УДК 513.881

А. В. ТОГЕР

ОБ ε-ЭНТРОПИИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА ГЕЛЬДЕРОВА ПРОСТРАНСТВА $H_p^{k,\varphi}$ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

1°. Рассмотрим гельдерово пространство $H_p^{k,\varphi}(Q) = \left\{ f \in L_p(Q) : \|f\|_{H_p^{k,\varphi}} = \|f\|_{L_p} + \sup\limits_{\tau > 0} \frac{\omega_k(f;\ \tau)_{L_p}}{\varphi(\tau)} < +\infty \right\}$, где $Q = [0,\ 1]^n$ — единичный n-мерный куб в R^n, $\|f\|_{L_p} = \left\{ \int\limits_Q |f|^p\, dx \right\}^{1/p}$ (с обычным видоизменением при $p = \infty$), $\omega_k(f;\ \tau)_{L_p} = \sup\limits_{|h| \leqslant \tau} \times \|\Delta_h^k f\|_{L_p(Q_h)}$ — интегральный модуль непрерывности k-го порядка (здесь Q_h обозначает область определения функции $x \to \Delta_h^k(f;\ x)$; $\varphi(\tau)$ — функция, определенная на R_+^1, полуаддитивная и равная нулю в нуле.

Ю. А. Брудному принадлежит оценка ε-энтропии образа $SH_p^{k,\varphi}$* в пространстве L_p (см. [3]):

$$H_{c_1\varepsilon}(SH_p^{k,\varphi};\ L_p) \leqslant c_2 \left(\frac{1}{\varphi^{-1}(\varepsilon)} \right)^n, \tag{1}$$

где $\varphi^{-1}(\varepsilon) = \sup\{\tau : \varphi(\tau) \leqslant \varepsilon\}$ — функция, обратная к $\varphi(\tau)$; c_1, c_2 — положительные постоянные, не зависящие от ε.

В известной работе М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [1] на основе оценки скорости кусочно-полиномиальной аппроксимации получена оценка ε-энтропии единичного шара пространства $W_p^\lambda(Q)$** С. Л. Соболева—Л. Н. Слободецкого, вложенного в пространство L_q, $p < q \leqslant \infty$, $\lambda > \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$:

$$H_\varepsilon(SW_p^\lambda;\ L_q) = O\left(\varepsilon^{-\frac{n}{\lambda}}\right). \tag{2}$$

Настоящая заметка посвящена обобщению этого результата М. Ш. Бирмана—М. З. Соломяка; будет показано, что при неко-

---

* Здесь и ниже через SX обозначается единичный шар банахова пространства X.

** Напомним, что пространство W_p^λ при целом $\lambda < k$ есть пространство С. Л. Соболева, а при $\lambda < k$ нецелом — пространство Н. Ароншайна—Л. Н. Слободецкого, которое изоморфно пространству B_p^λ О. В. Бесова, определяемому с помощью полунормы $\left\{ \int\limits_0^1 |\omega_k(f;\ \tau)/\tau^k|^p \frac{d\tau}{\tau} \right\}^{1/p}$.

торых ограничениях на функцию φ можно при $p < q \leqslant \infty$ заменить в левой части (1) L_p на L_q. При доказательстве наряду с оценкой (2) используются некоторые факты теории интерполяционных пространств, принадлежащие Ж.—Л. Лионсу и Ж. Петре [6], Ж. Петре [9], Б. С. Митягину [7] и Ю. А. Брудному [4].

2°. Прежде, чем сформулировать результат, предположим, что относительно функции φ выполнены следующие два условия.

Условие (А). При некотором $\lambda > 0$, удовлетворяющем неравенству $\lambda > \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$, функция $\tau^{-\lambda}\varphi(\tau)$ возрастает с ростом τ*.

Условие (Б). При некотором $\lambda_1 < k$ функция $\tau^{-\lambda_1}\varphi(\tau)$ почти убывает**.

Теорема. *При выполнении условий (А) и (Б) справедливо следующее неравенство:*

$$H_{c_1\varepsilon}(SH_p^{k,\varphi};\ L_q) \leqslant c_2\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\right)^n,$$

где положительные постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε.

