omega(x)$.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$x - \frac{1}{2n} \leqq \vartheta(x) \leqq x + \frac{1}{2n}, \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Отсюда, интегрируемъ, получаемъ

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2n} < \omega(x) < \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2n}.$$

Отсюда

$$\lim[\omega(x)]_{n=\infty} = \frac{x^2}{2}.$$

Покажемъ теперь, какъ рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = a,$$

гдѣ a данное положительное число; другими словами, покажемъ, какъ вычислять функцію обратную.

Вслѣдствіе четности функціи $\omega(x)$ получаются два корня одинаковые по абсолютной величинѣ и разные по знаку.

Разсмотримъ $\sqrt{2\alpha}$ и обозначимъ цѣлую часть корня черезъ a_0, такъ что

$$\sqrt{2\alpha} = a_0 + k. \qquad \text{гдѣ} \qquad k < 1.$$

Будемъ вычислять положительный корень.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$\omega(a_0) < \alpha < \omega(a_0 + 1).$$

Будемъ разсматривать рядъ чиселъ

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{n}, \quad a_0 + \frac{2}{n}, \quad a_0 + \frac{3}{n}, \ldots, a_0 + \frac{n-1}{n}. \qquad (2)$$

Можетъ случиться одно изъ двухъ: 1) при нѣкоторомъ изъ этихъ чиселъ $a_0 + \frac{a_1}{n}$ функція $\omega(x)$ точно равна α; тогда уравненіе рѣшено; 2) ни при какомъ числѣ изъ ряда (2) уравненіе не удовлетворяется; тогда на основаніи возрастанія функціи $\omega(x)$ можно будетъ найти такое число a_1 меньшее n, при которомъ будетъ

$$\omega\left(a_0 + \frac{a_1}{n}\right) < \alpha < \omega\left(a_0 + \frac{a_1+1}{n}\right),$$

а тогда искомый корень уравненія x будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$a_0 + \frac{a_1}{n} < x < a_0 + \frac{a_1+1}{n}.$$

Продолжая далѣе разсужденіе, мы придемъ или къ величинѣ корня x, равной

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i},$$

или придемъ къ неравенствамъ

$$\omega\left(a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}\right) < \alpha < \omega\left(a_0 + \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_k+1}{n^k}\right).$$

Если эти неравенства будутъ имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ k, то искомый корень x будетъ равенъ

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}$$

Полученное рѣшеніе имѣетъ много общаго съ извлеченіемъ корня квадратнаго. Нетрудно видѣть, что при вычисленіи послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ..., входящихъ въ составъ корня, произойдетъ значительное упрощеніе, если появится нечетное число.

Пусть первое нечетное число будетъ a_k, и пусть

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i} + \xi.$$

Для нахожденія ξ получаемъ прямо равенство

$$\alpha = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)\,\xi\,,$$

гдѣ

$$x_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}$$

Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Требуется рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = 3$$

въ случаѣ $m = 2$, $n = 3$.

Такъ какъ

$$\sqrt{6} = 2 + k, \qquad \text{то} \qquad x = 2 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots$$

Для чиселъ a_i возможны значенія 0, 1, 2.

Ищемъ число a_1 изъ неравенствъ

$$\omega\left(2 + \frac{a_1}{3}\right) < 3 < \omega\left(2 + \frac{a_1 + 1}{3}\right).$$

Итакъ, надо найти наибольшое цѣлое число, удовлетворяющее неравенству

$$2 + 2\frac{a_1}{3} + \frac{a_1(a_1 + 1)}{24} < 3\,.$$

Получаемъ $a_1 = 1$. Въ самомъ дѣлѣ

$$\omega\left(2+\frac{1}{3}\right)=2\frac{3}{4}<3, \quad \omega\left(2+\frac{2}{3}\right)=3\frac{7}{12}>3.$$

Итакъ мы замѣчаемъ, что

$$\vartheta\left(2+\frac{1}{3}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Слѣдовательно, получимъ

$$2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\xi=3,$$

откуда

$$\xi=\frac{1}{10}, \quad x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=2\frac{13}{30}.$$

Будемъ обозначать черезъ $\omega_{-1}(x)$ функцію обратную $\omega(x)$. Тогда въ данномъ примѣрѣ

$$\omega_{-1}(3)=\pm 2\frac{13}{30}.$$

Итакъ мы видимъ, что функціи $\omega(x)$, $\omega_{-1}(x)$ представляютъ новые аналитическіе элементы, весьма просто вычисляемые и имѣющіе большую аналогію съ функціями x^2, $\sqrt{x}$.

Разсмотримъ теперь поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$z=\omega(r)-\omega(x)-\omega(y),$$

гдѣ r заданное число.

