жно числителя и знаменателя помножать на 10. и пр. На пр.

$$\sqrt{0,5}=\sqrt{0,50}=\frac{\sqrt{50}}{10},\ \sqrt{0,005}=\sqrt{,0,0050}=\frac{\sqrt{50}}{100} \text{ и пр.}$$

2. Извлеченіе кубичнаго корня изъ дроби, производится посредствомъ извлеченій сихъ корней изъ числителя и знаменателя. Но для сокращенія, числитель и знаменатель данной дроби, помножаются на квадратъ знаменателя, или на 10 и 100, когда дробь десятичная. Такъ

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5.49}{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{7},$$

$$\sqrt[3]{0,5}=\sqrt[3]{0,500}=\frac{\sqrt[3]{500}}{10}$$

$$\sqrt[3]{0,73}=\sqrt[3]{0,730}=\frac{\sqrt[3]{730}}{70}$$

и пр.

ОТДѢЛЕНІЕ II.

Вычисленія приближенныя.

§ 107.

Ежели встрѣтится дробь, которой числитель и знаменатель суть числа многосложныя и которыя не сокращаются, то ее можно превращать въ простѣйшую приближенную, посредствомъ дробей называемыхъ *непрерывными*. Дроби сіи составляются *чрезъ раздѣленіе числителя и знаменателя данной дроби на ея числителя*. Возьмемъ для примѣра дробь $\frac{95}{161}$, то на основаніи установленнаго правила, получимъ

$$\frac{95}{161}=\frac{1}{1+\frac{66}{95}}$$

потомъ же найдемъ, что

$$\frac{66}{95}=\frac{1}{1+\frac{29}{66}},\ \frac{29}{66}=\frac{1}{2+\frac{8}{29}},\ \frac{8}{29}=\frac{1}{3+\frac{5}{8}},\ \frac{5}{8}=\frac{1}{1+\frac{3}{5}};$$

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}},\ \frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}:$$

посему $\frac{95}{161}$ можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

гдѣ каждая дробь есть часть знаменателя предъидущей: сія то связь и называется дробью *непрерывною*. Составленіе такихъ дробей совершенно сходно съ нахожденіемъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ: если бы пожелали найти сей дѣлитель для 95 и 161, то дѣйствіе надлежало бы расположить въ такомъ видѣ:

161	95	66	29	8	5	3	2	1
	1	1	2	3	1	1	1	2

Послѣ сего надобно только составить дроби, коихъ числители суть единицы, а знаменатели частныя 1, 1, 2 и пр, и соединить ихъ такъ, чтобъ каждая изъ нихъ была частью знаменателя предъидущей. Притомъ, поелику для составленія непрерывной дроби надобно знать знаменателей частныхъ дробей, то весьма часто дроби сіи изображаютъ рядами однѣхъ знаменателей, имянно:

$$\frac{95}{161} = (1, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2.)$$

т. е. первая единица въ сей строкѣ означаетъ, что для перваго приближенія, должно взять $\frac{1}{1}$; вторая 1,—что для втораго приближенія должно взять $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$, третій знакъ 2, — что для третьяго приближенія нужно взять дробь: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ и т. д.

§ 108.

Теперь посмотримъ, какимъ образомъ употребляются непрерывныя дроби для приближеннаго сокращенія дробей. При разложеніи $\frac{95}{161}$ найдено сперва, что

$$\frac{95}{161}=\frac{1}{1+\frac{66}{95}};$$

а какъ дробь увеличивается, когда уменьшается знаменатель;, то, отбросивъ $\frac{66}{95}$ получимъ дробь $\frac{1}{1}$ или 1, которая будетъ болѣе данной. Потомъ изъ

$$\frac{66}{95}=\frac{1}{1\frac{26}{66}}$$

слѣдуетъ, что

$$\frac{95}{161}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{29}{66}}}$$

Ежели изъ сего выраженія отбросимъ $\frac{29}{66}$, то увеличимъ предъидущую дробь; а потому вышедшая отъ сюда дробь

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}$$

будетъ менѣе $\frac{95}{161}$; слѣд. видимъ, что $\frac{95}{161}$ заключается между 1 и $\frac{1}{2}$. Далѣе: поелику $\frac{29}{66}=\frac{1}{2+\frac{8}{29}}$, слѣдовательн.

$$\frac{91}{161}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{8}{29.}}}}$$

Когда здѣсь опустимъ $\frac{2}{29}$, тогда третья дробь $\frac{1}{2}$ увеличится, вторая $\frac{1}{1}$ уменьшится; а потому непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5}$$

сдѣлается болѣе данной; такъ что $\frac{95}{161}$ будетъ заключатся между $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$. Но если изъ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{8}}}}}$$

оставимъ $\frac{5}{8}$, то увеличимъ $\frac{1}{3}$, уменьшимъ $\frac{1}{2}$, увеличимъ $\frac{1}{1}$, и получимъ непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}=\frac{10}{17}$$

меньшую данной $\frac{95}{161}$; слѣд. $\frac{95}{161}$ заключается между $\frac{3}{5}$ и $\frac{10}{17}$. И такъ посредствомъ непрерывной строки можно находить дроби, болѣе и болѣе приближяющія къ данной. При томъ видимъ, *что взявъ, изъ цѣлой непрерывной строки, нечетное число членовъ, получимъ дробь большую данной; четное же число членовъ даетъ дробь меньшую данной.*

§ 109.

Дроби, полученныя изъ постепеннаго обращенія непрерывной строки, вообще называются *сближающимися*, а каждая изъ нихъ — *сближенною* или *приближенною*. Дробь, изъ которой произошла непрерывная строка, а изъ сей составлены сближающіяся, называется *предѣломъ приближенія* или *сближенія*.

