УДК 517.54+517.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

ТЕОРЕМА НЕВАНЛИННЫ — АДАМЯНА — АРОВА — КРЕЙНА В ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОМ СЛУЧАЕ

1. Начиная с середины XX в. интенсивно развивается теория несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Одним из основных моментов этой теории является построение канонических реализаций (унитарная эквивалентность) этих операторов в функциональных пространствах. Одной из таких реализаций является функциональная модель в форме де Бранжа-Ровняка. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная в единичном круге D комплексной плоскости оператор-функция, действующая из M_1 в M_2 (сепарабельные гильбертовы пространства). Обозначим через H^w гильбертово пространство, состоящее из вектор-функций $f=\begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}$, таких что

$$f_+\in H_+^2(M_2),\ f_-\in H_-^2(M_1),$$
$$\int_T < \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} f,\ f > dm < \infty,$$

где H_+^2 и H_-^2 — пространства Харди; T — единичная окружность; dm — мера Лебега на ней.

Этот интеграл задает в H^w скалярное произведение. Для сокращения записи введем обозначение:

$$K_w \equiv \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим в H^w оператор A^w:

$$A^w f = \bar{t}\left(f - K_w \begin{bmatrix} f_+ (0) \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

где $t\in T$ — независимая переменная. При этом сопряженный к A^w оператор равен

$$(A^w)^* f = tf - K_w \begin{bmatrix} 0 \\ (f_-)_{-1} \end{bmatrix},$$

где $(f_-)_{-1}$ — коэффициент f_- при $\bar{t}$. Функция $w(\zeta)$ называется характеристической функцией оператора A^w. Характеристическая функция может быть определена для любого сжатия A, и тогда само это сжатие унитарно эквивалентно A^w, где w — характеристическая функция A, т. е. A^w является функциональной моделью A.

2. В работах [4, 5] рассматривалась абстрактная задача интерполяции. Приведем здесь ее формулировку:

пусть M_1 и M_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, X — линейное пространство, D — неотрицательная квадратичная форма на X, T_1 и T_2 — линейные операторы в X, E_1 и E_2 — линейные операторы из X в M_1 и M_2 соответственно;

пусть перечисленные объекты связаны равенством

$$D(T_2x,\ T_2x) - D(T_1x,\ T_1x) = \langle E_1x,\ E_1x\rangle - \langle E_2x,\ E_2x\rangle. \qquad (1)$$

Требуется описать все голоморфные при $|\zeta|<1$, сжимающие оператор функции $w(\zeta): M_1 \to M_2$ и отображения $F: X \to H^w$ (модельное пространство де Бранжа-Ровняка), обладающие свойствами:

$$i)\ \|Fx\|^2_{H^w} \leqslant D(x,\ x), \qquad (2)$$

$$ii)\ FT_1x \overset{\text{п.в.}}{=} tFT_2x - K_w\begin{bmatrix} -E_2x \\ E_1x \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

3. Обозначим через $\vec{X}$ — множество классов эквивалентности векторов из X относительно квадратичной формы D, т. е. $x_1 \sim x_2 \leftrightarrow D(x_1 - x_2,\ x) = 0,\ \forall x \in X$. Форма D задает в $\vec{X}$ скалярное произведение. Через H обозначим пополнение $\vec{X}$ в этом скалярном произведении. Тождество (1) позволяет построить изометрический узел $V: H \oplus M_1 \to H \oplus M_2$. Положим

$$d_V = \text{замыкание } \{\overrightarrow{T_1x} \oplus E_1x,\ x \in X\}$$

$$\Delta_V = \text{замыкание } \{\overrightarrow{T_2x} \oplus E_2x,\ x \in X\}$$

Тогда V действует по формуле

$$V(\overrightarrow{T_1x} \oplus E_1x) = \overrightarrow{T_2x} \oplus E_2x. \qquad (4)$$

Обозначим через N_{d_V} — ортогональное дополнение d_V в $H \oplus M_1$, N_{Δ_V} — ортогональное дополнение Δ_V в $H \oplus M_2$. N_{d_V} и N_{Δ_V} характеризуют степень неопределенности задачи. V может быть естественным образом достроен до унитарного узла α [7]. Пусть N_1 — второй экземпляр N_{d_V}, N_2 — второй экземпляр N_{Δ_V}. Тогда $A^\alpha: H \oplus M_1 \oplus N_2 \to H \oplus M_2 \oplus N_1$, действующий по формуле $A^\alpha | d_V = V$, $A^\alpha | N_{d_V}$ — унитарное отображение N_{d_V} на N_1, $A^\alpha | N_2$ — унитарное отображение N_2 на $N_{\Delta V}$, является унитарным отображением $H \oplus \oplus M_1 \oplus N_2$ на $H \oplus M_2 \oplus N_1$. Пространства $N_1^\alpha = M_1 \oplus N_2$ и $N_2^\alpha = M_2 \oplus N_1$, называются внешними пространствами узла α. Пусть $S(\zeta)\colon N_1^\alpha \to N_2^\alpha$ — матрица рассеяния узла α (см. [7, 4, 5]). Разобъем ее на блоки в соответствии с разбиениями N_1^α и N_2^α:

