УДК 513.88

ВУ КУОК ФОНГ, Ю. И. ЛЮБИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$ сильно непрерывную ограниченную однопараметрическую полугруппу линейных операторов $T(t)\ (t \geqslant 0)$, т. е. представление $T: \boldsymbol{R}_+ \to \to \mathrm{End}(\boldsymbol{B})$, такое, что $\sup\limits_t \|T(t)\| < \infty$. Полугруппа называется *почти периодической (п. п.)*, если для каждого $x \in B$ орбита $O(x) = \{T(t)x\}$ предкомпактна в $\boldsymbol{B}$. На языке задачи Коши

$$\dot{x} = Ax(t)\ (t \geqslant 0), \quad x(0) = v \tag{1}$$

(A — генератор полугруппы) п. п. означает, что при каждом $v \in D_A$ решение $x(t)$ является п. п. функцией, т. е. семейство сдвижек $x_h(t) = x(t+h)$, $h \geqslant 0$, предкомпактно в пространстве непрерывных ограниченных вектор-функций на полуоси $t \geqslant 0$, снабженном обычной нормой $\|z(\cdot)\| = \sup\limits_{t \geqslant 0} \|z(t)\|$. Свойство п. п. для полугруппы тесно связано с асимптотической устойчивостью соответствующей задачи Коши, а именно, асимптотическая устойчивость эквивалентна п. п. в сочетании с отсутствием точечного спектра оператора A на мнимой оси. Это следует (см. [1]) из теоремы об отщеплении граничного спектра, согласно которой *для п. п. полугруппы пространство $\boldsymbol{B}$ расщепляется в прямую сумму $\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, где*

$$B_0 = \left\{x \,\middle|\, \lim_{t \to \infty} T(t)x = 0\right\},$$

*B_1 — замыкание линейной оболочки собственных векторов оператора A, отвечающих мнимым собственным значениям**. Подпространства B_0 и B_1 в этой ситуации называются соответственно *внутренним* и *граничным*. Они очевидно инвариантны для $T(t)$. В более полной формулировке теоремы утверждается, что *B_1 является топологической прямой суммой собственных подпространств оператора A, отвечающих мнимому точечному спектру. Если $T(t)$ — п. п. полугруппа сжатий, то $T(t) \mid B_1$ — полугруппа обратимых изометрий, а проектор P на B_1, соответствующий разложению*** *$\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, ортогонален, т. е. $\|P\| = 1$* (если $P \neq 0$).

Необходимо отметить, что, наоборот, *если $\boldsymbol{B} = B_0 \dot{+} B_1$, где B_0, B_1 определены как выше, то $T(t)$ — п. п. полугруппа.*

* Если таковых не имеется, то $B_1 = 0$.
** Он называется *граничным* проектором.

В работе Г. М. Скляра и В. Я. Ширмана [2] обнаружено, что, *если оператор A ограничен и если* 1) *пересечение* $\operatorname{spec} A \cap i\boldsymbol{R}$ *не более чем счетно,* 2) A^* *не имеет мнимых собственных значений, то задача Коши асимптотически устойчива.* Это наводит на мысль, что при условии 1) должен существовать некоторый критерий п. п. в терминах мнимого точечного спектра, а теорема Скляра — Ширмана должна из него следовать при условии 2). Именно такой критерий устанавливается в настоящей статье (теорема 2), причем попутно мы освобождаемся от требования ограниченности оператора A, которое несовместимо с приложениями к дифференциальным операторам (т. е. к уравнениям в частных производных, имеющим вид (1)). Характер искомого критерия подсказывается следующим фактом.

Теорема 1. *Если $T(t)$ — п. п. полугруппа, то для каждого $\mu \in \boldsymbol{R}$ подпространства*

$$V_\mu = \{x \mid x \in \boldsymbol{B},\ Ax = i\mu x\}, \quad W_\mu = \{f \mid f \in \boldsymbol{B}^*,\ \ A^* f = i\mu f\} \qquad (2)$$

находятся в естественной двойственности.

