

✓ K-14038
295319

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 148

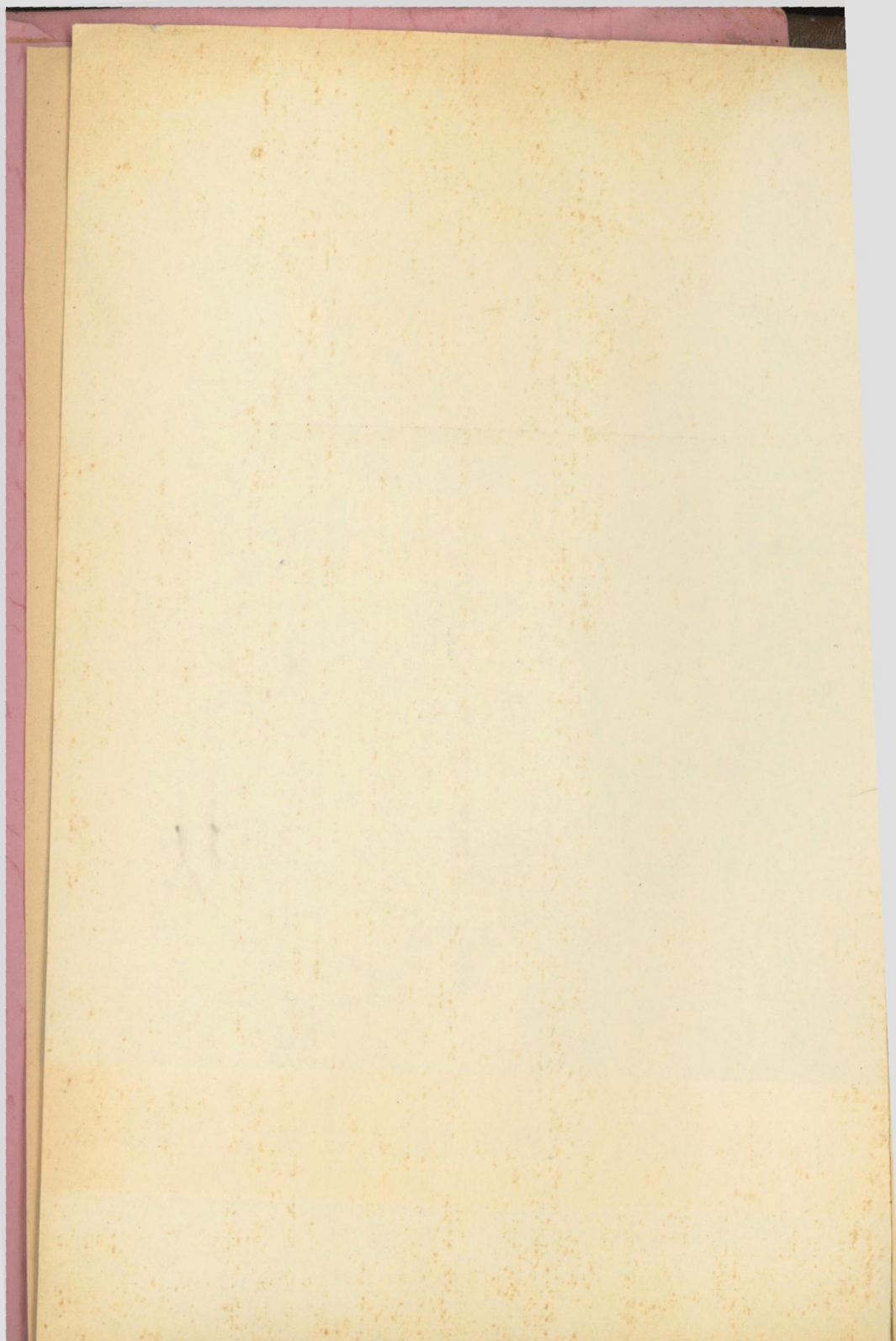
ВЫПУСК 42

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

54 коп.



Вестник Харьковского университета, 1977, № 148, вып. 42, 1—109,3.



МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО
И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
УССР

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 148

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 42

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСКОЕ
ОБЪЕДИНЕНИЕ
«ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ
1977

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского государственного университета (протокол № 7 от 6 февраля 1976 года).

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, дифференциальным уравнениям, теории устойчивости, а также по некоторым вопросам прикладной математики и механики.

Выпуск предназначен для научных работников и специалистов.

Предыдущие выпуски вестника выходили под названием «Математика и механика».

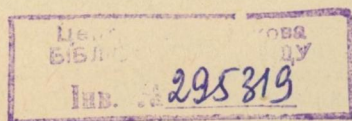
Редакционная коллегия:

В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, А. П. Маринич (отв. секр.), В. А. Марченко, И. Е. Тарапов (отв. ред.).

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский госуниверситет, механико-математический факультет.
Тел. 40-14-40.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорокун*



В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук,
 А. В. ЛУЦЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
 Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА. II

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где A , B — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, x — вектор n -мерного пространства E_n , u — вектор r -мерного пространства E_r . Как отмечено в [1], задача стабилизации рассматривалась в [2]. Мы используем здесь определения, обозначения и леммы работы [1].

Теорема 1. Для того чтобы система (1) была стабилизируема на подпространство $G = \{x: Hx = 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^-$, либо существовали векторы $c_1, \dots, c_s$ и неотрицательные целые числа $k_1, \dots, k_s$ такие, что

$$H^* \subset L \{c_1, A^*c_1, \dots, A^{*k_1}c_1; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s}c_s\} + K^-,$$

причем

$$c_1^* A^k B = 0, \quad 0 \leq k < k_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_s^* A^k B = 0, \quad 0 \leq k < k_s$$

и

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c_1^* A^{k_1} B \\ \vdots \\ c_s^* A^{k_s} B \end{pmatrix} = s.$$

Необходимость. Пусть система (1) стабилизируема управлением $u = Qx$. Если $H^* \subset K^-$, то необходимость доказана. Пусть $H^* \not\subset K^-$. В этом случае $\text{rank } H^{*M} = q \geq 1$. Не ограничивая общности, будем считать первые q столбцов H^{*M} линейно независимыми. Обозначим через $H^{(1)*}$ матрицу $(h_1^M, \dots, h_q^M)$. Пусть $\text{rank } H^{(1)}B = s_1 \geq 0$. Очевидно, $s_1 \leq \min(q, r)$. Выделим у матрицы $H^{(1)}B$ s_1 линейно независимых строк. Так как остальные строки $H^{(1)}B$ линейно выражаются

через выделенные s_1 строк, то элементарными преобразованиями над строками можно добиться, чтобы все строки $H^{(1)}B$, кроме выделенных, заместились нулевыми строками (а выделенные сохранились). Эти преобразования равносильны умножению матрицы $H^{(1)}B$ слева на невырожденную матрицу D_1 порядка q , что, в свою очередь, эквивалентно замене матрицы $H^{(1)}$ на матрицу $D_1 H^{(1)}$. Отметим, что если $Hx(t) \rightarrow 0$, то и $D_1 H^{(1)}x(t) \rightarrow 0$.

Образует из матрицы $D_1 H^{(1)}$ размера $q \times n$ две матрицы: матрицу H_1 размера $s_1 \times n$, строками которой являются строки матрицы $D_1 H^{(1)}$ с номерами, совпадающими с номерами ненулевых строк матрицы $D_1 H^{(1)}B$, и матрицу $H_{2,0}$ размера $(q - s_1) \times n$, составленную из остальных строк матрицы $D_1 H^{(1)}$.

Легко видеть, что $H_{2,0}B = 0$. Пусть

$$\text{rank } H_{2,0}AB = s_2 \geq 0, \quad s_2 \leq \min(q - s_1, r).$$

Как и выше, выделим s_2 линейно независимых строк матрицы $H_{2,0}AB$ и умножением слева на невырожденную матрицу D_2 порядка $q - s_1$ обратим остальные строки $H_{2,0}AB$ в нулевые. Если $Hx(t) \rightarrow 0$, то $D_2 H_{2,0}x(t) \rightarrow 0$. Образует из матрицы $D_2 H_{2,0}$ матрицу H_2 размера $s_2 \times n$, строками которой являются строки $D_2 H_{2,0}$ с номерами, совпадающими с номерами ненулевых строк $D_2 H_{2,0}AB$, и матрицу $H_{3,0}$ размера $(q - s_1 - s_2) \times n$ из остальных строк $D_2 H_{2,0}$. При этом $H_{3,0}B = 0$, $H_{3,0}AB = 0$. Продолжим этот процесс. Докажем, что он обязательно прервется на некотором N -м этапе для $1 \leq N \leq n$, когда достигнется равенство

$$q = s_1 + \dots + s_N, \quad (s_N > 0). \quad (2)$$

Действительно, если бы сумма $s_1 + \dots + s_k$ была меньше q при любом k , то это означало бы, что, начиная с некоторого $k = k_0$, все $s_k = 0$. При этом $H_{k_0,0} = H_{k_0+1,0} = \dots \neq 0$. Тогда, в частности, существовала бы ненулевая матрица $H_{n+1,0}$, для которой выполнялись бы соотношения

$$H_{n+1,0}B = H_{n+1,0}AB = \dots = H_{n+1,0}A^{n-1}B = 0.$$

Возьмем любой ненулевой столбец $\tilde{h}$ матрицы $H_{n+1,0}$. Тогда

$$\tilde{h}^*B = \tilde{h}^*AB = \dots = \tilde{h}^*A^{n-1}B = 0,$$

т. е. $\tilde{h} \perp L$. Кроме того, так как все матрицы $H_{i,0}$ образуются из столбцов матрицы $H^{(1)}$, то $\tilde{h}^- = 0$. Следовательно, $\tilde{h}^+ = \tilde{h} \neq 0$. Поэтому по лемме 2 существует начальное условие x_0 такое, что при любом управлении решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет соотношению $(\tilde{h}, x(t)) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, по построению для любого решения $x(t)$ системы (1) при $u = Qx$ выполнено $Hx(t) \rightarrow 0$ и, значит, для любого i $H_{i,0}x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, в частности, $(\tilde{h}, x(t)) \rightarrow 0$. Полученное противоречие показывает, что при некотором $N \leq n$ имеет место равенство (2).

При этом $s_N = \text{rank } H_{N,0} A^{N-1} B$, что равно числу строк матрицы $H_{N,0}$ (матрица H_N равна $H_{N,0}$). Каждая из матриц H_i ($i = 2, 3, \dots, N$) размера $s_i \times n$ удовлетворяет требованиям $H_i A^k B = 0$ ($k = 0, 1, \dots, i-2$).

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} H_N A^{N-1} B \\ H_{N-1} A^{N-2} B \\ \dots \dots \dots \\ H_1 B \end{pmatrix}.$$

Начиная со второй строки, будем проверять, является ли данная строка линейной комбинацией предыдущих. Строки, выражающиеся через предыдущие, будем опускать.

Пусть $R_i \geq 0$ — число строк матрицы $H_i A^{i-1} B$, оставшихся в результате указанного процесса. Тогда общее число оставшихся строк будет $s = R_N + R_{N-1} + \dots + R_1$. Отметим, что $R_N = s_N$, так как все s_N строк матрицы $H_N A^{N-1} B$ линейно независимы по построению; $R_{N-1} \geq \max \{0; s_{N-1} - R_N\}$, т. к. s_{N-1} строк $H_{N-1} A^{N-2} B$ также линейно независимы между собой; $R_{N-2} \geq \max \{0; s_{N-2} - R_N - R_{N-1}\}$ и т. д.

Обозначим через $c_1, \dots, c_{R_N}$, столбцы матрицы H_N^* ; через $c_{R_N+1}, \dots, c_{R_N+R_{N-1}}$ — столбцы матрицы H_{N-1}^* , номера которых совпадают с номерами оставшихся строк в матрице $H_{N-1} A^{N-2} B$; $\dots$; через $c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+1}, c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+2}, \dots, c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+R_1}$ — столбцы матрицы H_1^* , номера которых совпадают с номерами оставшихся строк $H_1 B$.

Докажем, что векторы

$$\begin{aligned} & c_1, A^* c_1, \dots, A^{N-1} c_1; c_2, A^* c_2, \dots, A^{N-1} c_2; \dots; \\ & c_{R_N}, \dots, A^{N-1} c_{R_N}; c_{R_N+1}, \dots, A^{N-2} c_{R_N+1}; \dots; \\ & c_{R_N+R_{N-1}}, A^* c_{R_N+R_{N-1}}, \dots, A^{N-2} c_{R_N+R_{N-1}}; \dots; \\ & c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+1}, A^* c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+1}; \dots; \\ & c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+R_2}, A^* c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+R_2}; \\ & c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+1}, \dots, c_{R_N+R_{N-1}+\dots+R_2+R_1} \end{aligned}$$

линейно независимы и их число не менее q (отметим, что если некоторое $R_i = 0$, то в цепочке отсутствуют векторы, начиная с $c_{R_N+\dots+R_{i+1}+1}$ и кончая $A^{i-1} c_{R_N+\dots+R_i}$).

Действительно, пусть линейная комбинация перечисленных векторов равна нулю. Перейдем к сопряжению и умножим эту комбинацию на матрицу B справа. Так как $c_1, \dots, c_{R_N}$ — строки матрицы H_N , для которой $H_N B = H_N A B = \dots = H_N A^{N-2} B = 0$, $c_{R_N+1}, \dots, c_{R_N+R_{N-1}}$ — строки матрицы H_{N-1} , для которой $H_{N-1} B = \dots =$

$= H_{N-1} A^{N-3} B = 0$ и т. д., то получим равную нулю линейную комбинацию строк

$$c_1^* A^{N-1} B, c_2^* A^{N-1} B, \dots, c_{R_N}^* A^{N-1} B, c_{R_N+1}^* A^{N-2} B, \dots, \\ c_{R_N+R_N}^* A^{N-2} B, c_{R_N+R_N+1}^* A^{N-3} B, \dots, c_s^* B,$$

которые по самому построению линейно независимы. Значит, коэффициенты при таких строках в исходной линейной комбинации все равны нулю.

Умножим исходную линейную комбинацию справа на матрицу AB . Как и выше, получится нулевая линейная комбинация тех же линейно независимых строк с коэффициентами, равными коэффициентам в исходной линейной комбинации при предыдущих строках:

$$c_1^* A^{N-2}, c_2^* A^{N-2}, \dots, c_{s_N}^* A^{N-2}; c_{s_N+1}^* A^{N-3}, \dots, \\ c_{s_N+R_N-1}^* A^{N-3}, \dots; c_{s_N+R_N-1+\dots+R_2}^*.$$

Таким образом, эти коэффициенты также равны нулю. Умножая исходную линейную комбинацию последовательно на $A^2 B, \dots, A^{N-1} B$, получим, что все коэффициенты исходной линейной комбинации равны нулю и, значит, рассматриваемая система векторов линейно независима.

Сделаем оценку числа этих векторов. Очевидно, общее число векторов равно $NR_N + (N-1)R_{N-1} + \dots + 2R_2 + R_1$. Легко проверить следующие неравенства:

$$R_N \geq s_N; \\ R_N + R_{N-1} \geq \max \{s_N, s_{N-1}\}; \\ R_N + R_{N-1} + R_{N-2} \geq \max \{R_N + R_{N-1}, s_{N-2}\} \geq \\ \geq \max \{s_N, s_{N-1}, s_{N-2}\}; \\ R_N + R_{N-1} + \dots + R_1 \geq \max \{R_N + R_{N-1} + \dots + R_2, s_1\} \geq \\ \geq \max \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1\}.$$

Складывая эти неравенства, получим, что общее число строк не меньше суммы $s_N + s_{N-1} + \dots + s_2 + s_1$, т. е. не меньше q .

Запишем эту систему векторов в более компактном виде $c_1, A^* c_1, \dots, A^{*k_1} c_1; c_2, A^* c_2, \dots, A^{*k_2} c_2; \dots; c_s, A^* c_s, \dots, A^{*k_s} c_s$.

При этом $(A^{*k_i} c_i)^* B = 0$ при $0 \leq k < k_i$; $(A^{*k_i} c_i)^* B \neq 0$.

Возможны два случая:

$$а) H^{(1)*} \subset L \{c_1^M, (A^* c_1)^M, \dots, (A^{*k_1} c_1)^M; \dots; c_s^M, \dots, (A^{*k_s} c_s)^M\}. \quad (3)$$

Отсюда

$$H^* \subset L \{c_1, A^* c_1, \dots, A^{*k_1} c_1; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s} c_s\} + K^-$$

и необходимость доказана, или

$$б) H^{(1)*} \not\subset L \{c_1^M, \dots, (A^{*k_1} c_1)^M; \dots; c_s, \dots, (A^{*k_s} c_s)^M\}. \quad (4)$$

В последнем случае образуем новую матрицу

$$H^{(2)*} = (H^{(1)*}, c_1^M, \dots, (A^{*k_1 c_1})^M; \dots; c_s, \dots, (A^{*k_s c_s})^M).$$

Столбцы этой матрицы $c_1^M, (A^{*k_1 c_1})^M, \dots, (A^{*k_s c_s})^M$ линейно независимы. Доказательство этого проводится дословно также, как было проведено доказательство независимости тех же векторов без индексов M , так как $(A^{*k_i c_i})^M = A^{*k_i c_i} - (A^{*k_i c_i})^-$, а любой вектор g^- удовлетворяет соотношениям $g^{-*} A^j B = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Число этих столбцов, как мы видели, не менее q . А в силу (4) среди столбцов $H^{(1)*}$ есть хотя бы один столбец, не выражающийся через $c_1^M, \dots, (A^{*k_s c_s})^M$.

Следовательно, ранг матрицы $H^{(2)*}$ больше или равен $q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{(2)*}$ и любого решения $x(t)$ системы (1) со стабилизирующим управлением $u = Qx$ $(h_i^{(2)}, x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для столбцов $H^{(1)*}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 1: $(h_i^M, x(t)) = (h_i, x(t)) - (h_i^-, x(t)) \rightarrow 0$. Так как столбцы $c_j^M = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$) получены в виде линейных комбинаций столбцов h_i^M ($i = 1, \dots, q$), то $(c_j^M, x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Наконец, так как c_j удовлетворяет условию $(A^{*k_i c_j})^* B = 0$ ($0 \leq k < k_j$), то в силу леммы 3 для $0 \leq k < k_j$

$$(A^{*k} c_j, x(t)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

откуда $((A^{*k} c_j)^M, x(t)) \rightarrow 0$ ($0 \leq k < k_j$). Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{(1)*}$, применительно к матрице $H^{(2)*}$, получим, что либо при некоторых $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_s^{(2)}$ и $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_s^{(2)}$ выполнено соотношение

$$H^{(2)*} \subset L \left\{ (c_1^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_1^{(2)}} c_1^{(2)})^M; \dots; (c_s^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_s^{(2)}} c_s^{(2)})^M \right\},$$

т. е.

$$H^* \subset L \left\{ c_1^{(2)}, \dots, A^{*k_1^{(2)}} c_1^{(2)}; \dots; c_s^{(2)}, \dots, A^{*k_s^{(2)}} c_s^{(2)} \right\} + K^-,$$

и необходимость доказана, либо ранг матрицы

$$H^{(3)*} = \left(H^{(2)*}, (c_1^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_s^{(2)}} c_s^{(2)})^M \right)$$

больше или равен $q+2$.

Этот процесс увеличения ранга матрицы $H^{(k)*}$ должен обязательно оборваться на соотношении типа (3), так как ранг матрицы $H^{(k)*}$ не может быть больше n , что и требуется доказать.

