ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. Д. Мышкис

Здесь будут высказаны некоторые соображения о решениях дифференциальных неравенств, полезные при исследовании ряда конкретных задач. Было бы интересно провести общее рассмотрение поднятых здесь вопросов.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается дифференциальное неравенство вида

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в n-мерном вещественном эвклидовом пространстве. Мы для простоты будем предполагать, что функция $F(t, x, y)$ определена во всем $2n+1$-мерном пространстве t, x, y и при каждых t, x неравенство $F(t, x, y) \geqslant 0$ определяет в n-мерном пространстве y *непустое замкнутое ограниченное множество* $E_{t,x}$, *непрерывно зависящее от* t, x. Последнее понимается в смысле Помпейю и Хаусдорфа (см., например, [1], стр. 166), то есть означает, что для любых t, x и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t, x) > 0$, что если $|t' - t| < \delta$, $|x' - x| < \delta$, то $E_{t,x} \subset U(E_{t',x'}, \varepsilon)$, $E_{t',x'} \subset U(E_{t,x}, \varepsilon)$, где под U обозначена окрестность. Кроме того, в параграфе 2 будет указано еще одно требование, которое, по-видимому, не является существенным. Естественно, что задание неравенства (1) полностью равносильно заданию множеств $E_{t,x}$. Отметим, что условие ограниченности этих множеств исключает односторонние неравенства типа Чаплыгина (о которых написано много работ), хотя и для них некоторые высказываемые здесь соображения могут оказаться полезными.

Решение неравенства (1) будет пониматься «в классическом смысле», как непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на некотором интервале и удовлетворяющая всюду на нем неравенству (1). (Обобщенное решение, основанное на понятии контингенции, в данном случае вряд ли целесообразно вводить; однако для замыкания интегральной воронки может понадобиться обобщенное решение, основанное на переходе к выпуклым оболочкам множеств $E_{t,x}$, хотя эти вопросы требуют особого исследования).

Целью работы является рассмотрение таких решений. Эта задача близка к еще недостаточно изученной задаче о исследовании решений так называемых уравнений в контингенциях и паратингенциях (см. [2], стр. 122, где указаны дальнейшие источники; отметим также более поздние работы Белецкого [3] и [4]), однако имеются и отличия. Имеется также связь с работами по динамическим системам без единственности (см. работу М. И. Минкевича [5], где указаны дальнейшие источники, а также [6]).

Неравенство (1) специального вида рассмотрено в работе Хукухары [7]. В. Э. Кацнельсон указал мне на работу Е. А. Барбашина и Ю. И. Алимова [8], в которой содержится совершенно иной подход к таким неравенствам.

§ 2. Дополнительное требование

Будем дополнительно требовать, чтобы при любых t_0, x_0, y_0, где $y_0 \in E_{t_0, x_0}$, существовала непрерывная функция $y = \varphi(t, x)$, определенная для всех t, x и такая, что $y_0 = \varphi(t_0, x_0)$ и $\varphi(t, x) \in E_{t,x}$ при любых t, x.

Для конкретных неравенств (1) такую функцию φ обычно бывает нетрудно указать явно. В общем случае существование такой функции при определенных предположениях должно было бы вытекать из какой-то общей топологической теоремы о существовании непрерывной однозначной ветви у непрерывной многозначной функции с компактными значениями («непрерывный аналог аксиомы Цермело»).

Укажем два важных частных случая, для которых функция φ заведомо существует. Пусть сначала множество $E_{t,x}$ получается из некоторого фиксированного множества E с помощью отображения $\chi_{t,x}$, непрерывно зависящего от параметров t, x (например, как это часто бывает, отображение $\chi_{t,x}$ может состоять из параллельного переноса и равномерного сжатия вдоль осей координат). Тогда, выбрав точку $\bar{y}$, для которой $\chi_{t_0, x_0}(\bar{y}) = y_0$, можно просто положить $\varphi(t, x) = \chi_{t,x}(\bar{y})$.

