УДК 517.968

Л. А. САХНОВИЧ

УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

Обозначим через Δ систему непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. В контактных задачах теории упругости [1], теории дифракции на системе лент [2] существенную роль играют уравнения вида

$$Sf = \mu f + \int_{\Delta} f(t)\, k(x-t)\, dt = \varphi(x), \quad x \in \Delta. \tag{0.1}$$

В данной статье при помощи метода операторных тождеств [3—4] дается способ решения уравнений вида (0.1), а также их обобщений (§ 1). В § 2 исследуются конкретные прикладные задачи структура диаграммы рассеяния, оптимальная форма каравана судов, уравнение Прандтля из аэромеханики).

§ 1. Операторное тождество и метод решения. 1. Чтобы исследовать уравнение (0.1), преобразуем его в систему

$$\mu \overrightarrow{f(v)} + \int_0^1 \overrightarrow{f(u)}\, k(v, u)\, du = \overrightarrow{\varphi(v)}, \tag{1.1}$$

где

$$\overrightarrow{f(v)} = [f(a_1 + vw_1)\sqrt{w_1}, \ \ldots, \ f(a_n + vw_n)\sqrt{w_n}],$$
$$\overrightarrow{\varphi(v)} = [\varphi(a_1 + vw_1)\sqrt{w_1}, \ldots, \varphi(a_n + vw_n)w_n],$$
$$w_k = b_k - a_k,$$

а матричное ядро $k(v, u)$ определяется формулой

$$k(v, u) = \{k(a_m - a_l + w_m v - w_l u)\sqrt{w_l w_m}\}_{l,\, m=1}^{n}.$$

Далее будем рассматривать ограниченный в $L_n^p(0, w)$ оператор

$$\overrightarrow{Sf} = \frac{d}{dx}\int_0^w \overrightarrow{f(t)}\, S(x, t)\, dt = \overrightarrow{\varphi(x)}, \tag{1.2}$$

причем ядро $S(x, t)$ имеет следующую структуру:

$$S(x, t) = \{S_{l,\, m}(w_m x - w_l t)\}_{l,\, m=1}^{n} \tag{1.3}$$

и $S_{l,\, m}(t) \in L^q(-w_l w, w_m w)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Легко видеть, что системы (0,1), (1,1), а также системы с разностным ядром [4] содержатся в классе систем (1.2), (1.3). Оператор S^*, сопряженный к S, действует в сопряженном к $L_n^p(0, w)$ пространстве $L_n^q(0, w)$ и определяется формулой

$$S^*\vec{f} = \frac{d}{dx}\int_0^w \overrightarrow{f(t)}\, S_1(x, t)\, dt, \tag{1.4}$$

где $S_1(x, t) = -WS^*(t, x)W^{-1}$, а диагональная матрица $W = \operatorname{diag}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Заметим, что оператор S^* допускает при помощи формулы (1.4) расширение на $L_n^p(0, w)$. Положим далее

$$M(x) = S(x, 0)W; \ N(x) = -S(0, x)W. \tag{1.5}$$

Непосредственным подсчетом получаем операторное тождество

$$(AS - SA^*)\vec{f} = i\int_0^w \overrightarrow{f(t)}\,[M(x) + N(t)]\, dt, \tag{1.6}$$

где

$$A\vec{f} = i\int_0^x \overrightarrow{f(t)}\, dtW, \quad A^*\vec{f} = -i\int_x^w \overrightarrow{f(t)}\, dt\, W.$$

Как и в случае систем с разностным ядром [4], из тождества (1.6) выводится

Теорема 1.1. *Пусть операторы* S *и* S^*, *определенные формулами (1.2)—(1.4), ограничены в пространстве* $L_n^p(0, w)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Если существуют матрицы-функции* $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k = 1,2)$ *с элементами из* $L^p(0, w)$, *удовлетворяющие соотношениям:*

$$SN_1 = M(x), \quad SN_2 = E_n, \quad S^*M_2 = N^*(x), \quad S^*M_1 = E_n, \tag{1.7}$$