Достаточность. Пусть существуют $c_1, \dots, c_s$, удовлетворяющие условию теоремы.

Введем новые переменные

$$y_{im} = c_i^* A^m x, \quad i = 1, \dots, s; \quad m = 0, 1, \dots, k_i.$$

$= H_{N-1} A^{N-3} B = 0$ и т. д., то получим равную нулю линейную комбинацию строк

$$c_1^* A^{N-1} B, c_2^* A^{N-1} B, \dots, c_{R_N}^* A^{N-1} B, c_{R_N+1}^* A^{N-2} B, \dots, \\ c_{R_N+R_N+1}^* A^{N-2} B, c_{R_N+R_N+1}^* A^{N-3} B, \dots, c_s^* B,$$

которые по самому построению линейно независимы. Значит, коэффициенты при таких строках в исходной линейной комбинации все равны нулю.

Умножим исходную линейную комбинацию справа на матрицу AB . Как и выше, получится нулевая линейная комбинация тех же линейно независимых строк с коэффициентами, равными коэффициентам в исходной линейной комбинации при предыдущих строках:

$$c_1^* A^{N-2}, c_2^* A^{N-2}, \dots, c_{s_N}^* A^{N-2}; c_{s_N+1}^* A^{N-3}, \dots, \\ c_{s_N+R_{N-1}}^* A^{N-3}, \dots; c_{s_N+R_{N-1}+\dots+R_2}^* A^{N-3}, \dots$$

Таким образом, эти коэффициенты также равны нулю. Умножая исходную линейную комбинацию последовательно на $A^2 B, \dots, A^{N-1} B$, получим, что все коэффициенты исходной линейной комбинации равны нулю и, значит, рассматриваемая система векторов линейно независима.

Сделаем оценку числа этих векторов. Очевидно, общее число векторов равно $NR_N + (N-1)R_{N-1} + \dots + 2R_2 + R_1$. Легко проверить следующие неравенства:

$$R_N \geq s_N; \\ R_N + R_{N-1} \geq \max \{s_N, s_{N-1}\}; \\ R_N + R_{N-1} + R_{N-2} \geq \max \{R_N + R_{N-1}, s_{N-2}\} \geq \\ \geq \max \{s_N, s_{N-1}, s_{N-2}\}; \\ R_N + R_{N-1} + \dots + R_1 \geq \max \{R_N + R_{N-1} + \dots + R_2, s_1\} \geq \\ \geq \max \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1\}.$$

Складывая эти неравенства, получим, что общее число строк не меньше суммы $s_N + s_{N-1} + \dots + s_2 + s_1$, т. е. не меньше q .

Запишем эту систему векторов в более компактном виде $c_1, A^* c_1, \dots, A^{*k_1} c_1; c_2, A^* c_2, \dots, A^{*k_2} c_2; \dots; c_s, A^* c_s, \dots, A^{*k_s} c_s$.

При этом $(A^{*k_i} c_i)^* B = 0$ при $0 \leq k < k_i$; $(A^{*k_i} c_i)^* B \neq 0$.

Возможны два случая:

$$a) H^{(1)*} \subset L \{c_1^M, (A^* c_1)^M, \dots, (A^{*k_1} c_1)^M; \dots; c_s^M, \dots, (A^{*k_s} c_s)^M\}. \quad (3)$$

Отсюда

$$H^* \subset L \{c_1, A^* c_1, \dots, A^{*k_1} c_1; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s} c_s\} + K^-$$

и необходимость доказана, или

$$b) H^{(1)*} \not\subset L \{c_1^M, \dots, (A^{*k_1} c_1)^M; \dots; c_s, \dots, (A^{*k_s} c_s)^M\}. \quad (4)$$

В последнем случае образуем новую матрицу

$$H^{(2)*} = (H^{(1)*}, c_1^M, \dots, (A^{*k_1 c_1})^M; \dots; c_s, \dots, (A^{*k_s c_s})^M).$$

Столбцы этой матрицы $c_1^M, (A^{*k_1 c_1})^M, \dots, (A^{*k_s c_s})^M$ линейно независимы. Доказательство этого проводится дословно также, как было проведено доказательство независимости тех же векторов без индексов M , так как $(A^{*k c_i})^M = A^{*k c_i} - (A^{*k c_i})^-$, а любой вектор g^- удовлетворяет соотношениям $g^- A^j B = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Число этих столбцов, как мы видели, не менее q . А в силу (4) среди столбцов $H^{(1)*}$ есть хотя бы один столбец, не выражающийся через $c_1^M, \dots, (A^{*k_s c_s})^M$.

Следовательно, ранг матрицы $H^{(2)*}$ больше или равен $q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{(2)*}$ и любого решения $x(t)$ системы (1) со стабилизирующим управлением $u = Qx$ $(h_i^{(2)}, x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для столбцов $H^{(1)*}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 1: $(h_i^M, x(t)) = (h_i, x(t)) - (h_i^-, x(t)) \rightarrow 0$. Так как столбцы $c_j^M = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$) получены в виде линейных комбинаций столбцов h_i^M ($i = 1, \dots, q$), то $(c_j^M, x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Наконец, так как c_j удовлетворяет условию $(A^{*k c_j})^* B = 0$ ($0 \leq k < k_j$), то в силу леммы 3 для $0 \leq k < k_j$

$$(A^{*k c_j}, x(t)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

откуда $((A^{*k c_j})^M, x(t)) \rightarrow 0$ ($0 \leq k < k_j$). Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{(1)*}$, применительно к матрице $H^{(2)*}$, получим, что либо при некоторых $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_{s(2)}^{(2)}$ и $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_{s(2)}^{(2)}$ выполнено соотношение

$$H^{(2)*} \subset L \left\{ (c_1^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_1^{(2)} c_1^{(2)}})^M; \dots; (c_{s(2)}^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_{s(2)}^{(2)} c_{s(2)}^{(2)}})^M \right\},$$

т. е.

$$H^* \subset L \left\{ c_1^{(2)}, \dots, A^{*k_1^{(2)} c_1^{(2)}}; \dots; c_{s(2)}^{(2)}, \dots, A^{*k_{s(2)}^{(2)} c_{s(2)}^{(2)}} \right\} + K^-,$$

и необходимость доказана, либо ранг матрицы

$$H^{(3)*} = \left(H^{(2)*}, (c_1^{(2)})^M, \dots, (A^{*k_{s(2)}^{(2)} c_{s(2)}^{(2)}})^M \right)$$

больше или равен $q+2$.

Этот процесс увеличения ранга матрицы $H^{(k)*}$ должен обязательно оборваться на соотношении типа (3), так как ранг матрицы $H^{(k)*}$ не может быть больше n , что и требуется доказать.

Достаточность. Пусть существуют $c_1, \dots, c_s$, удовлетворяющие условию теоремы.

Введем новые переменные

$$y_{im} = c_i A^m x, \quad i = 1, \dots, s; \quad m = 0, 1, \dots, k_i.$$

Пусть столбцы матрицы $(c_i^* A^{k_i} B)_{i=1}^s$ с номерами $j_1, \dots, j_s$ линейно независимы. Тогда, полагая $u_j \equiv 0$ для $j \in \overline{\{j_1, \dots, j_s\}}$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{10} &= c_1^* \dot{x} = c_1^* A x + c_1^* B u = c_1^* A x = y_{11} \\ y_{11} &= c_1^* A \dot{x} = c_1^* A^2 x + c_1^* A B u = c_1^* A^2 x = y_{12} \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_{1k_1-1} &= c_1^* A^{k_1-1} \dot{x} = c_1^* A^{k_1} x = y_{1k_1} \\ y_{1k_1} &= c_1^* A^{k_1} \dot{x} = c_1^* A^{k_1+1} x + \sum_{l=1}^s c_1^* A^{k_1} b_{il} u_{il} \\ \dot{y}_{20} &= c_2^* \dot{x} = c_2^* A x = y_{21} \\ y_{21} &= c_2^* A \dot{x} = c_2^* A^2 x = y_{22} \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_{2k_2} &= c_2^* A^{k_2} \dot{x} = c_2^* A^{k_2+1} x + \sum_{l=1}^s c_2^* A^{k_2} b_{il} u_{il} \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_{s0} &= c_s^* \dot{x} = c_s^* A x = y_{s1} \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_{sk_s} &= c_s^* A^{k_s} \dot{x} = c_s^* A^{k_s+1} x + \sum_{l=1}^s c_s^* A^{k_s} b_{il} u_{il}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$c_p^* A^{k_p+1} x + \sum_l c_p^* A^{k_p} b_{j_l} u_{j_l} = v_p, \quad p = 1, \dots, s.$$

Тогда система (5) распадается на s подсистем вида

$$\begin{aligned} y_{p0} &= y_{p1} \\ y_{p1} &= y_{p2} \\ &\vdots \\ y_{pk_p} &= v_p. \end{aligned}$$

Выбирая v_p в виде $-\sum_{m=0}^{k_p} \beta_m^p y_{pm}$ с подходящими положительными постоянными β_m^p , получим, что все

$$y_{im}(t) \rightarrow 0.$$

Так как

$$\text{rank } (c_p A^{k_p} b_{j_l})_{p, l=1}^s = s,$$

то система линейных уравнений (с выбранными v_p) разрешима относительно $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_s}$.

Таким образом, мы получим стабилизирующее управление в виде линейной функции от y_{im} , т. е. в виде $u = Qx$.

Достаточность доказана.

Приведем алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить стабилизирующее управление.

Пусть матрица H имеет размеры $m \times n$.

1. Находим базис подпространства K^- .

2. Применяя последовательно элементарные преобразования над строками матрицы H : перестановка строк и прибавление к данной строке линейной комбинации остальных строк (эти преобразования эквивалентны умножению матрицы H слева на невырожденные квадратные матрицы m -го порядка), приведем матрицу H к виду

$$\tilde{H} = MH = \begin{pmatrix} H_{N+1} \\ H_N \\ \vdots \\ H_2 \\ H_1 \end{pmatrix}$$

такому, что матрица

$$T = (HB, HAB, \dots, HA^{n-1}B)$$

примет после того же преобразования вид

$$\tilde{T} = M T = (\tilde{H}B, \tilde{H}AB, \dots, \tilde{H}A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_N A^{N-1}B & \dots & H_N A^{n-1}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & H_3 A^2B & \dots & H_3 A^{N-1}B & \dots & H_3 A^{n-1}B \\ 0 & H_2 AB & H_2 A^2B & \dots & H_2 A^{N-1}B & \dots & H_2 A^{n-1}B \\ H_1 B & H_1 AB & H_1 A^2B & \dots & H_1 A^{N-1}B & \dots & H_1 A^{n-1}B \end{pmatrix},$$

откуда

$$(H_{N+1}B, H_{N+1}AB, \dots, H_{N+1}A^{n-1}B) = 0.$$

При этом матрицы H_i имеют размеры $s_i \times n$, $s_1 + s_2 + \dots + s_{N+1} = m$, $0 \leq s_i \leq r$. Если $T = 0$, то $N = 0$, $s_{N+1} = m$, $H_{N+1} = H$; если $T \neq 0$, то $s_N > 0$ ($1 \leq N \leq n$); если $s_i = 0$, то соответствующая матрица H_i отсутствует, а если $s_i > 0$ для $i \leq N$, то строки матрицы $H_i A^{i-1}B$ должны быть линейно независимы между собой. (Замечание 1. Практически удобнее оперировать сразу со строками матрицы T , приводя ее элементарными преобразованиями над строками аналогично методу Гаусса к приведению матрицы k треугольному виду с применением, если необходимо, перестановки строк — к виду (6).

Матрица $\tilde{H}$ при этом получится из H применением тех же преобразований. Замечание 2. Нам нужны только матрицы H_i и $H_i A^{i-1}B$, а не преобразующая невырожденная матрица M).

3. Проверяем включение: $H_{N+1}^* \subset K^-$. Если хоть один столбец матрицы H_{N+1}^* не принадлежит K^- , то стабилизация невозможна.

4. Пусть $H_{N+1}^* \subset K^-$. Если $H_{N+1} = H$, то система (1) стабилизируема при любом управлении $u(x)$, например, при $u(x) \equiv 0$.

Пусть $H_{N+1} \neq H$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} H_N A^{N-1} B \\ H_{N-1} A^{N-2} B \\ \vdots \\ H_2 A B \\ H_1 B \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Первые s_N ее строк линейно независимы по построению. Начиная с $(s_N + 1)$ -й строки проверяем, принадлежит ли данная строка линейной оболочке предыдущих. Если принадлежит, опускаем эту строку; если не принадлежит, оставляем. Таким образом, у матрицы $H_N A^{N-1} B$ остается $R_N = s_N$ строк, у матрицы $H_{N-1} A^{N-2} B$ остается $R_{N-1} \geq 0$ строк ($R_N + R_{N-1} \geq \max\{s_N, s_{N-1}\}$) и т. д., наконец, у матрицы $H_1 B$ остается $R_1 \geq 0$ строк ($R_N + R_{N-1} + \dots + R_1 \geq \max\{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1\}$). Выделим у матрицы

$$\tilde{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} H_N \\ H_{N-1} \\ \vdots \\ H_2 \\ H_1 \end{pmatrix}$$

строки с номерами, совпадающими с номерами строк матриц $H_i A^{i-1} B$, оставшихся в результате указанного процесса. Обозначим эти строки

$$c_1^*, c_2^*, \dots, c_s^* \quad (s = R_N + R_{N-1} + \dots + R_1 \leq r)$$

и для каждого c_p^* обозначим через k_p число $i-1$, где H_i та матрица, из которой мы выделили данную строку c_p^* . Таким образом, по построению строки

$$c_1^* A^{k_1} B, c_2^* A^{k_2} B, \dots, c_s^* A^{k_s} B$$

линейно независимы, так как это строки матрицы (7) после выбора строк, являющихся линейными комбинациями предыдущих.

5. Проверяем, выполнено ли включение

$$H^{(1)*} \subset L\{c_1, A^* c_1, \dots, A^{*k_1} c_1; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s} c_s\} + K^-. \quad (8)$$

Если (8) имеет место, то стабилизация возможна. Стабилизирующее управление $u(x)$ находится из системы

$$c_p^* A^{k_p} B u = -c_p^* A^{k_p+1} x - \sum_{i=0}^{k_p} \gamma_i^p c_p^* A^i x \quad (p = 1, 2, \dots, s), \quad (9)$$

где положительные постоянные γ_i^p для каждого p выбираются из условия: корни уравнения

$$\mu^{k_p+1} + \gamma_1^p \mu^{k_p} + \dots + \gamma_{k_p}^p \mu + \gamma_{k_p+1}^p = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть. Система (9) имеет решение, так как ранг s матрицы системы не превосходит числа неизвестных r .

6. Если включение (8) не имеет места, то строим матрицу

$$H^{(2)*} = (\tilde{H}^{(1)*}, c_1, \dots, A^{*k_1}c_1; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s}c_s)$$

и возвращаемся к пункту 2, заменяя матрицу H матрицей $H^{(2)}$.

Нетрудно видеть, что либо на некотором обращении к пунктам 2—6 обнаружится невозможность стабилизации, либо выполнится включение типа (8) и в этом случае стабилизирующее управление определится из системы, аналогичной (9).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) была стабилизируема на подпространство $G = \{x: Hx = 0\}$ со степенью устойчивости не меньшей $\alpha > 0$ (т. е. чтобы в разложении $Hx(t)$ по функциям вида $t^k e^{\mu_i t}$ все величины μ_i удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re} \mu_i \leq -\alpha$) необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^-$, либо существовали векторы $c_1, \dots, c_s$ и неотрицательные целые числа $k_1, \dots, k_s$ такие, что

$$H^* \subset L \{c_1, A^{*k_1}c_1, \dots, A^{*k_s}c_s; \dots; c_s, \dots, A^{*k_s}c_s\} + K^-,$$

причем $c_i A^k B = 0$, $0 \leq k < k_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, и

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} c_1^* A^{k_1} B \\ \dots \\ c_s^* A^{k_s} B \end{pmatrix} = s,$$

где K^- — линейная оболочка вещественных частей всех корневых векторов матрицы A^* , отвечающих собственным значениям λ с $\operatorname{Re} \lambda \leq -\alpha$, ортогональных всем столбцам матрицы $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$.

Доказательство проводится так же, как и теоремы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н. Стабилизация линейной системы относительно подпространства. I. — «Вестник Харьк. ун-та. Математика и механика», вып. 41, 1976, с. 114—123.
2. Красовский Н. Н. О стабилизации динамических систем дополнительными силами. — «Дифференциальные уравнения», 1965, № 1, с. 5—16.

Поступила 10. II 1975 г.

УДК 681.3:519.21

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АЛГОРИТМОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Пусть имеется некоторая стохастическая система, управляемая стационарной нерандомизированной стратегией π . Эволюция системы происходит в фазовом пространстве E .

Для простоты будем рассматривать простейший случай, когда множество состояний E и управлений Y конечны и эволюция системы описывается процессом с дискретным временем.

Стратегия π есть отображение пространства E в множество управлений Y . Если в состоянии $x \in E$ стратегия π выбирает управление $y = \pi(x) \in Y$, то система переходит в некоторое новое состояние $z \in E$ с вероятностью $q_{xz}^\pi(y)$. При этом начисляется непосредственный выигрыш $w(x, y, z)$. Будем полагать, что $|w| \leq R < \infty$.

Задача состоит в построении алгоритма синтеза оптимальной стратегии, которая максимизирует математическое ожидание среднего выигрыша φ на неограниченном промежутке времени

$$\varphi(x, \pi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} M_x^\pi \sum_{k=0}^n w(x_k, y_k, x_{k+1}). \quad (1)$$

Стратегию π^* будем называть оптимальной, если $\varphi(x, \pi^*) \geq \varphi(x, \pi)$ для всех π .

Более подробно постановка задачи дана в [1, 2].

Решение данной задачи в настоящее время основывается либо на использовании алгоритма динамического программирования Ховарда [3], либо на сведении этой задачи к задаче линейного программирования [4].

Однако оба эти метода обладают весьма существенным недостатком, состоящим в том, что на каждой их итерации возникает необходимость в решении систем линейных уравнений. Этот недостаток не замечен при малых размерностях задач. Однако при сколько-нибудь значительном возрастании размерности, задача оказывается практически не решаемой с помощью указанных методов. Поэтому эти методы обеспечивают только лишь принципиальную возможность решения задач и не нашли широкого практического применения. Были сделаны попытки [5] построить алгоритм, в котором отсутствует необходимость решения систем уравнений. Однако построенный алгоритм применим к описанной задаче при весьма жестких предположениях относительно свойств переходной функции управляемого процесса.

В данной работе предлагается алгоритм из класса алгоритмов динамического программирования, который лишен указанных выше недостатков и который позволяет решать задачи практически любой размерности. Этот алгоритм основан на использовании рекуррентных соотношений вместо решения систем уравнений.

Пусть $Q = Q(\pi)$ — переходная матрица марковской цепи, управляемой стратегией π . Приведем некоторые вспомогательные сведения из теории конечных цепей Маркова.

Матрицу Q будем называть регулярной, если существует такое $k < \infty$, что все элементы Q^k положительны.

Лемма 1. [6]. Пусть Q — регулярная переходная матрица. Тогда

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = Q^*;$$

кроме того, матрица Q суммируема по Чезаро к матрице Q^* , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Q^k = Q^*;$$

б) матрица Q^* обладает свойством

$$QQ^* = Q^*Q = Q^*.$$

Все строки матрицы Q^* одинаковы.