Рассмотрим другой частный случай *«гладкого» неравенства* (1), когда функция F непрерывно дифференцируема, причем множества $F(t, x, y) = 0$ и $|\operatorname{grad}_y F| = 0$ не имеют общих точек. (Возможно, что этот пример является частным случаем предыдущего, хотя доказательство этого нам неизвестно). Подберем непрерывно дифференцируемые скалярную функцию $A(t, x, y)$ и векторную функцию $\Phi(t, x, y)$ так, чтобы на множестве $\{F = 0\}$ пространства t, x, y было

$$A(t, x, y) \geqslant 2|\operatorname{grad}_{t,x} F| \cdot |\operatorname{grad}_y F|^{-2}, \quad |\Phi(t,x,y) - \operatorname{grad}_y F| \leqslant \frac{1}{2}|\operatorname{grad}_y F|.$$

Будем считать сначала, что $t \geqslant t_0$, $x = x_0$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t, x_0, y)\Phi(t, x_0, y) \tag{2}$$

при начальном условии $y(t_0) = y_0$. Тогда вдоль решения будет

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{grad}_y F \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + A \cdot (|\operatorname{grad}_y F|^2 + \operatorname{grad}_y F \cdot (\Phi - \operatorname{grad}_y F))$$

и потому на множестве $\{F = 0\}$ будет

$$\frac{dF}{dt} \geqslant \frac{\partial F}{\partial t} + 2|\operatorname{grad}_{t,x} F| \cdot |\operatorname{grad}_y F|^{-2} \cdot \frac{1}{2}|\operatorname{grad}_y F|^2 \geqslant 0.$$

Но так как $F \geqslant 0$, при $t = t_0$, то отсюда получаем, что $F \geqslant 0$ и при $t > t_0$. Тем самым решение системы (2) можно продолжить на всю полуось $t_0 \leqslant t < \infty$. Аналогично, с помощью замены t на $-t$, строится $y(t)$ при $t < t_0$. Когда это сделано, можно построить $y(t, x_1)$ при $x_1 \geqslant x_{10}$ как решение системы

$$\frac{dy}{dx_1} = A(t, x_1, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y)\Phi(t, x_1, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y)$$

при начальном условии

$$y\,|_{x_1=x_{10}} = y(t),$$

где $y(t)$ — только что построенная функция. Аналогично строится $y(t, x_1)$ при $x_1 \leqslant x_{10}$. Далее строится $y(t, x_1, x_2)$ и т. д.; в конце концов полагаем $y(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(t, x)$, чем задача решается.

§ 3. Существование решения начальной задачи

Теперь легко доказать существование по крайней мере одного решения неравенства (1) при начальном условии $x(t_0) = x_0$ и при дополнительном условии $\dot{x}(t_0) = y_0$, где y_0 — любая точка, для которой $F(t_0, x_0, y_0) \geqslant 0$. В самом деле, рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \tag{3}$$

где φ — это функция, о которой говорилось в начале параграфа 2. В силу ее определения, всякое решение системы (3) удовлетворяет неравенству (1). Но к системе (3), обладающей непрерывными правыми частями, можно применить теорему Пеано о существовании решения, что и требуется. При этом можно считать, что указанное решение $x(t)$, продолженное в сторону возрастания t (и аналогично в сторону убывания t), оказывается определенным либо для всех $t \geqslant t_0$, либо же на некотором конечном интервале $t_0 \leqslant t < T$, причем в последнем случае $|x(t)| \xrightarrow[t \to T-0]{} \infty$.

Было бы интересно перенести на неравенства (1) другие общие результаты, известные для систем дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями: теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от правых частей системы, о строении интегральной воронки, условия неограниченной продолжимости и устойчивости решений и т. д. В конкретных примерах все эти результаты обычно получаются без труда.

§ 4. Существенно ли требование параграфа 2?

Уже в простых примерах может оказаться, что однозначной ветви $y = \varphi(x, t)$, о которой говорилось в параграфе 2, выделить нельзя. Рассмотрим для примера систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \pm\sqrt{r + x_1}\, r^m, \\ \dot{x}_2 = \pm\sqrt{r - x_1}\, r^m \end{cases} \quad \left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \tag{4}$$

где $m \geqslant 0$ произвольно, а знаки в правых частях выбираются так, чтобы $\operatorname{sign}(\dot{x}_1 x_2 \dot{x}_2) \geqslant 0$. Система (4) определяет в каждой точке плоскости x_1, x_2 два взаимно противоположных вектора $\dot{x}$, то есть множество $E_{t,\,x}$ состоит из двух точек, которые непрерывно зависят от x_1, x_2 и в начале координат сливаются в одну. Так как при обходе начала координат одна из этих двух точек сменяется на другую, то однозначной непрерывной ветви у правых частей системы (4) выделить нельзя.