то справедливо равенство

$$SB_\gamma(x, \lambda) = e^{i\lambda x W}, \tag{1.8}$$

где

$$B_\gamma(x, \lambda) = u_\gamma(x, \lambda) - i\lambda \int_x^w u_\gamma(t, \lambda)\, e^{i\lambda(x-t)W}\, dt\, W; \tag{1.9}$$

$$u_\gamma(x, \lambda) = a_\gamma(\lambda) N_1(x) + b_\gamma(\lambda) N_2(x); \tag{1.10}$$

$$[a_\gamma(\lambda), b_\gamma(\lambda)] = [a(\lambda), b(\lambda)]\,(E_{2n} + i\lambda\gamma)^{-1}. \tag{1.11}$$

Матрицы $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и γ имеют вид

$$a(\lambda) = i\lambda \int_0^w e^{i\lambda w x} M_1^*(x)\, dx; \tag{1.12}$$

$$b(\lambda) = E_n + i\lambda \int_0^w e^{i\lambda w x} M_2^*(x)\, dx;$$

$$\gamma = \{(SN_k, M_l) - (N_k, S^*M_l)\}_{k,\, l=1}^2. \tag{1.13}$$

(Символом (C, D) обозначается интеграл $\int_0^w C(x) D^*(x)\, dx$).

Следствие 1.1. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и при некотором* $\vec{f}\ (\|\vec{f}\|_p \neq 0)$ *справедливо равенство* $S\vec{f} = 0$. *Тогда* $\vec{f} \in L_n^q(0, w)$.

2. Отдельно рассмотрим случай, когда $\gamma = 0$. Полагая $B(x, \lambda) = B_0(x, \lambda)$, из теоремы 1.1 выводим

$$B(x, \lambda) = i\lambda \int_0^w e^{i\lambda t w} Q(x, t)\, dt + N_2(x) - (i\lambda)^2 \int_x^w \int_0^w e^{i\lambda u W}$$

$$Q(t, u)\, du\, e^{i\lambda(x-t)}\, dt W - i\lambda \int_x^w N_2(t)\, e^{i\lambda(x-t)W}\, dt\, W,$$

где матрица-функция $Q(x, t)$ имеет вид

$$Q(x, t) = M_1^*(t) N_1(x) + M_2^*(t) N_2(x). \tag{1.14}$$

При $0 \leqslant x \leqslant t \leqslant w$ введем матрицы n-го порядка $v^{\pm}(x, t, \lambda) = \{v_{l,k}(x, t, \lambda)\}$, элементы которых определяются равенствами

$$v_{l,k}^{+}(x, t, \lambda) = \int\limits_{w_l s + w_k(x-t) \geqslant 0} e^{i\lambda[w_l s + w_k(x-t)]} Q_{l,k}(t, s)\, ds; \quad (1.15)$$

$$v_{l,k}^{-}(x, t, \lambda) = \int\limits_{w_l s + w_k(x-t) < 0} e^{i\lambda[w_l s + w_k(x-t)]} Q_{l,k}(t, s)\, ds. \quad (1.16)$$

Тогда матрица-функция $B(x, \lambda)$ представима в виде суммы

$$B(x, \lambda) = B_{+}(x, \lambda) + B_{-}(x, \lambda), \quad (1.17)$$

причем

$$B_{+}(x, \lambda) = i\lambda \int\limits_0^w e^{i\lambda t W} Q(x, t)\, dt + N_2(x) -$$

$$- (i\lambda)^2 \int\limits_x^w v^{+}(x, t, \lambda)\, dt W - i\lambda \int\limits_x^w N_2(t)\, dt W, \quad (1.18)$$

$$B_{-}(x, \lambda) = -(i\lambda)^2 \Big[\int\limits_x^w v^{-}(x, t, \lambda)\, dt\, W -$$

$$- \int\limits_x^w \int\limits_t^w N_2(s)\, ds e^{i\lambda(x-t)W}\, dt W^2 \Big]. \quad (1.19)$$