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые понятия теории интерполяционных пространств.

Пусть A_0, A_1 — банаховы пространства, образующие интерполяционную пару (т. е. непрерывно вложенные в некоторое хаусдорфово линейное топологическое пространство $\mathscr{X}$). Пусть кроме того, $A_1 \subset A_0$ — вполне непрерывное вложение, т. е. образ единичного шара SA_1 компактен в A_0.

Положим

$$N(\varepsilon;\ A_1,\ A_0) = \inf\{N;\ \exists f_1, \ldots, f_N \in A_0, \forall f \in SA_1 : \inf_{1 \leqslant i \leqslant N} \rho(f, f_i) < \varepsilon\},$$

$$M(\varepsilon;\ A_1,\ A_0) = \sup\{M;\ \exists f_1, \ldots, f_M \in SA_1 : \inf_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i;\ j \leqslant M}} \rho(f_i,\ f_j) \geqslant \varepsilon\}.$$

Двоичные логарифмы величин $N(\varepsilon;\ A_1,\ A_0)$ и $M(\varepsilon;\ A_1,\ A_0)$ соответственно называются ε-энтропией SA_1 относительно A_0 и ε-емкостью SA_1 [5].

Пусть A — банахово пространство такое, что $A_1 \subset A \subset A_0$.

Будем говорить (Ж.—Л. Лионс—Ж. Петре [6]), что банахово пространство A имеет тип θ относительно пространств A_1 и A_0, $0 < \theta < 1$, если для $0 < t < +\infty$

$$K(t,\ f;\ A_1,\ A_0) = \inf\max(\|f_0\|_{A_0},\ t\|f_1\|_{A_1}) \leqslant ct^{\theta}\|f\|_A, \tag{3}$$

где нижняя грань берется по всем f, представимым в виде $f =$

---

* В этом случае в силу теоремы вложения С. М. Никольского [8], образ единичного шара $SH_p^{k,\varphi}$ в пространстве L_q компактен.

** Функция $\varphi(\tau)$ почти убывает, если для некоторого $\gamma > 0$ и произвольных $\tau_1 < \tau_2$ справедливо неравенство

$$\varphi(\tau_1) \leqslant \gamma\varphi(\tau_2).$$

$=f_0+f_1$, $f_0 \in A_0$, $f_1 \in A_1$, а c — положительная постоянная, не зависящая от f и t.

Величина $K(t, f; A_1, A_0)$ носит название K-функционала Петре. В работе [6, гл. V] показано, что если пространство A имеет тип θ, то соответствующие вложения вполне непрерывны.

В дальнейшем важную роль играет следующее свойство полумультипликативности ε-энтропии.

Лемма 1. (Б. С. Митягин [7])*. *Пусть $A_1 \subset A \subset A_0$, $\varepsilon=\varepsilon'\varepsilon''$. Тогда справедливо неравенство* $N(\varepsilon; A_1, A_0) \leqslant N(\varepsilon'; A, A_0) \times \times N(\varepsilon''; A_1, A)$.

Пусть $(A_0, A_1)_{\psi; K}$ обозначает промежуточное пространство между двумя данными пространствами A_0 и A_1, построенное с помощью K-метода Петре. Ю. А. Брудный показал [4], что пространство $H_p^{k, \varphi}$ является промежуточным между двумя соболевскими пространствами $W_p^{\lambda_0}$ и $W_p^{\lambda_1}$ при подходящем выборе чисел λ_0 и λ_1.