Функція $\omega(r)-\omega(x)-\omega(y)$ положительная внутри контура C, опредѣляемаго уравненіемъ

$$\omega(x)+\omega(y)=\omega(r).$$

Нетрудно видѣть, что этотъ контуръ есть сомкнутая линія, по виду близкая къ кругу и обращающаяся при $m=\infty$ въ кругъ

$$x^2+y^2=r^2.$$

Покажемъ, что кривая C полигональная.

Найдемъ производную y по x

$$\vartheta(x)\,dx+\vartheta(y)\,dy=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(y)}.$$

Нетрудно видѣть, что для всякаго промежутка неизмѣняемости знаменателя $\vartheta(y)$ числитель $\vartheta(x)$ долженъ имѣть промежутки неизмѣняемости, ибо въ противномъ случаѣ функція $\vartheta(x)$ внутри нѣкотораго промежутка конечныхъ размѣровъ не имѣла бы промежутковъ неизмѣняемости, что противорѣчитъ опредѣленію функціи $\vartheta(x)$. Итакъ, кривая C полигональная; будемъ ее называть *полигональнымъ кругомъ*.

Нетрудно видѣть, что всякое плоское сѣченіе поверхности $z = \omega(r) - \omega(x) - \omega(y)$ будетъ полигональною кривою.

Итакъ, функція z положительная внутри полигональнаго круга C и обращается въ нуль для точекъ его. Возьмемъ пару значеній x_0, y_0 перемѣнныхъ независимыхъ и обозначимъ соотвѣтственныя значенія частныхъ производныхъ черезъ p_0 и q_0; тогда получимъ

$$p_0 = -\vartheta(x_0), \quad q_0 = -\vartheta(y_0).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi_{x_0 y_0}(x, y)$.

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = \omega(r) - \omega(x) - \omega(y) - [\omega(r) - \omega(x_0) - \omega(y_0)] +$$

$$+ \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) =$$

$$= \omega(x_0) - \omega(x) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \omega(y_0) - \omega(y) + \vartheta(y_0)(y - y_0).$$

Пусть разложенія чиселъ x_0 и y_0 въ ряды вида

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}$$

оканчиваются первымъ нечетнымъ числомъ. Пусть, кромѣ того, это послѣднее число для x_0 будетъ имѣть значекъ k, а для y_0 значекъ l; тогда, какія бы ни были числа x и y, удовлетворяющія неравенствамъ

$$0 < x - x_0 \leqq \frac{1}{n^k}, \qquad 0 < y - y_0 \leqq \frac{1}{n^l},$$

будемъ имѣть

$$\omega(x) = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

$$\omega(y) = \omega(y_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0),$$

и, слѣдовательно, для всѣхъ точекъ внутри прямоугольника $\varDelta$, образованнаго четырьмя прямыми

$$x = x_0 + \frac{1}{n^k}, \quad y = y_0 + \frac{1}{n^l},$$

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0,$$

будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = 0.$$

Далѣе, мы замѣчаемъ, что, если будемъ разсматривать функцію

$$\psi(x) = \omega(x) - \omega(x_0) - \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

производная которой будетъ,

$$\psi'(x) = \vartheta(x) - \vartheta(x_0),$$

то

$$\psi'(x) < 0, \quad \text{если} \quad x < x_0,$$

$$\psi'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k},$$

$$\psi'(x) > 0, \quad \text{если} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Слѣдовательно,

$$\psi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k}$$

и

$$\psi(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0, \quad \text{или} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Итакъ мы видимъ, что для точекъ внѣ прямоугольника $\varDelta$

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) < 0.$$

Слѣдовательно, прямоугольникъ $\varDelta$ будетъ внѣшнимъ контуромъ maximi функціи $\Phi_{x_0 y_0}$, сама же фигура будетъ представлять обыкновенный поверхностный maximum, точки котораго заполняютъ сплошь внутренность даннаго прямоугольника $\varDelta$.

Прямоугольникъ $\varDelta$ обращается въ прямую линію, если одна изъ перемѣнныхъ независимыхъ x_0, y_0 имѣетъ безчисленное число четныхъ чиселъ въ ряду $a_1, a_2, a_3 \cdots$. Если обѣ перемѣнныя x_0 и y_0 имѣютъ безчисленное число четныхъ чиселъ, то мы получимъ точку, представляющую изолированный maximum.

Поверхность наша, конечно, поліэдральная, при чемъ грани ея суть параллелограммы, лежащіе въ касательныхъ плоскостяхъ

$$z - \omega(r) + \omega(x_0) + \omega(y_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) = 0$$

и проэкціи которыхъ на плоскости xy суть прямоугольники $\triangle$. Когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ прямую, то элементъ касанія будетъ отрѣзокъ прямой, и наконецъ получаемъ выходящую точку поверхности, когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ точку.