Изъ хода обращенія непрерывной строки въ сближающіяся видѣли, что каждая приближенная дробь *нечетнаго* порядка больше и предѣла приближенія, и приближенной дроби *четнаго* порядка; и обратно, каждая дробь четнаго порядка, всегда меньше и предѣла, и дроби нечетнаго порядка, такъ что если возьмемъ строку приближающихся дробей:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{16},\ \frac{17}{39},\ \frac{24}{55},\ \frac{65}{149}.$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

(изъ коихъ послѣдняя $\frac{65}{149}$ есть предѣлъ приближенія, а всѣ прочія — приближающіяся), то получимъ

$$\textit{Нечет. поряд.}\quad \frac{1}{2},\ \frac{7}{16},\ \frac{24}{55} > \frac{65}{149}$$

$$\textit{Четн. поряд.}\quad \frac{3}{7},\ \frac{17}{39} < \frac{65}{149}$$

Или подробнѣе говоря, если возьмемъ произвольную пару приближенныхъ дробей, идущихъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, то предѣлъ приближенія всегда будетъ находится между ими; и одной изъ нихъ будетъ больше, а другой* меньше извѣстною разностію; и имянно:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Неч. пор.} & & & & \textit{Чет. пор.} \\ \frac{1}{2} & > & \frac{65}{149} & > & \frac{3}{7} \\ \frac{7}{16} & > & \frac{65}{149} & > & \frac{3}{7} \\ \frac{7}{16} & > & \frac{65}{149} & > & \frac{17}{39} \\ \frac{24}{55} & > & \frac{65}{149} & > & \frac{17}{39} \\ \frac{65}{149} & = & \frac{65}{149} & = & \frac{65}{149} \end{array}$$

Повторимъ опять вышесказанное: поелику предѣлъ приближенія $\frac{65}{149}$, заключаясь, какъ видно изъ цѣлой колоны, между-каждою парою приближающихся, больше четнаго и меньше нечетнаго порядка дроби, извѣстною разностію; то и слѣдуетъ, что *разность между предѣломъ и одною изъ приближенныхъ дробей,* *всегда меньше разности, какая существуетъ между послѣднею и другою дробью, — въ послѣдовательномъ порядкѣ выше или ниже идущею.* Для ясности возьмемъ цѣлыя числа 5, 6 и 7; число 6, заключаясь между 5 и 7, больше 5 и меньше 7; и разность между 6 и 5, также между 7 и 6 есть единица, тогда какъ между 5 и 7 разность = 2. Такъ же точно понимать должно и въ предложенныхъ дробяхъ; поелику сущность дѣла для тѣхъ и другихъ общая, а отличіе разности цѣлыхъ чиселъ отъ дробей въ томъ только, что у первыхъ она выходитъ цѣлымъ числомъ, а у вторыхъ — дробью.

§ 110.

Дабы получить общее правило для разности каждой пары приближенныхъ дробей, то возьмемъ ее на самомъ дѣлѣ, на прим., въ дробяхъ: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{17}{39}, \frac{24}{55}$, предѣлъ коихъ $\frac{65}{149}$.

Неч. пор. *Чет. пор.*

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{2.7}$$

$$\frac{7}{16} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7.16}$$

$$\frac{7}{16} - \frac{17}{39} = \frac{1}{16.39}$$

$$\frac{24}{55} - \frac{17}{39} = \frac{1}{39.55}$$

$$\frac{65}{149} - \frac{65}{149} = 0.$$

Откуда выводимъ, что *разность каждой пары приближенныхъ дробей,* идущихъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, *всегда равна единицѣ, раздѣленной на произведенie знаменателей.* Посему *разность между предѣломъ* и какою либо изъ данныхъ приближенныхъ дробей, *всегда меньше единицы, раздѣленной на произведенie знаменателя данной дроби и знаменателя другой,* — за нею выше или ниже *непосредственно слѣдующей.*

Такъ, имѣя двѣ сряду дроби, всегда можемъ найти разность, меньше которой отличаются они отъ своего предѣла. На пр., разность приближенныхъ дробей $\frac{17}{39}$ и $\frac{24}{55}$, которою они отличаются отъ своего предѣла, есть меньше чѣмъ $\frac{1}{39.55}$; и притомъ дробь $\frac{17}{39}$ больше, а $\frac{24}{55}$ меньше *оною.*

Но не всегда же случается имѣть сряду двѣ такiя дроби, чаще дается одна приближенная; почему здѣсь, предлагается общiй вопросъ: *какъ найти разность,* (если неточную, то хотя въ крайней степени близкую), *данной приближенной дроби, которою она отличается отъ своего предѣла.*

Для рѣшенiя сего вопроса, возьмемъ прежнюю разность

$$p = \frac{1}{39.55}$$

двухъ приближенныхъ дробей $\frac{17}{39}$ и $\frac{24}{55}$, и будемъ разсуждать такъ: если эту разность *нѣсколько* уменьшимъ, тогда, очевидно, *новая* разность будетъ еще *ближе подходитъ къ искомой,* а иногда можетъ сдѣлатся и совершенно равною искомой, потому что послѣдняя всегда меньше $\frac{1}{39.55}$; если же на оборотъ увеличимъ, тогда будемъ знать, что искомая разность, *всегда меньше увеличенной*; а для насъ и этого довольно: въ приближенномъ исчисленіи, довольно знать и приближенную разность. И такъ, въ выраженіи

$$p = \frac{1}{39.55},$$

измѣнивъ производитель 55, знаменателя 39×55, на 39, а 39 на 55, получимъ *два* вывода разностей:

$$p = \frac{1}{39^2},$$

$$p' = \frac{1}{55^2},$$

и $\frac{1}{39^2} > \frac{1}{39.55} > \frac{1}{55^2}$; поелику въ первомъ случаѣ, знаменатель увеличинъ, а во второмъ — уменьшенъ; и такъ $\frac{1}{39^2}$ и $\frac{1}{55^2}$ суть предѣлы, между коими заключается разность $\frac{1}{39.55}$, и до которыхъ можетъ только или увеличивается, или уменьшатся; слѣд., вмѣсто $\frac{1}{39.55}$, для приближенныхъ знаній о разности, можно взять или $\frac{1}{39^2}$, или $\frac{1}{55^2}$; но разность $\frac{1}{39^2}$ соотвѣтствуетъ дроби $\frac{17}{29}$, $\frac{1}{55^2}$ — дроби $\frac{29}{55}$; по сему вообще: *единица, раздѣленная на квадратъ знаменателя, данной приближенной дроби*, показываетъ ту разность, *которая или равна, или больше разности дѣйствитель-*

но существующей, между данною дробью и предѣломъ приближенія. При томъ добавимъ: если данная дробь нечетнаго порядка, тогда выведенная разность будетъ крайнею степенью *избытка* дроби надъ предѣломъ; когда же четнаго, то—крайнѣю степенью *недостатка* противъ предѣла. И такъ приближенныхъ дробѣй

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{8}\ \left(\text{предѣлъ ихъ } \frac{29}{77}\right)$$

разности суть

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{8^2}$$

или

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{64}.$$

§ 111.