Как и для систем с разностным ядром, из (1.15)—(1.19) вытекает

$$SB_{-}(x, \lambda) = 0, \quad SB_{+}(x, \lambda) = e^{i\lambda W x}. \quad (1.20)$$

Через $W_{q,n}(l)$ обозначим совокупность l раз дифференцируемых вектор-функций $\vec{\varphi}(x)$ таких, что $\vec{\varphi}^{(l)}(x) \in L_n^q(0, w)$. На $W_{q,n}$ определим оператор T при помощи формулы

$$T\vec{\varphi} = \int\limits_0^w \vec{\varphi}'(t) W^{-1} Q(x, t)\, dt + \vec{\varphi}(0) N_2(x) -$$

$$- \int\limits_0^w \vec{\varphi}''(t) W^{-2} \Phi(x, t) W dt - \vec{\varphi}'(0) \int\limits_x^w W^{-1} N_2(u)\, du W, \quad (1.21)$$

где элементы $\Phi_{l,k}$ матрицы Φ выражаются через элементы $Q_{l,k}$ матрицы Q следующим образом:

$$\Phi_{l,k}(x, t) = \int\limits_x^{\min\left[w,\, x + \frac{w_l}{w_k}\right](w-t)} Q_{l,k}\left(v,\, t - \frac{w_k}{w_l}(x - v)\right) dv. \quad (1.22)$$

Легко видеть, что $T\vec{\varphi} \in L_n^p(0, w)$. Подставляя соотношение (1.15) в правую часть (1.18) и меняя порядок интегрирования, выводим равенство $B_+(x, \lambda) = Te^{i\lambda Wx}$.

Тогда в силу (1.20) имеем $STe^{i\lambda Wx} = e^{i\lambda Wx}$. Значит, верна

Теорема 1.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и* $\gamma = 0$. *Если* $\vec{\varphi}(x) \in W_{q,n}^{(2)}$, то $ST\vec{\varphi} = \vec{\varphi}$.

Введем операторы $P(\vec{\varphi}) = \int\limits_0^w \vec{\varphi}'(t) W^{-1} M_1^*(t)\, dt$ и $Q(\vec{\varphi}) = \int\limits_0^w \vec{\varphi}'(t) \times$ $\times W^{-1} M_2^*(t)\, dt + \vec{\varphi}(0)$, переводящие элементы из $W_{q,n}^{(1)}$ в постоянные векторы. Тогда из формул (1.14), (1.21), (1.22) и теоремы 1.2 непосредственно вытекает

Следствие 1.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.2. Тогда уравнение (1.2) имеет решение вида*

$$\vec{f} = P(\vec{\varphi}) N_1(x) + Q(\vec{\varphi}) N_2(x) + O(1), \quad 0 \leqslant x \leqslant w. \tag{1.23}$$

Если дополнительно выполняются условия $P(\vec{\varphi}) = Q(\vec{\varphi}) = \vec{0}$, *то решение* $\vec{f}(x)$ *непрерывно, причем* $\vec{f}(0) = \vec{f}(w) = \vec{0}$.

3. В задачах дифракции [2] и рассеяния важную роль играет матрица-функция

$$\rho(\lambda, \mu) = \int\limits_0^w B(x, \lambda) e^{i\mu x W}\, dx, \tag{1.24}$$

которая выражается через функции одной переменной $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и

$$c(\lambda) = E_n + i\lambda \int\limits_0^w N_1(x) e^{i\lambda Wx}\, dx, \quad d(\lambda) = i\lambda \int\limits_0^w N_2(x) e^{i\lambda Wx}\, dx. \tag{1.25}$$

Имеет место следующая

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и* $\gamma = 0$. *Если уравнения* $S\vec{f} = \vec{0}$, $S^*\vec{f} = 0$ *имеют в* $L_n^p(0, w)$ *только тривиальные решения, то верны равенства*

$$a(\lambda) c(-\lambda) + b(\lambda) d(-\lambda) = 0; \tag{1.26}$$

$$\rho(\lambda, \mu) = -i[a(\lambda) c(\mu) + b(\lambda) d(\mu)]/(\lambda + \mu). \tag{1.27}$$