Обозначим q^* — вектор-строку матрицы Q^* и e — вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. Тогда

в) финальный вектор q^* не зависит от начального распределения вероятностей состояний и является единственным решением системы

$$q^* = q^*Q, \quad q_x^* > 0, \quad x \in E, \quad q^*e = 1;$$

г) матрица $A = I - (Q - Q^*)$ не вырождена, т. е. существует матрица

$$Z = A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Q - Q^*)^k;$$

д) обозначим

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (Q^k - Q^*).$$

Тогда

$$(I - Q)H = H(I - Q) = I - Q^*.$$

Из утверждений а), в) леммы 1 немедленно следует, что в определении (1) средний выигрыш на самом деле не зависит от начального состояния $x \in E$, т. е. $\varphi(x, \pi) = \varphi(\pi)$ для всех $x \in E$. Действительно, поскольку матрица Q суммируема по Чезаро к Q^* , то записывая средний выигрыш в (1) в векторном виде, получаем

$$\bar{\varphi}(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Q^k(\pi) w(\pi) = Q^* w(\pi),$$

где $w(\pi)$ — вектор с компонентами $w(x, \pi) = Q_x(\pi)w$, а w — вектор с компонентами $\{w(x, y, z), z \in E\}$, $y = \pi(x)$. Компоненты вектора $\bar{\varphi}(\pi)$ имеют теперь вид $\varphi(x, \pi) = q^*(\pi)w(\pi)$, где $q^*(\pi)$ — финальный вектор вероятностей состояний, который согласно в) леммы 1 не зависит от начальных состояний. Поэтому $\varphi(x, \pi) = \varphi(\pi)$, $x \in E$. Очевидно, вектор $\bar{\varphi}(\pi)$ может быть записан в виде $\bar{\varphi}(\pi) = \varphi(\pi)e$.

Теперь докажем важное соотношение, которое широко используется при построении оптимизационной процедуры.

Теорема 1. Пусть заданы регулярная переходная матрица $Q = Q(\pi)$ и вектор выигрышей $w = w(\pi)$. Тогда средний выигрыш $\varphi = \varphi(\pi)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi e = w + (Q - I)r, \quad (2)$$

где $\varphi e = Q^*w$, $r = Hw$.

Доказательство. В силу утверждения д) леммы 1 матрицы Q , Q^* и H удовлетворяют соотношению $(I - Q)H = I - Q^*$. Умножая справа обе части этого равенства на вектор-столбец w , получаем $(I - Q)Hw = (I - Q^*)w$ или $Hw - QHw = w - Q^*w$. Учитывая, что $Q^*w = \varphi e$ и обозначая $Hw = r$, получаем требуемое утверждение.

Замечание. Вектор r является относительным, т.е. вектор $\tilde{r} = r + ce$, где c — произвольная постоянная, также удовлетворяет равенству (2).

Действительно, равенство (2) не нарушится, если в правой части добавить и вычесть вектор Qce . При этом заметим, что поскольку матрица Q стохастическая, то $Qce = ce$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\varphi e &= (w + (Q - I)r = w + (Q - I)r + Qce - Qce = \\ &= w + (Q - I)r + (Q - I)ce = w + (Q - I)(r + ce) = w + (Q - I)\tilde{r}.\end{aligned}$$

Учитывая это замечание, нетрудно проверить, что справедливо следующее представление для вектора $r = r(\pi)$.

Лемма 2. Вектор $r = r(\pi)$ может быть представлен абсолютно сходящимся рядом

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} [Q^k w - (Q^k w)_z e], \quad (3)$$

где $(Q^k w)_z$ — z -я компонента вектора $Q^k w$ (выбираемая произвольно).

Для построения оптимизационного алгоритма введем вектор-столбец $\gamma(f, \pi)$

$$\gamma(f, \pi) \equiv w(f) - w(\pi) + [Q(f) - Q(\pi)]r(\pi), \quad (4)$$

где $w(f)$ и $w(\pi)$ — векторы непосредственных выигрышей при стратегиях f и π соответственно; $Q(f)$ и $Q(\pi)$ — переходные матрицы при стратегиях f и π .

Следующие две теоремы определяют структуру оптимизационного алгоритма.

Теорема 2. Пусть f и π некоторые стратегии. Тогда, если вектор $\gamma(f, \pi) \geq 0$ и хотя бы одна из его компонент $\gamma_x(f, \pi) > 0$, то $\varphi(f) > \varphi(\pi)$.

Доказательство. Запишем соотношение (2) для стратегий f и π соответственно

$$\varphi(f)e = w(f) + (Q(f) - I)r(f), \quad \varphi(\pi)e = w(\pi) + (Q(\pi) - I)r(\pi).$$

Вычитая последнее равенство из первого, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(f)e - \varphi(\pi)e &= w(f) + (Q(f) - I)r(f) - w(\pi) - \\ &- (Q(\pi) - I)r(\pi) = w(f) + Q(f)r(f) - r(f) - w(\pi) - \\ &- Q(\pi)r(\pi) + r(\pi) = [w(f) + Q(f)r(\pi) - w(\pi) - Q(\pi)r(\pi)] - \\ &- (r(f) - r(\pi)) + Q(f)r(f) - Q(f)r(\pi) = \gamma + Q(f)(r(f) - r(\pi)) - \\ &- (r(f) - r(\pi)) = \gamma + (Q(f) - I)(r(f) - r(\pi)).\end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим $\Delta\varphi = \varphi(f) - \varphi(\pi)$ и $\Delta r = r(f) - r(\pi)$. Тогда равенства (5) перепишутся в виде

$$\Delta\varphi e = \gamma + (Q(f) - I)\Delta r.$$

Умножая обе части этого равенства слева на финальную матрицу $Q^*(f)$, получаем

$$Q^*(f)\Delta\varphi e = Q^*(f)\gamma + Q^*(f)(Q(f) - I)\Delta r. \quad (6)$$

Но $Q^*(f)Q(f) = Q^*(f)$ и $Q^*(f)\Delta\varphi e = \Delta\varphi e$. Тогда равенство (6) запишется в виде $\Delta\varphi e = Q^*(f)\gamma$ или покомпонентно $\Delta\varphi = q^*(f)\gamma$.

Но компоненты финального вектора $q^*(f)$ положительны, а вектор γ неотрицателен, при этом хотя бы одна из его компонент положительна. Следовательно, $\Delta\varphi > 0$, что и доказывает теорему.

Будем обозначать теперь $(f\pi)$ стратегию, которая на одном шаге вначале выбирает управления в соответствии с f , а затем всюду в соответствии с π .

Сформулируем теперь теорему, из которой вытекает возможность построения оптимизационного алгоритма, основанного на рекуррентных соотношениях для вектора r .

Теорема 3. Пусть относительный вектор r удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$r(f\pi) = w(f) + Q(f)r(\pi). \quad (7)$$

Тогда, если вектор $\gamma(f, \pi) \geq 0$ и хотя бы одна из его компонент $\gamma_x(f, \pi) > 0$, то $\varphi(f) > \varphi(\pi)$.

Для конкретного построения оптимизационного алгоритма будем поступать следующим образом.

Предположим, что в качестве начального приближения выбрана некоторая стратегия π . Основная трудность теперь состоит в вычислении вектора $r(\pi)$. Вообще говоря, этот вектор можно вычислить, решая систему (2). Однако, при больших размерностях системы могут возникнуть естественные трудности в ее решении. Поэтому целесообразно вычислять вектор $r(\pi)$ непосредственно, используя представление его абсолютно сходящимся векторным рядом

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} [Q^k w - (Q^k w)_z e]. \quad (8)$$

Этот ряд сходится с геометрической скоростью. Следовательно, сумму соответствующих компонент этого ряда можно либо вычислять приближенно с точностью до любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, либо аппроксимировать суммой некоторой геометрической прогрессии.

Обозначим $w_k = Q^k w$ и $d_k^z = Q^k w - (Q^k w)_z e$. Максимальную и минимальную компоненты вектора w_k будем обозначать M_k и m_k соответственно.

Далее обозначим $b_k = M_k - m_k$.

Пусть переходная матрица Q регулярна. Будем сразу предполагать, что все ее элементы отличны от 0. Пусть α — минимальный элемент матрицы Q . Тогда можно показать [6], что $|d_{k+1}^z(x)| \leq b_{k+1} \leq \leq \rho b_k$ для всех $x \in E$, где $\rho = (1 - 2\alpha)$, $0 < \rho < 1$. Таким образом $b_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \leq \rho < 1$ для всех $k = 0, 1, \dots$.

Пусть задана частичная сумма r_n векторного ряда (8). Тогда можно полагать заданными конечные последовательности

$$\{b_0, b_1, \dots, b_n\} \text{ и } \{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

Обозначим $\beta_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} \beta_k$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^* \leq \rho < 1$. Поскольку

$|d_k^2(x)| \leq b_k$ для каждого $x \in E$, то $|r_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n b_k$, $n = 0, 1, \dots$; $x \in E$. Поэтому, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq \varepsilon, \quad (9)$$

то и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} d_k^2(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in E. \quad (10)$$

Очевидно, что если последовательность $\{\beta_k, k = 1, 2, \dots\}$ не является монотонно возрастающей, то при достаточно большом n выполнено неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq \frac{\beta_n^* b_n}{1 - \beta_n^*}. \quad (11)$$

Если же последовательность $\{\beta_k, k = 1, 2, \dots\}$ монотонно возрастает, то для всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq \frac{\rho b_n}{1 - \rho}. \quad (12)$$

Определим теперь

$$n_*(\varepsilon) = \inf \left\{ n : \frac{\beta_n^* b_n}{1 - \beta_n^*} \leq \varepsilon \right\}, \quad (13)$$

либо

$$n_*(\varepsilon) = \inf \left\{ n : \frac{\rho b_n}{1 - \rho} \leq \varepsilon \right\}, \quad (14)$$

если последовательность $\{\beta_k, k = 1, 2, \dots\}$ монотонно возрастает.

Тогда в силу неравенств (9), (10), (11) и (12) получаем неравенство $\sum_{k=n_*+1}^{\infty} d_k^2(x) \leq \varepsilon$, $x \in E$. Отсюда следует, что в качестве при-

ближенного значения для компонент вектора r можно использовать частичные суммы вида $r_{n_*}(x)$. При этом для всех $x \in E$ погрешность не превосходит любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, т. е. $|r(x) - r_{n_*}(x)| \leq \varepsilon$, $x \in E$. Таким образом, для приближенного вычисления с заданной точностью $\varepsilon > 0$ вектора $r(\pi)$ достаточно вычислить частичную сумму $r_{n_*}(\pi)$, удовлетворяющую условию (13) либо (14).

Если для заданной стратегии π вычислен вектор $r(\pi)$, то в каждом состоянии $x \in E$ можно выбрать управление, улучшающее стратегию π , вычисляя значения компонент $\gamma_x(f, \pi)$ вектора $\gamma(f, \pi)$ из соотношения (4). Это вытекает из теорем 2 и 3, в силу которых, если $\gamma_x(f, \pi) > 0$, то управление $y = f(x)$ строго улучшает стратегию π .

Определим тогда множество управлений

$$G_x(\pi) = \{y: \gamma_x(y, \pi) > 0\}.$$

Из этого множества выберем управление $y^* \in G_x(\pi)$:

$$\gamma_x(y^*, \pi) = \max_{y \in G_x(\pi)} \{\gamma_x(y, \pi)\}. \quad (15)$$

Выбрав управления $y^* \in G_x(\pi)$ для всех $x \in E$, получим новую стратегию f_1 , которая очевидным образом является строгим улучшением стратегии π .

Далее, в соответствии с рекуррентным соотношением (7), вычисляем вектор $r(f_1\pi)$ и затем описанным выше способом строим новое улучшение и т. д. до тех пор, пока не окажется $G_x(\pi) = \emptyset$ для всех $x \in E$. Тогда останов.

Покажем теперь, что построенный таким способом алгоритм за конечное число итераций сходится к оптимальной стратегии.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть множества $G_x(\pi) = \emptyset$ для всех $x \in E$. Тогда стратегия π оптимальна.

Доказательство. Пусть f — стратегия, выбирающая управление $y = f(x) \in G_x(\pi)$, $x \in E$. Из определения множества $G_x(\pi)$ следует, что если $y \in G_x(\pi)$, то $\gamma_x(y, \pi) > 0$. Но тогда, в силу теорем 2 и 3 $\Delta\varphi = \varphi(f) - \varphi(\pi) > 0$. Это означает, что если хотя бы для одного $x \in E$ множество $G_x(\pi) \neq \emptyset$, то $\varphi(f) > \varphi(\pi)$, т. е. стратегия f лучше, чем π .

Если же $G_x(\pi) = \emptyset$ для всех $x \in E$, то это означает, что не существует стратегии, которая могла бы быть лучше, чем π , т. е. $\varphi(\pi) \geq \varphi(f)$ для всех f . Следовательно, стратегия π оптимальна. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть множество состояний E и управлений Y конечны. Тогда описанный алгоритм за конечное число итераций сходится к оптимальной стратегии.

Доказательство. Поскольку множества состояний E и управлений Y конечны, то множество стратегий $\Pi = E \times Y$ также конечно.

Теперь заметим, что описанный алгоритм на каждой итерации, если не останавливается, то сопровождается строгим улучшением стратегии. Действительно, если не останов, то это означает, что $G_x(\pi) \neq \emptyset$, т. е. для некоторого $x \in E$ $\gamma_x > 0$. Но тогда $\Delta\varphi > 0$, т. е. $\varphi(f) > \varphi(\pi)$. Если же алгоритм останавливается, то в силу теоремы 4 стратегия, на которой алгоритм остановился, является оптимальной.

Теперь из того, что множество стратегий конечно, алгоритм сопровождается строгим улучшением стратегии и останавливается на оптимальной стратегии, следует сходимости алгоритма за конечное число итераций к оптимальной стратегии. Теорема доказана.

Не вникая в подробности, заметим, что описанный алгоритм задает итерационную процедуру для решения уравнения оптимальности, которому удовлетворяет оптимальная стратегия. Поэтому

описанный алгоритм относится к классу алгоритмов динамического программирования и состоит в выполнении следующих операций:

1. Выбрать начальное приближение $\pi \in \Pi$.
2. Вычислить вектор $r(\pi)$.
3. Для всех $x \in E$ и всех $y \in Y$ вычислить $\gamma_x(y, \pi)$.
4. Для всех $x \in E$ выбрать $y^* \in G_x(\pi)$: $\gamma_x(y^*, \pi) = \max_{y \in G_x(\pi)} \gamma_x(y, \pi)$.

Если $G_x(\pi) = \emptyset$ для всех $x \in E$, то останов. В противном случае переход к п. 5.

6. Из управлений $y^* \in G_x(\pi)$ для всех $x \in E$ составить стратегию $f^{(1)}$, которую использовать в качестве нового начального приближения. Для стратегии $f^{(1)}$ вычислить вектор $r(f^{(1)}\pi)$ из рекуррентного соотношения (7). Затем перейти к п. 3.

Пример. Пусть множество $E = \{1, 2\}$ и множество $Y = \{1, 2\}$. Пусть имеется две допустимые стратегии f и π , которым соответствуют переходные матрицы $Q(f)$ и $Q(\pi)$ и векторы выигрышей $w(f)$ и $w(\pi)$ вида

$$Q(f) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \quad w(f) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Q(\pi) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \quad w(\pi) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить оптимальную стратегию.

Согласно описанному алгоритму выберем в качестве начального приближения, например, стратегию π . Затем вычислим вектор $r(\pi)$. В результате получим

$$r(\pi) = \begin{bmatrix} \frac{40}{7} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполняя п. 3 алгоритма, получаем

$$\gamma_1(f, \pi) = 0, \quad \gamma_2(f, \pi) = [Q_2(f) - Q_2(\pi)] r(\pi) + w_2(f) - w_2(\pi) =$$

$$= [(0,6 - 0,4)(0,4 - 0,6)] \begin{bmatrix} \frac{40}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) - (-1) = \frac{1}{7} > 0.$$

Таким образом, стратегия f лучше, чем π . Покажем, что стратегия f действительно является оптимальной. Для этого необходимо показать, что множества $G_1(f) = \emptyset$ и $G_2(f) = \emptyset$. Вычислим вектор

$$r(f\pi) = w(f) + Q(f)r(\pi) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{40}{7} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\gamma_1(\pi, f) = 0$. Следовательно, $G_1(f) = \emptyset$. Вычислим

$$\gamma_2(\pi, f) = [(0,4 - 0,6)(0,6 - 0,4)] \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix} + (-1) - (-2) = -\frac{4}{35} < 0.$$

Отсюда следует, что $G_2(f) = \emptyset$ и следовательно стратегия f оптимальна.

Таким образом, в данной работе построен алгоритм вычисления оптимальной стратегии для случая, когда множества состояний и управлений являются конечными. Этот алгоритм относится к классу алгоритмов динамического программирования. Его существенной особенностью является использование рекуррентных соотношений для вычисления относительного вектора g . Это обстоятельство приводит к тому, что размерность задачи, т. е. число элементов в множестве состояний E не играет существенной роли. Поэтому построенный алгоритм может быть использован для решения задач с более сложной природой множества состояний E и управлений Y . Не вникая в подробности, заметим, что описанный алгоритм использован нами в качестве базового для построения оптимизационных алгоритмов для управляемых процессов со счетным множеством состояний и для процессов диффузионного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. В. Обобщенные управляемые процессы. — Тезисы докл. на III Всесоюз. совещании по статистическим методам в процессах управления. Вильнюс, 1973, с. 141—143.
2. Баранов В. В. О свойствах выигрышей в обобщенных процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1975, вып. 40, с. 105—122.
3. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио», 1964. 95 с.
4. Маппе А. S. Linnear programming and sequential decisions. — «Management Science», 1960, № 6, p. 259—267.
5. Баранов В. В. К проблеме синтеза оптимальной стратегии в управляемых процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1975, вып. 40, с. 75—88.
6. Кемени Дж. Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1970, 271 с.

Поступила 25. XII. 1975 г.

УДК 681.3:519.21

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ОСТАНОВКИ В УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ

Задача об оптимальной остановке естественным образом возникает в обобщенных управляемых процессах, введенных и рассмотренных в [1,2]. Действительно, пусть $X(\pi)$ — обобщенный управляемый процесс со значениями в фазовом пространстве E , управляемый некоторой стационарной нерандомизированной стратегией π . Будем полагать, что за применение управления $y = \pi(x)$, выбираемого стратегией π в состоянии $x \in E$, начисляется непосредственный выигрыш $w(x, y) = w(x, \pi)$. Если процесс начинается из некоторого фиксированного состояния $x \in E$ и управляется стратегией π , то

такому процессу сопоставим математическое ожидание выигрыша $v(x, \pi)$ на неограниченном промежутке времени. Положим, что функция $v(x, \pi)$ может принимать неограниченные значения.

Пусть $q^\pi(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \subseteq E$ — переходная функция процесса. С помощью этой функции определим операторы $T = T(\pi)$, $F = F(\pi)$ и U : $T(\pi)u(x) = \int_E u(z)q^\pi(x, dz)$ $Fv(x, \pi) = T[w(x, \pi) + v(x, \pi)]$.

Положим теперь $U \equiv \sup_{\pi} F(\pi)$.

Нетрудно проверить, что F монотонен и обладает следующим свойством $F(v + c) = Fv + c$, где c — постоянная.

Заметим, что аналогичными свойствами обладает и оператор U .