Изъ § 108 видѣли, какъ простая дробь, или иначе, предѣлъ приближенія, превращается въ непрерывную строку; и обратно, какъ изъ непрерывной строки получается приближенная; но посмотримъ, нѣтъ ли легчайшаго и удобнѣйшаго средства находить приближенныя дроби.

Для этого возмемъ общую строку непрерывныхъ дробей

$$\frac{a}{1}+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots\ldots}}}}$$

Здѣсь каждая изъ частныхъ дробей $\frac{a}{1}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\ldots,$ цѣлой строки, называется *членомъ* оной. Первый членъ строки есть число $\frac{a}{1}$ и вмѣстѣ есть первая приближенная дробь; вторая — будетъ $a + \frac{1}{b}$, или, обращая цѣлое число въ смѣшанную дробь, получимъ

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b} \ldots\ldots (1)$$

Чтобъ имѣть третью приближенную дробь, въ строкѣ означенную чрезъ $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, то стоитъ только подставить во второй, $b + \frac{1}{c}$ вмѣсто b; ибо, означивъ $b + \frac{1}{c}$ чрезъ b', получимъ

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a + \frac{1}{b'} = \frac{ab'+1}{b'} \ldots\ldots\ldots (2)$$

выраженіе, отличающееся отъ втораго $\frac{ab+1}{b}$, тѣмъ только, что b' или $b + \frac{1}{c}$ въ числителѣ и знаменателѣ замѣнено числомъ b. И такъ, вставивъ въ выраженіе (2), на мѣсто b' ему равное $b + \frac{1}{c}$, получимъ третью приближенную дробь

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{ab'+1}{b'}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{ab+\frac{a}{c}+1}{b+\frac{1}{c}}$$

т. е.

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{ab+\frac{a}{c}+1}{b+\frac{1}{c}}.$$

Или еще, обращая цѣлыя числа числителя и знаменателя въ смѣшанную дробь, будетъ

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{\frac{abc+a+c}{c}}{\frac{b+1}{c}}.$$

Наконецъ, умноживъ числителя и знаменателя второй части на c, получимъ

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)\,c+a}{b+1}\quad\ldots\ldots\ (3)$$

видъ третьей приближенной дроби. Выпишемъ теперь, для очевидности, всѣ три дроби вмѣсто:

$$\text{первая}=\frac{a}{1}$$

$$\text{вторая}\ a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$$

$$\text{третья}\ a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)\,c+a}{bc+1}$$

Изъ разсмотрѣнія коихъ находимъ, что числитель $(ab+1)c+a$, *третьей* дроби, составился изъ числителя $ab+1$ второй, на знаменателя c, *третьяго* члена непреривной строки и *плюсъ* a, т. е. числителя первой. Такимъ же образомъ и знаменатель $bc+1$, третьей дроби, составился изъ произведенія знаменателя b, второй, на знаменателя c, того же третьяго члена и *плюсъ* 1 т. е. знаменателя первой дроби. Продолживъ предыдущій способъ изслѣдованія, откроемъ тотъ же законъ и для слѣдующихъ дробей; и такъ вообще, *чтобъ изъ двухъ, какихъ либо, сряду вычисленныхъ приближенныхъ дробей составить третью*, т. е. по порядку слѣдующую, *то—для числителя оной, должно умножить числителя второй на знаменателя члена, непрерывной строки, соотвѣтствующаго искомой дроби и къ произведенію придать числителя первой дроби*. Такимъ же образомъ получится *и знаменатель, посредствомъ двухъ предыдущихъ знаменателей*. Для удобнѣйшаго изученія этого закона, возмемъ непреривную строку въ числахъ:

$$\frac{65}{149}=\frac{0}{1}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

Сдѣсь 0 поставленъ въ видѣ $\frac{0}{1}$ для того, чтобъ удовлетворить правилу, которое необходимо требуетъ обращенія двухъ первыхъ приближенныхъ дробей.

Изъ сей строки приближенныя дроби, по обыкновенному способу вычисленныя, § 109 будутъ

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{17},\ \frac{17}{39},\ \frac{24}{55},\ \frac{65}{140}.$$

которыя разлагая, при помощи предыдущаго правила, получимъ

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1.3+0}{2.3+1}$$

$$\frac{7}{16}=\frac{3.2+1}{7.2+2}$$

$$\frac{17}{39}=\frac{7.2+3}{16.2+7}$$

$$\frac{24}{55}=\frac{17.1+7}{39.1+16}$$

$$\frac{65}{149}=\frac{24.2+17}{55.2+39}$$

Изъ коихъ взявъ, какія либо три сряду, ясно усмотримъ выведенный законъ составленія каждой слѣдующей приближенной дроби, по двумъ предъидущимъ и цѣлой непрерывной строкѣ.

Но не всегда же случается имѣть полную непрерывную строку, а чаще дается часть оной и двѣ послѣдовательныя приближенныя дроби; почему здѣсь предлагается вопросъ: *нѣтъ ли средства, найти всѣ послѣдующія дроби, по двумъ предъидущимъ, безъ строки.*

Здѣсь вся трудность въ опредѣленіи знаменателя члена непрерывной строки, соотвѣтствующаго искомой приближенной дроби. Трудность эта, *повидимому*, уничтожается слѣдующими замѣчаніями.

1) Разность каждой пары приближенныхъ дробей, идущихъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, всегда равна единицѣ, раздѣленной на произведеніе знаменателей обѣихъ дробей.

2) Каждая приближенная дробь нечетнаго порядка всегда больше дроби четнаго.

3) Знаменатель каждаго члена, непрерывной строки, всегда означается какимъ либо изъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5.....

И такъ, чтобъ найти третью, т. е. порядку слѣдующую, приближенную дробь, по двумъ предъидущимъ, то, *повидимому*, должно бы взять за знаменателя члена непрерывной строки, во первыхъ число 1 и умножить его на числителя и знаменателя второй дроби и т. д., потомъ, вычисленной такимъ образомъ дроби, взять разность со второю приближенною; и если въ результатѣ выйдетъ единица, раздѣленная на произведеніе обѣихъ знаменателей, то найденная дробь и будетъ та, которую требовалось отыскать; если же разность выйдетъ больше единицы, тогда должны взять за знаменателя члена строки или 2, или 3, или 4..... Но какъ формула, опредѣляющая приближенныя дроби, равномѣрно удовлетворяетъ всѣмъ выводамъ, какое бы невзяли число за знаменателя члена, по этому показанное правило для опредѣленія дробей, безъ полной непрерывной строки, применено быть не можетъ. Ибо, пусть данны двѣ приближенныя дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{7}$, то взявъ, за знаменателя третьяго члена строки, послѣдовательно числа 1, 2, 3, 4..... и вычисливъ по нимъ дроби $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{10}{23}$, $\frac{13}{30}$....., разности будутъ

$$\frac{3}{7} - \frac{4}{9} = \frac{1}{7.9}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{7}{16} = \frac{1}{7.16}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{10}{23} = \frac{1}{7.23}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{13}{30} = \frac{1}{7.30}$$

и проч.