Нетрудно убѣдиться, что поліэдральныя поверхности могутъ быть рѣшеніями самыхъ простыхъ уравненій перваго порядка съ частными производными.

Возьмемъ уравненіе поверхностей цилиндрическихъ

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1. \qquad (*)$$

Мы видимъ, что поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$y-bz=\omega(x-az),$$

будетъ удовлетворять уравненію (*) и представитъ цилиндрическую поверхность, проходящую черезъ полигональную кривую $y=\omega(x)$, $z=0$. Эта цилиндрическая поверхность, очевидно, поліэдральная.

Такое рѣшеніе уравненія (*) наводитъ на нѣкоторыя соображенія относительно существующихъ опредѣленій общаго интеграла. Амперовское опредѣленіе оставляетъ по видимому въ сторонѣ поліэдральныя рѣшенія, ибо предполагаетъ дифференцируемость въ неограниченномъ числѣ разъ. Въ данномъ же случаѣ функція ω можетъ быть дифференцируема только одинъ разъ, чего и достаточно для уравненія перваго порядка.

Съ другой стороны, и измѣненное опредѣленіе Дарбу не обнимаетъ, повидимому, поліэдральныхъ рѣшеній, ибо оно имѣетъ въ виду интегралы Коши, требующіе для своего существованія разложимость въ ряды.

Для уравненія коническихъ поверхностей

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c$$

получаемъ рѣшеніе

$$\frac{y-b}{z-c}=\omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

представляющее поліэдральный конусъ, имѣющій вершиною точку (a, b, c).

Если мы будемъ вращать нашу полигональную кривую

$$y=\omega(x)$$

вокругъ оси y-овъ, то получимъ нѣкоторую поверхность вращенія, которая будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$z = \omega(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

которое будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Эта поверхность состоитъ вся изъ полосъ коническихъ поверхностей, образованныхъ вращеніемъ прямолинейныхъ частей. Элементы касанія суть точки и прямыя.

Нетрудно видѣть, что поліэдральныя цилиндрическія и коническія поверхности суть развертывающіяся, хотя онѣ и не удовлетворяютъ уравненію

$$rt - s^2 = 0,$$

ибо для безчисленнаго числа точекъ на нихъ вторыя производныя не существуютъ.

Новое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ.

Дмитрія Граве.

Въ статьѣ „Zur Lehre von den unentwickelten Functionen" (Sitzungsberichte der Berliner Academie 1897, S. 948) проф. Шварцъ далъ строгое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ. Это прекрасное доказательство основано на представленіи функцій безконечными рядами. Въ настоящей статьѣ я даю новое доказательство той же теоремы, которое, будучи вполнѣ строгимъ, не требуетъ введенія въ разсмотрѣніе рядовъ и основано на соображеніяхъ совершенно элементарныхъ.

1. Начнемъ со случая одной функціи y, отъ n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, опредѣляемой однимъ уравненіемъ

(1) $$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

I. Уравненіе (1) удовлетворяется нѣкоторою системой вещественныхъ численныхъ значеній аргументовъ $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$. Для простоты можно предполагать, что эта система

(2) $$y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

II. При значеніяхъ $n+1$ аргументовъ $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|y| < \delta', |x_1| < \delta', |x_2| < \delta', \ldots, |x_n| < \delta'$, гдѣ δ' приличнымъ образомъ указанное число, функція f вещественна, однозначна и непрерывна и имѣетъ непрерывную первую производную $f'_y(y, x_1, x_2, \cdots, x_n)$, значеніе которой при системѣ значеній (2) $n+1$ аргументовъ отлично отъ нуля.

Нужно доказать, что для значеній n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащихъ въ области, опредѣляемой неравенствами

$$|x_1| < \delta, \ |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta,$$

гдѣ δ нѣкоторое опредѣленное положительное число, существуетъ однозначная, непрерывная, вещественная функція Y, которая, будучи подставлена вмѣсто y въ уравненіе (1), обращаетъ его въ тождество и которая безконечно мала для безконечно малыхъ значеній n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разсмотримъ функцію отъ одной перемѣнной y

$$\varphi(y) = f(y, 0, 0, \ldots, 0),$$

которая получается изъ первой части уравненія (1), если мы вмѣсто аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставимъ равныя нулю численныя значенія. Разсмотримъ производную

$$\varphi'(y),$$

взятую по y. По предположенію, значеніе этой производной при $y = 0$, которое можно обозначить $\varphi'(0)$, не равно нулю. Имѣемъ право предположить $\varphi'(0) > 0$, ибо въ обратномъ случаѣ можно перемѣнить знакъ у функціи f. По заданію, $\varphi(0) = 0$; слѣдовательно, можно дать аргументу y два значенія $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малое положительное число, такія, что будетъ

$$\varphi(+\varepsilon) > 0, \quad \varphi(-\varepsilon) < 0$$

или, что одно и тоже,

$$f(+\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0) > 0, \quad f(-\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0) < 0.$$