Определение 1. Будем говорить, что оператор F сохраняет функцию $u = u(x, \pi)$, если найдется такое целое неотрицательное число $1 \leq N^* < \infty$, что для всех $N \geq N^*$ имеет место неравенство

$$F^N u > F^{N-1} u.$$

Если выполнено противоположное неравенство, т. е.

$$F^N u \leq F^{N-1} u,$$

то оператор F не сохраняет u .

Если F не сохраняет u при $N^* = 1$, т. е. $Fu \leq u$, то будем говорить, что функция u является эксцессивной относительно оператора F . Эксцессивная функция (э. ф.) u называется эксцессивной мажорантой (э. м.) функции $g = g(x, \pi)$, если $u(x, \pi) \geq g(x, \pi)$ для всех $x \in E$. Э. м. называется наименьшей э. м. (н. э. м.) функции $g = g(x, \pi)$, если u меньше или равна любой другой э. м. функции g .

В следующем утверждении, которое мы приводим без доказательства, устанавливается необходимое и достаточное условие того, чтобы оператор не сохранял функцию $v = v(x, \pi)$.

Лемма 1. [2]. Пусть существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(\pi)w(x) = T^*w(x) \neq 0$. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы оператор F не сохранял функцию $v = v(x, \pi)$ является выполнение неравенства $T^*(\pi)w(x) < 0$.

Из определения 1 следует, что, если оператор F не сохраняет функцию $u = u(x, \pi)$, то после N^* -го шага выигрыш будет монотонно убывать. И, так как в общем случае выигрыш может принимать неограниченные значения, то при $N \rightarrow \infty$ выигрыш будет стремиться к $(-\infty)$. Очевидно тогда, что вместо неограниченного продолжения наблюдений и управлений может оказаться целесообразным остановить управляемый процесс с целью предотвращения неограниченного накопления отрицательного выигрыша. Задача, естественно, должна тогда состоять в выборе такого правила остановки σ^* , что достигается максимум ожидаемого выигрыша $v_\sigma(x, \pi)$.

Очевидно также, что задачу об оптимальной остановке необходимо решать в предположении, что процесс управляется оптималь-

ной стратегией. Условимся, что это предположение всюду выполнено, поэтому указание на зависимость выигрыша и соответствующих операторов от стратегии будем всюду опускать.

Формально задача об оптимальной остановке управляемого процесса сводится к следующему.

Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство, построенное на измеримом пространстве (Ω, F) , порожденном траекториями $\{x_{\sigma_k}(\omega), k = 0, 1, \dots\}$ обобщенного управляемого процесса $x(\pi)$, где $\sigma_k, k = 0, 1, \dots$ — моменты наблюдения процесса и применения управлений.

Пусть задана неубывающая последовательность $\{F_k, k = 0, 1, \dots\}$ σ — подалгебр из F таких, что $F_m \subseteq F, F_m \subseteq F_k, m \leq k$, где σ — алгебры F_k порождены траекториями $\{x_{\sigma_m}(\omega), m \leq k\}$.

Определение 2. [3]. Случайная величина (т. е. F — измеримая функция) $\tau = \tau(\omega)$ со значениями в $\{0, 1, \dots\}$ называется марковским моментом (относительно последовательности $\{F_k\}$), если для каждого $k < \infty$

$$\{\omega : \tau \leq k\} \in F_k.$$

Пусть $\bar{M} = \{\tau\}$ — класс марковских моментов $\tau = \tau(\omega)$ и M — класс конечных марковских моментов, т. е. таких, что

$$P\{\tau < \infty\} = 1$$

марковские моменты $\tau \in M$ будем называть моментами остановки (м. о.). Правило, устанавливающее способ выбора момента остановки, будем называть правилом остановки.

Пусть $w = w(x, y, z)$ — непосредственный выигрыш за переход из состояния $x \in E$ в состояние $z \in E$ под воздействием управления y .

Пусть фиксировано некоторое состояние $x \in E$ в момент $t = 0$ и пусть $\omega \in \Omega$ определено в виде последовательности

$$\omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots\}.$$

Определим теперь функцию $g_n(\omega), n = 0, 1, \dots$:

$$g_n(\omega) \equiv \sum_{k=0}^n w(x_k, y_k, z_k)$$

и ее математическое ожидание

$$v_n(x, \pi) = M_x^\pi g_n(\omega).$$

Используя оператор T , можно показать, что справедливо представление

$$v_n(x, \pi) = \sum_{k=0}^n T^k w(x).$$

Функцию $v_n(x, \pi)$ будем называть ожидаемым выигрышем за n шагов при начальном состоянии $x \in E$ и стратегии π .

Определим теперь функцию

$$\begin{aligned} v_{\tau}(x, \pi) &= M_x^{\pi} \{g_{\tau}(\omega)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\omega: \tau=k\}} g_k(\omega) dP_x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} M_x^{\pi} \{g_{\tau}(\omega) | \tau=k\} P\{\tau=k\} \end{aligned}$$

и будем называть ее ожидаемым выигрышем при правиле остановки τ .

Наконец, определим функцию

$$z(x) = \sup_{\tau \in M} v_{\tau}(x) = \sup_{\tau \in M} M_x \{g_{\tau}(\omega)\},$$

которую по аналогии с терминологией теории игр будем называть «ценой».

Определение 3. М. о. τ^* назовем оптимальным если $z(x) = M_x \{g_{\tau^*}(\omega)\}$.

Наша задача состоит в установлении условий существования оптимального м. о., в исследовании структуры цены $z(x)$ и в построении правила, устанавливающего способ выбора оптимального м. о.

Правило остановки, выбирающее оптимальный м. о., также будем называть оптимальным.

Будем предполагать, что для каждого начального состояния $x \in E$ и каждого $\sigma \in M$ существует условное математическое ожидание $M_x \{g_{\sigma}/F_n\} < \infty$, $n = 0, 1, \dots$. Если $n = 0$, то

$$M_x \{g_{\sigma}/F_0\} = M_x \{g_{\sigma}\} = v_{\sigma}(x) < \infty.$$

Обозначим $L(A^+)$ класс функции $v(x)$, удовлетворяющих условию

$$A^+ : M_x \left[\sup_n g_n^+(\omega) \right] < \infty,$$

где $g^+ = \max \{0, g\}$.

Тогда имеет место следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Лемма 2. [2]. Если оператор U не сохраняет $v_n(x)$, то

$$v_n(x) \in L(A^+).$$

Заметим, что, согласно определению 1, функция u , удовлетворяющая условию $Fu \leq u$, является эксцессивной относительно оператора F . Дополним это определение понятием регулярности.

Пусть σ — некоторый марковский момент.

Заметим, что из определения оператора F следует

$$Fv_n(x) = T[w(x) + v_n(x)] = M_x \{g_{n+1}(\omega)\}. \quad (1)$$

Будем полагать $v_0(x) \equiv g_0(x)$. Нетрудно видеть, что справедлива следующая цепочка равенств

$$F^n v_0(x) = F^n g_0(x) = F^{n-1} F g_0(x) = F^{n-1} M_x \{g_1(\omega)\} = \dots = M_x \{g_n(\omega)\}.$$

Тогда математическое ожидание $M_x \{g_\sigma\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_x \{g_\sigma\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\sigma=k\}} g_k(\omega) dP_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} M_x \{g_\sigma(\omega)/\sigma = k\} P\{\sigma = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{F^\sigma v_0(x)/\sigma = k\} P\{\sigma = k\} = \\ &= MF^\sigma v_0(x). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом и используя (1), можно показать, что для фиксированного n

$$M_x \{g_{\sigma+n}\} = MF^\sigma v_n(x). \quad (2)$$

Теперь можно дать следующее определение регулярной F -экссессивной функции.

Определение 4. Экссессивная относительно оператора F функция $v = v(x)$ называется регулярной, если для любого $\sigma \in M$

$$v_n(x) \geq MF^\sigma v_n(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Лемма 3. Пусть функция v экссессивна относительно оператора F и пусть марковские моменты $\tau, \sigma \in M$. Причем, пусть $\tau \geq \sigma$ с вероятностью 1. Тогда функция v является регулярной и для любых $n = 0, 1, \dots$

$$M_x \{g_{n+\sigma}(\omega)\} \geq M_x \{g_{n+\tau}(\omega)\}. \quad (3)$$

В частности, если $n = 0$ и $\sigma = 0$, то

$$v_0(x) \geq M_x \{g_\tau\}. \quad (4)$$

Доказательство. Из монотонности оператора F и экссессивности v следует, что $v_n(x) \geq F^k v_n(x)$ для любого $k = 0, 1, \dots$. Отсюда справедливо неравенство $v_n(x) \geq MF^\sigma v_n(x)$ для любого σ , что и означает регулярность v .

Используя снова F — экссессивность функции v и монотонность оператора F , нетрудно видеть, что $F^k v_n(x) \geq F^{k+m} v_n(x)$ для любых $k = 0, 1, \dots$ и $m = 0, 1, \dots$. Если теперь с вероятностью 1 имеет место неравенство $\tau \geq \sigma$, то отсюда с вероятностью 1 получаем

$$MF^\sigma v_n(x) \geq MF^{\sigma+(\tau-\sigma)} v_n(x) = MF^\tau v_n(x).$$

С учетом (2) это равносильно (3).

Полагая теперь $n = 0$ и $\sigma = 0$, получаем

$$v_0(x) \geq MF^\tau v_0(x) = M_x \{g_\tau\},$$

что устанавливает (4). Лемма доказана.

Определим теперь оператор $G = G(\pi)$:

$$Gv_0(x) = \max \{v_0(x), Uv_0(x)\},$$

где n -я степень оператора G есть

$$G^n v_0(x) = \max \{G^{n-1} v_0(x), UG^{n-1} v_0(x)\}.$$

Докажем теперь утверждение, устанавливающее практически важный способ нахождения н. э. м. функции $v_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$

При этом, используя оператор U , будем иметь в виду, что

$$U = F(f^*) = \sup_i F(f).$$

Лемма 4. Пусть $v(x) \in L(A^+)$ и $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n v_0(x)$. Тогда $\varphi(x)$ является наименьшей U -эксцессивной мажорантой функции $v(x)$.

Доказательство. Заметим прежде всего что $G^{n+1}v_0(x) \geq G^n v_0(x)$. Поэтому с учетом предположения $v \in L(A^+)$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n v_0(x)$ существует и конечен.

Ясно также, что

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n v_0(x) \geq v_0(x)$$

и
$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n v_0(x) \geq v_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, $\varphi(x)$ является мажорантой $v(x)$.

Покажем теперь, что функция $\varphi(x)$ эксцессивна относительно оператора U . Действительно, в силу условия A^+ : $M_x^n \{ \sup_n g_n^+ \} < \infty$, неравенства $G^n v_0(x) \geq U G^{n-1} v_0(x)$ и теоремы Лебега о монотонной сходимости, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G^n v_0(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} U G^{n-1} v_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(f^*) [w(x) + G^{n-1} v_0(x)] = \\ &= U \lim_{n \rightarrow \infty} G^{n-1} v_0(x) = U \varphi(x). \end{aligned}$$

Это и устанавливает U -эксцессивность функции φ .

Покажем, наконец, что $\varphi(x)$ — н., U — э. м. функции $v(x)$. Действительно, пусть некоторая другая функция $f(x)$ также является э. м. v . Тогда $f(x) \geq Uf(x)$. Следовательно,

$$Gf(x) = \max \{ f(x), Uf(x) \} = f(x), \quad f(x) = G^n f(x) \geq G^n v_0(x).$$

Отсюда следует, что $f(x) \geq \varphi(x)$, т. е. $\varphi(x)$ есть н. U — э. м. функции v . Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть оператор U не сохраняет функцию v . Тогда цена $z(x)$ является наименьшей регулярной U -эксцессивной мажорантой v и $z(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Поскольку оператор U не сохраняет v , то в силу леммы 2, $v \in L(A^+)$.

Пусть $\varphi(x)$ — н. U — э. м. функции $v \in L(A^+)$. Тогда, в силу леммы 3, она регулярна и для любого $\sigma \in M$ $\varphi(x) \geq M_x \{ \varphi_\sigma \} \geq M_x \{ g_\sigma \}$.

Следовательно,

$$\varphi(x) \geq \sup_{\sigma \in M} M_x \{ g_\sigma \} = z(x). \quad (5)$$

Для окончательного доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что $\varphi(x) \leq z(x)$.

Прежде всего покажем, что цена $z(x)$ сама является U -эксцессивной. Действительно, определим момент $\tau_\varepsilon: M_x \{g_{\tau_\varepsilon}\} \geq z(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $v \in L(A^+)$, то и $z(x) \in L(A^+)$. Тогда из определения цены вытекает, что момент $\tau_\varepsilon \in M$.

Определим теперь момент $\sigma_\varepsilon = \tau_\varepsilon + 1$, который также очевидным образом является м. о., т. е. $\sigma_\varepsilon \in M$. Для момента σ_ε , в силу определения оператора U и его свойств, имеем $M_x \{g_{\sigma_\varepsilon}\} = M_x \{g_{\tau_\varepsilon+1}\} = UM_x \{g_{\tau_\varepsilon}\} \geq U\{z(x) - \varepsilon\} = Uz(x) - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$.

Отсюда с учетом определения цены получаем $z(x) \geq M_x \{g_{\sigma_\varepsilon}\} \geq Uz(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $Uz(x) \leq z(x)$, что и доказывает эксцессивность цены $z(x)$.

Теперь заметим, что, если функция v сама является эксцессивной, то она совпадает с ценой. (Формально, см. доказательство теоремы 2). Если же v не является эксцессивной, то из определения цены, ее эксцессивности и поскольку один из возможных м. о. является мгновенная остановка, следует, что $z(x) \geq v(x)$, т. е. цена является эксцессивной мажорантой $v(x)$.

Далее, по предположению $\varphi(x)$ является н. U -э. м. v . Следовательно,

$$z(x) \geq \varphi(x). \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) теперь следует равенство $z(x) = \varphi(x)$.

Теорема доказана.

Докажем теорему, устанавливающую достаточное условие существования оптимального м. о. и практически важный способ его отыскания.

Будем обозначать

$$\varphi_n(x) = G^n v_0(x).$$

Теорема 2. Пусть оператор $U = F(f^*) = \sup_f F(f)$ не сохраняет функцию $v_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда момент

$$\sigma = \inf \{n: T^n v(x) \leq 0\} \quad (7)$$

является оптимальным моментом остановки.

Доказательство. Определим момент $\tau = \inf \{n: \varphi_n(x) = v_{n-1}(x)\}$.

Покажем, что этот момент является оптимальным м. о.

Из определения момента τ и определения функции $\varphi_n(x)$ следует, что этот момент τ можно определить следующими эквивалентными способами

$$\tau = \inf \{n: G^n v_0(x) \geq UG^n v_0(x)\} = \inf \{n: \varphi_n(x) \geq U\varphi_n(x)\}. \quad (8)$$

Из этих определений следует, что до момента τ имеют место неравенства

$$G^n v_0(x) < UG^n v_0(x), \quad n = 0, 1, \dots, \tau - 1.$$

Но тогда справедливы неравенства

$$v_n(x) < Uv_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \tau - 1. \quad (9)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x) &= \max \{G^n v_0(x), UG^n v_0(x)\} = \\ &= UG^n v_0(x) = Uv_n(x) = v_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \tau - 1.\end{aligned}$$

Полагая $n = \tau - 1$, получаем $\varphi_\tau(x) = v_\tau(x)$.

Тогда, учитывая (8), получаем

$$\varphi_{\tau+1}(x) = \max \{\varphi_\tau(x), U\varphi_\tau(x)\} = \max \{v_\tau(x), Uv_\tau(x)\} = v_\tau(x). \quad (10)$$

Таким образом, в момент τ справедливо неравенство

$$v_\tau(x) \geq Uv_\tau(x), \quad (11)$$

т. е. функция $v_\tau(x)$ эксцессивна относительно оператора U .

Теперь по индукции нетрудно показать, что

$$\varphi_{\tau+k}(x) = v_\tau(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Действительно, для $k = 1$ это равенство установлено в (10). Очевидно, что для доказательства (12) для любого k , достаточно показать, что оно справедливо для $k = 2$. Действительно, учитывая (10) и (11), имеем

$$\varphi_{\tau+2}(x) = \max \{\varphi_{\tau+1}(x), U\varphi_{\tau+1}(x)\} = \max \{v_\tau(x), Uv_\tau(x)\} = v_\tau(x).$$

Переходя теперь в (12) к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая теорему 1, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\tau+k}(x) = \varphi(x) = z(x) = v_\tau(x).$$

Таким образом, в момент τ достигается цена, откуда следует оптимальность момента τ .

Покажем теперь, что момент τ совпадает с моментом σ , который определен в (7). Действительно, согласно (11), в момент τ имеет место неравенство $v_\tau(x) \geq Uv_\tau(x) = v_{\tau+1}(x)$ или, используя представление (3), имеем

$$\sum_{k=0}^{\tau} T^k w(x) \geq \sum_{k=0}^{\tau+1} T^k w(x) = \sum_{k=0}^{\tau} T^k w(x) + T^{\tau+1} w(x).$$

Отсюда получаем

$$T^{\tau+1} w(x) \leq 0. \quad (13)$$

Учитывая теперь, что до момента τ имело место неравенство (9), т. е. противоположное неравенству (11), получаем, что до момента τ имело место неравенство, противоположное (13), т. е.

$$T^n w(x) > 0, \quad n = 1, \dots, \tau - 1$$

и в момент τ впервые выполняется противоположное неравенство, т. е. $T^\tau w(x) \leq 0$. Таким образом, оптимальный момент τ можно определить эквивалентным определению (8) способом

$$\tau = \inf \{n : T^n w(x) \leq 0\},$$

что соответствует определению момента σ в (7).

Покажем, наконец, что момент σ является м. о., т. е. $\sigma \in M$. Это вытекает из условия доказываемой теоремы и леммы 1. Дейст-

вительно, если оператор U не сохраняет функцию $v(x)$, то, в силу леммы 1, $T^*w(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k w(x) < 0$. Но мы получили, что до момента σ имеет место противоположное неравенство $T^k w(x) > 0$. Следовательно, существует некоторое $k^* < \infty$, при котором $T^k w(x)$ меняет знак. Очевидно, что в этом случае $k^* = \sigma = \inf \{k : T^k w(x) \leq 0\} < \infty$. Следовательно, $\sigma \in M$. Теорема доказана.

Таким образом, теорема 2, дает конструктивное доказательство существования оптимального м. о., а тем самым и правила остановки. Нетрудно видеть, что это правило состоит в неслучайном выборе м. о. σ . Алгоритм вычисления этого момента σ чрезвычайно прост. Действительно, если выполнены условия теоремы 2, то отыскание момента σ сводится к вычислению конечной последовательности $T^k w(x)$, $k = 1, 2, \dots, \sigma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. В. Обобщенные управляемые процессы. Тезисы докл. на III Всесоюз. совещании по статистическим методам в процессах управления. Вильнюс, 1973, с. 141—143.
2. Баранов В. В. О свойствах выигрышей в обобщенных процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1975, вып. 40, с. 105—122.
3. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М., «Наука», 1969, 231 с.

Поступила 25. XII 1975 г.

УДК 517.934.1

С. И. ВОВНА, А. С. КАШУРКО, канд. техн. наук,
Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, В. А. СИНЯКОВ

ВЛИЯНИЕ ЗОН НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ, ЛЮФТОВ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА РАБОТУ АВТОМАТА ВОЖДЕНИЯ САМОХОДНОЙ МАШИНЫ

В данной статье исследуется работа автомата вождения самоходной машины, который вырабатывает управляющее воздействие (угол поворота передних колес машины) с помощью копирующего устройства, отслеживающего некоторую заданную (но заранее неизвестную) кривую.