Доказательство. Из (1.16) следует соотношение

$$\int\limits_x^w v_{l,k}^-(x, t, \lambda)\, dt = \int\limits_0^{w_k(w-x)} e^{-i\lambda u} \Phi_{l,k}(x, u)\, du. \tag{1.28}$$

Из условия теоремы и первого равенства (1.20) выводим, что $B_-(x, \lambda) = 0$. В силу (1.19) и (1.28) имеем

$$\int\limits_0^{w_k(w-x)} e^{-i\lambda u} \Big[\Phi_{l,k}(x, u) - \int\limits_{x+u/w_k}^w N_2(t)_{l,k}\, dt\Big] du = 0. \tag{1.29}$$

Согласно (1.22) и (1.29) верно равенство

$$\int_{x}^{\min[w,\, x+w_l w/w_k]} Q_{l,\,k}\left(t,\ \frac{w_k}{w_l}(t-x)\right) dt \cdot 1/w_l - \int_{x}^{w} N_2(t)_{l,\,k}\, dt = 0. \quad (1.30)$$

Проводя для S^* такие же рассуждения, получим

$$\int_{x}^{\min\left[w,\ x+\frac{w_l}{w_k}w\right]} Q^*_{l,\,k}\left(\frac{w_k}{w_l}(t-x),\ t\right) dt \cdot 1/w_l - \int_{x}^{w} M_1(t)_{l,\,k}\, dt = 0. \quad (1.31)$$

Обратимся теперь к доказательству равенства (1.26). В силу (1.12), (1.25) справедливо соотношение

$$a(\lambda)\, c(-\lambda) + b(\lambda)\, d(-\lambda) = \lambda^2 \int_0^w \int_0^w e^{i\lambda t W} Q(x,\ t)\, dt e^{-i\lambda x W} dx +$$

$$+ i\lambda \int_0^w e^{i\lambda t W} M_1^*(t)\, dt - i\lambda \int_0^w N_2(t)\, e^{-i\lambda t W}\, dt. \quad (1.32)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_0^w \int_0^w e^{i\lambda(w_l t - w_k x)}\, Q_{l,\,k}(x,\ t)\, dt\, dx =$$

$$= \int_0^w e^{i\lambda x w_k} \int_0^{\min\left[w,\ x+\frac{w_l}{w_k}w\right]} Q_{l,\,k}\left(t,\ \frac{w_k}{w_l}(t-x)\right) dt\, dx\, \frac{w_k}{w_l} +$$

$$+ \int_{-\frac{w_l}{w_k}w}^{0} e^{-i\lambda x w_k} \int_0^{\min\left[w,\ x+\frac{w_l}{w_k}w\right]} Q_{l,\,k}\left(t,\ \frac{w_k}{w_l}(t-x)\right) dt\, dx\, \frac{w_k}{w_l}. \quad (1.33)$$

Из соотношений (1.29)—(1.33) следует

$$a(\lambda)\, c(-\lambda) + b(\lambda) = i\lambda \int_0^w [M_1^*(t) - N_2(t)]\, dt. \quad (1.34)$$

Так как $\gamma = 0$ и

$$\int_0^w [M_1^*(t) - N_2(t)]\, dt = (SN_2M_1) - (N_2S^*M_1), \quad (1.35)$$

то из (1.34), (1.35) вытекает доказываемое равенство (1.26). Из теоремы 1.1 и соотношений $\gamma = 0$, (1.24), (1.26) следует формула (1.27). Теорема доказана.