Лемма 2. (Ю. А. Брудный [4]). *При выполнении условий (А) и (Б) имеет место изоморфизм $H_p^{k, \varphi}=(W_p^{\lambda_0}, W_p^{\lambda_1})_{\psi, K}$, где числа $\bar{\lambda}_0$ и λ_1 удовлетворяют неравенствам $\frac{n}{p}-\frac{n}{q}<\bar{\lambda}_0<\lambda_0<$ $<\lambda_1<\bar{\lambda}_1<k$ и $\|f\|_{(W_p^{\bar{\lambda}_0}, W_p^{\bar{\lambda}_1})_{\psi, K}}=\|K(*, f; W_p^{\bar{\lambda}_0}, W_p^{\bar{\lambda}_1})\|_\psi$; здесь ψ обозначает банахову решетку измеримых (классов) функций, заданных на R^n, с нормой*

$$\|f\|_\psi=\frac{t^{\theta_0}\,|f(t^{\theta_1-\theta_0})|}{\varphi(t^{1/K})},$$

где $\theta_i=\frac{\bar{\lambda}_i}{k}$, $i=0, 1$.

С помощью леммы 1 и 2 получаем: $H_\varepsilon(SH_p^{k, \varphi}; L_q) \leqslant$ $\leqslant H_{\varepsilon'}(SH_p^{k, \varphi}; W_p^{\bar{\lambda}_0})+H_{\varepsilon''}(SW_p^{\bar{\lambda}_0}; L_q)$.

Второе слагаемое в правой части (4), с учетом (2), оценивается следующим образом:

$$H_{\varepsilon''}(SW_p^{\bar{\lambda}_0}; L_q)=O\left(\varepsilon''^{-\frac{n}{\bar{\lambda}_0}}\right). \tag{5}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (4).

Лемма 3. *Справедливо неравенство $H_{c_1\varepsilon}(SH_p^{k, \varphi}, W_p^{\bar{\lambda}_0}) \leqslant c_2 \times$ $\times\left(\frac{1}{\Phi^{-1}(\varepsilon)}\right)^n$, где положительные постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε и $\Phi^{-1}(\varepsilon)$ есть функция, обратная к $\varphi(\tau)\tau^{-\bar{\lambda}_0}$.*

---

* Лемма приводится в форме (приспособленной для целей интерполяции), предложенной в работе Ж. Петре [9].

Доказательство леммы 3. Произведя замену переменной $z=t^{1/k}$, получим $t^{\theta_0}=z^{\bar\lambda_0}$, $t^{\theta_1}=z^{\bar\lambda_1}$, $\varphi(t^{1/k})=\varphi(z)$; полагая $A_0=W_p^{\bar\lambda_0}$, $A_1=W_p^{\bar\lambda_1}$, имеем с учетом (3):

$$\inf\max\left(z^{\bar\lambda_0}\|f_0\|_{W_p^{\bar\lambda_0}},\ z^{\bar\lambda_1}\|f_1\|_{W_p^{\bar\lambda_1}}\right)\leqslant\gamma\varphi(z)\|f\|_{H_p^{k,\varphi}},\tag{6}$$

где нижняя грань берется по всем функциям f, представимым в виде $f=f_0+f_1$, $f_0\in W_p^{\bar\lambda_0}$, $f_1\in W_p^{\bar\lambda_1}$.

Пусть теперь $f\in SH_p^{k,\varphi}$, выберем постоянную $\gamma'>\gamma$. Тогда в силу (6), существуют функции $f_0\in W_p^{\bar\lambda_0}$ и $f_1\in W_p^{\bar\lambda_1}$ такие, что $\|f_0\|_{W_p^{\bar\lambda_0}}\leqslant\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)$, $\|f_1\|_{W_p^{\bar\lambda_1}}\leqslant\gamma' z^{-\bar\lambda_1}\varphi(z)$.

Из определения величины $N=N(\varepsilon;\ W_p^{\bar\lambda_1},\ W_p^{\bar\lambda_0})$ следует, что существуют такие элементы $f_{11},\dots,f_{1N}\in W_p^{\bar\lambda_0}$; $N=N\left(\frac{\varepsilon}{\gamma' z^{-\bar\lambda_1}\varphi(z)};\ W_p^{\bar\lambda_1},\ W_p^{\bar\lambda_0}\right)$, не зависящие от z, что $\inf\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\|f_1-f_{1j}\|_{W_p^{\bar\lambda_0}}<\varepsilon$.