Подобный пример возможно построить и для связных множеств $E_{t,\,x}$: например, множество $E_{t,\,x_1,\,x_2}$ может состоять из окружности $y_1^2 + y_2^2 = 1$ для $x_1 = x_2 = 0$; из дуги той же окружности размера $2\pi\left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$ с центром в точке $\left(-\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$ для $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$; из точки

$(-x_1;\ -x_2)$ для $x_1^2+x_2^2\geqslant 1$. Возможно, что для существования функции $\varphi(t,\ x)$ достаточно требовать связность и ацикличность во всех размерностях множеств $E_{t,x}$ (некоторые достаточные условия содержатся в работах Майкла [9], а также Кейпела и Стротера [10]).

После перехода к полярным координатам $r,\ \vartheta$ на плоскости $x_1,\ x_2$ легко найти первый интеграл системы (4): им служит

$$r=\frac{c}{1-\cos\vartheta}\quad (c>0),$$

где c — произвольная постоянная. Таким образом, решения системы (4) можно истолковать как движения точки (в любую из двух сторон) по параболам, имеющим общий фокус (0; 0) и общую ось x_1, пересекаемую при $x_1<0$; кроме того, возможно движение по положительной полуоси x_1 и состояние покоя в точке (0; 0). Значит, несмотря на указанное отсутствие однозначной ветви у системы (4), существование решения начальной задачи для этой системы имеет место в той же формулировке, что и в параграфе 3. Было бы интересно получить общую теорему о существовании решения системы (1), отказавшись от требования параграфа 2; эта теорема должна охватывать все практически важные случаи.

§ 5. Поверхность интегральной воронки для «гладких» неравенств

Поверхность интегральной воронки для «гладкого» неравенства (1) (см. § 2) и выпуклых множеств $E_{t,x}$ должна быть ограничена огибающей семейства бесконечно малых конусов с уравнением

$$F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)=0, \tag{5}$$

причем $dt\geqslant 0$ для $t\geqslant t_0$ и $dt\leqslant 0$ для $t\leqslant t_0$ (где $(t_0;\ x_0)$ — вершина воронки). Не проводя здесь детального исследования этого вопроса, выскажем только некоторые соображения.

Прежде всего, поверхность воронки не обязана быть гладкой. Например, сечение воронки плоскостью $t=\mathrm{const}>t_0$ с возрастанием t может подковообразно выгибаться, вплоть до самокасания, после которого гладкость сечения нарушается. Было бы интересно указать широкие достаточные условия (на конечном и бесконечном интервалах времени) для гладкости поверхности воронки. Впрочем, этот вопрос можно поставить и для систем уравнений с непрерывными правыми частями.

Во-вторых, выведем формальное уравнение для поверхности воронки, которое в конкретных примерах можно применить для построения этой поверхности. При $n=1$ этим уравнением служит просто (5), так что предположим, что $n\geqslant 2$, и допустим, что уравнение некоторого участка поверхности воронки имеет вид

$$\Phi(t,\ x)=0. \tag{6}$$

Так как уравнение (5) конуса можно переписать в виде

$$F\left(t,\ x,\ \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=0,$$

то получаем уравнение касательной плоскости к нему (в $n+1$-мерном пространстве $t,\ x$), параллельной вектору $(1,\ y)$

$$-\mathrm{grad}_y F(t,\ x,\ y)\cdot y\Delta t+\mathrm{grad}_y F(t,\ x,\ y)\cdot\Delta x=0.$$

Но та же плоскость должна касаться поверхности (6), откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\operatorname{grad}_y F(t, x, y) = -[\operatorname{grad}_y F(t, x, y)\cdot y]\operatorname{grad}_x \Phi(t, x). \tag{7}$$

Если к этому векторному равенству добавить скалярное равенство

$$F(t, x, y) = 0 \tag{8}$$

и из соотношений (7) и (8) исключить y, то получится уравнение с частными производными первого порядка для функции Φ.

Характеристики этого нелинейного уравнения, не содержащего Φ и однородного относительно $\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$, можно рассматривать как линии в $2n+2$-мерном пространстве $t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$. Для их получения можно составить систему из $2n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, из которых, впрочем, одно легко исключается в силу указанной однородности. Задавшись вершиной t, x воронки и выбрав произвольно y из (8), надо найти $\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$ из (7) (с точностью до коэффициента пропорциональности) и, приняв найденные значения за начальные условия, построить указанную характеристику и спроектировать ее в пространство t, x; придавая y все возможные значения, получим поверхность воронки.