При условиях теоремы 1.1 из (1.21) и (1.30) выводим

$$T\vec{\varphi} = -\frac{d}{dx}\int_0^w \vec{\varphi}'(t)\, W^{-1}\Phi(x,\ t)\, dt + \vec{\varphi}(0)\, N_2(x). \tag{1.36}$$

При $p=2$, как и для систем с разностным ядром доказывается

Теорема 1.4. *Пусть оператор T ограничен вместе с обратным в $L_n^2(0,\ w)$. Для того чтобы оператор $S=T^{-1}$ имел вид (1.2), (1.3), необходимо и достаточно выполнение следующих условий.*

1) *Существуют матрицы $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1,\ 2)$ порядка n с элементами из $L^2(0,\ w)$ такие, что оператор T допускает представление*

$$T\vec{\varphi} = \frac{d}{dx}\int_0^w \vec{\varphi}(t)\, W^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,\ t)\, dt, \tag{1.37}$$

где $\Phi(x,\ t)$ определяется формулами (1.14), (1.22) и при каждом x элементы $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,\ t)$ принадлежат $L^2(0,\ w)$.

2) *Справедливо равенство (1.26), в котором $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ определены соотношениями (1.12), (1.25).*

§ 2. Примеры и приложения. 1. Задача дифракции на n лентах приводит к уравнению [2]

$$Sf = \frac{i}{4}\int_\Delta \sigma(t,\ \theta)\, H_0^{(1)}\ (k\,|\,x-t\,|)\, dt = \exp(ikx\sin\theta), \tag{2.1}$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля. Диаграмма рассеяния определяется формулой

$$\varphi(\theta,\ \theta') = \int_\Delta \sigma(t,\ \theta)\exp(-ikt\sin\theta')\, dt. \tag{2.2}$$

Как и при $n=1$ (см. [3]), система (1.2), (1.3), соответствующая (2.1), удовлетворяет условиям теоремы 1.3.

Полагая $\lambda = k\sin\theta$, $\mu = k\sin\theta'$, выпишем связь между $\varphi(\theta,\ \theta')$ и $\rho(\lambda,\ \mu)$:

$$\varphi(\theta,\ \theta') = -i\varkappa(\lambda)\,\rho(\lambda,\ -\mu)\,\varkappa^{\tau}(-\mu), \tag{2.3}$$

где $\varkappa(\lambda) = [e^{i\lambda a_1}\sqrt{w_1},\ \dots,\ e^{i\lambda a_n}\sqrt{w_n}]$.

Формулы (1.27), (2.3) вскрывают аналитическую структуру диаграммы рассеяния. Оказывается, что эта функция $\varphi(\theta\ \ \theta')$ двух переменных θ и θ' выражается через матрицы-функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ одной переменной, при этом выполняется соотношение (1.26).

2. Запишем теперь уравнение

$$Sf = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta} f(t)\,[\ln|x-t| + r(x-t)]\,dt = 1, \quad x\in\Delta; \qquad (2.4)$$

$$r(x) = \overline{r(x)}, \quad r(x) = r(-x), \quad r'(x)\in H_\alpha, \qquad (2.5)$$

где H_α — класс Гельдера с показателем α.

Из теории интегралов Коши легко выводится

Лемма 2.1. *Любое решение $f(x)$ уравнения (2.4) (2.5), принадлежащее $L^p(\Delta)$, непрерывно в интервалах (a_j, b_j) и допускает представление*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha(k)}{\sqrt{|x-a_k|}} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\beta(j)}{\sqrt{|b_j-x|}} + g(x), \quad x\in\Delta, \qquad (2.6)$$

где $g(x)$ — непрерывная на Δ — функция.

Доопределим $f(x)$ на всем отрезке $[a_1, b_m]$ равенством: $f(x) = 0$ при $x\in[a_1, b_m]/\Delta$. Положим теперь

$$\lambda(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_m} f(t)\,[\ln|x-t| + r(x-t)]\,dt, \quad x\in[a_1, b_m]. \quad (2.7)$$

Задача об оптимальной форме судна [5] и другие экстремальные задачи приводят к уравнению (2.4) и дополнительным условиям

$$f(x) = f(b_m + a_1 - x), \quad f(x)\geqslant 0, \quad \lambda(x)\geqslant 1, \quad x\in[a_1, b_m]. \quad (2.8)$$

Оператор S в этих задачах таков, что

$$(Sf, f) > 0 \text{ при } \|f\|_p \neq 0. \qquad (2.9)$$

При условиях (2.8), (2.9) представление (2.6) может быть существенно уточнено.