Следовательно, $\inf\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\|f-f_{1j}\|_{W_p^{\bar\lambda_0}}<\varepsilon+\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)=\varepsilon_0$, откуда получаем $H_{\varepsilon_0}(SH_p^{k,\varphi};\ W_p^{\bar\lambda_0})\leqslant H_{\tilde\varepsilon}(SW_p^{\bar\lambda_1};\ W_p^{\bar\lambda_0})$, где $\tilde\varepsilon=\frac{\varepsilon_0-\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)}{\gamma' z^{-\bar\lambda_1}\varphi(z)}$.

Для завершения доказательства леммы 3 минимизируем правую часть неравенства, которая в силу результата статьи [1] не превышает $\gamma_0\tilde\varepsilon^{-\frac{n}{\bar\lambda_1-\bar\lambda_0}}$.

Обозначим через $\Phi(z)$ функцию, обратную к $z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)$, и в качестве z выберем число $z=\Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}\right)$, т. е. z выбираем из уравнения $z=\Phi\left(\frac{\varepsilon-\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)}{2\gamma}\right)$, которое легко приводится к виду: $z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)=\varepsilon-\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)$.

Следовательно,
$$\frac{\varphi(z)}{z^{\bar\lambda_0}}=\frac{\varepsilon}{1+\gamma'}.\tag{7}$$

В силу условия (A) уравнение (7) при ε, меньшем некоторого фиксированного $\varepsilon^*>0$, всегда имеет единственное решение.

Положим $\Phi^{-1}\left(\tilde\varepsilon^{\frac{1}{\bar\lambda_1-\bar\lambda_0}}\right)=\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}$, тогда $\tilde\varepsilon^{-\frac{\bar\lambda_0}{\bar\lambda_1-\bar\lambda_0}}\varphi\left(\tilde\varepsilon^{\frac{1}{\bar\lambda_0-\bar\lambda_1}}\right)=\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}$, откуда $\varepsilon_0=2\gamma\Phi^{-1}(z)=2\gamma z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)$.

Следовательно,

$$\tilde\varepsilon=\frac{2\gamma z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)-2\gamma' z^{-\bar\lambda_0}\varphi(z)}{\gamma' z^{-\bar\lambda_1}\varphi(z)}=\frac{2(\gamma-\gamma')}{\gamma'}z^{-(\bar\lambda_0-\bar\lambda_1)}=O(1)\,z^{\bar\lambda_0-\lambda_0},$$

откуда $\tilde{\varepsilon} = O(1)\,\Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{\bar\lambda_1-\lambda_1}}$, и при таком выборе z имеем:

$$H_{\varepsilon_0}(SH_p^{k,\varphi};\ W_p^{\bar\lambda_0}) \leqslant \gamma_0 \left\{\Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}\right)^{\bar\lambda_1-\lambda_0}\right\}^{-\frac{n}{\bar\lambda_1-\bar\lambda_0}} = \gamma_0 \left\{\frac{1}{\Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)}\right\}^n. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon \to 0$ ε_0 также стремится к нулю. Поэтому, увеличивая в случае необходимости постоянную в правой части (8), можно считать, что неравенство выполняется для любого ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant 1$. Лемма доказана.

Теперь с учетом (5) и (9) получаем

$$H_{2\gamma\varepsilon}(SH_p^{k,\varphi};\ L_q) \leqslant \gamma_0 \left\{\left(\frac{2}{\Phi\left(\frac{\varepsilon'}{2\gamma}\right)}\right)^n + \gamma_1(\varepsilon'')^{-\frac{n}{\bar\lambda_0}}\right\}. \quad (9)$$

Выберем при заданном $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon'' = \varphi^{-1}(\varepsilon)^{\bar\lambda_0}, \quad \varepsilon' = \frac{2\gamma\varepsilon}{\varphi^{-1}(\varepsilon)^{\lambda_0}}.$$