Доказательство. Пусть $x \in V_\mu$, $x \neq 0$. Возьмем $g \in V_\mu^*$, $g(x) \neq 0$. По теореме об отщеплении граничного спектра в $\boldsymbol{B}$ существует проектор P_μ на V_μ, аннулирующий B_0 и все $V_\nu\ (\nu \neq \mu)$. Этот проектор коммутирует со всеми $T(s)$ и, следовательно, с A. Определим функционал $f \in \boldsymbol{B}^*$, полагая, $f(y) = g(P_\mu y)$. Очевидно, $f \in W_\mu$ и $f(x) \neq 0$.

Обратно, пусть дан $f \in W_\mu$, $f \neq 0$. Тогда f аннулирует B_0 и все $V_\nu\ (\nu \neq \mu)$. По теореме об отщеплении граничного спектра $f \mid V_\mu \neq 0$, т. е. существует $x \in V_\mu$, такой, что $f(x) \neq 0$.

Следствие. *Если полугруппа $T(t)$ п. п., то* *

$$\dim V_\mu = \dim W_\mu \qquad (3)$$

для всех μ. В частности, $V_\mu = 0 \leftrightarrow W_\mu = 0$.

Сформулируем теперь наш основной результат.

Теорема 2. *Пусть пересечение спектра оператора A с мнимой осью не более чем счетно. Пусть для каждого собственного значения $i\mu\ (\mu \in \boldsymbol{R})$ оператора A^* и каждого собственного функционала $f \in W_\mu$, $(f \neq 0)$ существует дуальный собственный вектор x оператора A: $Ax = i\mu x$, $f(x) \neq 0$. Тогда полугруппа $T(t)$ — почти периодическая.*

Для вывода отсюда критерия Скляра — Ширмана (без требования ограниченности оператора A) теперь достаточно заметить, что, если $\operatorname{spec} A \cap i\boldsymbol{R}$ не более чем счетно и $W_\mu = 0$ для всех μ, то условия теоремы 2 выполнены. Поэтому полугруппа $T(t)$ является п. п. и $V_\mu = 0$ при всех μ в силу следствия теоремы 1. Но тогда $B_1 = 0$, $\boldsymbol{B} = B_0$, т. е. $\lim\limits_{t \to \infty} T(t)x = 0$ для всех $x \in \boldsymbol{B}$, что и означает асимптотическую устойчивость.

---

* Мы полагаем $\dim L = \infty$, если L — бесконечномерное банахово пространство.

Доказательство теоремы 2. Не умаляя общности, можно считать, что оператор A диссипативен, т. е. $T(t)$ — полугруппа сжатий. Определим для нее подпространства B_0 и B_1 точно так же, как в формулировке теоремы об отщеплении граничного спектра. Оба подпространства инвариантны для полугруппы и, следовательно, для $\dot{A}$. Сужения $T(t)|B_0$ и $T(t)|B_1$ почти периодичны и в B_1 полугруппа действует изометрически. Рассмотрим сумму $L = B_0 + B_1$. Если $x \in B_0$, $y \in B_1$, то из неравенства

$$\|y\| - \|T(t)x\| \leqslant \|T(t)(x+y)\| \leqslant \|x+y\|$$

при $t \to \infty$ получается $\|y\| \leqslant \|x+y\|$. Следовательно, $B_0 \cap B_1 = 0$ (т. е. $L = B_0 \dot{+} B_1$) и L замкнуто. Полугруппа $T(t)$ в инвариантном подпространстве L является п. п. Остается доказать равенство $L = \boldsymbol{B}$. Рассуждая от противного, будем далее предполагать, что $L \neq \boldsymbol{B}$.

Так как функция $\|T(t)x\|$ при каждом $x \in \boldsymbol{B}$ монотонна по t, то в $\boldsymbol{B}$ определена полунорма

$$l(x) = \lim_{t \to \infty} \|T(t)x\| \leqslant \|x\|. \tag{4}$$

Очевидно, $\operatorname{Ker} l = B_0 \subset L$, $l(x) = \|x\|$ при $x \in B_1$. Полунорма l во всем $\boldsymbol{B}$ инвариантна относительно всех $T(t)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{B} = \boldsymbol{B}/L$. Покажем, что полунорма l порождает в $\widetilde{B}$ норму

$$\tilde{l}(X) \doteq \inf_{y \in L} l(x-y) = \inf_{z \in B_1} l(x-z) \leqslant \|X\| \tag{5}$$

($x \in \boldsymbol{B}$ — представитель класса $X \in \widetilde{B}$). Действительно, если $\tilde{l}(X) = 0$, то существует последовательность $\{z_n\} \subset B_1$, такая, что $l(x - z_n) \to 0$. Тогда $l(z_n - z_m) \to 0$, т. е. $\|z_n - z_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Поэтому существует $z = \lim z_n \in B_1$. Но тогда и $l(z - z_n) \to 0$, откуда $l(x - z) = 0$, т. е. $x - z \in B_0$. Следовательно, $x \in L$ и $X = 0$.