Но какую изъ этихъ дробей принять за истинную, можетъ рѣшить только данная непрерывная строка, изъ коей открывается, что дѣйствительная изъ нихъ есть $\frac{7}{16}$, и знаменатель соотвѣтствующаго члена — число 3.

Примѣры:

1) Въ Геометріи будетъ найдено, что при діаметрѣ $=1$, окружность $=3{,}141592653589 = 3 + \frac{141592653589}{1000000000000}$. Поступивъ съ сею дробью по изъясненному, получимъ

1000000000000	141592653589	8851424877	8821280434
	7	15	1

30144443	19103078	11041365	8061713	2979652	и проч.
292	1	1	1	2	

такъ что выйдетъ

$$3{,}141592653589 = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{ и пр.}}}}}}}$$

и приближенныя дроби суть

$$3\frac{1}{7},\ 3\frac{15}{113},\ 3\frac{4687}{33102} \text{ и пр.}$$

2) Луна дѣйствительно, а солнце повидимому обращаются около земли; первая совершаетъ свой кругъ въ 2,551,443 секунды, второе же въ 31,556,929 секун. слѣд. обращеніе луны во столько разъ менѣе обращенія солнца, во сколько разъ 2551443 менѣе 31556929 или 31556929 лунныхъ обращеній равняются 2551443 солн. обращеніямъ. Но если, по изъясненному, дробь $\frac{2551443}{31556929}$ превратится въ непрерывную, то получимъ

$$2551443 = (12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 2, 3, 2, 3, 6, 1, 5, 3)$$

и приближенныя дроби будутъ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{23},\ \frac{3}{37},\ \frac{8}{99},\ \frac{11}{136},\ \frac{19}{235} \text{ и пр.}$$

Изъ сихъ дробей послѣдняя можетъ быть уже взята вмѣсто $\frac{2551443}{31556929}$; слѣд. можно принять, что 235 лунныхъ обращеній равняются 19 солнечнымъ, т, е. чрезъ каждые 19 лѣтъ луна и солнце приходитъ въ прежнее относительное положеніе на небѣ. Сей періодъ открытъ *Метономъ*.

§ 112.

Приближенное сокращеніе дробей, посредствомъ непрерывныхъ, зависитъ отъ предѣловъ, между которыми данная дробь содержится, и которые взаимно сближаются болѣе и болѣе: но можно находить прямо разности между точнымъ и приближеннымъ числомъ. Сего рода вычисленія съ величайшею удобностію производятся посредствомъ десятичныхъ дробей. Положимъ, что требуется найти десятичную дробь, равную $\frac{5}{7}$. Ежели раздѣлимъ 5 на 7, то въ частномъ получимъ имянно $\frac{5}{7}$; но раздѣливъ 50 на 7, въ частномъ найдемъ $7\frac{1}{7}$, что въ 10 разъ болѣе $\frac{5}{7}$: поелику оно, будучи помножено на 7, даетъ 50—число въ 10 разъ больше 5; слѣд. $\frac{5}{7} = 0,7 + \frac{1}{70}$. Изъ сего видно, что 0, 7 противъ $\frac{5}{7}$ менѣе $\frac{1}{70}$ долею; далѣе, раздѣливъ 500 на 7, получимъ въ частномъ $71\frac{3}{7}$, что во 100 разъ болѣе $\frac{5}{7}$, и потому

$\frac{5}{7} = 0{,}71 + \frac{3}{700}$, т. е. 0,71 противъ $\frac{5}{7}$ менѣе уже $\frac{3}{700}$. Продолжая такія дѣленія будемъ находить десятичныя дроби, болѣе и болѣе приближающіяся къ данной дроби, и окончаніе сего приближенія зависитъ отъ требованій вопроса. Вообще, чтобъ обратить обыкновенную дробь въ десятичную приближенную, *должно расположить оба числа, какъ въ дѣленіи; въ частномъ написать нуль цѣлыхъ и за нимъ рядомъ поставить запятую; къ числителю, приписавъ вновь столько нулей, сколько десятичная доля, на величину коей требуется приближеніе, содержитъ знаковъ, раздѣлить на знаменателя: тогда первая найденная цыфра частнаго выразитъ десятыя, вторая - сотыя, третья - тысячныя, четвертая - десяти - тысячныя* и т. д. *доли*. Такъ, если положено найти выводъ приближенный на 0,00001, то приписывается къ числителю пять нулей, а если только на 0,001, то три и прочее.

Когда же послѣ послѣдняго дѣйствія, коимъ должно закончится требованіе вопроса, еще будетъ остатокъ, то оный уже пренебрегается; потому что полученная въ результатѣ десятичная дробь, различествуетъ отъ данной простой *только нѣкоторою частію той десятичной единицы, самаго низшаго порядка, коею положили предѣлъ вычисленію*. Если числитель дроби больше знаменателя, то должно сперва *исключить цѣлыя числа*, кои приписываются въ частномъ на мѣсто 0 цѣлыхъ.

§ 113.