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix}, \; N_1^\alpha \equiv \begin{bmatrix} M_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \to N_2^\alpha \equiv \begin{bmatrix} M_2 \\ N_1 \end{bmatrix}.$$

При этом по построению видно, что $s(0) = 0$.

Общее решение задачи выражается по формуле

$$w = s_0 + s_2\,\omega\,(1 - s\omega)^{-1}\,s_1, \; Fx = \begin{bmatrix} \psi\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^*\psi^* & 1 \end{bmatrix} G^\alpha \vec{x}, \tag{5}$$

где ω — произвольная голоморфная сжимающая оператор-функция из N_1 в N_2; $\psi = s_2(1 - \omega s)^{-1}$; $\varphi = (1 - s\omega)^{-1} s_1$; G^α — отображение H в H^S, общее для всех F. Т. о. ω является свободным параметром при описании решений.

4. Имеется широкий круг задач (см. [1, 2, 6]), для которых неравенство (2) обращается в равенство

$$\| Fx \|^2_{H^w} = D(x, x). \tag{6}$$

Введем несколько обозначений:

$$\Omega_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix}\colon N_2 \oplus N_1 \to N_2 \oplus N_1; \tag{7}$$

$$P_\omega = \frac{1 + \Omega_\omega}{1 - \Omega_\omega}. \tag{8}$$

Рассмотрим в единичном круге D гармоническую функцию:

$$u_\omega(\zeta) = \frac{1}{2}(P_\omega(\zeta) + P_\omega(\zeta H)^*) -$$
$$- \int_T \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} K_\omega \begin{bmatrix} \psi^* & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} K_w^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} K_\omega\, dm(t);$$
$$u_\omega(\zeta)\colon N_2 \oplus N_1 \to N_2 \oplus N_1.$$

Как было показано в [5], $u_\omega(\zeta) \geqslant 0$ при всех ω, а условие

$$u_\omega(\zeta) \equiv 0 \tag{10}$$

эквивалентно (6) при F и w, отвечающих этому параметру ω.

Из условия равенства u_ω нулю вытекает более слабое условие равенства нулю ее абсолютно-непрерывной части:

$$\frac{1}{2}(P_\omega + P_\omega^*) \overset{\text{п.в.}}{=} K_\omega \begin{bmatrix} \psi^* & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} K_w^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} K_\omega, \tag{11}$$

которое уже, конечно, не эквивалентно (6). Известны задачи (например, степенная проблема моментов), в которых (11) имеет место при всех ω, а (6) (т. е. (10)) — не при всех ω.

Отметим, что при $\omega = 0$ (11) принимает вид

$$K_{s^*} \overset{\text{п.в.}}{=} \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} K_{s_0}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix}. \tag{12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim M_1 < \infty$ и $\dim M_2 < \infty$.

Оказывается, что свойство (11), имеющее место при всех ω, есть внутреннее свойство матрицы S. А именно, будет доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы матрица S обладала свойством*

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

необходимо выполнение (11) при всех ω и достаточно выполнение (11) при $\omega = 0$ (т. е. (12)).

Теорема 1, очевидно, допускает две эквивалентные (не симметричные) формулировки

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*) - \dim N_2, \tag{14}$$

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_1} - s_0^* s_0) - \dim N_1. \tag{15}$$

Более того, в процессе доказательства теоремы 1 будет показано, что для любого параметра ω и соответствующего ему решения w имеют место соотношения

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*) \tag{16}$$

и

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_1} - w^*w) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1} - \omega^*\omega). \tag{17}$$

Из формул (14) и (15) видно, что $\dim N_1 \leqslant \dim M_1$, $\dim N_2 \leqslant \dim M_2$ и если один из рангов неопределенности задачи максимален, т. е. $\dim N_2 = \dim M_2$ ($\dim N_1 = \dim M_1$), то S — внутренняя в соответствующем порядке:

$$\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^* \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \quad (\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S \overset{\text{п.в.}}{=} 0). \tag{18}$$

Пусть, например, $\dim N_2 = \dim M_2$, тогда из (16) и (18) следует, что

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*). \tag{19}$$

Если при этом $\dim N_1 \geqslant \dim N_2$, то из (19) вытекает существование такого решения w, что $\mathbf{1}_{M_2} - ww^* \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Т. о., теорему 1 можно рассматривать как распространение классической теоремы Неванлинны — Адамяна — Арова — Крейна [1 — 3] на полуопределенный случай.