Пополняя $\widetilde{B}$ по норме $\tilde{l}$, получим некоторое банахово пространство E. Фактор-операторы $\widetilde{T}(t) = T(t)/L$ действуют в $\widetilde{B}$ изометрично относительно нормы $\tilde{l}$. Действительно,

$$l(\widetilde{T}(t)X) = \inf_{z \in B_1} l(T(t)x - z) = \inf_{v \in B_1} l(T(t)x -$$

$$- T(t)v) = \inf_{v \in B_1} l(x - v) = \tilde{l}(X)$$

благодаря обратимости $T(t)|B_1$. Продолжая $\widetilde{T}(t)$ по $\tilde{l}$-непрерывности на E, получаем в E однопараметрическую полугруппу изометрий, сильно непрерывную благодаря (5). Обозначим через S ее генератор. Покажем, что $\operatorname{spec} S \subset \operatorname{spec} A$.

Спектр диссипативного оператора A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Пусть $\lambda \bar{\in} \operatorname{spec} A$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Так как

$$l(R_\lambda x) = \lim_{t\to\infty} \| R_\lambda T(t) x \| \leqslant \| R_\lambda \| \, l(x) \; (x \in \boldsymbol{B}), \tag{6}$$

то резольвента R_λ естественно продолжается до некоторого ограниченного оператора $\hat{R}_\lambda$ в E. Если $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то

$$R_\lambda(x) = -\int_0^\infty (T(t)\, x)\, e^{-\lambda t} dt \;\; (x \in \boldsymbol{B}),$$

откуда

$$\hat{R}_\lambda X = -\int_0^\infty (U(t)\, X)\, e^{-\lambda t} dt \;\; (X \in E).$$

Следовательно, $\hat{R}_\lambda$ совпадает при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ с резольвентой $R_\lambda(S)$. Теперь заметим, что в силу тождества Гильберта

$$\hat{R}_\mu - \hat{R}_\lambda = (\mu - \lambda)\, \hat{R}_\lambda \hat{R}_\mu \;\; (\lambda, \mu \bar{\in} \operatorname{spec} A),$$

откуда

$$\hat{R}_\mu - R_\lambda(S) = (\mu - \lambda)\, R_\lambda(S)\, \hat{R}_\mu \, (\operatorname{Re}\lambda > 0, \; \mu \bar{\in} \operatorname{spec} A).$$

Мы видим, что $\operatorname{Im} \hat{R}_\mu \subset D_S$ и $(S - \lambda I)\, \hat{R}_\mu = I + (\mu - \lambda)\, \hat{R}_\mu$, т. е. $(S - \mu I)\, \hat{R}_\mu = I$. Аналогично $\hat{R}_\mu (S - \mu I) = I \mid D_S$. Поэтому $\mu \bar{\in} \operatorname{spec} S$ (и $\hat{R}_\mu = R_\mu(S)$).

Итак, $\operatorname{spec} S \subset \operatorname{spec} A$. Поэтому пересечение $\operatorname{spec} S \cap i\boldsymbol{R}$ не более чем счетно. Так как оператор iS консервативен, то согласно [3]

$$\tilde{l}(SX - \lambda X) \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\, \tilde{l}(X) \, (X \in E) \tag{7}$$