Имѣя въ виду, что функція f непрерывна относительно всѣхъ аргументовъ, мы видимъ, что можно всегда указать такое положительное число δ, что при

$$|x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta$$

будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$f(+\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \quad f(-\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0.$$

Область чиселъ G, опредѣляемая неравенствами

$$|y| \leqq \varepsilon, \quad |x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta,$$

выборомъ чиселъ ε и δ можетъ быть сдѣлана такою, для которой f'_y остается числомъ положительнымъ.

Возьмемъ нѣкоторую по произволу выбранную систему численныхъ значеній n аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изъ разсматриваемой области. Пусть эти значенія будутъ

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

Разсмотримъ тогда функцію отъ одной перемѣнной y

$$f(y, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \varphi_1(y).$$

Очевидно, что эта функція удовлетворяетъ неравенствамъ

$$\varphi_1(+\varepsilon) > 0, \qquad \varphi_1(-\varepsilon) < 0;$$

кромѣ того, при $|y| \leqq \varepsilon$, $\varphi_1'(y) > 0$. Слѣдовательно, при возрастаніи аргумента y отъ значенія $-\varepsilon$ до значенія $+\varepsilon$ функція φ_1 возрастаетъ и измѣняется отъ отрицательнаго значенія $\varphi_1(-\varepsilon)$ до положительнаго значенія $\varphi_1(+\varepsilon)$. На основаніи непрерывности функціи f мы заключаемъ, что существуетъ одно опредѣленное значеніе Y^0 перемѣннаго y, заключающееся между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, при которомъ $\varphi_1(Y^0) = 0$. Совокупность значеній Y^0, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніемъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разсматриваемой области G, составляетъ однозначную вещественную функцію Y отъ n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую уравненію (1) и безконечно малую при безконечно малыхъ значеніяхъ аргументовъ. Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенствъ

$$|Y| < \varepsilon, \quad |x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \quad \ldots, \quad |x_n| < \delta.$$

2. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Пусть будутъ заданы m уравненій

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{array} \right.$$

Сдѣлаемъ предположенія:

I. Уравненія (1) удовлетворяются слѣдующей системой численныхъ значеній $m+n$ аргументовъ

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0, \ldots, y_m = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

II. При значеніяхъ $m+n$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$|y_1| < \delta', \; |y_2| < \delta', \ldots, \; |x_n| < \delta',$$

гдѣ δ' опредѣленное положительное число, функціи f_λ, гдѣ λ одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... m, однозначны, вещественны и непрерывны и имѣютъ опредѣленныя первыя производныя

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\mu} = f_{\lambda,\mu}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которыя въ разсматриваемой области суть непрерывныя функціи $n+m$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

III. Опредѣлитель m-го порядка, составленный изъ значеній $f_{\lambda,\mu}(0, 0, \ldots, 0) = a_{\lambda,\mu}$, которыя принимаютъ частныя производныя $f_{\lambda,\mu}$ при равныхъ нулю значеніяхъ аргументовъ, имѣетъ отличное отъ нуля численное значеніе D.

Надо доказать, что для извѣстной области вблизи значеній $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существуютъ m однозначныхъ, непрерывныхъ, вещественныхъ функцій $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, которыя, будучи подставлены вмѣсто $y_1, y_2, \ldots, y_m$ въ уравненія (1), обращаютъ ихъ въ тождества и безконечно малы при безконечно малыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Предположимъ, что теорема доказана для числа функцій на единицу меньшаго, $m-1$, и покажемъ ея справедливость для числа m.

Къ системѣ m^2 величинъ $a_{\lambda,\mu}$ составляемъ имъ сопряженныя $\alpha_{\lambda,\mu}$.

Возьмемъ первыхъ $m-1$ уравненій

(2) $$f_1 = 0\,, \; f_2 = 0\,, \ldots, f_{m-1} = 0.$$

Выберемъ такіе $m-1$ изъ числа m аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m$, чтобы соотвѣтственный опредѣлитель, составленный изъ $a_{\lambda,\mu}$, не обращался въ нуль. Пусть эти аргументы будутъ $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Тогда этотъ неравный нулю опредѣлитель будетъ $\alpha_{m,m}$. По предположенію будутъ существовать $m-1$ функцій $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ отъ $n+1$ аргументовъ y_m, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, обращающихся въ нуль при $y_m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ и безконечно малыхъ при безконечно малыхъ значеніяхъ этихъ аргументовъ.