Подсчитаем $\Phi\left(\frac{\varepsilon'}{2\gamma}\right)$. Для этого положим $u = \varphi^{-1}(\varepsilon)$ и в силу выбора ε' и Φ имеем:

$$\Phi\left(\frac{2\gamma\varepsilon}{2\gamma\varphi^{-1}(\varepsilon)^{\lambda_0}}\right) = \Phi\left(\frac{\varphi(u)}{u^{\bar\lambda_0}}\right) = \Phi(u^{-\bar\lambda_0}\varphi(u)) = u = \varphi^{-1}(\varepsilon). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем окончательно:

$$H_{c\varepsilon}(SH_p^{k,\varphi};\ L_q) \leqslant \gamma_0\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\right)^n + \gamma_1(\varphi^{-1}(\varepsilon)^{\bar\lambda_0})^{-\frac{n}{\bar\lambda_0}} \leqslant \gamma_2\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\right)^n.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1) Поскольку при $\varphi(\tau) = \tau^\lambda$, $0 < \lambda \leqslant k$, пространство $H_p^{k,\varphi}$ изоморфно пространству H_p^λ С. М. Никольского, а это последнее, в свою очередь, содержит в себе остальные пространства функций, имеющих обобщенную гладкость порядка λ, то из доказанной теоремы можно получить в качестве следствия упомянутый выше результат М. Ш. Бирмана—М. З. Соломяка, а также оценки ε-энтропии единичных шаров пространств B_p^λ, H_p^λ, и других, вложенных в пространство L_q.

2) Способ доказательства после некоторой модификации применим и в анизотропном случае, когда рассматривается пространство $H_p^{\bar k,\bar\varphi}$, где $\bar k = (k_1, \ldots, k_n;$ k_i — натуральные числа; $\bar\varphi(\tau)$ — вектор-функция, компоненты которой $\varphi_i(\tau)$ полуаддитивны и равны нулю в нуле. В этом случае при доказательстве используются оценки ε-энтропии анизотропных соболевских и гельдеровых классов, полученные в [2] и [10].

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. А. Брудному за помощь в работе и постоянное внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α.— «Мат. сб.», 1967, т. 73 (115), с. 333—355.
2. Борзов В. В. Некоторые применения теорем о кусочно-полиномиальных аппроксимациях функций анизотропных классов $W^r{}_p$.— «Проблемы математической физики», 1973, вып. 6, с. 53—67.
3. Брудный Ю. А. Об одной аппроксимационной лемме и ее применениях.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1972, вып. 16, с. 180—189.
4. Брудный Ю. А. Сплайн-аппроксимация и функции ограниченной вариации.—«Докл. АН СССР», 1984, т. 215, № 3, с. 511—513.
5. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— УМН, 1959, т. 14, вып. 2 (86), с. 3—86.
6. Lions T.—L., Peetre T. Sur une classe d'interpolation.— «Publ. Math. Inst. Hantes Etudes Sci.», 1964, vol. 19, p. 5—68.
7. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы ядерных пространств.—УМН, 1961, т. 16, вып. 4 (100), с. 63—132.
8. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969. 480 с.
9. Peetre T. ε-entropy, ε-capacite et espaces d'interpolation.— «Ricerche Math.», 1968, vol. 17, p. 216—220.
10. Тогер А. В. ε-энтропия компактов функций со значениями в банаховом пространстве.— «Метрические вопросы теории функций и отображений», 1973, Киев, «Наукова думка», вып. 4, с. 148—164.

Поступила 8 мая 1975 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье «О дефектах целых функций вполне регулярного роста» (сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14, 1971, с. 88—101) во втором утверждении теоремы 2 пропущено условие: $\rho > {}^1/_2$. Хорошо известно, что целые функции порядка $\rho \leqslant {}^1/_2$ не имеют конечных дефектных значений. Поэтому при $\rho \leqslant {}^1/_2$ достаточная часть указанного утверждения верна, но тривиальна, а необходимая ошибочна. Источником ошибки является высказывание о $M(\psi)$ на с. 96, верное лишь при $\rho > {}^1/_2$. Благодарю А. А. Кондратюка, указавшего на эту ошибку.

А. А. ГОЛЬБЕРГ