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов.

Теорема 2. *Пусть* $\dim M_2 < \infty$ *и* $\dim M_1 < \infty$ *и пусть (12) выполняется при* $\omega = 0$, *т. е.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2} & s^* \\ s & \mathbf{1}_{N_1} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=\!=} \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix}, \tag{20}$$

тогда

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=\!=} \operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Доказательство. Напомним, что

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix}.$$

Следующая матрица получается из матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \tag{22}$$

путем перестановки второго и третьего столбцов (и соответствующих строк) и последующей перестановкой первого и второго столбцов (и соответствующих строк)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{N_2} & s^* & s_2^* & 0 \\ s & \mathbf{1}_{N_1} & 0 & s_1 \\ \hline s_2 & 0 & \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ 0 & s_1^* & s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{array}\right]. \tag{23}$$

Следовательно, ранги матриц (22) и (23) совпадают. Более того, ввиду неотрицательности матрицы (22) неотрицательна и матрица (23). Но тогда, как известно, она (как квадратичная форма) может быть приведена невырожденным преобразованием к блочно-диагональному виду:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2} & s^* \\ s & \mathbf{1}_{N_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix} \end{array}\right]. \tag{24}$$

По условию верхний блок равен нулю. Откуда вытекает требуемое.

Лемма 3. *Пусть A и B — линейные конечномерные операторы, действующие в одно и тоже пространство. Следующие свойства эквивалентны:*

1) *образы A и B линейно независимы, т. е.*

$$\operatorname{Ran} A \cap \operatorname{Ran} B = \{0\};$$

2) $\operatorname{rg} A^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{rg} A^*$;
3) $\operatorname{rg} B^* \mid \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{rg} B^*$;
4) $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) = \operatorname{Ran} A \dotplus \operatorname{Ran} B$;
5) $\operatorname{rg}(AA^* + BB^*) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$,

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть имеет место 1). Рассмотрим оператор $P_{\operatorname{Ker} B^*}A$, где $P_{\operatorname{Ker} B^*}$ — ортогональный проектор на ядро B^*. Поскольку $\operatorname{Ran} A \cap \operatorname{Ran} B = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} B^* = (\operatorname{Ran} B)^\perp$, то $P_{\operatorname{Ker} B^*}$ не обращается в ноль на $\operatorname{Ran} A$ (так как иначе аннулирующий вектор из $\operatorname{Ran} A$ был бы ортогонален $\operatorname{Ker} B^*$, т. е. лежал бы в $\operatorname{Ran} B$, что противоречит условию). Следовательно, $\operatorname{rg} P_{\operatorname{Ker} B^*}A = \operatorname{rg} A$. Но тогда, переходя к сопряженным операторам, получим $\operatorname{rg} A^* P_{\operatorname{Ker} B^*} = \operatorname{rg} A^*$.

Аналогично доказывается импликация 1) $\Rightarrow$ 3). Доказательство импликаций 2) $\Rightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 1) получается обращением рассуждений. Следовательно, имеет место и 2) $\leftrightarrow$ 3).

Т. о., 1), 2), 3) эквивалентны. Теперь из 1) & 2) & 3) выведем 4). Поскольку

$$AA^* + BB^* \mid \operatorname{Ker} B^* = AA^* \mid \operatorname{Ker} B^* \text{ и } \operatorname{rg} A^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{rg} A^*, \text{ то}$$
$$\operatorname{Ran} AA^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ran} A.$$

Т. о., $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} A$. Аналогично $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} B$. Следовательно, $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} A \dotplus \operatorname{Ran} B$, обратное включение очевидно. Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) тривиальна. И, наконец, докажем импликацию 5) $\Rightarrow$ 1). Удобней доказывать эквивалентную ей импликацию не 1) $\Rightarrow$ не 5). В самом деле, пусть $\operatorname{Ran} A$ и $\operatorname{Ran} B$ — линейно зависимы, тогда $\dim(\operatorname{Ran} A + \operatorname{Ran} B) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Но $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \subseteq \operatorname{Ran} A + \operatorname{Ran} B$. Следовательно, $\operatorname{rg}(AA^* + BB^*) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Что и завершает доказательство леммы.