при всех λ. Поскольку в $\operatorname{spec} S \cap i\boldsymbol{R}$ заведомо имеются лакуны, то в силу (7) левая полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ регулярна для S. По теореме Хилле — Иосида оператор $(-S)$ является генератором сильно непрерывной полугруппы сжатий. Но тогда полугруппа изометрий, порождаемая оператором S, продолжается до группы изометрий $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Отсюда следует, что $\operatorname{spec} S \neq \varnothing$ (см. [4]). Кроме того, $\operatorname{spec} S$ лежит на мнимой оси, не более чем счетен и замкнут. Поэтому в нем существует изолированная точка $i\mu$. Ей соответствует риссовский проектор P, коммутирующий с S и, следовательно, со всеми $U(t)$. Подпространство $V = \operatorname{Im} P$ инвариантно для S и для всех $U(t)$, группа изометрий $U(t) \mid V$ порождается ограниченным оператором $S \mid V$, $\operatorname{spec}(S \mid V) = \{i\mu\}$. Следовательно, V — собственное подпространство для S при собственном значении $i\mu$ (см. [5]). Но тогда любой линейный функционал $h \in \operatorname{Im} P^*$, $h \neq 0$ является собственным для S^* при том же собственном значении. Перенесем его на исходное пространство $\boldsymbol{B}$ с помощью сквозного гомоморфизма $\boldsymbol{B} \to \tilde{\boldsymbol{B}} \to E$. Получим функционал $f \in \boldsymbol{B}^*$ ($f \neq 0$, так как $h \neq 0$ и образ $\boldsymbol{B}$ в E плотен), такой, что $A^*f = i\mu f$. По условию доказываемой теоремы существует дуальный вектор x: $Ax = i\mu x$, $f(x) \neq 0$. Вместе с тем $f \mid L = 0$ (ибо $\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}/L$), откуда $f(x) = 0$. Этим противоречием доказательство завершается.

Пусть теперь пространство $\boldsymbol{B}$ рефлексивно, $T(t)$ $(t \geqslant 0)$ — любая ограниченная сильно непрерывная полугруппа в $\boldsymbol{B}$, A — ее генератор. Тогда $T(t)$ является *слабо почти периодической* в том смысле, что все орбиты слабо предкомпактны (ибо они ограничены). Для слабо почти периодических полугрупп имеет место аналог теоремы об отщеплении граничного спектра (см. [6, 7]), откуда естественно получается обобщение теоремы 1. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть основное пространство $\boldsymbol{B}$ рефлексивно. Если пересечение спектра оператора A с мнимой осью не более чем счетно, то полугруппа $T(t)$ — почти периодическая.*

Аналогичный результат для однопараметрических групп известен (см. [8, с. 97, ср. также [5]).

Отметим два следствия теоремы 3 (в сочетании с теоремой об отщеплении граничного спектра).

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 3 и оператор A не имеет мнимых собственных значений, то соответствующая задача Коши асимптотически устойчива.*

Для ограниченного A этот результат получен в [2].

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 3 и орбиты всех векторов $x \neq 0$ не стремятся к нулю, то система собственных векторов оператора A полна.*

Если не налагать требований на основное пространство $\boldsymbol{B}$, то следствия того же рода вытекают из теоремы 2 при дополнительном предположении существования собственных векторов, дуальных собственным функционалам, в случае следствия 2 и при отсутствии собственных функционалов в случае следствия 1.

В заключение отметим, что, *если A порождает п. п. группу $U(t)$, то система собственных векторов оператора A полна* в силу теоремы об отщеплении граничного спектра. Действительно, в этом случае $\|x\| \leqslant C \|U(t)x\|$, откуда при $x \in B_0$, $t \to \infty$ следует $x = 0$, т. е. $B_0 = 0$. Это аналог основного результата работы [5], где было также показано, что *для генератора ограниченной группы полнота влечет п. п.*

Список литературы: 1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 45, с. 69—84. 2. *Скляр Г. М., Ширман В. Я.* Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 127—132. 3. *Любич Ю. И.* Консервативные операторы. — Усп. мат. наук, 1965, **20**, вып. 5, с. 221—225. 4. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром. — Мат. сб., **56**, № 4, с. 433—468. 5. *Любич Ю. И.* Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. — Усп. мат. наук, 1963, **18**, вып. 1, с. 165—171. 6. *Jacobs K.* Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. — Math. Z., 1956, **64**, p. 298—338. 7. *de Leeuw K., Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications. — Acta Math., 1961, **105**, p. 63—97. 8. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — МГУ, 1978, 204 с.

Поступила в редколлегию 12.04.85.