Аналогичная картина получается для «кусочно-гладкого» неравенства (1). Для невыпуклых множеств $E_{t,x}$ нужно предварительно перейти к их выпуклым оболочкам.

§ 6. «Динамические» неравенства

Если в левую часть неравенства (1) t не входит явно, то есть оно имеет вид

$$F(x, \dot{x}) \geqslant 0, \tag{9}$$

то такое неравенство естественно назвать «динамическим». В этом случае решения $x(t)$ можно рассматривать как траектории в фазовом пространстве x, что приводит к динамической системе без единственности (хотя и здесь выполнение обычных аксиом в общем случае требует специального рассмотрения). Таким системам в более общих предположениях посвящен ряд работ (см. § 1), так что мы укажем лишь на некоторые стороны, характерные для динамических неравенств, которые для простоты мы будем считать гладкими (параграф 2).

«Зоной застоя» (аналог точки покоя для обычной динамической системы) будем называть максимальное замкнутое связное множество точек x, для которых

$$F(x, 0) \geqslant 0, \tag{10}$$

то есть точек «возможного покоя». Другими словами, зоны застоя — это компоненты связности множества точек x, удовлетворяющих неравенству (10). На границе зоны застоя должно быть $F(x, 0) = 0$, поэтому в конкретных примерах эти зоны легко строятся.

Другим аналогом точек покоя можно считать «зоны локальной транзитивности», каждая из которых, по определению, представляет собой максимальное замкнутое связное множество K, для которого при любых $x \in K$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что из любой точки

$K \cap U(x, \delta)$ в любую другую точку этого множества ведет по $U(x, \varepsilon)$ по крайней мере одна траектория (при конечном t или при $t \to \pm\infty$). В каждой точке x зоны локальной транзитивности выпуклая оболочка $\tilde{E}_x$ множества E_x должна содержать начало координат, а если множества E_x выпуклы, то обычно эти зоны тождественны зонам застоя. Простой достаточный признак зоны локальной транзитивности таков: множество K является такой зоной, если все E_x связны, K является компонентой связности множества тех x, для которых $0 \in \tilde{E}_x$, и для любой точки K существует как угодно малая окрестность с непустым связным пересечением с множеством тех $x \in K$, для которых 0 лежит строго внутри $\tilde{E}_x$.

Аналогом замкнутых траекторий для обычных динамических систем можно считать «зоны нелокальной транзитивности», каждая из которых, по определению, представляет собой максимальное замкнутое множество K, для всех точек которого $0 \bar{\in} \tilde{E}_x$ и в то же время любая точка K лежит на замкнутой траектории, целиком проходящей по K, а любые две такие траектории соединимы (при конечном t или при $t \to \pm\infty$) траекторией, целиком проходящей по K; возможны и иные аналоги. Можно дать сходное определение сепаратрисы и т. п. (было бы интересно рассмотреть разбиение всего фазового пространства на подобные зоны). Эти зоны в случае выпуклых множеств E_x должны быть ограничены, как в параграфе 5, поверхностями, огибающими семейство боковых поверхностей бесконечно малых конусов фазового пространства с уравнением

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{11}$$

Как в параграфе 5, допустим, что уравнение такой огибающей поверхности имеет вид

$$\Phi(x) = 0. \tag{12}$$

Если поверхность (12) касается боковой поверхности конуса (11) вдоль вектора y, для которого

$$F(x, y) = 0, \tag{13}$$

то из условия касания получаем

$$\frac{\partial\Phi/\partial x_1}{\partial F/\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial\Phi/\partial x_n}{\partial F/\partial y_n}; \ \operatorname{grad}\Phi \cdot y = 0. \tag{14}$$

Если из равенств (13) и (14) исключить y, то получится уравнение с частными производными первого порядка для функции Φ. Характеристики этого уравнения получаются из системы $2n-1$ уравнений первого порядка, из которых одно легко исключается.