Пусть x_A , y_A — координаты точки А центра оси задних колес машины — в неподвижной системе координат; γ — угол между продольной осью машины и осью x ; α — угол поворота передних колес по отношению к оси машины; v — модуль скорости точки А (принятый постоянным); L_B — расстояние между осями передних и задних колес.

В этих обозначениях (рис. 1) дифференциальные уравнения движения машины имеют следующий вид (А. С. Кашурко, В. И. Коробов, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков. Математическая модель

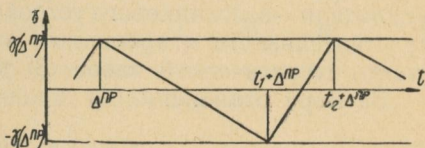


Рис. 1

автомата вождения самоходной машины, отслеживающего кривую с помощью копира — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1976, вып. 41, с. 3—11):

$$\begin{aligned}\dot{x}_A(t) &= v \cos \gamma(t) \\ \dot{y}_A(t) &= v \sin \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) &= \frac{v}{L_B} \operatorname{tg} \alpha(t).\end{aligned}\quad (1)$$

Предположим, что отслеживаемая кривая $y = f(x)$ мало отличается от прямой, параллельной оси x . Тогда углы $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ можно считать малыми, что позволяет дифференциальные уравнения (1) заменить их квадратичным приближением

$$\begin{aligned}\dot{x}_A(t) &= v - \frac{v}{2} \gamma^2(t) \\ \dot{y}_A(t) &= v \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) &= \beta(t) \quad \left(\beta(t) = \frac{v}{L_B} \alpha(t) \right).\end{aligned}\quad (2)$$

(Везде отброшены члены третьего и более высокого порядка малости). Копирующее устройство состоит из штанги копира CP длины l , конец P которой постоянно находится на кривой $y = f(x)$, а конец C — на оси машины на расстоянии L_C от центра оси задних колес. В точке C расположено шарнирное устройство, обеспечивающее произвольные повороты штанги копира.

Задачей автомата вождения является выработка угла поворота $\alpha(t)$ (и тем самым величины $\beta(t)$, пропорциональной $\alpha(t)$) по углу $\varphi(t)$ — углу поворота штанги копира CP в горизонтальной плоскости по отношению к оси машины AC . В большинстве случаев $\beta(t)$ выбирается пропорциональным углу $\varphi(t)$. Таким образом, теоретический закон управления описывается соотношением

$$\beta(t) = -k\varphi(t). \quad (3)$$

Однако наличие в автомате вождения люфтов в шарнирах и усилителя—золотникового устройства с присущими ему зонами нечувствительности и временным запаздыванием не позволяет осуществить теоретический закон (3) точно.

За меру отклонения от закона (3) примем величину $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \varphi(t) + \frac{\beta(t)}{k}. \quad (4)$$

С помощью величины ξ можно описать работу золотникового устройства следующим образом.

Пусть t_k — момент окончания предыдущего поворота (или момент включения автомата).

Если при $t > t_k$ $\xi(t)$ находится в интервале $(-\delta_n^{\text{л}}, \delta_n^{\text{пр}})$, то сигнал на поворот не вырабатывается, и $\beta(t)$ постоянно. Этот интервал будем называть зоной нечувствительности. Постоянные $\delta_n^{\text{л}}, \delta_n^{\text{пр}}$ определяются конкретной конструкцией автомата.

В момент $t_{\text{сн}}^{\text{пр}}$, в который выполняется равенство

$$\xi(t_{\text{сн}}^{\text{пр}}) = \delta_{\text{н}}^{\text{пр}}, \quad (5)$$

вырабатывается сигнал начала правого поворота (если раньше наступит момент $t_{\text{сн}}^{\text{л}}$, в который выполнится равенство

$$\xi(t_{\text{сн}}^{\text{л}}) = -\delta_{\text{н}}^{\text{л}}, \quad (6)$$

то вырабатывается сигнал начала левого поворота).

Пусть $\Delta^{\text{пр}}$ (соответственно, $\Delta^{\text{л}}$) — время запаздывания поворота. Могут представиться две возможности:

1) между $t_{\text{сн}}^{\text{пр}}$ и $t_{\text{сн}}^{\text{пр}} + \Delta^{\text{пр}}$ наступает момент $t_{\text{ск}}^{\text{пр}}$, в который выполняется равенство

$$\xi(t_{\text{ск}}^{\text{пр}}) = \delta_{\text{ск}}^{\text{пр}} (\delta_{\text{ск}}^{\text{пр}} < \delta_{\text{н}}^{\text{пр}}),$$

т. е. вырабатывается сигнал окончания поворота; при этом никакого поворота не происходит, и момент $t_{\text{ск}}^{\text{пр}}$ принимается за новое $t_{\text{к}}$;

2) если в интервале времени $(t_{\text{сн}}^{\text{пр}}, t_{\text{сн}}^{\text{пр}} + \Delta^{\text{пр}}) \xi(t) > \delta_{\text{ск}}^{\text{пр}}$, то в момент $t_{\text{сн}}^{\text{пр}} + \Delta^{\text{пр}}$ скачком происходит поворот; при этом β меняется таким образом, что после скачка выполняется равенство $\xi(t_{\text{сн}}^{\text{пр}} + \Delta^{\text{пр}}) = \delta_{\text{к}}^{\text{пр}}$; $t_{\text{сн}}^{\text{пр}} + \Delta^{\text{пр}}$ принимается за новое $t_{\text{к}}$.

Аналогичные ситуации имеют место и при левом повороте. Постоянные $\delta_{\text{ск}}^{\text{пр}}$, $\delta_{\text{к}}^{\text{пр}}$, $\delta_{\text{ск}}^{\text{л}}$, $\delta_{\text{к}}^{\text{л}}$ также определяются конструкцией автомата.

Наличие зон нечувствительности и запаздывания в автомате приводит к возникновению автоколебаний машины, даже в простейшем случае отслеживания прямолинейного ряда.

Найдем аналитически эти автоколебания (при $y = f(x) \equiv 0$, т. е. отслеживаемая прямая — ось x).

Прежде всего, выразим величину $\varphi(t)$ через величины, входящие в уравнения (2). Так как точка P во все время движения находится на прямой $y = 0$, то

$$y_P(t) \equiv 0. \quad (7)$$

С другой стороны

$$y_P = y_A + L_c \sin \gamma - l \sin(\gamma + \varphi) \approx y_A + (L_c - l) \gamma - l \varphi$$

(отбрасывая члены третьего порядка относительно малых углов γ и φ). Обозначая $L_c - l = L$ и используя (7), получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{l} y_A(t) + \frac{L}{l} \gamma(t). \quad (8)$$

Выведем дифференциальное уравнение для величины $\xi(t)$. Имеем в интервалах между точками разрыва $\beta(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\varphi}(t) + \frac{\dot{\beta}(t)}{k} = \frac{1}{l} \dot{y}_A(t) + \frac{L}{l} \dot{\gamma}(t),$$

откуда в силу (2)

$$\dot{\xi}(t) = \frac{v}{l} \gamma(t) + \frac{L}{l} \beta(t).$$

В дальнейшем нам достаточно исследовать систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{v}{l} \gamma + \frac{L}{l} \beta \\ \dot{\gamma} = \beta \end{cases} \quad (9)$$

(справедливую в интервалах постоянства β).

Будем искать автоколебательный режим работы автомата, состоящий в поочередных поворотах переднего колеса направо и налево.

Примем за начальный момент — момент выработки сигнала начала правого поворота

$$\xi(0) = \delta_n^{np}, \quad \dot{\xi}(0) \geq 0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (10)$$

Отыскивается следующий автоколебательный режим: в момент Δ^{np} происходит правый поворот, при этом $\beta(t)$ переходит скачком от значения β_0 к значению $\beta(\Delta^{np} + 0)$ ($\beta(\Delta^{np} + 0) < \beta_0$); затем в некоторый другой момент происходит левый поворот, в результате которого $\beta(t)$ должно возвратиться к значению β_0 . Отсюда легко установить, что $\gamma(t)$ может быть периодической функцией только при условии $\beta_0 > 0$, $\beta(\Delta^{np} + 0) < 0$.

Из уравнения (9) получим

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \beta_0 t, \quad \xi(t) = \delta_n^{np} + \frac{v\gamma_0 + L\beta_0}{l} t + \frac{v}{2l} \beta_0 t^2, \quad 0 \leq t < \Delta^{np} - 0.$$

В момент Δ^{np} происходит правый поворот (заметим, что $\xi(t)$ в интервале $(0, \Delta^{np})$ монотонно растет и не может обратиться в $\delta_{ск}^{np}$)

$$\xi(\Delta^{np} + 0) = \delta_k^{np}, \quad \gamma(\Delta^{np}) = \gamma_0 + \beta_0 \Delta^{np}. \quad (11)$$

Определим величину скачка $\beta(t)$ в момент Δ^{np} . Так как $\varphi(t)$ не терпит скачка при $t = \Delta^{np}$, то в силу (4) $\beta(\Delta^{np} + 0) - \beta(\Delta^{np} - 0) = \beta(\Delta^{np} + 0) - \beta_0 = k[\xi(\Delta^{np} + 0) - \xi(\Delta^{np} - 0)]$.

Таким образом, получим уравнение

$$\frac{1}{k} [\beta(\Delta^{np} + 0) - \beta_0] + \delta_n^{np} - \delta_k^{np} + \frac{v\gamma_0 + L\beta_0}{l} \Delta^{np} + \frac{v}{2l} \beta_0 (\Delta^{np})^2 = 0. \quad (12)$$

Мы отыскиваем режим, при котором второго правого поворота не происходит. Следовательно, при $t > \Delta^{np} + 0$ или $\xi(t)$ достигает значения — δ_n^{nl} и до этого момента не обращается в δ_n^{np} , или сначала в некоторый момент τ достигает значения δ_n^{np} , но в интервале $(\tau, \tau + \Delta^{np})$, $\xi(t)$ в некоторый момент τ_1 обращается в $\delta_{ск}^{np}$. В первом случае выполняется условие

$$\frac{v\gamma(\Delta^{np} + L\beta(\Delta^{np} + 0))}{l} < \sqrt{-\frac{2v}{l}(\delta_n^{np} - \delta_k^{np})\beta(\Delta^{np} + 0)}, \quad (13)$$

во втором

$$-\left[\frac{v}{l} \beta(\Delta^{np} + 0)\right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \sqrt{\left[\frac{v\gamma(\Delta^{np}) + L\beta(\Delta^{np} + 0)}{l}\right]^2 + \frac{2v}{l} \beta(\Delta^{np} + 0)(\delta_{ск}^{np} - \delta_k^{np})} + \right.$$

$$+ \sqrt{\left[\frac{v\gamma (\Delta^{np}) + L\beta (\Delta^{np} + 0)}{l} \right]^2 + \frac{2v}{l} \beta (\Delta^{np} + 0) (\delta_n^{np} - \delta_k^{np})} \} < \Delta^{np}. \quad (14)$$

Легко видеть, что при выполнении условий (13) или (14) обязательно наступает момент $t_{сн}^n = t_1$, в который вырабатывается сигнал начала левого поворота:

$$\xi(t_1) = -\delta_n^n, \quad \dot{\xi}(t_1) \leq 0$$

или

$$\delta_n^n + \delta_k^{np} + \frac{v\gamma (\Delta^{np}) + L\beta (\Delta^{np} + 0)}{l} (t_1 - \Delta^{np}) + \frac{v}{2l} \beta (\Delta^{np} + 0) (t_1 - \Delta^{np})^2 = 0. \quad (15)$$

В момент $t_1 + \Delta^n$ скачком происходит левый поворот (заметим, что $\xi(t)$ в интервале $(t_1, t_1 + \Delta^n)$ монотонно убывает)

$$\xi(t_1 + \Delta^n + 0) = -\delta_k^n, \quad \gamma(t_1 + \Delta^n) = \gamma(\Delta^{np}) + \beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}). \quad (16)$$

Из требования периодичности разыскиваемого режима следует

$$\beta(t_1 + \Delta^n + 0) = \beta_0.$$

С другой стороны,

$$\beta(t_1 + \Delta^n + 0) - \beta(\Delta^{np} + 0) = k[\xi(t_1 + \Delta^n + 0) - \xi(t_1 + \Delta^n - 0)].$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{1}{k} [\beta_0 - \beta(\Delta^{np} + 0)] - \delta_k^n + \delta_k^{np} + \frac{1}{l} [\gamma(\Delta^{np})v + L\beta(\Delta^{np} + 0)] \times \\ \times (t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}) + \frac{v}{2l} \beta(\Delta^{np} + 0) (t_1 + \Delta^n - \Delta^{np})^2 = 0. \quad (17)$$

Аналогично условиям (13), (14) записываются условия, обеспечивающие отсутствие второго левого поворота: или

$$\frac{v\gamma(t_1 + \Delta^n) + L\beta_0}{l} > -\sqrt{\frac{2v}{l} \beta_0 (\delta_n^n - \delta_k^n)}, \quad (18)$$

или

$$\left[\frac{v\beta_0}{l} \right]^{-1} \left\{ \sqrt{\left[\frac{v\gamma(t_1 + \Delta^n) + L\beta_0}{l} \right]^2 - \frac{2v}{l} \beta_0 (\delta_{ск}^n - \delta_k^n)} + \right. \\ \left. + \sqrt{\left[\frac{v\gamma(t_1 + \Delta^n) + L\beta_0}{l} \right]^2 - \frac{2v}{l} \beta_0 (\delta_n^n - \delta_k^n)} \right\} < \Delta^n. \quad (19)$$

При выполнении одного из этих условий существует момент $t_{сн}^{np} = t_2$, в который вырабатывается сигнал начала правого поворота

$$\xi(t_2) = \delta_n^{np}.$$

Отсюда

$$-\delta_n^{np} - \delta_k^n + \frac{v\gamma(t_1 + \Delta^n) + L\beta_0}{l} (t_2 - t_1 - \Delta^n) + \frac{v}{2l} \beta_0 (t_2 - t_1 - \Delta^n)^2 = 0. \quad (20)$$

Требование периодичности дает

$$\gamma_0 = \gamma(t_2) = \gamma(t_1 + \Delta^n) + \beta_0(t_2 - t_1 - \Delta^n). \quad (21)$$

Таким образом, мы получили семь уравнений (11), (12), (15), (16), (17), (20), (21) с семью неизвестными

$$\beta_0, \gamma_0, \beta(\Delta^{np} + 0), \gamma(\Delta^{np}), \gamma(t_1 + \Delta^n), t_1, t_2.$$

Из уравнений (21), (16) и (20) исключим $\gamma(t_1 + \Delta^n)$ и $t_2 - t_1 - \Delta^n$. Используя (11), получили

$$\begin{aligned} & -\delta_k^n - \delta_n^{np} + \frac{v(\gamma(\Delta^{np}) + \beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np})) + L\beta_0}{l} \times \\ & \times \frac{-\beta_0\Delta^{np} - \beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np})}{\beta_0} + \\ & + \frac{v}{2l}\beta_0 \left(\frac{-\beta_0\Delta^{np} - \beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np})}{\beta_0} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

К полученному уравнению прибавим уравнение (12)

$$\begin{aligned} & -\delta_k^n - \delta_k^{np} + \frac{1}{k}[\beta(\Delta^{np} + 0) - \beta_0] - \frac{v\gamma(\Delta^{np}) + L\beta_0}{l} \cdot \frac{\beta(\Delta^{np} + 0)}{\beta_0} \times \\ & \times (t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}) - \frac{v}{2l}\beta_0 \left(\frac{\beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np})}{\beta_0} \right)^2 = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Прибавим уравнение (17). После сокращения на $\frac{v}{2l}(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}) \left(1 - \frac{\beta(\Delta^{np} + 0)}{\beta_0}\right)$ получим

$$2\gamma(\Delta^{np}) + \beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}) = 0. \quad (23)$$

Умножим уравнение (17) на $\beta(\Delta^{np} + 0)$, а уравнение (22) на β_0 и сложим. После сокращения на $\beta(\Delta^{np} + 0) - \beta_0$ получим

$$\frac{1}{k}[\beta_0 - \beta(\Delta^{np} + 0)] + \delta_k^n + \delta_k^{np} + \frac{L}{l}\beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}) = 0. \quad (24)$$

Исключая из уравнений (23), (24), (11) и (12) поочередно t_1 , $\gamma(\Delta^{np})$, $\beta(\Delta^{np} + 0)$, получим следующее уравнение:

$$2\gamma_0 + \beta_0\Delta^{np} = \frac{\delta_n^{np} + \delta_k^n}{\frac{L}{l} - \frac{v\Delta^{np}}{2l}} = \Gamma. \quad (25)$$

Вычтем из уравнения (17) уравнение (15)

$$\begin{aligned} & \delta_k^n - \delta_n^n + \frac{1}{k}[\beta_0 - \beta(\Delta^{np} + 0)] + \frac{1}{l}[v\gamma(\Delta^{np}) + L\beta(\Delta^{np} + 0)]\Delta^n + \\ & + \frac{v}{l}\beta(\Delta^{np} + 0)(t_1 - \Delta^{np})\Delta^n + \frac{v}{2l}\beta(\Delta^{np} + 0)(\Delta^n)^2 = 0. \end{aligned}$$

Используя (23), (12) и (25) получим, подставляя вместо $\gamma(\Delta^{np})$ равное ему выражение $\frac{1}{2}\Gamma + \frac{1}{2}\beta_0\Delta^{np}$:

$$\Delta^n \left(\frac{L}{l} - \frac{v\Delta^n}{2l} \right) \beta(\Delta^{np} + 0) = -\Delta^{np} \left(\frac{L}{l} - \frac{v\Delta^n}{2l} \right) \beta_0 -$$

$$-\delta_n^{np} + \delta_n^n + \delta_k^{np} - \delta_k^n + \frac{v\Gamma}{2} (\Delta^n - \Delta^{np}). \quad (26)$$

Подставляя теперь полученное из этого уравнения выражение для $\beta (\Delta^{np} + 0)$ и полученное из (25) выражение для γ_0 в (12), получим искомую величину β_0 :

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \frac{\frac{v\Gamma}{2l} (\Delta^n - \Delta^{np}) - \delta_n^{np} + \delta_n^n + \delta_k^{np} - \delta_k^n}{\left(\Delta^{np} + \Delta^n - \frac{Lk}{l} \Delta^{np} \Delta^n \right) \left(\frac{L}{l} - \frac{v\Delta^n}{2l} \right)} + \\ & + \frac{k\Delta^n (\delta_n^{np} - \delta_k^{np}) + \frac{vk\Gamma}{2l} \Delta^{np} \Delta^n}{\Delta^{np} + \Delta^n - \frac{Lk}{l} \Delta^{np} \Delta^n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь из (26) и (25) находятся $\beta (\Delta^{np} + 0)$ и γ_0 . Амплитудное значение $\gamma(t)$ — величина $\gamma(\Delta^{np})$ из (23) и (16) легко видеть, что $\gamma(t_1 + \Delta^n) = -\gamma(\Delta^{np})$ находится через β_0 по формуле

$$\gamma(\Delta^{np}) = \frac{\Gamma}{2} + \frac{1}{2} \Delta^{np} \beta_0. \quad (28)$$

Период колебаний T находится следующим образом:

$$\begin{aligned} T = t_2 - t_1 + \Delta^n - \Delta^{np} + (t_2 - t_1 + \Delta^{np} - \Delta^n) &= \frac{2\gamma(\Delta^{np})}{-\beta(\Delta^{np} + 0)} + \\ &+ \frac{2\gamma(\Delta^{np})}{\beta_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Покажем, что величина $y_A(t)$ также периодична с тем же периодом:

$$y_A(t + T) - y_A(t) = \int_t^{t+T} v\gamma(s) ds = v \int_{\Delta^{np}}^{t_2 + \Delta^{np}} \gamma(s) ds = 0,$$

что легко видеть из графика $\gamma(t)$, представленного на рис. 1.