И такъ превращеніе дробей, въ десятичныя приближенныя, производится чрезъ дѣленіе знаменателемъ числителя, увеличеннаго въ 10, 100, 1000...... разъ, смотря потому, въ какихъ доляхъ должна быть выражена пренебрегаемая разность. Отсюда выходитъ слѣдующее правило: поелику при дѣленіи, производимомъ для превращенія дробей въ десятичныя, остатки должны быть меньше дѣлителя т. е. знаменателя данной дроби; слѣд. если продолжимъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткахъ выйдутъ всѣ числа, меньшія знаменателя, то новый остатокъ долженъ быть одинъ изъ предъидущихъ; посему въ частномъ выходитъ одна изъ найденныхъ уже цыѳръ: такимъ образомъ получится дробь *періодическая*. Для $\frac{3}{7}$ можемъ получить только шесть разныхъ остатковъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, изъ коихъ шестый остатокъ обращаетъ дѣйствіе къ началу, и $\frac{5}{7}$ превращается въ слѣдующую періодическую дробь:

$$0{,}714285714285714285.........—$$

Вотъ еще примѣры:

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545.......$$

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111.........$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}01010101.......$$

$$\frac{1}{999}\ 0{,}001{,}001......$$

$$\frac{1}{9999} = 0{,}0001{,}0001.......$$

I. Изъ предъидущаго объясненія слѣдуетъ, что въ періодическую дробь можетъ быть превращена всякая дробь, кромѣ тѣхъ, которыя выражаются точными десятичными дробями. Поелику знаменатели десятичныхъ дробей суть единицы съ нулями, слѣд. онѣ составляются изъ взаимнаго перемноженія десятковъ, такъ $100=10.10$, $1000=10.10.10$ и пр., а каждый десятокъ изъ перемноженія 2 на 5. И такъ, ежели знаменатель данной дроби будетъ или 2, или 5, или произведеніе сихъ чиселъ, которыя можно превращать въ десятки, чрезъ умноженіе на 5 или на 2; то сія дробь выражается точною десятичною, которую получить нетрудно: стоитъ только помножать числитель и знаменатель на 2 или на 5 до тѣхъ поръ, пока всѣ производители знаменателя сдѣлаются десятками. Напр.

$$\frac{7}{20}=\frac{7}{2.10}=\frac{7.5}{2.10.5}=0{,}35.$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{2.2.2}=\frac{3.5.5.5}{2.5.2.5.2.5}=0{,}375;$$

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{5.5}=\frac{2.2}{5.2.5.2}=0{,}04. \text{ и проч.}$$

II. По данной періодической дроби нетрудно опредѣлить дробь, изъ которой она произошла: пусть дана будетъ дробь 0,727272....... и положимъ, что искомая дробь есть x, такъ что

$$x=0{,}727272......$$

Помноживъ на 100; т. е. на единицу съ такимъ числомъ нулей сколько въ періодѣ знаковъ, получимъ

$$100\ x = 72{,}727272\ldots\ldots$$

Вычтемъ отсюда

$$x = 0{,}727272\ldots\ldots$$

въ разности выйдетъ

$$99\ x = 72;$$

изъ сего видно, что

$$x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.$$

Ежели надобно опредѣлить дробь

$$x = 0{,}723723\ldots\ldots\ldots$$

то помноживъ сіе выраженіе на 1000, вычитаю его изъ произведенія, и нахожу

$$999\ x = 723,\ x = \frac{723}{999}.$$

И такъ: *всякая простая періодическая дробь, меньшая единицы, равняется дроби, коей числитель есть періодъ, а знаменатель число, содержащее столько разъ цыфру 9, сколько цыфръ въ періодѣ.*

III. Ежели періодическая дробь будетъ смѣшанная напр. 8,0136767 ....; то опять означимъ ее чрезъ x и помножимъ на 100000 и 1000, выйдетъ

$$100000\ x = 801367{,}\ 67\ldots\ldots\ldots$$
$$1000\ x = 8013{,}\ 6767\ldots\ldots$$

разность сихъ выраженій есть

$$99000\,x = 801367 - 8013;$$

изъ чего

$$x = \frac{801367 - 8013}{99000} = \frac{801367 - 8013}{99 \times 1000}.$$

Сравнивъ сію величину съ данною дробью, выводимъ слѣдующее правило: *для превращенія смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную, должно перенести запятую двояко: и чрезъ періодъ и до періода; потомъ найти разность между происшедшими отъ сего цѣлыми числами; раздѣлить оную на число, содержащее столько разъ цыфру* 9, *сколько цыфръ въ періодѣ, помноженное на* 1 *со столькими нулями, сколько десятичныхъ цыфръ до періода.* По симъ правиламъ найдемъ

$$9999 \ldots\ldots\ldots = \frac{9}{9} = 1,$$

$$0{,}00999 \ldots\ldots\ldots = \frac{9}{900} = 0{,}01,$$

$$20{,}30404040 \ldots\ldots = \frac{20304-203}{990} = \frac{20101}{990},$$

$$137{,}252525 \ldots\ldots = \frac{13725-137}{99} = \frac{13588}{99}$$

§ 114.

Приближенныя десятичныя дроби можно находить, необращая вниманія на ихъ разности съ данными дробями, а назначая подлежащія предѣлы. Положимъ, что требуется найти десятичную дробь, которая отъ $\frac{4}{13}$ отличалась бы менѣе нежели *одною тысячною* долею. По смыслу вопроса, данная дробь заключается между двумя десятичными, которыхъ разность была бы равна тысячной долѣ; слѣд. сіи дроби должны быть составлены изъ тысячныхъ долей; а какъ мы незнаемъ ихъ числителей, то изобразимъ оные чрезъ x и x + 1; т. е. примемъ, что $\frac{5}{13}$ заключается между $\frac{x}{1000}$ и $\frac{x+1}{1000}$. Если всѣ три дроби помножимъ на 1000, то ихъ отношенія неперемѣнятся; слѣд. выйдетъ

$$\frac{x}{1000}\cdot 1000 \text{ *менѣе* } \frac{5000}{13}\,;\ \frac{5000}{13} \text{ *менѣе* } \frac{x+1}{1000}\cdot 1000,$$

или

$$x \text{ *менѣе* } \frac{5000}{13}\,;\ \frac{5000}{13} \text{ *менѣе* } x+1.$$

$$\text{Но } \frac{5000}{13} = 374\,\frac{8}{13}$$

показываетъ что $\frac{5000}{13}$ менѣе 383 и болѣе 384; слѣд. x должно быть 384 и x + 1 = 385. И такъ $\frac{5}{13}$ содержиться между 0,384 и 0,385, и отъ каждой изъ сихъ дробей отличается менѣе, нежели тысячною долею. Изъ сего слѣдуетъ общее правило: *ежели назначена разность между десятичными дробями, которыя, какъ предѣлы, должны содержать данную дробь; то помножь ея числитель на знаменателя оной разности; произведеніе раздѣли на знаменателя превращаемой дроби: тогда, полученное* *частное покажетъ числителя меньшой изъ искомыхъ десятичныхъ дробей.*

§ 115.

При извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней видѣли, что изъ многихъ чиселъ нельзя найти точныхъ корней въ цѣлыхъ числахъ (§ 75); посему должно знать: не можно ли сіи корни выразить дробями? Для рѣшенія сего вопроса потребны слѣдующія припоминанія § 64,8.