Утверждение 4. Пусть $\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*) - \dim N_2$. Тогда

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*), \tag{26}$$

где ω — произвольный параметр, а w — соответствующее ему решение

Доказательство. В силу соотношения (8)

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\, S = [\psi,\ w], \text{ где } \psi = s_2(\mathbf{1}_{N_2} - \omega s)^{-1},$$

получаем

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\, SS^* \begin{bmatrix} \omega^*\psi^* \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} = \psi\psi^* + ww^*,$$

откуда следует

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\,(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \begin{bmatrix} \omega^*\psi^* \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} + \psi(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*)\,\psi^* = \mathbf{1}_{M_2} - ww^*. \tag{27}$$

В частности, при $\omega = 0$ получаем

$$[0,\ \mathbf{1}_{M_2}]\,(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} + s_2 s_2^* = \mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*. \tag{28}$$

Из (28) следует

$$\operatorname{rg}(1_{M_2} - s_0 s_0^*) \leqslant \operatorname{rg}[0, 1_{M_2}](1_{N_2^\alpha} - SS^*)^{1/2} + \operatorname{rg} s_2 \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{rg}(1_{N_2^\alpha} - SS^*) + \dim N_2. \qquad (29)$$

Но по условию, правая часть (29) равна $\operatorname{rg}(1_{M_2} - s_0 s_0^*)$.

Следовательно, в (29) всюду равенства, т. е.

$$\operatorname{rg}[0, 1_{M_2}](1_{N_2^\alpha} - SS^*)^{1/2} = \operatorname{rg}(1_{N_2^\alpha} - SS^*),\ \operatorname{rg} s_2 = \dim N_2, \qquad (30)$$
$$\operatorname{rg}(1_{M_2} - s_0 s_0^*) = \operatorname{rg}[0, 1_{M_2}](1_{N_2^\alpha} - SS^*)^{1/2} + \operatorname{rg} s_2.$$

Из первого соотношения (30) следует, что

$$\operatorname{def}[0, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} = \operatorname{def}(1 - SS^*), \text{ т. е.}$$
$$\operatorname{Ker}[0, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} = \operatorname{Ker}(1 - SS^*). \qquad (31)$$

В силу последнего соотношения (30) и леммы 3 заключаем, что $\operatorname{Ran}[0, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2}$ и $\operatorname{Ran} s_2$ — линейно независимы. Поскольку $\psi = s_2(1 - \omega s)^{-1}$, то $\operatorname{Ran}\psi = \operatorname{Ran} s_2$. Отсюда следует

а)

$\operatorname{Ran}[\psi\omega, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2}$ и $\operatorname{Ran}\psi(1 - \omega\omega^*)^{1/2}$ — линейно независимы;

б)

$$\operatorname{rg}[\psi\omega, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} = \operatorname{rg}(1 - SS^*), \qquad (32)$$

так как $\operatorname{rg}[\psi\omega, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} \geqslant \operatorname{rg}[0, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} = \operatorname{rg}(1 - SS^*)$ (здесь также существенна линейная независимость

$$\operatorname{Ran}[0, 1_{M_2}](1 - SS^*)^{1/2} \text{ и } \operatorname{Ran}\psi).$$

Поскольку в силу (30) $\operatorname{rg} s_2 = \dim N_2$, то s_2 — невырождена, следовательно, ψ — невырождена, следовательно, $\operatorname{rg}\psi(1 - \omega\omega^*)^{1/2} = \operatorname{rg}(1 - \omega\omega^*)$.

Теперь из (27) получаем $\operatorname{Ran}(1 - ww^*) = \operatorname{Ran}[\psi\omega, 1](1 - SS^*)^{1/2} \dotplus \operatorname{Ran}\psi(1 - \omega\omega^*)^{1/2}$ (33) и $\operatorname{rg}(1 - ww^*) = \operatorname{rg}(1 - SS^*) + \operatorname{rg}(1 - \omega\omega^*)$. Что и требовалось. Предыдущее утверждение можно записать в симметричной форме.