Максимальное значение $y_A(t)$ достигается в точке $\Delta^{np} + \frac{t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}}{2}$ и вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{A, \max} &= -\frac{l\beta_0}{k} + l\xi \left(\Delta^{np} + \frac{t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}}{2} \right) = \\ &= -\frac{l\beta_0}{k} + l \left[\delta_k^{np} + \frac{v\gamma(\Delta^{np}) + L\beta(\Delta^{np} + 0)}{l} \cdot \frac{t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v}{2l} \beta(\Delta^{np} + 0) \left(\frac{t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}}{2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

где $t_1 + \Delta^n - \Delta^{np}$ находится из (23). Отсюда:

$$y_{A, \max} = -\frac{l\beta(\Delta^{np} + 0)}{k} + l\delta_k^{np} - \frac{v[\gamma(\Delta^{np})]^2}{2\beta(\Delta^{np} + 0)} - L\gamma(\Delta^{np}).$$

Аналогично находится минимальное значение $y_A(t)$:

$$y_{A, \min} = -\frac{l\beta_0}{k} - l\delta_K^{\text{л}} - \frac{v [\gamma(\Delta^{\text{пр}})]^2}{2\beta_0} + L\gamma(\Delta^{\text{пр}}).$$

Из формул, выражающих скачок $\beta(t)$ через скачок $\xi(t)$, легко найти максимальное и минимальное значения $\xi(t)$.

Отметим, что мы нашли автоколебания в виде периодических функций времени. Представляет интерес изучить поведение y_A как функции x_A .

Принтегрируем первое из уравнений системы (2), приняв, не нарушая общности $x_A(0) = 0$:

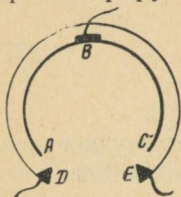


Рис. 2

$$x_A(t) = vt - \frac{v}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds.$$

Подставим в функцию $y_A(t)$ вместо t его выражение в виде

$$t = \frac{x_A}{v} + \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds.$$

Получим, разлагая по формуле Тейлора:

$$y_A = y_A\left(\frac{x_A}{v} + \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds\right) = y_A\left(\frac{x_A}{v}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds \cdot \dot{y}_A\left(\frac{x_A}{v}\right) + \dots$$

Так как все члены разложения, кроме первого, имеют третий и более высокий порядок малости относительно углов γ и β , то с принятой степенью точности

$$y_A = y_A\left(\frac{x_A}{v}\right).$$

Таким образом, y является периодической функцией x_A с периодом VT .

Покажем на примере электрозолотника, как вводятся рассматриваемые в предложенной модели параметры $\delta_H^{\text{л}}$, $\delta_K^{\text{л}}$, $\delta_{\text{СК}}^{\text{л}}$ (и аналогичные величины для правого поворота, рис. 2).

С принципиальной точки зрения электрозолотник состоит из кольца, связанного со штангой копира (так что поворот штанги вызывает поворот кольца), и внутреннего круга, связанного с поворотным механизмом передних колес. На кольце находятся токо-съемники D, E и F, а на круге — подковообразная контактная пластина ABC.

Очевидно, что алгебраическая сумма дуг AD и EC постоянна. Будем рассматривать эти дуги в пересчете на угол поворота штанги копира и обозначим их сумму через $2\delta_z$.

Назовем строго нейтральным такое положение золотника, когда дуга AD равна $\delta_z + \epsilon$, а дуга EC, соответственно, $\delta_z - \epsilon$. Естественно было бы положить $\epsilon = 0$, однако мы оставим ϵ (считая его малым по модулю числом по сравнению с δ_z , в том числе и нулем) для оценки влияния возможных конструктивных погрешностей автомата.

Обозначим $\delta_3^{np} = \delta_3 + \varepsilon$; $\delta_3^л = \delta_3 - \varepsilon$.

Введем в рассмотрение суммарный люфт $2\delta_{ш}$ в шарнирных соединениях — максимально возможное угловое перемещение штанги копира при неподвижном колесе, если бы кольцо и внутренний круг золотника были закреплены в строго нейтральном положении.

Автомат вождения должен быть сконструирован так, чтобы, если золотник зафиксировать в строго нейтральном положении, а люфт выбрать «наполовину», т. е. так, что штанга копира может быть повернута при неподвижном колесе как вправо, так и влево на $\delta_{ш}$, то должно выполняться равенство $\xi = 0$, что соответствует теоретическому закону $\beta = -k\varphi$.

Теперь нетрудно определить, при каком ξ должен возникнуть сигнал начала правого поворота — совмещение точек D и A. Для этого после полного выбора люфта вправо (т. е. на $\delta_{ш}$) кольцо должно повернуться вправо на угол δ_3^{np} (в пересчете на угол φ). Таким образом, в этот момент ξ должно быть равно $\delta_3^{np} + \delta_{ш}$, т. е.

$$\delta_n^{np} = \delta_3^{np} + \delta_{ш}.$$

Аналогично, для того, чтобы наступил сигнал окончания правого поворота, угол $\beta(t)$ должен измениться так, чтобы, во-первых, выбрался люфт влево (на $-\delta_{ш}$), и во-вторых, чтобы A и D снова совместились. Таким образом, в этот момент ξ должно быть равно $\delta_3^{np} - \delta_{ш}$, т. е.

$$\delta_{ск}^{np} = \delta_3^{np} - \delta_{ш}.$$

Совершенно так же устанавливаем, что

$$\delta_n^л = -\delta_3^л - \delta_{ш}; \quad \delta_{ск}^л = -\delta_3^л + \delta_{ш}.$$

Для того, чтобы понять смысл введения величин δ_k^{np} и $\delta_k^л$, необходимо проанализировать, как реально происходит поворот, который совершается хотя и очень быстро, но не скачком.

График реального правого поворота изображен на рис. 3 сплошной линией.

Для удобства математического исследования мы, во-первых, заменяем его ломаной (см. пунктирные линии). Таким образом, можно считать, что поворот начинается через Δ_1^{np} сек после выработки сигнала начала поворота, а заканчивается через Δ_2^{np} сек после выработки сигнала окончания поворота.

Во-вторых, мы считаем, что поворот происходит скачком в момент $t_{ск}^{np} + \Delta_2^{np}$ и, таким образом, время запаздывания Δ^{np} складывается из $\Delta_1^{np} + \Delta_2^{np}$, сложенного со средним (малым) временем

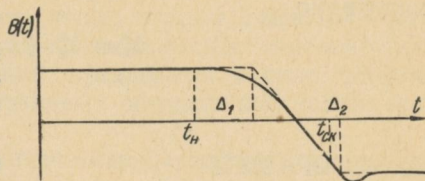


Рис. 3

самого поворота. Остается найти $\delta_k^{пр}$, т. е. значение ξ в момент $t_{ск}^{пр} + \Delta_2^{пр}$. Мы знаем, что

$$\xi(t_{ск}^{пр}) = \delta_3^{пр} - \delta_{ш}.$$

Правый поворот осуществляется с постоянной угловой скоростью $\dot{\beta} = -\epsilon_{пр}$. Поэтому, за время $\Delta_2^{пр}$ $\beta(t)$ уменьшается на $c_{пр}\Delta_2^{пр}$. Так как $\varphi(t)$ за это время практически не успевает измениться, то $\xi(t)$ уменьшается на $\frac{1}{k}c_{пр}\Delta_2^{пр}$. Таким образом,

$$\delta_k^{пр} = \xi(t_{ск}^{пр} + \Delta_2^{пр}) = \delta_3^{пр} - \delta_{ш} - \frac{1}{k}c_{пр}\Delta_2^{пр}.$$

Аналогично

$$\delta_k^л = \delta_3^л - \delta_{ш} - \frac{1}{k}c_л\Delta_2^л.$$

Поступила 14. IX 1975 г.

УДК 631.331.8:635.11

А. С. КАШУРКО, канд. техн. наук,
В. И. КРУТИНЬ, канд. физ.-мат. наук,
Л. Р. ПОДОШВА, В. М. СКОРОПАД

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАСТЕНИЙ САХАРНОЙ СВЕКЛЫ

Увеличение равномерности распределения растений сахарной свеклы дает возможность уменьшить затраты ручного труда на прореживание. Несмотря на актуальность этой проблемы, факторы, влияющие на равномерность распределения растений, в настоящее время мало изучены. Большинство исследований в этой области проведено и проводится в полевых условиях, связано с сезонностью и большими затратами времени и средств.

Наиболее рациональным методом исследования является математический. С его помощью можно исследовать распределения растений до и после прореживания для любых параметров. Основным методом исследования в настоящее время является моделирование процесса сева и прореживания на ЭВМ, например, [1—6].

Вывод аналитического выражения закона распределения интервалов между растениями при всевозможных значениях параметров высева представляет значительные трудности. Аналитическими методами была решена задача нахождения функции распределения растений при $0 \leq \xi \leq \frac{1}{6}$, $\xi \rightarrow \infty$, где $\xi = \frac{\sigma}{h}$ (h — шаг высева; σ — среднее квадратичное отклонение семени) [1]. Однако выражение для среднеквадратичного отклонения длины интервала между растениями при непрорастании i семян $\sigma_i = \sqrt{2(i+1)}\sigma$ найдено неточно, так как предполагается независимость интервалов, что при $0 \leq \xi \leq \frac{1}{6}$ не имеет места. На самом деле легко видеть, что при этом $\sigma_i = \sqrt{2}\sigma$ не зависит от количества непроросших семян.

Многими авторами на последовательность растений в рядке налагаются дополнительные ограничения без каких-либо оснований. Так, Полищук А. Н., исходя из «удобства использования для дальнейшего прореживания» в своей работе [7] рассматривает последовательность интервалов между растениями как поток событий, обладающий свойствами стационарности, отсутствия последствия и т. д. В. В. Василенко [8] принимает за модель распределения семян и растений пуассоновский поток с распределением семян по выражению:

$$P(\eta(x) = n) = \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x},$$

где $P(\eta(x) = n)$ — вероятность того, что на отрезке x имеется n штук семян. Отдельными авторами [6], [9] математическое описание закономерностей распределения растений предложено в виде сложных выражений, приведенных без достаточных обоснований, анализ которых в литературе отсутствует.

В данной работе найдены аналитические выражения для функции распределения интервалов между растениями до и после селективного прореживания при ограничениях, значительно меньших, чем в [1]. Для упрощения в расчетах принято, что высеваящий аппарат выбрасывает семена по одному через одинаковые интервалы, равные h . За счет наличия начальной скорости в момент выброса, семена при падении, соприкосновении с дном борозды и перекачивании по нему отклоняются от точек выброса по нормальному закону, т. е. если обозначить через y координату семени при точном высеве, то реальная координата $\bar{y}$ есть

$$\bar{y} = y + \tau, \quad (1)$$

где τ — случайная величина с плотностью вероятности

$$f_{\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Предполагаем, что

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Это позволяет применять полученные формулы в довольно широком диапазоне шагов выброса и средне-квадратичного отклонения, например, при $\sigma = 2$, $h = 6,5$; $9,5$; $12,5$ и т. д. В дальнейшем рассматривается сев только односторонними семенами.

Математическая постановка задачи и вывод основных соотношений. Учитывая (2), в дальнейшем будем предполагать, что случайная величина τ , входящая в соотношение (1), распределена по усеченному нормальному закону с плотностью

$$f_{\tau}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-h}^h e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt}, & x \in [-h, h] \\ 0, & x \notin [-h, h], \end{cases} \quad (3)$$

так как для практических приложений достаточно обычных «3-ех сигмовых» границ отклонения нормально-распределительной случайной величины от математического ожидания, что в свою очередь дает погрешность выведенных формул не более 0,001, т. е. 0,1% [10].

Задача о нахождении законов распределения интервалов между растениями до и после прореживания приводит к следующей математической постановке. Зафиксируем некоторое $h > 0$ и рассмотрим на полуоси $(0, \infty)$ (бесконечно длинный рядок) последовательность точек $h, 2h, 3h, \dots$. Рассмотрим далее последовательность случайных величин $\tau_k, k = 1, 2, 3, \dots$ с плотностями вероятностей

$$f_{\tau_k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-kh)^2}{2\sigma^2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{kh-h}^{kh+h} e^{-\frac{(t-kh)^2}{2\sigma^2}} dt, & x \in [kh-h, kh+h] \\ 0 & , x \notin [kh-h, kh+h] \end{cases} \quad (4)$$

Пусть ζ_k произвольная реализация случайной величины τ_k . Перенумеруем точки ζ_k в порядке неубывания. Назовем эту последовательность ζ_k исходной. Пусть $z_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$. Будем рассматривать z_k как реализации случайной величины z .

1. Требуется найти закон распределения случайной величины z (т. е. закон распределения интервалов между семенами в рядке). Рассмотрим следующее преобразование исходной последовательности точек ζ_k :

А. Для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$ точка ζ_k с вероятностью $p = 1 - q$ удаляется. Т. е. считаем, что событие соответствующее случайной величине τ_k с вероятностью $p = 1 - q$ не происходит (что соответствует прорастанию и непрорастанию семян). Рассмотрим полученную последовательность точек $\zeta_{n_i}, i = 1, 2, 3, \dots$.

Б. Из данной последовательности удаляются точки $\zeta_{n_i}, i = m_j + 1, 2, \dots, m_{j+1}; j = 0, 1, 2, \dots$ такие, что

$$\zeta_{n_{m_j+1}} < \zeta_{n_i} \leq \zeta_{n_{m_j+1}} + a, a > 0. \quad (5)$$

Причем $m_0 = 0$, и в случае $\zeta_{m_j+2} > \zeta_{n_{m_j+1}} + a$ считаем, что в соответствующий интервал не попадает ни одна точка ζ_{n_i} . Это преобразование соответствует следующей процедуре, находится, двигаясь от нуля вдоль полуоси $(0, \infty)$ первая точка (растение) из оставшихся после преобразования А (в нашем случае это ζ_{n_i}). Все точки с координатами ζ_{n_j} , такие, что $\zeta_{n_1} < \zeta_{n_i} \leq \zeta_{n_1} + a$ удаляются. Находим далее первую точку ζ_{n_k} такую, что $\zeta_{n_k} > \zeta_{n_1} + a$ и повторяем для этой точки процедуру, изложенную выше и т. д. (т. е. это соответствует селективному прореживанию всходов).

Перенумеруем точки, полученные после применения к исходной последовательности ζ_k преобразований А и Б в порядке неубывания $\bar{\zeta}_1 \leq \bar{\zeta}_2 \leq \bar{\zeta}_3 \leq \dots$.

2. Требуется найти закон распределения случайной величины Z , для которой $Z_k = \bar{\zeta}_{k+1} - \bar{\zeta}_k$, являются ее реализациями (т. е. закон распределения интервалов между растениями после селективного прожирования).

Найдем закон распределения случайной величины z .

Рассмотрим исходную последовательность точек ζ_n , $n = 1, 2, 3 \dots$. Пусть ζ_n и ζ_{n+1} — два произвольных члена этой последовательности.

Введем события:

$$\begin{aligned} C_1 &= \tau_n \geq \tau_{n-1}; \quad C_2 = \tau_n < \tau_{n-1}; \\ C_3 &= \tau_n > \tau_{n+1}; \quad C_4 = \tau_n \leq \tau_{n+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где случайная величина τ_k определена (4). Очевидно, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_3 \cap C_4 = \emptyset$, события $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$, образуют полную систему.

Из (4) следует, что

$$P(\tau_{n+i} \geq \tau_n) = 1, \quad i \geq 2. \quad (7)$$

Легко видеть, что

$$\tau_n = nh + \tau^{(n)}, \quad (8)$$

где $\tau^{(n)}$ — случайная величина с плотностью вероятности

$$f_{\tau^{(n)}}(x) = f_{\tau}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-h}^h e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt, & x \in [-h, h] \\ 0, & x \notin [-h, h] \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая, (7), $C_1 \cap C_3 = \{\tau_n \geq \tau_{n-1}, \tau_n > \tau_{n+1}\} = \{\tau_n > \tau_{n+1}\}$;

$$C_1 \cap C_4 = \{\tau_{n-1} \leq \tau_n \leq \tau_{n+1}\};$$

$$C_2 \cap C_3 = \{\tau_n < \tau_{n-1}, \tau_n > \tau_{n+1}\} = \emptyset,$$

$$C_2 \cap C_4 = \{\tau_n < \tau_{n-1}, \tau_n \leq \tau_{n+1}\} = \{\tau_n < \tau_{n-1}\}.$$

Обозначим

$$A_1 = \{\tau_{n-1} \leq \tau_n \leq \tau_{n+1}\}; \quad B_1 = \{\tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau_{n+2}\};$$

$$A_2 = \{\tau_{n-1} > \tau_n\}; \quad B_2 = \{\tau_n > \tau_{n+1}\};$$

$$A_3 = \{\tau_{n+1} < \tau_n\}; \quad B_3 = \{\tau_{n+2} < \tau_{n+1}\}.$$

Введем обозначение $\zeta_i \leftrightarrow \tau_j$, т. е. ζ_i есть реализация случайной величины τ_j , где ζ_i — есть i -й член исходной последовательности ζ_k . Тогда событие A_1 обозначает $\zeta_n \leftrightarrow \tau_n$,

$$A_2 : \zeta_n \leftrightarrow \tau_{n-1}; \quad A_3 : \zeta_n \leftrightarrow \tau_{n+1};$$

$$B_1 : \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+1}; \quad B_2 : \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_n; \quad B_3 : \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+2}.$$

Рассмотрим события, учитывая (7),

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1 \cap B_1 = \{\tau_{n-1} \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau_{n+2}\}; \\ A_1 \cap B_2 &= \{\tau_{n-1} \leq \tau_n \leq \tau_{n+1}, \tau_n > \tau_{n+1}\} = \emptyset; \\ D_2 &= A_1 \cap B_3 = \{\tau_{n-1} \leq \tau_n, \tau_{n+2} < \tau_{n+1}\}; \\ D_3 &= A_2 \cap B_1 = \{\tau_{n-1} > \tau_n, \tau_{n+1} \leq \tau_{n+2}\}; \\ A_2 \cap B_2 &= \{\tau_{n-1} > \tau_n, \tau_n > \tau_{n+1}\} = \emptyset; \\ D_4 &= A_2 \cap B_3 = \{\tau_{n-1} > \tau_n, \tau_{n+2} < \tau_{n+1}\}; \\ A_3 \cap B_1 &= \{\tau_{n+1} < \tau_n, \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau_{n+2}\} = \emptyset; \\ D_5 &= A_3 \cap B_2 = \{\tau_n > \tau_{n+1}\}; \\ A_3 \cap B_3 &= \{\tau_{n+1} < \tau_n, \tau_{n+2} < \tau_{n+1}\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Очевидно, что введенные таким образом события D_i , $1 \leq i \leq 5$, попарно несовместны и образуют полную систему. Заметим, что событие D_1 означает $\zeta_n \leftrightarrow \tau_n$, $\zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+1}$;

$$\begin{aligned} D_2 &: \zeta_n \leftrightarrow \tau_n, \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+2}; \\ D_3 &: \zeta_n \leftrightarrow \tau_{n-1}, \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+1}; \\ D_4 &: \zeta_n \leftrightarrow \tau_{n-1}, \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_{n+2}; \\ D_5 &: \zeta_n \leftrightarrow \tau_{n+1}, \zeta_{n+1} \leftrightarrow \tau_n. \end{aligned}$$