1.) ***Ежели*** *одинъ изъ производителей, даннаго произведенія, дѣлится на какое нибудь число на цѣло; то также будетъ дѣлиться на сіе число, и самое произведеніе.*

2.) ***Ежели*** *каждое изъ двухъ чиселъ менѣе какого нибудь простаго числа, то на сіе число произведеніе оныхъ чиселъ неможетъ быть раздѣлено на цѣло.* Положимъ, что

$$\frac{15.28}{47} = \text{цѣл. числу.}$$

Поелику

$$47 : 15 = 3 + \frac{2}{15},$$

или

$$47 = 3 \,.\, 15 + 2;$$

слѣд.

$$47 \,.\, 28 = 3 \,.\, 15 \,.\, 28 + 2 \,.\, 28$$

Здѣсь $47 \,.\, 28$ и $3 \,.\, 15 \,.\, 28$ по условію, дѣляться по 47 на цѣло, слѣд. (§ 64, 5) также должно дѣлиться и 2.28 т. е.

$$\frac{2\,.\,28}{47} \text{ должно} = \text{цѣл. чис.}$$

Но какъ

$$47 = 2\,.\,23 + 1$$

$$47\,.\,28 = 2\,.\,23\,.\,28 + 28.$$

и 47.28, 2.23.28, по условію, дѣлятся на 47 безъ остатка; то $\frac{28}{47}$ = цѣл. числу, что невозможно. И такъ изъ перваго условія получено *нелѣпое* заключеніе; слѣд. сіе условіе несправедливо, чемъ и доказывается истина изложеннаго правила.

3.) Вообще *ежели два числа на простое число недѣляться безъ остатка, то и ихъ произведеніе, на сіе число, также не можетъ дѣлиться на цѣло.* Такъ

$$\frac{50\,.\,186}{47} \text{ не} = \text{цѣл. числу.}$$

Ибо

$$50 = 47\,.\,1 + 3$$

$$186 = 47\,.\,3 + 45$$

и

$$50\,.\,186 = (47)^2.1.3 + 47.3^2 + 47.1.45 + 3.45.$$

Здѣсь $(47)^2.1.3$, 47.3^2 и $47.1.45$ на 47 дѣлятся на цѣло; слѣд. если бы 50.186 дѣлилось на цѣло, то также $\frac{3.45}{47}$ = бы цѣл. числу, что по предъидущему правилу невозможно. И такъ, и пр.

4.) Поелику квадраты и кубы суть произведенія ихъ корней; слѣд. *ежели корень на простое число не дѣлится на цѣло, то на это число также не будетъ дѣлиться и квадратъ и кубъ сего корня.*

5.) Изъ сего правила слѣдуетъ, что *если данная дробь не можетъ быть сокращена; то ни квадратъ, ни кубъ оной не могутъ сокращатся.* Ибо общій дѣлитель числителя и знаменателя квадрата или куба долженъ быть общимъ дѣлителемъ числителя и знаменателя корня.

Теперь положимъ, что A есть такое число, изъ котораго нельзя извлечь кубическаго корня въ цѣлыхъ числахъ; если бы корень сей былъ дробь $\frac{m}{n}$, которую уже считаемъ сокращенною; то

$$A = \frac{m^3}{n^3},$$

что попредущему правилу невозможно: ибо когда бы m^3 могло раздѣлиться на n^3 безъ остатка, тогда m^3 и n^3 имѣли бы общимъ дѣлителемъ n^3. И такъ ежели квадратный, или кубическій корень не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ, то онъ не можетъ быть найденъ и въ дробяхъ, и потому къ симъ корнямъ можно только приближатся по желанію, что производится слѣдующимъ образомъ: положимъ, что требуется извлечь квадратный корень изъ 5, который заключается между 2 и 3. Ежели помножимъ 5 на 100 и извлечемъ изъ 500 корень 22, то получимъ

$$500 = (22)^2 + 16,$$

и

$$5 = \left(\frac{22}{10}\right)^2 + 0{,}16 = (2{,}2)^2 + 0{,}16;$$

слѣд. 2, 2 уже ближе къ искомому корню, нежели 2: ибо $2^2 + 1 + 5$. Потомъ

$$50000 = (223)^2 + 271,$$

и

$$5 = (2,\ 23)^2 + 0{,}0271,$$

$$5000000 = (22\ 36)^2 + 304,$$

и

$$5 = (2,\ 136)^2 + 0{,}000304.$$

и пр.

Такимъ образомъ можно приближаться къ искомому корню ближе и ближе. Вотъ еще примѣры:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142, \text{ и } 2 = (1{,}4142)^2 + 0{,}00003836;$$

$$\sqrt{0{,}6} = \frac{\sqrt{60}}{10} = 0{,}7746\ldots\ldots,$$

$$\sqrt{26{,}720034} = \frac{\sqrt{26720034}}{1000} = 5{,}169142.$$

§ 116.

Приближенное извлеченіе корней посредствомъ предѣловъ получаетъ большую ясность. Но сперва замѣтивъ, что

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 . 2} = 2\sqrt{2}, \text{ ибо } \sqrt{2^2} = \sqrt{2 . 2} = 2$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 . 5} = 3\sqrt{5}, \text{ ибо } \sqrt{3^2} = \sqrt{3 . 3} = 3.$$

и пр.

или $2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$, $3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=45$, и пр. Изъ сего заключаемъ, что *когда помножается корень на данное число, тогда радикалъ его помножается уже на квадратъ множителя.*

Принявъ сіе правило, положимъ, что при извлеченіи $\sqrt{26720034}$ надобно довольствоваться такимъ числомъ, которое отъ искомаго корня отличалось бы менѣе, нежели тысячною долею, т. е. корень сей долженъ заключатся между двумя дробями, разнящимися тысячною долею. Такъ, чтобъ было

$$\frac{x}{1000} \text{ менѣе } \sqrt{26720034} \text{ менѣе } \frac{x+1}{1000}$$

или

$$x \text{ менѣе } 1000\sqrt{26720034} \text{ менѣе } x+1,$$

или

$$x \text{ менѣе } \sqrt{26720034000000} \text{ менѣе } x+1,$$

Но какъ $\sqrt{26720034000000}$ содержится между 5169142 и 1569143, то изъ искомыхъ числителей

$$x=5169142,\ x+1=5169143,$$

и потому требуемое число будетъ или 5169, 142 или 5169, 143.