Теорема 2.1. *Пусть оператор S вида (2.4) удовлетворяет условиям (2.5), (2.9). Если решение $f(x)$ удовлетворяет требованиям (2.8), то*

$$f(x) = \frac{Q}{\sqrt{(x-a_1)(b_m-x)}} + g(x), \qquad (2.9')$$

где $Q\neq 0$, $g(x)$ — непрерывная на отрезке $[a_1, b_m]$ функция. При этом

$$f(a_k) = 0, \quad 1 < k \leqslant m; \quad f(b_k) = 0, \quad 1\leqslant k < m. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Функция $\lambda(x)$ в силу (2.6) непрерывна на участке $[a_1, b_m]$ и

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta} f(t)\left[\frac{1}{x-t} + r'(x-t)\right]dt, \quad x\in(b_k, a_{k+1}), \quad 1\leqslant k < m,$$

откуда выводим

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta} f(t)\frac{1}{x-t}\,dt + O(1), \quad x\to b_k+0. \tag{2.11}$$

Если $\lim \lambda'(x) = -\infty$ при $x\to b_k+0$, то $\lambda'(x) < 0$ при x, достаточно близких к b_k. Значит, $1=\lambda(b_k) > \lambda(x)$, что противоречит условию $\lambda(x)\geqslant 1$. Из (2.10) следует тогда

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} f(t)\frac{1}{x-t}\,dt = O(1), \quad x\to b_k+0, \quad 1\leqslant k< m. \tag{2.12}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} f(t)\frac{1}{x-t}\,dt = O(1), \quad x\to a_k-0, \quad 1< k\leqslant m. \tag{2.13}$$

Из (2.6) и (2.12), (2.13) вытекает

$$\alpha(k)=0, \quad 1<k\leqslant m; \quad \beta(k)=0, \quad 1\leqslant k<m. \tag{2.14}$$

Из условия $f(x) = f(b_m+a_1-x)$ вытекает

$$\alpha(1)=\beta(m). \tag{2.15}$$

Как и при $n=1$ (см. [3]), доказывается, что $f(x)\,\overline{\in}\,L^q(\Delta)$. Значит, $\alpha(1)\neq 0$. Теперь из (2.6), (2.14) и (2.15) при $Q=\alpha(1)(b_m-a_1)$ получаем представление (2.9). Из неотрицательности $f(t)$ и соотношений (2.12), (2.13) вытекает (2.10). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Решение рассматриваемой экстремальной задачи таково, что в силу (2.10) всем промежуточным судам каравана и только им соответствуют реальные формы.

3. В ряде прикладных задач [1, 2], а также в теории устойчивых вероятностных процессов существенную роль играет уравнение

$$Af = -\frac{d}{dx}S\frac{d}{dx}f = \varphi(x), \quad x\in\Delta. \tag{2.16}$$

Область определения $\boldsymbol{D}(A)$ оператора A состоит из абсолютно непрерывных функций $f(x)$ таких, что

$$\frac{d}{dx}Sf\in L^p(\Delta), \quad f(a_k)=f(b_k)=0, \quad 1<p, \quad 1\leqslant k\leqslant m. \tag{2.17}$$

Остановимся на частном случае уравнения Прандтля, когда

$$Sf = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta} f(t)\ln|x-t|\,dt, \quad x\in\Delta. \tag{2.18}$$

Положим теперь

$$R(z) = \Big[\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)(z-b_k)\Big]^{1/2}. \tag{2.19}$$