У т в е р ж д е н и е 5. Пусть

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & 1_{M_1} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} - \operatorname{def}\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1_{M_2} & w \\ w^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Утверждение 6. Имеет место следующее соотношение:

$$\begin{bmatrix} \mathring{\varphi} & 0 & \omega^*\mathring{\psi}^* & 0 \\ \psi\omega & 1_{M_2} & 0 & 0 \\ \omega\mathring{\varphi} & 0 & \mathring{\psi}^* & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}^* - 1_{N_1} & \omega^*\psi^* & s\mathring{\psi} + \mathring{\varphi}^*\omega^* & \varphi \\ \psi\omega & 1_{M_2} & \psi & w \\ \mathring{\psi}^* s^* + \omega\mathring{\varphi} & \psi^* & \mathring{\psi} + \mathring{\psi}^* - 1_{N_2} & \omega\varphi \\ \varphi^* & w^* & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Проверяется непосредственно.

Утверждение 7. Обозначим левый сомножитель в левой части (35) через C:

$$C = \begin{bmatrix} \mathring{\varphi} & 0 & \omega^*\mathring{\psi}^* & 0 \\ \psi\omega & 1_{M_2} & 0 & 0 \\ \omega\mathring{\varphi} & 0 & \mathring{\psi}^* & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{def} C = \operatorname{def} \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ran} \begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} C,$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -\varphi^*\omega^*\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\psi\omega\alpha_1 \end{aligned} \tag{36}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\psi}^* & \alpha_3 \\ \mathring{\varphi} & \alpha_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathring{\varphi}^{-1}\beta_1 = (1 - s\omega)\,\beta_1, \\ \alpha_3 &= \mathring{\psi}^{*-1}\beta_2 = (1 - s^*\omega^*)\,\beta_2, \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega^* & 1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Т. о., формулы (37) и (36) задают взаимно однозначное отображение $\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}1 & \omega\\ \omega^* & 1\end{bmatrix}$ на $\mathrm{Ker}\,C$, откуда следует равенство их дефектов. Соотношения (37) и (36), воспользовавшись (38), можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ --\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1\\ 0\\ --\\ \beta_2\\ 0\end{vmatrix},$$

откуда следует требуемое вложение. Из этого утверждения непосредственно вытекает следующее:

Следствие 8. *Ранг левой части (35) (а следовательно, и правой) равен*

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{bmatrix} - \mathrm{def}\begin{bmatrix}1 & \omega\\ \omega^* & 1\end{bmatrix}. \tag{39}$$

Утверждение 9. Ранг правой части (35) равен

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & w\\ w^* & 1\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Это получается непосредственно из следствия 8 и утверждения 5.

Доказательство обратной части теоремы 1.

Перестановкой строк и соответствующих столбцов правая часть (35) может быть приведена к виду

$$\begin{bmatrix}\mathring{\psi} + \mathring{\psi}^* - 1_{N_2} & \mathring{\psi}^* s^* + \omega\mathring{\varphi} & \psi^* & \omega\varphi\\ s\mathring{\psi} + \mathring{\varphi}^*\omega^* & \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}^* - 1_{N_1} & \omega^*\psi^* & \varphi\\ \psi & \psi\omega & 1_{M_2} & w\\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* & w^* & 1_{M_1}\end{bmatrix}. \tag{40}$$

В силу (7), разность между левой и правой частью (12) имеет смысл всегда и неотрицательна (так как равна почти всюду $a^\omega + (a^\omega)^*$). Следовательно, матрица (40) невырожденным преобразованием (как квадратичная форма) приводится к блочно-диагональному виду

$$\begin{bmatrix}a^\omega + (a^\omega)^* & 0 & \\ 0 & 1 & w\\ & w^* & 1\end{bmatrix}.$$

Но в силу утверждения 9, ранг этой матрицы равен

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & w\\ w^* & 1\end{bmatrix}.$$

следовательно, $\alpha^\omega + (a^\omega)^* \overset{\text{п. в.}}{=} 0$, т. е. имеет место (12). Что и требовалось.

Список литературы: 1. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Об ограниченных операторах, коммутирующих с сжатиями класса C_{00} единичного ранга неунитарности // Функцион. анализ и его прил. 1969. 3, № 3. С. 86—87. 2. *Аров Д. З.* γ-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции матриц-функций. Одесса, 1986. 49 с. Деп. в Укр НИИНТИ— № 726 УК-Д86. 3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973. 551 с. 4. *Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Абстрактная задача интерполяции и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. К., 1987. С. 83—96. 5. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 112—120. 1988. Вып. 50. С. 98—103. 6. *Хейфец А. Я.* Обобщенная бикасательная задача Шура—Неванлинны—Пика и связанное с ней равенство Парсеваля. Х., 1989. 60 с. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 11.05.1989. № 3108 — В 89. 7. *Аров Д. З., Гроссман В. З.* Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов // ДАН СССР. Сер. мат. 1983. 270, № 1. С. 17—20.

Поступила в редколлегию 12.08.89