Особенно прост случай $n = 2$ (случай $n = 1$ тривиален). Здесь уравнения (13) и (14) имеют вид

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \ \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} y_2 = 0.$$

Так как при $n = 2$ огибающими служат линии на плоскости x_1, x_2, для которых $\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial\Phi/\partial x_2}{\partial\Phi/\partial x_1}$, то получаем

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dx_2 = 0, \ y_2\, dx_1 = y_1\, dx_2.$$

Исключая из этих трех уравнений y_1, y_2, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения указанных линий. Поделив второе уравнение на третье и вспомнив, что $y=\dot{x}$, можно записать уравнения для огибающих в виде

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)=0, \quad \dot{x}_1\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}+\dot{x}_2\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}=0.$$

Отсюда для $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ вытекают, вообще говоря, два различных выражения через x_1, x_2, то есть получаются две обычные динамические системы.

§ 7. Динамические неравенства, близкие к динамическим системам

Пусть рассматривается обычная динамическая система

$$\dot{x}=f(x) \tag{15}$$

с непрерывной правой частью. Замкнутое ограниченное множество K назовем асимптотически устойчивым для системы (15), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если траектория системы (15) начинается в $U(K, \delta)$, то при своем продолжении она не выходит из $U(K, \varepsilon)$ и при $t\to\infty$ расстояние ее от K стремится к нулю (в частности, она может входить в K, начиная с некоторого t).

Если дополнительно дано неравенство (9), то мы обозначим буквой ρ «уклонение (9) от (15) вблизи K», то есть нижнюю грань чисел r, для которых при любом $x\in U(K, \varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0>0$ — какое-либо фиксированное число) множество E_x содержится в r-окрестности точки $f(x)$. Докажем, что если ρ достаточно мало́, то множество K является устойчивым и для неравенства (15) в следующем смысле. Зафиксируем произвольно $\delta'\in(0, \delta_0)$, где δ_0 отвечает ε_0 в смысле предыдущего абзаца. Тогда любому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что если $\rho<\delta$, то а) любая траектория неравенства (9), начинающаяся в $U(K, \delta)$, при своем продолжении не выходит из $U(K, \varepsilon)$; б) любая траектория неравенства (9), начинающаяся в $U(K, \delta')$, по прошествии единого для всей этой окрестности промежутка времени попадает в $U(K, \varepsilon)$ и более не выходит оттуда.

Для доказательства заметим сначала, что асимптотическая устойчивость, о которой говорится в первом абзаце, обязательно равномерная, то есть расстояние от точки траектории до K при $t\to\infty$ стремится к нулю равномерно по $x\in U(K, \delta')$, где $\delta'\in(0, \delta)$ произвольное. В самом деле, в противном случае нашлось бы $\bar{\varepsilon}>0$ и последовательности траекторий $\varphi(t, x_n)$ (где $x_n\in U(K, \delta')$; $\varphi(0, x)\equiv x$) и моментов времени $t_n\to\infty$, для которых $\varphi(x_n, t_n)\bar{\in} U(K, \bar{\varepsilon})$. Переходя к подпоследовательностям, можно без ограничения общности считать, что $x_n\to\bar{x}$, а с помощью леммы Асколи — Арцеля и диагонального процесса можно считать, что на любом конечном интервале времени последовательность траекторий $\varphi(x_n, t)$ равномерно сходится к некоторой траектории $\varphi(\bar{x}, t)$. Последняя по условию должна стремится к K и потому для некоторого $t=\bar{t}$ попадает в $U\left(K, \frac{\bar{\delta}}{2}\right)$, где $\bar{\delta}$ выбрано по $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$. Но тогда, в силу равномерной сходимости последовательности $\varphi(x_n, t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant\bar{t}$, при достаточно больших n будет $\varphi(x_n, \bar{t})\in U(K, \bar{\delta})$, а потому при $t\geqslant\bar{t}$ будет $\varphi(x_n, t)\in U(K, \bar{\varepsilon})$. Но это противоречит построению $\bar{\varepsilon}$, что и требуется.