Под радикалом понимаем ту ветвь, для которой

$$\lim z^{-m} R(z) = 1, \quad z \to \infty. \tag{2.20}$$

Предельные значения $R^{\pm}(t) = \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} R(z)$ $(z = t + i\sigma)$ удовлетворяют соотношениям

$$R^{+}(t) = -R(t), \quad t \in \Delta; \quad R^{+}(t) = R^{-}(t), \ t \in \Delta. \tag{2.21}$$

Верно утверждение [4, 7]: если $\varphi(x) \in L^{p}(\Delta)$ $(1 < p)$, то совокупность решений уравнения (2.16), (2.18) описывается равенством

$$f'(x) = \frac{1}{\pi R^{+}(x)} \int\limits_{\Delta} \frac{R^{+}(t)}{t-x} \varphi(t)\, dt + \frac{P_{m-1}(x)}{R^{+}(x)}, \tag{2.22}$$

где $x \in \Delta$, $P_{m-1}(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_{m-1} x^{m-1}$. В силу условий $f(a_k) = 0$ из (2.22) при $a_k \leqslant x \leqslant b_k$ получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a_k}^{x} \frac{1}{R^{+}(t)} \int\limits_{\Delta} \frac{R^{+}(u)}{u-t} \varphi(u)\, du\, dt + \int\limits_{a_k}^{x} \frac{P_{m-1}(u)}{R^{+}(u)}\, du. \tag{2.23}$$

Учитывая условия $f(b_k) = 0$, из (2.23) выводим

$$\sum_{l=1}^{m} c_l \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{u^{l-1}}{R^{+}(u)}\, du = \varphi_k, \tag{2.24}$$

где

$$\varphi_k = \int\limits_{\Delta} \varphi(u)\, r_k(u)\, R^{+}(u)\, du, \quad r_k(u) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{dt}{R^{+}(t)(u-t)}. \tag{2.25}$$

Существенную роль в дальнейшем играет матрица

$$\Gamma = \{\gamma_{l,k}\}_{l,k=1}^{m}, \quad \gamma_{l,k} = \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{u^{l-1}}{R^{+} u}\, du. \tag{2.26}$$

Лемма 2.2. *Справедливо неравенство*

$$\det \Gamma \neq 0. \tag{2.27}$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого многочлена $Q(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots + \alpha_m u^{m-1}$ верны равенства

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{Q(u)}{R^{+}(u)}\, du = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2.28}$$

Легко видеть, что $\arg R^+(u)$ является постоянным на каждом из отрезков $[a_k, b_k]$. Значит, из (2.27) следуют равенства

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{Q_r(u)}{|R^+(u)|} du = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad r = 1, 2, \tag{2.29}$$

где $Q_r(u)$ — вещественные многочлены и $Q(u) = Q_1(u) + iQ_2(u)$. Из (2.28) вытекает, что многочлены $(m-1)$ степени $Q_1(u)$, $Q_2(u)$ обращаются в нуль на каждом из сегментов $[a_k, b_k]$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, т. е. $Q_r(u) \equiv 0$. Значит, $Q(u) \equiv 0$. Откуда вытекает утверждение леммы.

Из (2.21) и формул Сохоцкого — Племеля вытекает

$$\sum_{k=1}^{m} r_k(u) = 0, \quad u \in \Delta. \tag{2.30}$$

Функции $r_k(u)$ бесконечно дифференцируемы при $u \in \Delta/[a_k, b_k]$. Из (2.30) следует бесконечная дифференцируемость $r_k(u)$ при $u \in \Delta$.

Из соотношений (2.24), (2.25) выводим:

$$[c_1, c_2, \ldots, c_m] = \int_{\Delta} \varphi(u) R^+(u) [r_1(u), r_2(u), \ldots, r_m(u)] \, du \Gamma^{-1}. \tag{2.31}$$

Заметим, что матрица Γ обратима. Введем на Δ функции

$$q_l(x) = \int_{a_k}^{x} \frac{u^{l-1}}{R^+(u)} du, \quad a_k \leqslant x \leqslant b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2.32}$$

