К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ И В ОБЛАСТИ С УГЛАМИ

И. Е. Гопенгауз

1. Известна следующая теорема А. Ф. Тимана [1]: *если $f(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ непрерывную производную порядка r, модуль непрерывности которой — $\omega(h)$, тогда существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, таких что*

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant C\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \tag{1}$$

при всех натуральных n и $|x| \leqslant 1$. Этот результат показывает, что функцию можно приближать многочленами на всем отрезке с такой же скоростью, как и по теореме Д. Джексона, и с более высокой скоростью у концов этого отрезка. Позже В. К. Дзядык [2] обнаружил такое же положение, приближая многочленами функции, непрерывные в некоторых замкнутых областях комплексной плоскости, имеющих конечное число угловых точек, и аналитические внутри этих областей. И в этом случае на границе области выполняется неравенство типа (1), но величина $\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}$ заменяется более общим выражением $\rho_{1+\frac{1}{n}}(x)$, равным расстоянию от точки x до линии уровня $|\varphi(z)| = 1+\frac{1}{n}$, где $\varphi(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение внешности рассматриваемой области на внешность единичного круга, которая оставляет на месте бесконечно удаленную точку.

Эти теоремы допускают дальнейшее уточнение. Оказывается, величину $\rho_{1+\frac{1}{n}}(x)$ в оценке скорости приближения можно заменить на $\frac{1}{n\cdot|\varphi'(x)|}$ и, в частности, $\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}$ в случае отрезка $[-1, 1]$ — на $\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$. Перейдем к изложению полученных результатов.

2. **Теорема 1.** *Если $f(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ непрерывную производную порядка r, модуль гладкости порядка s которой — $\omega_s(h)$, то существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, таких что*

$$|f^{(\nu)}(x)-P_n^{(\nu)}(x)| \leqslant C\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu}\cdot\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) \quad 0 \leqslant \nu \leqslant r, \tag{2}$$

при всех натуральных $n \leqslant N(r, s)$ и $|x| \leqslant 1$, Отметим, что эта теорема является уточнением следующего результата Ю. А. Брудного [3], который мы сейчас используем: при тех же условиях, что и в теореме 1, выполнены неравенства

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant C\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^r\cdot\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3)$$

при всех n и $|x|\leqslant 1$.

Повторяя почти дословно рассуждения Р. М. Тригуба (см. [4]), можно вывести из теоремы Ю. А. Брудного некоторое ее усиление, а именно, заменить неравенства (3) следующими:

$$1)\ |f^{(\nu)}(x)-P_n^{(\nu)}(x)|\leqslant C\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{r-\nu}\cdot\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\ 0\leqslant\nu\leqslant r;$$

$$2)\ |P_n^{(r+\nu)}(x)|\leqslant C\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-\nu}\cdot\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\ 1\leqslant\nu\leqslant s.$$

При $n\leqslant 4(r+s)$ можно считать, что многочлены $P_n(x)$ помимо свойств 1) и 2) обладают еще свойством

3) $P_n^{(\nu)}(\pm 1)=f^{(\nu)}(\pm 1),\ 0\leqslant\nu\leqslant r;\ P_n^{(r+\nu)}(\pm 1)=0,\ 1\leqslant\nu\leqslant s-1.$

Действительно, пусть выполнены неравенства 1), 2) и пусть $Q(x)$ — алгебраический многочлен степени $\leqslant 2(r+s)-1$, для которого $Q^{(\nu)}(\pm 1)=P_n^{(\nu)}(\pm 1)-f^{(\nu)}(\pm 1), 0\leqslant\nu\leqslant r;\ Q^{(r+\nu)}(\pm 1)=P_n^{(r+\nu)}(\pm 1),\ 1\leqslant\nu\leqslant s-1.$ Тогда

$$Q(x)=\sum_{\nu=0}^{r+s-1}(1-x^2)^\nu\{Q^{(\nu)}(1)\cdot A_\nu(x)+Q^{(\nu)}(-1)\cdot B_\nu(x)\},$$

где $A_\nu(x)$ и $B_\nu(x)$ — многочлены степени $\leqslant 2(r+s-\nu)-1$, выбор которых определяется только числами $r+s$ и ν. Согласно одному результату Р. М. Тригуба (см. [4], лемма 2″), для любых натуральных ν и μ существует последовательность алгебраических многочленов $R_m(u)$ степени $\leqslant m$, таких что

$$|u^\nu-u^{\nu+\mu}\cdot R_m(u)|\leqslant\frac{C(\nu,\mu)}{m^{2\nu}}$$

при всех m и $u\in[0,1]$, где $C(\nu,\mu)$ не зависит от u и m. Заменяя здесь u на $1-x^2$, μ на $r+s-\nu$ и учитывая, что

$$|Q^{(\nu)}(\pm 1)|\leqslant C\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)^{r-\nu}\cdot\omega_s\left(\frac{1}{n^2}\right),\ 0\leqslant\nu\leqslant r+s-1,$$