Теперь можно доказать наши утверждения о траекториях неравенства (9). При заданном $\varepsilon>0$ выберем $\delta_1>0$ меньшим того δ, которое отвечает $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу первого абзаца; затем в силу равномерности асимптотической устойчивости выберем T таким, чтобы при $x\in U(K, \delta_1)$ обязательно было $\varphi(x, T) \in U\left(K, \frac{\delta_1}{2}\right)$. Тогда, в силу непрерывной зависимости траекторной системы (15) от начального условия и вида правой части, при достаточно малом $\rho \leqslant \rho_1$ и при $x \in U(K, \delta_1)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ $\varphi(x, t)$ будет отличаться от траектории $\bar{\varphi}(x, t)$ неравенства (9) меньше, чем на $\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right\}$. Но отсюда при $0 \leqslant t \leqslant T$ будет обязательно $\bar{\varphi}(x, t) \in U(K, \varepsilon)$ и, кроме того, $\bar{\varphi}(x, T) \in U(K, \delta_1)$. Рассматривая $\bar{\varphi}(x, t)$ при $t \geqslant T$ как траекторию, начинающуюся в $\bar{\varphi}(x, T)$, получим, что $\bar{\varphi}(x, t) \in U(K, \varepsilon)$ и при $T \leqslant t \leqslant 2T$ и т. д. Теперь остается обозначить $\delta = \min\{\delta_1, \rho_1\}$, чтобы получить утверждение а). Кроме того, в силу равномерности асимптотической устойчивости, за некоторое время T_1 все траектории $\varphi(x, t)\ (x \in U(K, \delta'))$ попадут в $U\left(K, \frac{\delta_1}{2}\right)$. Отсюда при достаточно малом ρ и все траектории $\bar{\varphi}(x, t)\ (x \in U(K, \delta'))$ через время T_1 попадут в $U(K, \delta_1)$ и потому, согласно только что доказанному, после этого не выйдут из $U(K, \varepsilon)$, чем и устанавливается утверждение б).

Приведенное доказательство применимо и для уравнений в контингенциях.

§ 8. Простые примеры

Динамические неравенства на плоскости можно наглядно проиллюстрировать с помощью «задачи о пловце». Как хорошо известно, динамическую систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{16}$$

можно истолковать как поток жидкости в плоскости x, y. Пусть в этом потоке находится пловец, который может плыть в любую сторону по своему усмотрению со скоростью, не превышающей некоторого $\varepsilon > 0$, и требуется выяснить его возможные траектории. Эта задача сводится к исследованию решений неравенства

$$\varepsilon^2 - [\dot{x} - P(x, y)]^2 - [\dot{y} - Q(x, y)]^2 \geqslant 0.$$

Рассмотрим некоторые простые примеры.

Пусть система (16) имеет вид

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y, \tag{17}$$

то есть имеет в начале координат простейший линейный устойчивый узел. В силу параграфа 6, соответствующая зона застоя (то есть зона, в которой пловец может оставаться неподвижным относительно земли) определяется неравенством $\varepsilon^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, то есть представляет собой круг радиуса ε с центром в начале координат. Этот же круг представляет собой зону локальной транзитивности, то есть внутри него пловец может перемещаться из любой точки в любую другую по своему усмотрению. Если же пловец начинает свое движение вне указанного круга, то его «сносит» в этот круг, так что в любой концентрический круг большего радиуса он наверняка попадает за конечное время.

При замене (17) на неустойчивый узел

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

пловец может произвольно перемещаться внутри того же круга, но если он выйдет за его пределы, то уже не сможет вернуться, а будет унесен на бесконечность.

Аналогично рассматриваются источник

$$\dot{x}=\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\quad \dot{y}=\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\qquad (Q>0)$$

и сток ($Q<0$). В обоих случаях пловец может свободно перемещаться вне круга радиуса $\frac{Q}{2\pi\varepsilon}$. Внутрь этого круга в случае источника пловец извне попасть не может, а если он был с самого начала внутри (но не в начале координат), то его снесет к границе (если он будет сопротивляться, то за бесконечное время). Если же в случае стока пловец по неосторожности попадет внутрь указанного круга то, как бы пловец ни сопротивлялся, его за конечное время снесет в точку стока.

Качественно отличается от (17) несимметричный устойчивый узел, например, вида

$$\dot{x}=-x,\quad \dot{y}=-2y.$$

В этом случае зона застоя (она же зона локальной транзитивности) представляет собой эллипс

$$x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2. \tag{18}$$

Однако пловец может из этого эллипса совершать «рейды» за его пределы, хотя там не может удержаться, и эти рейды заканчиваются тем, что пловца вновь сносит внутрь эллипса (18). Область, доступная таким рейдам, охватывает эллипс (18), но лежит внутри прямоугольника $|x|\leqslant\varepsilon$, $|y|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. В силу параграфа 6 она ограничена линиями, удовлетворяющими системе уравнений

$$(\dot{x}-x)^2+(\dot{y}-2y)^2=\varepsilon^2,\quad \dot{x}(\dot{x}-x)+\dot{y}(\dot{y}-2y)=0.$$

Для соответствующего неустойчивого узла та же область является «зоной безопасности», в которую можно заплывать, не теряя надежды вернуться в «гавань» застоя.