Разсмотримъ послѣднее уравненіе $f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Всегда можно распорядиться системой такъ, чтобы $a_{m,1}$ не равнялось нулю.

Возьмемъ уравненіе

$$(3) \qquad f_m(Y, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

получаемое изъ послѣдняго уравненія системы замѣною обозначенія y_1 на Y.

Это уравненіе даетъ Y какъ функцію отъ $n+m-1$ аргументовъ $y_2, y_3, \cdots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающуюся въ нуль при значеніи равномъ нулю всѣхъ аргументовъ. Положимъ $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$; тогда функціи $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ обратятся въ функціи $y_1', y_2', \ldots, y_{m-1}'$ отъ одной перемѣнной независимой y_m безконечно малыя при безконечно маломъ y_m.

Если мы будемъ въ послѣднемъ уравненіи (3) считать $y_2, y_3, \cdots, y_{m-1}$ функціями одного y_m, опредѣляемыми изъ системы (2), то Y обратится въ функцію Y' отъ одного аргумента y_m.

Нетрудно видѣть, что функція $Y'-y_1'$ имѣетъ *) опредѣленную производную по y_m значеніе которой при $y_m = 0$ вычисляется при помощи уравненій

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{1,1}\, dy_1' + a_{1,2}\, dy_2' + \ldots + a_{1,m}\, dy_m &= 0, \\ a_{2,1}\, dy_1' + a_{2,2}\, dy_2' + \quad\; + a_{2,m}\, dy_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m,1}\, d(Y'-y_1') + a_{m,1}\, dy_1' + a_{m,2}\, dy_2' + \ldots + a_{m,m}\, dy_m &= 0. \end{aligned} \right.$$

Умножая эти уравненія на $\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}, \ldots, \alpha_{m,m}$ и складывая, получимъ

$$a_{m,1}\, \alpha_{m,m}\, d(Y'-y_1') + D\, dy_m = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(Y'-y_1')}{dy_m} = \frac{D}{a_{m,1}\, \alpha_{m,m}}.$$

И такъ мы видимъ, что эта производная отлична отъ нуля.

Можно сдѣлать эту производную равною $+1$ вводя новыхъ m функцій F_μ отъ $m+n$ аргументовъ $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$, опредѣляемыхъ уравненіями **)

---

*) Доказательство извѣстное, состоящее въ предварительномъ разсмотрѣніи конечныхъ приращеній и затѣмъ переходѣ къ предѣлу.

**) Смотри статью Шварца.

$$DF_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda,\mu} f_\lambda ,$$

$$f_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda,\mu} F_\mu$$

и разсматривая систему уравненій

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\ \ldots,\quad F_{m-1} = 0\,,\ -F_1 + F_m = 0\,.$$

Далимъ y_m два значенія $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малое положительное число; тогда будетъ

$$Y' - y'_1 > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon,$$

$$Y' - y'_1 < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon.$$

Мы знаемъ, что $Y' - y'_1$ есть значеніе разности $Y - y_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Такъ какъ эта разность непрерывная функція отъ $n+1$ аргументовъ y_m, x_1, $x_2, \cdots, x_n$, то можно указать столь малое положительно число δ, что при всякихъ значеніяхъ n аргументовъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

(5) $$|x_1| < \delta\,,\ |x_1| < \delta\,,\ \ldots,\quad |x_n| < \delta\,,$$

будетъ

$$Y - y_1 > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon,$$

$$Y - y_1 < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon,$$

а δ и ε можно предполагать настолько малыми, что вслѣдствіе непрерывности частныхъ производныхъ производная $\dfrac{d(Y - y_1)}{dy_m}$ будетъ сохранять положительное значеніе и, слѣдовательно, всякому выбору произвольной системы значеній аргументовъ x_1^0, $x_2^0, \cdots, x_m^0$, удовлетворяющей неравенствамъ (5), будетъ соотвѣтствовать одно значеніе y_m^0, лежащее между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, для котораго $Y - y_1 = 0$. Слѣдовательно, для этого значенія y_m^0 существуютъ опредѣленныя численныя значенія y_1^0, $y_2^0, \cdots, y_{m-1}^0$, удовлетворяющія всѣмъ m уравненіямъ.

Совокупность различныхъ системъ значеній $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$, соотвѣтствующихъ различныхъ системамъ значеній x_1, $x_2, \cdots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ (5) будетъ представлять собою m функцій

$$Y_1,\ Y_2, \ldots, Y_m,$$

удовлетворяющихъ системѣ (1) и всѣмъ требованіямъ теоремы.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 24-го Января 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о вновь полученныхъ книгахъ и журналахъ.

2. Избраны единогласно въ почетные члены Общества: проф. Московскаго университета Н. Е. Жуковскій и профф. С.-Петербургскаго университета А. Н. Коркинъ и Д. К. Бобылевъ.

3. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О діаметрахъ солнца въ различныхъ направленіяхъ 28-го Іюля 1896 года“.

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Дополненіе къ сообщенію предыдущаго засѣданія“.

5. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ“.

Засѣданіе 28-го Февраля 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о выходѣ въ свѣтъ 5-го и 6-го №№ 5-го тома „Сообщеній“.

2. Предсѣдатель доложилъ письма съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены Общества отъ профессоровъ А. Н. Коркина, Н. Е. Жуковскаго и Д. К. Бобылева.

3. Предсѣдатель доложилъ о полученіи письма отъ проф. L. Gascó изъ Валенціи съ предложеніемъ объ обмѣнѣ трудовъ Общества на экземпляры издаваемаго Gascó журнала: „Archivo de Matemáticas“.

Постановлено выслать 5-ый томъ „Сообщеній“ и продолжать обмѣнъ изданіями въ будущемъ.

4. Предсѣдатель доложилъ полученное отъ комитета по сооруженію памятника Гауссу и Веберу извѣщеніе о настоящемъ положеніи дѣла съ предложеніемъ распространить подписку, такъ какъ собранныхъ средствъ оказывается недостаточно для надлежащаго выполненія выработаннаго проэкта.

5. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ Обществомъ отъ комитета международнаго съѣзда математиковъ въ Цюрихѣ приглашенiи принять участiе въ съѣздѣ.

6. Предсѣдатель напомнилъ Обществу о недавней кончинѣ извѣстнаго ученаго академ. Вейерштрасса.

По предложенiю Предсѣдателя Общество почтило память покойнаго вставанiемъ.

7. М. А. Тихомандрицкiй сдѣлалъ сообщенiе о жизни и ученой дѣятельности акад. Вейерштрасса.

8. М. Н. Лагутинскiй сдѣлалъ сообщенiе: „Опредѣленiе производной какъ понятiя, выводимаго изъ теорiи преобразованiй".

Засѣданiе 2-го Мая 1897 года.

1. Доложено о полученiи отвѣтныхъ писемъ отъ Эдинбургскаго Математ. Общества, отъ Академiи Физическихъ и Естественныхъ Наукъ въ Болоньѣ и отъ Американскаго Математич. Общества въ Ньюйоркѣ съ выраженiемъ согласiя на предложенный Харьк. Мат. Общ. обмѣнъ изданiями.

Постановлено: выслать V томъ „Сообщенiй" и въ будущемъ продолжать обмѣнъ изданiями.

2. Доложено письмо отъ Королевской Баварской Академiи Наукъ въ Мюнхенѣ, въ которомъ Академiя проситъ прислать ей нѣсколько экземпляровъ „Сообщенiй" для того, чтобы Академiя могла ознакомиться съ этимъ журналомъ и въ зависимости отъ этого сдѣлать соотвѣтствующее постановленiе объ обмѣнѣ изданiями.

Постановлено выслать 1-й № VI-ого тома.

3. П. А. Некрасовъ сдѣлалъ сообщенiе: „Методъ комплексныхъ преобразованiй и его примѣненiе къ интегрированiю уравненiй Динамики".

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщенiе: „О нѣкоторыхъ формулахъ, относящихся къ теорiи сферическихъ функцiй".

Засѣданiе 16-го Мая 1897 года.

1. Доложено о полученiи отвѣтныхъ писемъ отъ Академiи въ Туринѣ, Академiи dei Lincei, Королевской Академiи въ Геттингенѣ, Академiи Наукъ въ Неаполѣ и Матем. Общ. въ Эдинбургѣ съ выраженiемъ согласiя на обмѣнъ изданiй этихъ учрежденiй на „Сообщенiя Мат. Общества".

Постановлено: высылать въ вышеозначенныя учрежденія „Сообщенія“ Общества, начиная съ VI тома.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ“.

3. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣсколько словъ объ Эваристѣ Галуа“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

21-го Сентября 1897 года.

1. Доложенъ и утвержденъ годичный отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за истекшій 1896—1897 акад. годъ.

2. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на текущій 1897—1898 акад. годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ проф. К. А. Андреевъ; товарищами предсѣдателя: профессоры А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій; секретаремъ проф. В. А. Стекловъ.

Засѣданіе 3-го Октября 1897 года.

1. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи нѣкоторыхъ системъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными отъ нѣсколькихъ функцій“.

2. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О мѣрѣ въ неэвклидовой Геометріи“.

3. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О потенціалѣ двойного слоя и о методѣ К. Неймана“.

Засѣданіе 31-го Октября 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ полученное отъ Акад. Ѳ. А. Бредихина письмо съ выраженіемъ благодарности за посланную ему отъ Общества привѣтственную телеграмму по случаю 40-лѣтняго юбилея его ученой дѣятельности.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О сходимости нѣкоторыхъ рядовъ“.