Таким образом, $\zeta_{n+1} - \zeta_n$ — есть реализация случайной величины $\tau_{n+1} - \tau_n$ при условии, что событие D_1 произошло; случайной величины $\tau_{n+2} - \tau_n$ при условии D_2 ;

$$\tau_{n+1} - \tau_{n-1} - D_3; \tau_{n+2} - \tau_{n-1} - D_4; \tau_n - \tau_{n+1} - D_5.$$

По формуле полной вероятности

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^5 (\psi(x)/D_i) P(D_i), \quad x \in (0, \infty), \quad (10)$$

где $\psi(x)$ искомая плотность вероятности случайной величины z .

$$\begin{aligned} &(\psi(x)/D_1) P(D_1) dx = (\psi_{\tau_{n+1}-\tau_n}(x)/D_1) P(D_1) dx = \\ &= \int_{nh-h}^{nh+h} f_{\tau_n}(y) f_{\tau_{n+1}}(y+x) \int_{-h+(n-1)h}^y f_{\tau_{n-1}}(z) dz \int_{y+x}^{h+(n+2)h} f_{\tau_{n+2}}(u) du dy dx \end{aligned}$$

Учитывая (8), (9), получаем

$$\begin{aligned} (\psi(x)/D_1) P(D_1) &= \int_{-h}^h f_{\tau}(y) f_{\tau}(y+x-h) \int_{-h}^{y+h} f_{\tau}(z) dz \times \\ &\times \int_{-h+y+x}^h f_{\tau}(u) du dy \end{aligned}$$

Аналогично

$$(\psi(x)/D_2) P(D_2) = \int_{-h}^h f_{\tau}(y) f_{\tau}(y+x-2h) \int_{-h}^{y+h} f_{\tau}(z) dz \int_{-h+y+x}^h f_{\tau}(u) du dy;$$

$$(\psi(x)/D_3) P(D_3) = \int_{-h}^h f_{\tau}(y) f_{\tau}(y+x-2h) \int_{y+x-h}^h f_{\tau}(z) dz \int_{-h}^{y-h} f_{\tau}(z) dz dy;$$

$$(\psi(x)/D_4) P(D_4) = \int_{-h}^h f_{\tau}(y) f_{\tau}(y+x-3h) \int_{-h}^{y-h} f_{\tau}(z) dz \int_{-h}^{z-h} f_{\tau}(u) du dy;$$

$$(\psi(x)/D_5) P(D_5) = \int_{-h}^h f_{\tau}(y) f_{\tau}(y+x+h) dy.$$

Учитывая (10), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \int_{-h}^h f_{\tau}(y) \left[f_{\tau}(y+x-h) \int_{-h}^{y+h} f_{\tau}(z) dz \int_{y+x-2h}^h f_{\tau}(u) du + \right. \\ & + \int_{-h}^{y-h} f_{\tau}(z) dz \int_{y+x-h}^h f_{\tau}(z) dz f_{\tau}(y+x-2h) + f_{\tau}(y+x-3h) \times \\ & \times \left. \int_{-h}^{y-h} f_{\tau}(z) dz \int_{-h}^{z-h} f_{\tau}(u) du + f_{\tau}(y+x+h) \right] dy \end{aligned} \quad (11)$$

Т. е. найдена плотность вероятности интервалов между семенами. Легко видеть, что далее стандартными методами, разработанными в [1], (если в качестве S_k взять z), находится плотность вероятности случайной величины, реализациями которой являются $\zeta_{n_{i+1}} - \zeta_{n_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где ζ_{n_i} определены в (5), т. е. плотность вероятности интервалов между растениями, поэтому подробно на этом вопросе здесь останавливаться не будем.

Найдем плотность вероятности $f(x)$ случайной величины Z . Для любой точки ζ_i исходной последовательности рассмотрим точку ζ_{k_i} из этой же последовательности такую, что

$$\zeta_{k_i-j} > \zeta_i + a, \quad j = 0, 1, \dots, k; \quad (12)$$

$$\zeta_{k_i-(k+1)} \leq \zeta_i + a, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Обозначим $V_{k_i} = \zeta_{k_i} - \zeta_i$, $V_{k_i} \leftrightarrow V_k$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — плотность вероятности случайной величины V_k и рассмотрим $\bar{\zeta}_n$, $\bar{\zeta}_{n+1}$ две произвольные точки последовательности $\bar{\zeta}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, получающейся из исходной после применения преобразований A и B . Ясно, что $\bar{\zeta}_n = \zeta_i$ для некоторого i , $\bar{\zeta}_{n+1} = \zeta_{k_i}$ с вероятностью того, что точки ζ_{k_i-j} , $j = 1, 2, 3, \dots, k$ были удалены при преобразовании A (что соответствует непрорастанию семян), а ζ_{k_i} нет. Т. е. реализация случайной величины $Z: Z_n = \bar{\zeta}_{n+1} - \bar{\zeta}_n$ с вероятностью $p^k q$ есть реализация случайной величины $V_k: V_{k_i} = \zeta_{k_i} - \zeta_i$. Поэтому, очевидно, что искомая плотность вероятности $f(x)$ случайной величины Z находится по формуле

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k q \varphi_k(x), \quad x \in (0, \infty). \quad (13)$$

Найдем плотность вероятности $f_k(x)$; $x \in (a, \infty)$ случайной величины $V_k - a$, тогда

$$\varphi_k(x) = f_k(x - a), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Зафиксируем l и рассмотрим ζ_l — некоторую реализацию τ_l . Отложим от ζ_l вдоль полуоси отрезок длины $a > 0$. Координаты конца отрезка длины a будет случайной величиной

$$\tau_l + a = lh + a + \tau^{(l)}(x) \equiv f_\tau(x). \quad (15)$$

Введем новую систему координат, поместив в точку $lh + a$. В новой системе координат

$$\tau_j = h(j - l) - a + \tau^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Обозначим

$$\tau_{l+m+k} = \xi_k, \quad k = -l - m + 1, \dots, -1, 0, \dots, \xi_a = \tau, \quad (17)$$

где $m = \left[\frac{a}{h} \right] + 1$, τ определено из (3).

Учитывая (16), получаем

$$\xi_k = x_2 + kh + \tau^{(k)}, \quad (18)$$

где $x_2 = mh - a$.

Положим

$$\alpha_k = \begin{cases} \xi_k, & \xi_{k-1} \leq \xi_k \leq \xi_{k+1} \\ \xi_{k-1}, & \xi_{k-1} > \xi_k \\ \xi_{k+1}, & \xi_{k+1} < \xi_k \end{cases}.$$

Найдем $f_{\alpha_k}(x)$ — плотность вероятности случайной величины α_k , $k = -l - m + 1, \dots, -1, 0, \dots$. Учитывая (18),

$$\alpha_k = \begin{cases} kh + \gamma + x_2, & \alpha < \gamma < \beta \\ kh + a + x_2, & \gamma < \alpha \\ kh + \beta + x_2, & \gamma > \beta, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\alpha = -h + \tau^{(k-1)}, \quad \beta = h + \tau^{(k+1)}, \quad \gamma = \tau^{(k)}, \quad \alpha \in (-2h, 0), \\ \beta \in (0, 2h), \quad \gamma \in (-h, h). \quad (20)$$

Определим случайную величину

$$\chi = \alpha_k - kh - x_2, \quad k = -l - m + 1, \dots, -1, 0, \dots \quad (21)$$

$F_\chi(x)$, $f_\chi(x)$ — функция распределения и плотность вероятности случайной величины χ .

$$F_\chi(x) = P(\chi < x) = P(\alpha < \gamma < \beta < x) + P(\alpha < \gamma < x < \beta) + \\ + P(\gamma < \alpha < x) + P(\beta < \gamma < x) + P(\beta < x < \gamma);$$

$$F_\chi(x) = \int_{-h}^x f_\gamma(y) dy \int_{-2h}^y f_\alpha(\eta) d\eta \int_x^{2h} f_\beta(z) dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x f_{\beta}(y) \int_{-h}^y f_{\gamma}(z) dz \int_{-2h}^z f_{\alpha}(\eta) d\eta dy + \int_{-2h}^x f_{\alpha}(y) dy \int_{-h}^y f_{\gamma}(z) dz + \\
& + \int_{-h}^x f_{\gamma}(y) dy \int_0^y f_{\beta}(z) dz + \int_0^x f_{\beta}(z) dz \int_x^h f_{\gamma}(y) dy,
\end{aligned}$$

где $f_{\alpha}(x)$, $f_{\beta}(x)$, $f_{\gamma}(x)$ — плотности вероятностей случайных величин α , β , γ соответственно. Учитывая (15) и (20), получаем

$$\begin{aligned}
f_{\chi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\chi}(x) = f_{\tau}(x+h) \int_{-h}^x f_{\tau}(z) dz + f_{\tau}(x-h) \int_x^h f_{\tau}(y) dy + \\
+ f_{\tau}(x) \int_{-2h}^x f_{\tau}(z+h) dz \int_x^{2h} f_{\tau}(z-h) dz.
\end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно

$$f_{\alpha_k}(x) = f_{\chi}(x - kh - x_2), \quad k = -l - m + 1, \dots, 0, 1, \dots \quad (23)$$

Рассмотрим события

$$A_1 = \{0 \leq \xi_a < x_2\}; \quad A_2 = \{-h \leq \xi_a < -x_1\};$$

$$A_3 = \{-x_1 \leq \xi_a < 0\}; \quad A_4 = \{x_2 \leq \xi_a \leq h\};$$

$$B_1 = \{\alpha_{-1} \leq \xi_a < \alpha_0\}; \quad B_2 = \{\alpha_0 \leq \xi_a\};$$

$$B_3 = \{\alpha_{-1} > \xi_a\};$$

A_i , $1 \leq i \leq 4$ и B_i , $1 \leq i \leq 3$ образуют полные системы событий, $x_1 = h - x_2$. По формуле полной вероятности

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^4 (f_k(x)/A_i) P(A_i); \quad (24)$$

$$(f_k(x)/A_1) P(A_1) = \sum_{j=1}^4 (f_k(x)/A_1^j) P(A_1^j), \quad (25)$$

где $A_1^j = A_1 \cap B_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$, т. е. A_1^1 — означает, что $\zeta_{k_l} \leftrightarrow \alpha_k$; $A_1^2: \zeta_{k_l} \leftrightarrow \alpha_{k+1}$; $A_1^3: \zeta_{k_l} \leftrightarrow \alpha_{k-1}$, где ζ_{k_l} было определено в (12),

$$\begin{aligned}
& (f_k(x)/A_1^1) P(A_1^1) = (f_{\alpha_k - \xi_a}(x)/A_1^1) P(A_1^1) = \\
& = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) f_{\alpha_k}(y+x) \int_{-x_1-h}^y f_{\alpha_{-1}}(z) dz \int_y^{x_2+h} f_{\alpha_0}(z) dz dy, \\
& (f_k(x)/A_1^3) P(A_1^3) = \\
& = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) f_{\alpha_{k-1}}(y+x) \int_y^{x_2} f_{\alpha_{-1}}(z) dz dy, \quad k = 1, 2, \dots \\
& (f_k(x)/A_1^2) P(A_1^2) = \\
& = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) f_{\alpha_{k+1}}(y+x) \int_{-x_1}^y f_{\alpha_0}(z) dz dy, \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (f_0(x)/A_1^1) P(A_1^1) = \\
 & = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) f_{a_0}(y+x) \int_{-x_1-h}^y f_{a_{-1}}(z) dz dy, \\
 & (f_0(x)/A_1^3) P(A_1^3) = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) f_{a_{-1}}(y+x) dy.
 \end{aligned}$$

Учитывая (25), получаем

$$(f_k/A_1) P(A_1) = \int_0^{x_2} f_{\xi_a}(y) \psi_k(y, x) dy, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}
 \psi_k(y, x) &= f_{a_k}(y+x) \int_{-x_1-h}^y f_{a_{-1}}(z) dz \int_y^{x_2+h} f_{a_0}(z) dz + \\
 &+ f_{a_{k+1}}(y+x) \int_{-x_1}^y f_{a_0}(z) dz + f_{a_{k-1}}(y+x) \int_y^{x_2} f_{a_{-1}}(z) dz, \quad k = 1, 2, \dots \\
 \psi_0(y, x) &= f_{a_0}(y+x) \int_{-x_1-h}^y f_{a_{-1}}(z) dz + \\
 &+ f_{a_1}(y+x) \int_{-x_1}^y f_{a_0}(z) dz + f_{a_{-1}}(y+x).
 \end{aligned}$$

Т. к. событие $A_2 = \{-h \leq \xi_a < -x_1\}$, то в этом случае ξ_a меняется на отрезке $[-h, x_2 - h]$. Введем новую систему координат с нулем в точке $(-h)$. В этой системе координат

$$A_2 = \{0 \leq \xi_a < x_2\}, \quad \xi_a = h + \tau. \quad (27)$$

Рассмотрим случайные величины (18). Мы находимся в ситуации, рассмотренной для события A_1 , причем $\xi_a = \tau$ заменяется на (27). Поэтому

$$(f_k(x)/A_2) P(A_2) = \int_0^{x_2} f_{\tau}(y-h) \psi_k(y, x) dy, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как

$$A_3 = \{-x_1 \leq \xi_a < 0\}, \quad A_4 = \{x_2 \leq \xi_a \leq h\},$$

то аналогично получаем

$$\begin{aligned}
 (f_k(x)/A_3) P(A_3) &= \int_{-x_1}^0 f_{\tau}(y) \psi_k(y, x) dy, \\
 (f_k(x)/A_4) P(A_4) &= \int_{-x_1}^0 f_{\tau}(y+h) \psi_k(y, x) dy.
 \end{aligned}$$

Учитывая (24), получаем

$$f_k(x) = \int_0^{x_2} (f_{\tau}(y) + f_{\tau}(y-h)) \psi_k(y, x) dy +$$

$$+ \int_{-x_1}^0 (f_{\tau}(y) + f_{\tau}(y+h)) \psi_k(y, x) dy. \quad (28)$$

Искомая плотность вероятности $f(x)$ восстанавливается из соотношений (13), (14), (22), (23), (28) и имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k q \left[\int_0^{x_2} (f_{\tau}(y) + f_{\tau}(y-h)) \psi_k(y, x-a) dy + \right. \\ \left. + \int_{-x_1}^0 (f_{\tau}(y) + f_{\tau}(y+h)) \psi_k(y, x-a) dy \right]. \quad (29)$$

ВЫВОДЫ

Аналитическое выражение плотности вероятностей интервалов между семенами дается формулой (11). Эта формула позволяет оценить равномерность распределения семян в борозде после сева, т. е. качество сева для данных параметров. Кроме того, пользуясь известными методами можно получить аналитическое выражение плотности вероятности интервалов между растениями.

Формула (29) дает выражение для плотности вероятности интервалов между растениями после селективного прореживания с произвольным вырезом, что дает возможность определить вероятность появления интервалов заданной длины.

Вероятность получения интервалов длины $\alpha \leq x \leq \beta$ для фиксированного выреза дается выражением:

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (30)$$

Эта формула удобна в использовании, так как для подсчета вероятности по формуле (30) в бесконечной сумме (29) остается на самом деле лишь конечное число слагаемых, зависящее от β , α . Действительно, как следует из (20), (22), (23) $f_{a_k}(x) = f_{\lambda}(x - kh) = 0$, при $x_2 = 0$, $x \notin [(k-2)h, (k+2)h]$. Заметим, что $\psi_k(y, x) = 0$, если

$$f_{a_k}(y+x) = f_{a_{k-1}}(y+x) = f_{a_{k+1}}(y+x) = 0,$$

т. е.

$$(y+x) \notin [(k-3)h, (k+1)h], \quad (y+x) \notin [(k-1)h, (k+3)h], \\ (y+x) \notin [(k-2)h, (k+2)h]$$

или

$$(y+x) \leq (k-3)h, \quad (y+x) \geq (k+3)h.$$

При $\alpha \leq x \leq \beta$, из формул (18), (29) следует, что для обращения в 0 $\psi_k(y, x-a)$; $y \in [-x_1, x_2]$ достаточно выполнения неравенств

$$(y+x-a) \leq x_2 + \beta - \alpha \leq h + \beta - \alpha \leq (k-3)h, \quad (31)$$

$$(y+x-a) \geq -x_1 + \alpha - a \geq (k+3)h. \quad (32)$$

Из (31) следует, что

$$k \geq \frac{4h + \beta - a}{h}. \quad (33)$$

Неравенство (32) дополнительных ограничений на полученные k не накладывает, так как не имеет решений при достаточно больших k . Т. е., например, при $\beta = 25$, $h = 6,5$, $a \geq 12$, получаем

$$k \geq \frac{4 \times 6,5 + 25 - 12}{6,5} = 6.$$

Поэтому в этом случае в формуле (29) нужно оставлять лишь 6 слагаемых при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Плотность вероятности $f(x)$ длины интервала между растениями после селективного прореживания и соответствующая функция распределения на каждом конечном отрезке (a, x) задается формулами

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{i=0}^{k-1} p^i q \left[\int_0^{x_2} (f_\tau(y) + f_\tau(y-h)) \psi_i(y, x-a) dy + \right. \\ & \left. + \int_{-x_1}^0 (f_\tau(y) + f_\tau(y+h)) \psi_i(y, x-a) dy \right], \\ k = & \left\lfloor \frac{4h + x - a}{h} + 0,5 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Формулы (11) и (29) также позволяют вычислить такие вероятностные характеристики распределения интервалов между семенами и растениями после селективного прореживания, как M , σ и коэффициент вариации.

Так, например, математическое ожидание длины интервала между растениями после селективного прореживания с вырезом a имеет вид $M = \int_0^\infty x f(x) dx$, где $f(x)$ определена соотношением (29). Из выше сказанного следует, что соотношения (29) и (11), дающие аналитические выражения для плотности вероятности интервалов между растениями после селективного прореживания и интервалов между семенами при посеве соответственно, применимы к широкому кругу законов, характеризующих отклонение семян в окрестности точки выброса, а именно для любой плотности вероятности $\varphi(x)$ случайной величины τ равной отклонению семени от точки выброса, такой, что

$$\begin{aligned} \varphi(x) & \neq 0, \quad x \in [-h, h], \\ \varphi(x) & = 0, \quad x \notin [-h, h], \quad 0 < h < \infty. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веверс Э. В. Теоретическое исследование закономерностей распределения растений сахарной свеклы. — «Тр. ЛатНИИМЭСХа», 1967, т. 1, с. 76—91.
2. Ахмеров Х. Х. Моделирование интервально-выборочного прореживания сахарной свеклы. — Сб. «Совершенствование конструкций и использования с/х машин». Уфа, Изд-во Ульяновского СХИ, 1975, с. 35—46.