Формула (2.23) согласно выражениям (2.31), (2.32) принимает вид

$$f(x) = B\varphi = \int_{\Delta} \varphi(t) B(x, t) \, dt, \quad x \in \Delta, \tag{2.33}$$

где ядро $B(x, t)$ оператора B определяется формулами:

$$B(x, t) = B_1(x, t) + B_2(x, t); \tag{2.34}$$

$$B_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{x} \frac{1}{R^+(u)(t-u)} du \, R^+(t), \; a_k \leqslant x \leqslant b_k; \; 1 \leqslant k \leqslant m; \tag{2.35}$$

$$B_2(x, t) = R^+(t) [r_1(t), r_2(t), \ldots, r_m(t)] \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \cdots \\ q_m(x) \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Итак, доказана

Теорема 2.2. *Если $\varphi(x) \in L^r(\Delta)$ $(1 < p < r \leqslant 2)$, то уравнение (2.16)—(2.18) имеет в $\boldsymbol{D_A}$ одно и только одно решение $f(x) = B\varphi$.*

При $m=1$ ядро $B(x, t)$ было известно ранее. При любом $q>1$ верно неравенство

$$\sup_{x\in\Delta}\int_{\Delta}|B(x, t)|^q\,dt<\infty.$$

Значит, оператор B ограничен во всех пространствах $L^p(\Delta)$ ($p>$ >1). Оператор A, определенный формулами (2.16)—(2.18), в $L^2(\Delta)$ является симметрическим и в силу теоремы 2.2 имеем

$$AB\varphi=\varphi,\quad \varphi\in L^2(\Delta), \tag{2.37}$$

Значит, операторы A и B — самосопряженные. Если $f\in \boldsymbol{D}_A$, то $(Af, f)=(Sf' f')$. Так как $(S\varphi, \varphi)\geqslant 0$ при $(\varphi, 1)=0$, то $(Af, f)\geqslant$ $\geqslant 0$. Следовательно, операторы A и B неотрицательны. Пусть $\lambda_n(B)$ — спектр оператора B, перенумерованный в порядке убывания.

Теорема 2.3. *Верно асимптотическое равенство*

$$\lambda_n(B)=\frac{\operatorname{mes}\Delta}{\pi n}[1+o(1)],\quad n\to\infty. \tag{2.38}$$

При $m=1$ этот факт известен [6]. Общий случай легко вытекает из этого частного случая, если воспользоваться формулами для ядра $B(x, t)$ (2.34)—(2.36).

Следствие 2.1. *Спектр оператора Прандтля A, перенумерованный в порядке возрастания, удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$\lambda_n(A)=\frac{\pi n}{\operatorname{mes}\Delta}[1+o(1)],\quad n\to\infty. \tag{2.39}$$

В заключение отметим, что другой метод восстановления обратного оператора по частичной информации предложен А. Б. Нерсесяном [7]. В качестве одного из примеров рассмотрена система (1.1), где $\mu=1$ и

$$k(v, u)=\{k_{l,m}(w_m v-w_l u)\}_{l,m=1}^{n}.$$

Список литературы

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи.— М.: Наука, 1983.— 187 с.

2. *Хенл X., Мауэ Л., Вестпфаль К.* Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.—285 с.

3. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке. — Успехи мат. наук, 1980, **35**, вып **4**, с. 69—129.

4. *Сахнович Л. А.* Системы уравнений с разностным ядром. — Укр. мат. журн., 1980, **32**, с. 61—68.

5. *Крейн М. Г., Сизов В. Т.* О нестандартных вариационных задачах определения оптимальной формы судна. — В кн.: Крыловские чтения: Тез. докл., 1980, с. 123—125.

6. *Коган Х. М., Сахнович Л. А.* Асимптотика спектра одного сингулярного интегро-дифференциального оператора. — Дифференц. уравнения, 1980, 33, вып. 2, с. 63—69 .

7. *Нерсесян А. Б.* Структура резольвент некоторых интегральных операторов. — Изв. АН АрмССР, 1982, **17**, № 6, с. 442—463.

Поступила в редколлегию 28.11.83.