Такимъ же образомъ извлекаются и приближенные кубическіе корни; съ тою только перемѣною, что умноженіе кубическаго корня замѣняется умноженіемъ радикала на кубъ множителя; нмянно:

$$\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{3^3.\,5}=3\sqrt[3]{5}.$$

Посему, ежели требуется найти число, которое отъ $\sqrt[3]{5}$ отличилось бы менѣе, нежели сотою долею, то должно составить

$$\frac{x}{100} \text{ менѣе } \sqrt[3]{5} \text{ менѣе } \frac{x+1}{100},$$

или

$$x \text{ менѣе } 100\sqrt[3]{5} \text{ менѣе } x+1,$$

или

$$x \text{ менѣе } \sqrt[3]{5000000} \text{ менѣе } x+1.$$

Но

$$170 \text{ менѣе } \sqrt[3]{5000000} \text{ менѣе } 171;$$

слѣд.

$$\sqrt[3]{5} = 1{,}70 \text{ или } 1{,}71.$$

§ 117.

Квадратные и кубическіе корни чиселъ, изъ коихъ нельзя извлечь точныхъ корней, называются числами *ирраціональными* или *несоизмѣримыми* съ единицею, потому что ихъ нельзя выражать ни повтореніями цѣлыхъ единицъ ни повтореніями ея долей. Если такія числа встрѣчаются въ срединѣ выкладки, то нѣтъ надобности находить къ нимъ приближенныя: ибо, весьма часто, къ концу рѣшенія вопроса, числа сіи или совершенно уничтожаются, или превращаются въ *раціональныя, — соизмѣримыя.* Такъ

$$5\sqrt{2} + 0,98 - 3\sqrt{2} - 0,73 - 2\sqrt{2} = 0,25;$$

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{4} = 12;$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt[3]{0,5} \times 5\sqrt[3]{0,25} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5;$$

$$\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{375}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5;$$

и проч.

§ 118.

Изъ вывода разности (§ 111) приближенныхъ дробей, къ предѣлу, слѣдуетъ: чемъ знаменатель разности больше, тѣмъ величина ея меньше, и тѣмъ ближе подходитъ къ *нулю*, такъ что если знаменатель, возвышенный въ квадратъ, сдѣлается безконечнымъ числомъ 100000000 ...., тогда разность безъ *ошибки* можемъ принять за дѣйствительный нуль; но безконечное число въ математикѣ изображается знакомъ ∞, посему

$$\frac{1}{\infty} = 0 \ldots\ldots (1)$$

т. е. *единица раздѣленная на безконечность равна нулю.*

Опредѣляя изъ уравненія (1) число ∞, по общимъ правиломъ науки, имѣемъ

$$\frac{1}{0} = \infty \ldots\ldots (2)$$

т. е. *единица раздѣленная на нуль равна безконечности.*

Опредѣляя изъ уравненія (2) 1-цу, получимъ

$$0 \,.\, (\infty) = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

т. е. *нуль умноженный на безконечность равенъ единицѣ.* Но, извѣстно, что умножить одно число на другое, значитъ: первое сложить само съ собой столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ, (— *безъ одной* опускается въ безконечномъ сложеніи); стало быть, *единица происходитъ отъ безконечнаго сложенія нуля самаго съ собой:*

$$0+0+0+0+0+0+\ldots\ldots=1$$

И такъ, единица происходитъ отъ нуля, а отъ единицы всѣ возможныя числа.

Такое заключеніе можно еще иначе вывести изъ предложенія (2)

$$\frac{1}{0}=\infty\,,$$

которое, поставивъ въ такомъ видѣ

$$\frac{1}{0}=\frac{\infty}{1}\,,$$

выведемъ слѣдующее заключеніе: *нуль столько разъ содержится въ единицѣ, сколько единица содержится въ безконечности.* Но безконечность содержитъ въ себѣ единицу безконечное число разовъ, то и единица содержитъ въ себѣ нуль безконечное число разовъ; т. е. единица происходитъ отъ безконечнаго сложенія нуля самаго съ собой.

Теперь, въ общихъ очеркахъ, ясно видимъ всю важность приближеннаго изчисленія, оно, отъ приближенія привело насъ къ точнымъ выводамъ; и имянно, что

1. *Одинъ только нуль въ величинѣ постояненъ*: онъ неподлежитъ ни увеличиванію, ни уменьшенію, а вмѣстѣ *не есть ничто*: изъ ничего немогли бы составится единица и числа.

2. *Единица и числа суть различныя проявленія нуля*; ибо та и другія увеличиваются лишь *отъ нуля*, и уменьшаются лишь *до нуля*.

3. Нуль есть *источникъ*, *начало* всѣхъ чиселъ, какъ *точка*, — начало пространства.

4. Нуль погашаетъ въ себѣ положительныя и отрицательныя количества (§ 26, 2 и § 29); примѣряетъ въ себѣ эти обѣ, какъ ихъ называютъ, крайности или противуположности.

5. Изъ § 80 видѣли, что доли и дроби меньше единицы и больше нуля, словомъ, заключаются между 0 и 1 т. е. 0 и 1 есть *предѣлъ дробей*; но единица происходитъ отъ *безъконечнаго* сложенія нуля самаго съ собой, слѣд. доли и дроби должны происходить отъ *конечнаго* сложенія нуля самаго съ собой.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ТЕОРІЯ ЛОГАРИѲМОВЪ.

Введеніе.

§ 119.

Если дано будетъ умножить, на прим. число 2^2 на 2^3, то поелику, по § 13-му 2^2 разлагается на 2×2, а 2^3 на $2 \times 2 \times 2$, а потому имѣемъ

$$2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5.$$

Такимъ же образомъ, если потребуется $a^2 \times a^3$, гдѣ подъ a разумѣемъ всякое число, то будетъ

$$a^2 \times a^3 = a.\ a.\ a.\ a.\ a = a^5;$$

но показатель 5 составился отъ сложенія показателей 2 и 3, т. е. $5 = 2 + 3$, слѣд.