Рассмотрим еще простейшее седло

$$\dot{x}=-x,\quad \dot{y}=y.$$

Здесь зоной застоя (а также зоной локальной транзитивности) служит тот же круг $x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$, что и в первом примере. «Сепаратриса» $|y|\leqslant\varepsilon$, $-\infty<x<\infty$ представляет собой геометрическое место точек, из которых пловец может достигнуть зоны застоя. Покинув зону застоя, пловец не может покинуть вторую сепаратрису $|x|\leqslant\varepsilon$, $-\infty<y<\infty$, внутри которой он может достичь любую точку. Если заплыв начинается вне первой сепаратрисы (неустойчивой), то пловца относит на бесконечность, притом так, что его расстояние от второй сепаратрисы (устойчивой) при этом стремится к нулю.

Рассмотрим в заключение окрестность устойчивой точки покоя $x=0$ для любого числа измерений, описываемой неравенством

$$h|x|+a-|\dot{x}-Ax|\geqslant 0\qquad (a\geqslant 0,\quad h\geqslant 0), \tag{19}$$

где постоянная матрица A имеет все характеристические числа с отрицательной вещественной частью, а h достаточно малое. Как известно, для заданной матрицы A всегда можно указать положительно определенную квадратичную форму $F(x)$, для которой квадратичная форма

$G(x) = \operatorname{grad} F(x) \cdot Ax$ отрицательно определена. Поэтому для решений неравенства (19) будет

$$\frac{dF(x)}{dx} = \operatorname{grad} F(x) \cdot \dot{x} = \operatorname{grad} F(x) \cdot Ax + \operatorname{grad} F(x) \cdot (\dot{x} - Ax) \leqslant G(x) + \\ + |\operatorname{grad} F(x)| (h|x| + a).$$

Пусть h настолько мало, что сумма $G(x) + h|x||\operatorname{grad} F(x)|$ мажорируется отрицательно определенной квадратичной формой $H(x)$. Тогда вдоль участка интегральной линии неравенства (19), расположенного вне поверхности $H(x) = -a|\operatorname{grad} F|$, значение $F(x)$ должно убывать. Поэтому, взяв минимальный эллипсоид D вида $F(x) \leqslant C$, содержащий эту поверхность, получаем, что если интегральная линия начинается в D, то при своем продолжении она не может покинуть D; если же она начинается вне D, то при своем продолжении либо входит в D за конечное время, либо же асимптотически стремится к D при $t \to \infty$. (Результаты аналогичного исследования систем с толчками (§ 9) сообщил мне В. А. Калевич).

§ 9. Некоторые приложения

Здесь мы ограничимся указанием некоторых задач, сводящихся к неравенству (1). Это, прежде всего, рассматривавшаяся еще П. Г. Болем [11] в 1913 г. задача о приближенном, с точностью до ε, решении системы уравнений

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{20}$$

с непрерывной правой частью. Эта задача равносильна решению неравенства

$$\varepsilon - \|\dot{x} - f(x, t)\| \geqslant 0,$$

где двойными черточками обозначена какая-либо из норм, применяемых в конечномерном пространстве ($\|x\| = \left(\sum\limits_i x_1^2\right)^{1/2}$ или $\max\limits_i |x_i|$ и т. д.). Аналогично ставится задача для уравнений и систем высшего порядка. Выполнение условия параграфа 2 здесь очевидно (первый частный случай).

Вторая задача, указанная мне Е. Мушинским, состоит в исследовании решений линейной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

для коэффициентов которой заданы лишь оценки, например, вида

$$a'_{ij} \leqslant a_{ij}(t) \leqslant a''_{ij}. \tag{21}$$

Чтобы свести эту задачу к общей задаче параграфа 1, надо обозначить через $E_{x,t}$ прямоугольный параллелепипед

$$\min \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \leqslant y_i \leqslant \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где min и max берутся по всем a_{ij}, удовлетворяющим условиям (21). И здесь условие параграфа 2 выполнено.