Засѣданіе 12-го Декабря 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о письмѣ, полученномъ отъ Королевскаго Общества Наукъ въ Льежѣ съ предложеніемъ объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено вступить въ обмѣнъ и выслать всѣ томы „Сообщеній“, начиная со 2-ой серіи.

2. А. П. Грузинцевъ предложилъ обратиться въ редакцію журнала Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles въ Гарлемѣ съ предложеніемъ объ обмѣнѣ изданіями.

3. Предсѣдатель доложилъ о полученной отъ ректора университета бумагѣ съ предложеніемъ высылать изданія Общества въ Кишиневскую публичную библіотеку.

Постановлено не высылать впредь до опредѣленнаго затребованія именно изданій Харьк. Матем. Общества.

4. Предсѣдатель доложилъ о вновь полученныхъ книгахъ и журналахъ.

5. Избранъ въ члены Общества Н. Н. Салтыковъ.

6. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Задача о распредѣленіи электричества“.

7. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О методѣ Неймана для рѣшенія одной задачи, относящейся къ уравненію Лапласа“.

8. I. I. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О наблюденіи короны и протуберанцевъ внѣ затмѣній“.

Засѣданіе 20-го Февраля 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученной черезъ ректора университета бумагѣ, содержащей просьбу болгарскаго министерства народнаго просвѣщенія объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено высылать, начиная съ VI-ого тома.

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Теорема Пойнтинга и ея значеніе въ электромагнитной теоріи.

3. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О сложномъ отношеніи прямой по отношенію къ тетраэдру“.

Засѣданіе 27-го Марта 1898 года.

1. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „По поводу одной задачи аналитической теоріи теплоты“.

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Электромагнитная теорія проводниковъ“.

Засѣданіе 15-го Мая 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о бумагѣ, полученной черезъ ректора университета, съ предложеніемъ принять участіе въ педагогическомъ отдѣлѣ всемірной Парижской выставки 1900 года. Постановлено принять къ свѣдѣнію и увѣдомить Правленіе, что Математическое Общество не находитъ надлежащихъ матеріаловъ для отсылки на выставку.

2. К. А. Андреевъ доложилъ письмо П. С. Флорова, въ которомъ онъ проситъ сообщить Обществу одну задачу, выражающую нѣкоторое условіе положительности корней уравненія пятой степени.

3. Н. В. Бугаевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ числовомъ тождествѣ".

4. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью Г. В. Колосова: „Объ одномъ случаѣ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

11-го Октября 1898 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1897—1898 акад. годъ.

2. Принятъ въ члены Общества преподаватель Харьковскаго Технолог. Института А. П. Пшеборскій (безъ избранія).

3. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ отъ подсекціи Математики X-го съѣзда естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ предложеніи содѣйствовать выработкѣ библіографическаго указателя русскихъ сочиненій по Математикѣ.

Постановлено: составить указатель статей второй серіи „Сообщеній Х. М. Общ." (на двухъ языкахъ, въ хронологическомъ порядкѣ). Просить К. А. Андреева составить и препроводить В. В. Бобынину списокъ математическихъ сочиненій, вышедшихъ въ Харьковѣ съ 1804 года независимо отъ изданій Общества. Просить М. А. Тихомандрицкаго оказать содѣйствіе въ составленіи указателя по „Répertoire bibliographique".

4. Доложена бумага отъ библіотеки Туркестанскаго генералъ-губернаторства съ просьбой высылать въ эту библіотеку изданія университета и состоящихъ при немъ ученыхъ Обществъ.

Постановлено выслать „Сообщенія Х. М. Общ.", начиная со второй серіи.

5. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ для библіотеки Общества соч. М. А. Тихомандрицкаго: „Курсъ Теоріи Вѣроятностей" и статьи Н. Я. Сонина: „Рядъ Ив. Бернулли".

6. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1898—1899 акад. годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ Общества проф. К. А. Андреевъ, товарищами предсѣдателя проф. А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій, секретаремъ Общества проф. В. А. Стекловъ.

Засѣданіе 23-го Октября 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о письмѣ, полученномъ отъ Казанскаго университета, съ предложеніемъ вступить въ обмѣнъ изданіями.

Постановлено: принять предложеніе, выслать всѣ томы „Сообщеній", начиная со 2-ой серіи, и просить о присылкѣ въ обмѣнъ всѣхъ нумеровъ изданій Казанскаго университета, начиная съ 1892 года.

2. Избранъ въ члены-корреспонденты Общества профессоръ Варшавскаго университета Г. Ѳ. Вороной.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Гидростатика и теорія капиллярности".

4. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка".