3. Веверс Э. В., Кардашевский С. В. Статистическая модель процесса^а высева семян сахарной свеклы. — «Тракторы и сельхозмашины», 1963, № 9, с. 13—15.
4. Иофинов А. И., Ахмеров Х. Х. Моделирование процесса прореживания всходов на аналоговой вычислительной машине. — Сб. «Эксплуатация и ремонт машино-тракторного парка», Уфа, 1972, с. 21—40.
5. Кардашевский С. В. Высевающие устройства посевных машин. М., «Машиностроение», 1973, 175 с.
6. Терехов А. П. Цифровое моделирование механизированных процессов сельскохозяйственного производства. М., «Машиностроение», 1971, 105 с.
7. Полищук А. Н. Теоретическое и экспериментальное исследование механизированных средств прореживания с целью обеспечения качественного распределения растений сахарной свеклы. — Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1967. 20 с.
8. Василенко В. В. Исследование и совершенствование процесса прореживания всходов сахарной свеклы. — Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, Воронеж, 1968. с. 24.
9. Хангильдин Э. В. Выбор схемы прореживания всходов сахарной свеклы. — «Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства», 1973, № 4, с. 22—25.
10. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятности. М., «Наука», 1961. 421 с.

Поступила 15. XII 1975 г.

УДК 62—50

Н. И. ВАХНО, В. М. ГАВРИЛЯК

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА

Система дифференциальных уравнений Родрига—Гамильтона имеет [1] вид

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

где

$$2A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1(t) & -\omega_2(t) & -\omega_3(t) \\ \omega_1(t) & 0 & \omega_3(t) & -\omega_2(t) \\ \omega_2(t) & -\omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ \omega_3(t) & \omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega_i(t)$ — проекции некоторого вектора $\bar{\omega}(t)$ на оси ортогональной системы координат E . Пусть условия существования и единственности решения системы (1) выполнены.

1. Решения системы Родрига—Гамильтона с периодической матрицей $A(t)$. Рассмотрим структуру фундаментальной матрицы в предположении, что матрица $A(t)$ непрерывна (кусочно-непрерывна) и ω -периодична:

$$A(t + \omega) \equiv A(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad \omega > 0.$$

Лемма. Фундаментальная матрица решений системы (1) имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) & -x_1(t) & -x_2(t) & -x_3(t) \\ x_1(t) & x_0(t) & x_3(t) & -x_2(t) \\ x_2(t) & -x_3(t) & x_0(t) & x_1(t) \\ x_3(t) & x_2(t) & -x_1(t) & x_0(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $x^T(t) = (x_0(t)) \dots x_3(t)$ — решение системы (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$.

Действительно, матрица $X(t)$ удовлетворяет системе $\dot{X} = A(t)X$, что можно проверить непосредственно. Так как матрица $A(t)$ кососимметрическая, то система (1) имеет первый интеграл вида

$$\sum x_i^2(t) = \sum x_i^2(t_0) = c. \quad (3)$$

Наконец, матрица $X(t)$ неособая, так как

$$X(t)X^T(t) = cE. \quad (4)$$

Теорема. Для системы (1) с периодической матрицей $A(t)$ существует фундаментальная матрица решений вида

$$Z(t) = \exp(i\varphi t) R(t), \quad (5)$$

где $R(t)$ — непрерывная, ω — периодическая матрица, φ — некоторое число (вещественное).

Доказательство. Нормированная фундаментальная матрица решений системы (1) имеет вид

$$X^*(t) = c^{-1} X(t) X^T(t_0). \quad (6)$$

Действительно, из равенства (4) имеем $X^T(t) = cX^{-1}(t)$, или

$$X^{-1}(t) = c^{-1}X^T(t). \quad (7)$$

Откуда и получаем указанный вид нормированной фундаментальной матрицы. Матрица $X^*(t)$ унитарна. Действительно

$$X^*(t)X^{*T}(t) = c^{-2}X(t)X^T(t_0)X(t_0)X^T(t).$$

Учитывая соотношения (7), имеем

$$X^*(t)X^{*T}(t) = E. \quad (8)$$

Положим, не ограничивая общности, $t_0 = 0$. Следовательно, собственные значения ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) матрицы монодромии $X^*(\omega)$ лежат на окружности $|\rho| = 1$, а так как линейная однородная периодическая система (1) устойчива, то мультипликаторы ρ_i имеют, как легко показать, простые элементарные делители. Согласно теории Флоке [2] $X^*(t)$ можно представить в виде

$$X^*(t) = \Phi(t) \exp(Bt), \quad (9)$$

где B определяется из выражения

$$B = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega).$$

А так как $LnX\omega$ и $X\omega$ имеют клетки Жордана одинаковых порядков [2], то существует некоторая невырожденная матрица S такая, что

$$SBS^{-1} = \text{diag} (\mu_1 \dots \mu_4).$$

Следовательно, матрица $X^*(t)$ принимает вид $X^*(t) = \Phi(t) S^{-1} \text{diag} \times \times (e^{\mu_1 t} \dots e^{\mu_4 t}) S$, или, вводя обозначения $Y(t) = X^*(t) S^{-1}$, $P(t) = = \Phi(t) S^{-1}$, получаем фундаментальную матрицу

$$Y(t) = P(t) \text{diag} (e^{\mu_1 t} \dots e^{\mu_4 t}). \quad (10)$$

Так как собственные значения μ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) матрицы B связаны с мультипликаторами ρ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) соотношениями

$$\mu_j = \frac{1}{\omega} [\ln |\rho_j| + i (\arg \rho_j + 2k\pi)], \quad (11)$$

где k подбирается надлежащим образом [2], то, учитывая $|\rho_j| = 1$, получаем $\mu_j = i\varphi_j$, где

$$\varphi_j = \frac{1}{\omega} (\arg \rho_j + 2k\pi). \quad (12)$$

Следовательно, фундаментальная матрица приобретает вид

$$Y(t) = P(t) \text{diag} (e^{i\varphi_1 t} \dots e^{i\varphi_4 t}). \quad (13)$$

Рассмотрим j -й столбец матрицы $Y(t)$ $y_j(t) = p_j(t) \exp(i\varphi_j t)$. Здесь $p_j(t)$ — j -й столбец матрицы $P(t)$. Очевидно, $y_j(t)$ является решением системы (1) с начальными условиями $y_j(t_0) = P_j(t_0) \exp(i\varphi_j t_0)$. Опуская индекс j и учитывая закон образования матрицы $X(t)$, получаем

$$Z(t) = R(t) \exp(i\varphi t), \quad (14)$$

где $R(t)$ имеет структуру матрицы $X(t)$ и $R(t + \omega) \equiv R(t)$. Очевидно, что матрица $Z(t)$ фундаментальная для системы (1). *Замечание.* Для системы уравнений Родрига—Гамильтона можно показать эквивалентность следующих утверждений

1. $\exists k$ такое, что $\rho_k = 1$.

2. $\forall k \rho_k = 1$. 3. $x^\omega = x^0$, где $x^0 = x(t_0)$, $x^\omega = x(\omega + t_0)$. Положим, не ограничивая общности, $t_0 = 0$.

Действительно, рассмотрим матрицу монодромии $X^*(\omega)$. Имеем

$$X^*(\omega) = c^{-1} X(\omega) X^T(t_0) = c^{-1} \begin{pmatrix} d & d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & d & -d_3 & d_2 \\ -d_2 & d_3 & d & -d_1 \\ -d_3 & -d_2 & d_1 & d \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $d = \sum x_i^\omega x_i^0$. Величину ρ определим из уравнения $L \triangleq \det \times \times [(X^*(\omega) - \rho E)(X^*(\omega) - \rho E)^T] = 0$. Учитывая (15), получаем $L = = \det [(1 + \rho^2)E - 2\rho c^{-1} \text{diag} (d \dots d)] = 0$. Окончательное уравнение для определения ρ имеет вид $\rho^2 - 2\rho dc^{-1} + 1 = 0$. Откуда

$$\rho_i = c^{-1} (d \pm \sqrt{d^2 - c^2}), \quad (16)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Покажем $1. \Rightarrow 2.$ Пусть $\exists k$ такое, что $\rho_k = 1$. Тогда из (16) имеем $d = c$ и $\rho_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$. $2. \Rightarrow 3.$ Пусть $\forall_k \rho_k = 1$. Тогда

$$\sum x_i^{\omega} x_i^0 = d = c.$$

Согласно (3)

$$U = \sum (x_i^{\omega})^2 = c, \quad V = \sum (x_i^0)^2 = c.$$

Откуда из равенства $U - 2d + V = 0$ непосредственно следует

$$x_i^{\omega} = x_i^0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

$3. \Rightarrow 2.$ Пусть $x_i^{\omega} = x_i^0$. Тогда согласно лемме имеем

$$d = \sum x_i^{\omega} x_i^0 = \sum (x_i^0)^2 = c$$

и, следовательно, из (16)

$$\rho_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Следствие. Рассмотрим матрицу $A(t)$ вида

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -s(t) & 0 & 0 \\ s(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s(t) \\ 0 & 0 & -s(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $s(t) = 2a \cos vt$.

Тогда система (1) допускает периодическое решение. Действительно, запишем решение с помощью матрицанта

$$x(\omega) = \left[E + R \int_0^{\omega} \cos vt dt + \dots \right] x_0,$$

где

$$R = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega = \frac{2\pi}{v}.$$

Так как

$$\int_0^{\omega} \cos vt \int_0^t \cos vt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} \cos vt_n dt_n \dots dt = 0,$$

то $x(\omega) = x(0)$ и, следовательно, в силу замечания, $\rho_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, 4$. Значит $\arg \rho_i = 0$. В силу соотношений (12) $\varphi_j = \frac{2\pi k}{\omega}$, где k выбирается надлежащим образом [2]. Тогда из (14) получаем

$$Z(t) = \exp(i\varphi t) R(t) \text{ и } Z(t + \omega) \equiv Z(t).$$

2. О точности определения параметров Родрига—Гамильтона для некоторых видов исходной информации. В ряде работ рассматривались вопросы численного интегрирования системы (1) [4, 3]. При этом в качестве исходной информации о матрице $A(t)$ рассматривались выражения вида

$$\gamma_i(t) = \int_{t_0}^t \omega_i(t) dt. \quad (17)$$

В работе [5] был поставлен вопрос о влиянии на определение вектора $x(t)$ так называемой «квантованной» информации о величине $\omega(t)$ и было проведено исследование применительно к уравнениям Пуассона. В настоящей работе рассматривается влияние «квантованной» информации, а также влияние других неточностей в определении матрицы $A(t)$ на решение уравнений Родрига—Гамильтона.

Рассмотрим случай, когда информация $\gamma_i(t)$ выдается в те моменты времени, когда модуль приращения сигнала достигает заранее заданной величины ε . Эти моменты времени $\tau_{i,j}$ определяются согласно [5] из равенства

$$\left| \int_{\tau_{i,j-1}}^{\tau_{i,j}} \omega_i(t) dt \right| = \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2 \dots N_i. \quad (18)$$

Это так называемая «квантованная» информация [5]. Если теперь вектор $x(t)$ определять в моменты τ_{ij} по квантованной информации $\gamma_i(t)$, то, вследствие некоммутативности конечных поворотов [1], будет допущена определенная ошибка. Оценим ее величину. Рассмотрим решение системы (1) на отрезке $[a, b]$. Множество $\{\tau_{i,j}\}$ определяет некоторое τ -разбиение отрезка $[a, b]$. Пусть множество $\{t_i\}$ есть некоторое упорядоченное разбиение отрезка $[a, b]$, совпадающее с τ -разбиением и такое, что

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_N = b.$$

Таким образом, на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ в момент t_{i+1} приходит один или несколько импульсов, соответствующих приращению сигнала на заранее заданную величину ε . Пусть с j -го канала приходит μ_j ($j = 1, 2, 3$) импульсов. Очевидно, $\mu_j = \{0, 1\}$. Заменим матрицу $A(t)$ кусочно-постоянной $A_h(t) = \bar{A}_k$, $t_k < t \leq t_{k+1}$, где элементами матрицы $\bar{A}_k$ являются величины

$$\omega_l = \frac{\varepsilon}{h_k} \mu_l(t_{k+1}); \quad h_k = t_{k+1} - t_k. \quad (19)$$

Обозначим через $x_h = x_h(t)$ непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую в точках непрерывности матриц $A_h(t)$ дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_h = A_h(t) x_h, \quad (20)$$

где $x_h(t_0) = x_0$; $t_0 \leq t \leq t_N$. Обобщенное решение $x_h(t)$, учитывающее непрерывность $x_h(t)$, равно

$$x_h(t) = e^{(t-t_k)\bar{A}_k} e^{h_k-1\bar{A}_{k-1}} \dots e^{h_0\bar{A}_0}, \quad (21)$$

Замечание. Матрицы $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k$ некоммутативны и поэтому нельзя применять правило перемножения экспоненциалов.

Назовем погрешностью квантования выражение $s(t_k) = \|x_h(t_k) - x(t_k)\|$. Получим оценку $s(t_N)$. Из дифференциального уравнения (1), (20) имеем

$$\dot{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$x_h(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A_h(\tau) x_h(\tau) d\tau.$$

Откуда

$$\begin{aligned} x_h(t) - x(t) &= \int_{t_0}^t [A_h(t) - A(t)] x(t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^t A_h(t) [x_h(t) - x(t)] dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая соотношение

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} [Bx] dt = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} Bx dt + \int_{t_0}^t B \frac{d}{dt} x dt$$

и принимая

$$B = \int_{t_0}^t [A_h - A] dt,$$

согласно (20) получаем

$$\begin{aligned} x_h(t) - x(t) &= \left\{ \int_{t_0}^t [A_h - A] dt \right\} x(t) - \\ &- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} [A_h(\tau) - A(\tau)] A(t) x(t) d\tau dt + \int_{t_0}^t A_h(x_h - x) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Будем находить норму матрицы

$$R(t) = \int_{t_0}^t [A_h - A] dt$$

согласно зависимости

$$\|R(t)\| = \lambda_{\max}^{1/2}(RR^T).$$

Учитывая (1) и (19), а также закон образования элементов матриц $A(t)$ и $A_h(t)$ имеем

$$d_i = \left| \int_{t_0}^t \omega_i(t) dt - \int_{t_0}^t \bar{\omega}_i dt \right| \leq \begin{cases} \varepsilon, & t \neq t_k \\ (1 - \mu_i) \varepsilon, & t = t_k. \end{cases} \quad (24)$$

С другой стороны, учитывая структуру матриц $A(t)$ и $A_h(t)$, получаем $RR^T = \frac{1}{4} \sum d_i^2 E$, откуда

$$\|R(t)\|^2 = \frac{1}{4} \sum d_i^2 \leq \begin{cases} \frac{3}{4} \varepsilon^2, & t \neq t_k \\ \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Sigma (1 - \mu_i)^2, & t = t_k. \end{cases}$$

Так как в момент времени t_k приходит хотя бы один импульс, то

$$\Sigma (1 - \mu_i)^2 \leq 2,$$

и, следовательно,

$$\|R(t)\| \leq \begin{cases} \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} & t \neq t_k \\ \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} & t = t_k. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда, учитывая лемму и соотношение (25), получаем

$$s(t_N) \leq \frac{\varepsilon c}{2} \left\{ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{t_0}^{t_N} (\sum \omega_i^2(t))^{1/2} dt \right\} + \int_{t_0}^t \|A_h(t)\| s(t) dt.$$

Согласно лемме Гронуола — Белмана [2]

$$s(t_N) \leq \frac{\varepsilon c}{2} \left\{ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{t_0}^{t_N} (\sum \omega_i^2(t))^{1/2} dt \right\} \exp \left(\int_{t_0}^{t_N} \|A_h(t)\| dt \right).$$

Но

$$\|A_h(t_N)\| = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_N} \left(\sum \omega_i^2 \right)^{1/2} dt = \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon}{2h_k} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i(t_k) \right)^{1/2} h_k \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} \varepsilon N.$$

Окончательно

$$s(t_N) \leq \frac{c\varepsilon}{2} \left[\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{t_0}^{t_N} (\sum \omega_i^2(t))^{1/2} dt \right]^{1/2} \sqrt{3} \varepsilon N, \quad (26)$$

$$\vartheta = \|x_0\|.$$

Рассмотрим влияние неортогональности осей чувствительности датчиков, определяющих $\omega(t)$, на решение системы (1). Пусть проекции вектора $\omega(t)$ на неортогональные оси $E' = \{e'_i, i = 1, 2, 3\}$ есть $\{\omega'_i, i = 1, 2, 3\}$, а проекции на ортогональные оси $E = \{e_i, i = 1, 2, 3\}$ есть $\{\omega_i, i = 1, 2, 3\}$. Тогда, если Δ есть матрица перехода от системы координат E' к E , то $\omega_E = \Delta \omega_{E'}$. Матрица Δ , вообще говоря, есть $\Delta(t)$. Система дифференциальных уравнений Родрига — Гамильтона получена [1] в предположении, что $\omega_i(t)$ — проекции вектора $\omega(t)$ на ортогональные оси E . В случае, когда вектор $\omega(t)$ проектируется на оси E' , а структура матрицы $A(t)$ не изменяется, естественно, что параметры Родрига — Гамильтона определяются с некоторой ошибкой $y(t)$. Найдем величину этой ошибки. Рассмотрим системы (1) и (26).

$$\dot{x}^* = A^*(t) x^*, \quad x(t_0) = x_0,$$

где элементами матриц A и A^* являются, соответственно, ω и ω' . Пусть $y(t) = x(t) - x^*(t)$. Вектор $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{y} = A(t) y + [A(t) - A^*(t)] x^*(t), \quad y(t_0) = 0. \quad (27)$$

Общее решение системы (27) запишем в виде

$$y(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^T(\tau) [A(\tau) - A^*(\tau)] x^*(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Здесь $X(t)$ нормированная фундаментальная матрица системы (1). Элементами матрицы $A - A^*$ являются, как легко видеть, выражения $\alpha_k = \sum_i \omega_i' \Delta_{ki} - \omega_k'$. Оценим норму $y(t)$:

$$\|y(t)\| \leq c \int_{t_0}^t \|A(t) - A^*(t)\| dt.$$

Имеем

$$\|A(t) - A^*(t)\|^2 = \frac{1}{4} \sum_k \alpha_k^2.$$

Или

$$\|A - A^*\|^2 = \frac{1}{4} \sum_k \left\{ \sum_i (\Delta_{ki} - \delta_{ki}) \omega_i' \right\}^2 = \frac{1}{4} \|\Delta_\delta \omega'\|^2,$$

где матрица Δ_δ имеет вид $\Delta_\delta = \Delta - E$, а δ_{ik} — символ Кронекера. Так как $\|\Delta_\delta \omega'\| \leq \|\Delta_\delta\| \|\omega'\|$, то окончательно

$$\|y(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|\Delta_\delta\| \left\{ \sum_i \omega_i'^2 \right\}^{1/2} dt.$$

В случае $\Delta = \text{const}$ предыдущая оценка упрощается, а именно:

$$\|y(t)\| \leq \|\Delta_\delta\| \int_{t_0}^t \left(\sum_i \omega_i'^2(t) \right)^{1/2} dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз. 1961. 824 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967. 472 с.
3. Ткаченко А. И. О «реверсивных» методах интегрирования систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — «Укр. мат. журн.», 1973, т. 25, № 6, с. 17—21.
4. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука» 1973. 319 с.
5. Боданский Е. Д. Об ошибках определения ориентации с помощью идеального интегрирующего трехкомпонентного датчика угловой скорости и цифрового дифференциального анализатора. — «Изв. АН СССР, МТТ», 1974, № 4, с. 3—15.
6. Соколов Н. А., Ткаченко А. И. Интегрирование некоторых кинематических уравнений с использованием дискретной информации. — «Автономные системы управления». Ин-т кибернетики АН УССР, 1973, Киев, с. 3—28.

Поступила 5.X 1975 г.