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3}.$$

Вообще $a^n x\ a^m = a^{n+m}$

также $$a^n \times a^{\frac{1}{x}} \times a^{\frac{y}{n}} \times a^{\frac{1}{z}} = a^{n+\frac{1}{x}+\frac{y}{n}+\frac{1}{z}};$$

т. е. *чтобъ перемножить степени, имѣющія равныя основанія, то должно для произведенія взять* *одно изъ основанiй и возвысить его до суммы показателей, — всѣхъ производителей.*

По сему и обратно, для разложенiя степени, имѣющей показателемъ сумму чиселъ, на частные степени, изъ коихъ первая составилась, *должно основанiе данной степени сдѣлать столько разъ производителемъ, сколько слагаемыхъ показателей и каждый производитель возвысить до одного изъ послѣднихъ.* Такъ $a^{1+2+3+4}$ *равно* $a.\ a^2.\ a^3.\ a^4$; вообще

$$a^{m+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{u}{z}} = a.^m\ a.^{\frac{1}{x}}\ a.^{\frac{1}{y}}\ a.^{\frac{u}{z}}$$

На основанiи чего: поелику $(a^3)^4 = a^3.\ a^3.\ a^3.\ a^3 = a^{3+3+3+3} = a,^{3.4}$ посему и вообще

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

т. е. *чтобъ данную степень возвысить въ новую, то показателя основанiя данной степени, должно помножить на новаго показателя.* Также

$$\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = a^{\frac{x}{x}} = a;\ \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n.m}{m}} = a;^n \text{ и проч.}$$

§ 120.

Если требуется раздѣлить, на прим. 2^5 на 2^2, то поелику $2^5 = 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2$ и $2^2 = 2.\ 2$, а потому будетъ

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2.2.2.2.2}{2.2.} = 2.\ 2.\ 2 = 2^3$$

Такимъ же образомъ, если потребуется $\frac{a^5}{a^2}$, то по предъидущему, получимъ

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a.\,a.\,a.\,a.\,a}{a.\,a} = a.\,a.\,a = a^3.$$

Ибо $\frac{a.a}{a.a} = 1$; слѣд. въ частномъ останется а. а. а или a^3. Но показатель 3 частнаго, произошелъ отъ вычитанія показателя дѣлителя 2 изъ показателя дѣлимаго 5; т. е. $3 = 5 - 2$, то

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3;$$

посему и вообще

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Изъ сего видимъ, что *при дѣленіи степеней*, имѣющихъ равныя основанія, въ *частномъ пишется одно изъ основаній, и показателемъ ставится разность показателей дѣлителя изъ дѣлимаго.* Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

количество a^m есть дѣлимое, a^n — дѣлитель, a^{m-n} частное, а дѣлимое равно частному умноженному на дѣлителя; и такъ

$$a^m = a^{m-n}.\,a^n = a^{m-n+m} = a^m \text{ (§ 120)}.$$

Ибо $m - m = 0$

§ 121.

Въ выведенной формулѣ дѣленія степеней

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

содержится два случая, заслуживающіе особенное вниманіе: если $m = n$ и $m < n$.

1 *Случай.* Если $m = n$, то

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Съ другой стороны

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 ;$$

изъ сравненія, перваго со вторымъ, получимъ

$$a^0 = 1;$$

т. е. *всякое количество возвышенное до нуля равняется единицѣ*: $25^0 = 1$, $333^0 = 1$, $11111^0 = 1$, $1000^0 = 1$; и проч.

Объяснимъ *символъ* выраженія $a^0 = 1$. Для этого возмемъ частный случай, на прим., $\frac{a^2}{a^2}$. Употребивъ предъидущее правило, получимъ

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$$

и

$$\frac{a^2}{a^2} = 1$$

И такъ, знакъ a^0 показываетъ, что буква а входитъ 0 разъ множителемъ въ частное $\frac{a^2}{a^2} = 1$, т. е. вовсе не входитъ; и въ то же время показываетъ, что она находилась и въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ и уничтожилась при сокращеніи. И такъ, выраженіе a^0 есть такое значеніе, которое показываетъ, что а въ частномъ неподвергается ни какому дѣйствію; ибо дѣйствіе числа ни другое что есть какъ извѣстное отношеніе его къ другому однородному, котораго въ частномъ $\frac{a^2}{a^2} = 1$ для буквы а дѣйствительно нѣтъ и быть неможетъ; въ самомъ дѣлѣ, введя а въ дѣйствіе, т. е. подставивъ его въ частное, получимъ нелѣпое заключеніе: $\frac{a^2}{a^3} = a$, т. е. 1 равна а, хотя а можетъ быть всякимъ числомъ, въ то время, какъ единица всегда остается единицею. Количества же невходящія ни въ какія сравненія или дѣйствія называются *величинами* (§ 1); слѣд. a^0 есть величина въ *общемъ*, а 1-ца въ *частномъ значеніи*, поелику 1 равна a^0.

2 *Случай.* Если въ выраженіи

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

будетъ $m < n$, тогда можемъ принять, что $n = m + y$, а потому

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+y}} = a^{m-m-y};$$

но $m - m = 0$, слѣд. (§ 29 и 30)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-y} \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

Съ другой стороны

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+y}} = \frac{1 \cdot a^m}{a^m \cdot a^y},$$

но $\frac{a^m}{a^m} = 1$, слѣд.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^y}.$$

Изъ сравненія сего съ выраженіемъ (1), имѣемъ

$$a^{-y} = \frac{1}{a^y};$$

т. е. *всякое количество возвышенное до отрицательнаго показателя равно единицѣ, раздѣленной на тоже количество, взятое съ положительнымъ показателемъ.* Такъ

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}, \; 100^{-1} = \frac{1}{100}, \; a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ и проч.}$$

Въ слѣдствіе такого значенія количества съ отрицательнымъ показателемъ, должно отнести его къ *долѣ* или единицѣ дробѣй и единицѣ цѣлой единицы; а вмѣстѣ съ этимъ сказать, что оно, какъ и a^0 или цѣлая еди-

единица есть также *величина*. Вообще, когда, существующій въ природѣ предметъ можетъ быть принятъ за мѣримое, т. е. когда можетъ измѣрятся другимъ однороднымъ, тогда онъ, какъ *возможное только мѣримое*, выражается въ общемъ значеніи чрезъ a^0, а въ частномъ чрезъ 1; если же этотъ самый предметъ *возможенъ* быть мѣрою другаго предмета a, тогда выражается чрезъ a^{-1} или $\frac{1}{a}$. И такъ величины принѣмаютъ два общихъ и два частныхъ вида; общихъ: a^0 и a^{-1}, частныхъ: 1 и $\frac{1}{a}$; всѣ же прочія выраженія числъ и буквъ суть количества.

Теперь мы имѣемъ столько свѣденій, что со всею отчетливостію можемъ приступить и къ разрѣшенію простаго уравненія четвертаго вида

$$a^x = s,$$

(§ 72, 4), т. е. послѣдняго ариѳметическаго уравненія.