К неравенству (1) сводится исследование решений системы, близкой к какой-либо другой системе с известными решениями. Например, при рассмотрении уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

где $|f(x)| \leqslant k|x|$, можно заменить его на неравенство

$$k|x| - |\dot{x} - Ax| \geqslant 0.$$

Рассмотрим, наконец, систему вида (20) с толчками (см. [12]), то есть разрывами первого рода у решения, происходящими в моменты $t_1 < t_2 < \ldots$ ($t_1 > t_0$). Допустим, что $\inf\limits_i (t_{i+1} - t_i) = \vartheta > 0$, а размеры $\Delta_i x$ всех толчков ограничены по модулю числом k. Рассмотрим на интервале $t_i \leqslant t < t_{i+1}$ непрерывную дугу

$$x = \tilde{x}(t) = x(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta_{i+1} x.$$

Эти дуги непрерывно продолжают одна другую и в целом образуют непрерывную линию на интервале $t_0 \leqslant t < \infty$, совпадающую с исходной (разрывной) линией $x = x(t)$ при $t = t_0$ и $t = t_1 + 0$, $t_2 + 0, \ldots$ В промежутках между толчками функция $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} + \frac{\Delta_{i+1} x}{t_{i+1} - t_i} = f\left(\tilde{x} - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta_{i+1} x, \ t\right) + \frac{\Delta_{i+1} x}{t_{i+1} - t_i}.$$

Поэтому, если обозначить

$$\varepsilon(x, t) = \max_{|\Delta x| \leqslant k} |f(x + \Delta x, t) - f(x, t)| + \frac{k}{\vartheta},$$

то $\tilde{x}(t)$ будет удовлетворять неравенству

$$\varepsilon(x, t) - |\dot{x} - f(x, t)| \geqslant 0. \tag{22}$$

(В частности, если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой M, то можно принять $\varepsilon = k\left(M + \frac{1}{\vartheta}\right)$). Правда, в моменты толчков функция $\tilde{x}(t)$ имеет изломы, но при помощи как угодно малого сглаживания углов можно получить непрерывно дифференцируемое решение неравенства (22), совпадающее с исходным решением $x = x(t)$ в указанных точках. И для неравенства (22) условие параграфа 2 выполняется. Отметим, что при фиксированном ϑ и уменьшении k величину $\varepsilon(x, t)$ можно сделать в любой конечной части пространства как угодно малой; это дает возможность, в частности, применить результаты параграфа 7.

К неравенству (1) сводится исследование априори ограниченных решений уравнений с отклоняющимся аргументом (так как из априорной ограниченности решения вытекает априорная оценка его производной, что дает возможность по формуле конечных приращений перейти от уравнений с отклонением аргумента к неравенствам без таких отклонений) и ряд других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М.—Л., ГТТИ, 1937.

2. А. Д. Мышкис. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. «Усп. матем. наук», IV : 5 (33), (1949) 99—141.

3. A. Bielecki. Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent. Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1955 (1957), A9, № 1—13, 37—61. РЖМат, 1958, 8780.

4. A. Bielecki. Certains propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent. Там же, 63—79. РЖМат, 1958, 8781.

5. М. И. Минкевич. Замкнутые интегральные воронки в обобщенных динамических системах без предположения единственности. «Уч. зап. Московск. гос. ун-та», **163** (матем., VI) (1952), 73—88.

6. А. Д. Мышкис. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. «Матем. сб.», **34** (76) : 3 (1954), 525—540. РЖМат, 1955, 732.

7. M. Hukuhara. Sur une généralisation d'un théorème de Kneser. Proc. Japan Acad., **29** (1953), 154—155. РЖМат, 1955, 5771.

8. Е. А. Барбашин, Ю. И. Алимов. К теории динамических систем с неоднозначными и разрывными характеристиками. «Докл. АН СССР», 140 : 1 (1961), 9—11. РЖМат, 1962, 3Б 221.

9. E. A. Michael. Selection theorems for continuous functions. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 241—242. РЖМат, 1956, 1166.

10. C. E. Capel, W. L. Strother. Multi-valued functions and partial order. Portug. math., 17 : 1—2 (1958), 41—47. РЖМат, 1960, 11426.

11. П. Г. Боль. О дифференциальных неравенствах. В книге П. Г. Боль, Избр. труды, АН ЛаССР, Рига, 1961, 177—213.

12. В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис. Об устойчивости движения при наличии толчков. «Сиб. матем. ж.», 1 : 2 (1960), 233—237. РЖМат, 1961, 9Б 145.