Засѣданіе 4-го Декабря 1898 года.

1. Доложено письмо проф. Варш. университета Г. Ѳ. Вороного съ выраженіемъ благодарности за избраніе его въ члены-корресподенты Общества.

2. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка".

3. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О второй теоремѣ о среднихъ величинахъ".

4. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О раціональныхъ преобразованіяхъ алгебраическихъ кривыхъ".

Засѣданіе 29-го Января 1899 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письмо отъ проф. Lazzeri съ предложеніемъ вступить въ обмѣнъ изданіями Х. М. Общ. на издаваемый имъ журналъ „Periodico Matematico". Постановлено: принять предложеніе и высылать г. Lazzeri „Сообщенія" Общества, начиная съ VI-го тома.

2. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Полтавскаго Кружка Любителей Физики и Математики высылать имъ „Сообщенія“ Общества.

Постановлено: высылать, начиная съ VI-ого тома.

3. Предсѣдатель доложилъ о предложеніи Американскаго Математическаго Общества принять участіе въ библіографическомъ отдѣлѣ издаваемаго имъ журнала.

Постановлено принять къ свѣдѣнію.

4. По предложенію Н. П. Салтыкова, постановлено предложить обмѣнъ изданіями редакціи журнала: Berichte der mathematisch-physikalischen Classe der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig“.

5. Произведенъ выборъ въ почетные члены Общества проф. Московскаго университета К. А. Андреева. Избранъ единогласно (per acclamationem). Постановлено увѣдомить о состоявшемся избраніи проф. К. А. Андреева черезъ распорядительный комитетъ.

6. В. П. Алексѣевскій доложилъ статью Д. А. Граве: „Общая теорія функцій двухъ независимыхъ перемѣнныхъ“.

7. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка“.

ТРУДЫ
ОТДѢЛЕНІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

Императорскаго Общества любителей Естествознанія выходятъ томами по два выпуска каждый. Издаются подъ редакціею предсѣдателя и секретаря Отдѣленія. Получать можно въ книжномъ магазинѣ А. А. Ланга (Москва, Кузнецкій мостъ). Первый и второй томы (по одному выпуску) по два рубля; третій, четвертый, пятый, шестой, седьмой и восьмой томы (по два выпуска) по три рубля за томъ съ пересылкою.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

НА СПЕЦІАЛЬНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ИЗВѢСТІЯ РУССКАГО АСТРОНОМИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА"

на 1899 годъ.

ЖУРНАЛЪ БУДЕТЪ ВЫХОДИТЬ ЕЖЕМѢСЯЧНО

кромѣ Іюня, Іюля и Августа.

Подъ редакціей секретаря Общества.

Кромѣ спеціальныхъ статей, содержитъ статьи общедоступнаго содержанія.

Гг. подписчики обращаются по адресу: Секретарю Русскаго Астрономическаго Общества А. А. Иванову въ Пулковѣ.

Подписная цѣна съ доставкой и пересылкой 6 руб. въ годъ.

ОСОБЫЯ ИЗДАНІЯ

ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА:

1) **Ляпуновъ, А.**—Общая задача объ устойчивости движенія, in 4^0, XI+250 стр., Харьковъ, 1892, ц. 3 руб.

2) **Тихомандрицкій, М.**—Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ, in 8^0, XV+235 стр., Харьковъ, 1895, ц. 4 руб.

Получить можно отъ секретаря Харьковскаго Математическаго Общества и отъ авторовъ; Харьковъ. Университетъ.

ОБЪЯВЛЕНІЯ

ОБЪ ИЗДАНІИ

УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ)

въ 1899 году.

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностію Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ Университетскихъ Извѣстіяхъ печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты, и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степ ней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части — 1) оффиціальную (протоколы, отчеты и т. п. и 2)—неоффиціальную (статьи научнаго содержанія), съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники*, заключающимъ въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

Университетскія Извѣстія въ 1899 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей**. Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ 4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. иногородные могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглоблину въ С.-Петербургѣ, на Малую Садовую, № 4-й и въ Кіевѣ, на Крещатикъ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ.*

„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА
ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ“.

„Извѣстія“, издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія“ раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

a. Лѣтопись Физико-Математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b. Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

c. Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ“ могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-Математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія безплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-Математическаго Общества проф. **А. В. Васильевымъ**, секретаремъ Общества **В. Л. Некрасовымъ** (Университетъ) и казначеемъ Общества **А. П. Котельниковымъ** (Поперечно-Лядская, соб. домъ), въ Казани книжными магазинами **А. А. Дубровина** (Гостинный дворъ № 1) и **Н. Я. Башмакова** (Воскресенская, городской пассажъ), а также всѣми извѣстными книжными магазинами.

Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи Физико-Математическихъ Наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.