приходим к равенству $Q(x)=Q_{n,1}(x)+Q_{n,2}(x)$, где $Q_{n,1}(x)$ и $Q_{n,2}(x)$ — алгебраические многочлены степени $\leqslant n$ и при этом $Q_{n,1}(x)$ делится на $(1-x^2)^{r+s}\ Q_{n,2}^{(\nu)}(\pm 1)=Q^{(\nu)}(\pm 1),\ \ 0\leqslant\nu\leqslant r+s-1,$ и $|Q_{n,2}(x)|\leqslant C_1\times\times\left(\frac{1}{n^2}\right)^r\cdot\omega_s\left(\frac{1}{n^2}\right),\ (|x|\leqslant 1,\ n\geqslant 4(r+s))$. Для многочленов $\tilde P_n(x)=P_n(x)-Q_{n,2}(x)$ выполнены все условия 1) — 3), так как классические неравенства А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна для производной алгебраического многочлена дают нам

$$|Q_{n,2}^{(\nu)}(x)|\leqslant C_2\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{r-\nu}\cdot\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\ 0\leqslant\nu\leqslant r+s.$$

Итак, мы будем считать, что для многочленов последовательности $P_n(x)$ выполнены условия 1) — 3).

Если $\sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{1}{n}$, то, очевидно, неравенство (2) эквивалентно свойству 1). Пусть теперь $\nu \leqslant r$ и пусть $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{1}{n}$. Обозначим $m = m_x = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] + 1$, тогда благодаря свойствам 2) и 3)

$$|P_n^{(\nu)}(x) - P_m^{(\nu)}(x)| \leqslant C_3 \cdot (1-|x|)^{r+s-\nu} \cdot \max_{|t|\leqslant 1} |P_n^{(r+s)}(t) - P_m^{(r+s)}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \cdot (\sqrt{1-x^2})^{2(r+s-\nu)} \max_{|t|\leqslant 1} \left\{ \frac{\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^s} + \frac{\omega_s\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{m} + \frac{1}{m^2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{m} + \frac{1}{m^2}\right)^s} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \cdot (\sqrt{1-x^2})^{2(r+s-\nu)} \cdot m^{2s} \cdot \omega_s\left(\frac{1}{m^2}\right) \leqslant C_5' \cdot \left(\frac{m}{m-1}\right)^{2s} \cdot (\sqrt{1-x^2})^{2(r-\nu)} \times$$

$$\times \omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) \leqslant C_6 \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu} \cdot \omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right).$$

Поскольку $\sqrt{1-x^2} > \frac{1}{m}$, то, как указывалось ранее,

$$|f^{(\nu)}(x) - P_m^{(\nu)}(x)| \leqslant C_7 \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\right)^{r-\nu} \cdot \omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\right) \leqslant C_7 \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu} \times$$

$$\times \omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right).$$

Следовательно, и при $\sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{1}{n}$

$$|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)| \leqslant C_8 \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu} \cdot \omega_s\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right).$$

Теорема доказана.

Подобное уточнение допускают теоремы о приближении целыми функциями на внешности отрезка и полуоси, на системе отрезков.

Например, имеет место следующая

Теорема 1'. *Пусть $f(x)$ и ее r-я производная $f^{(r)}(x)$ ограничены при $|x| \geqslant 1$ и пусть $\omega_s(f^{(r)}; h)$ — модуль гладкости порядка s функции $f^{(r)}(x)$. В таком случае при любом $\sigma > 0$ существует целая функция $g_\sigma(x)$ степени $\leqslant \sigma$, такая что при $|x| \geqslant 1$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r$*

$$|f^{(\nu)}(x) - g_\sigma^{(\nu)}(x)| \leqslant C \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}\right)^{r-\nu} \cdot \omega_s\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}\right).$$

Этот результат выводится из теоремы Б. Д. Котляра [5], в которой при тех же предположениях утверждается, что

$$|f(x) - g_\sigma(x)| \leqslant C \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \cdot \omega_s\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

(см. также [6], [7]).

3. Перейдем теперь к приближениям в комплексной области. Пусть Γ — замкнутая, кусочно-аналитическая кривая, дуги которой образуют между собой в точках стыка z_i внешние углы $\beta_i\pi$, $1 < \beta_i < 2$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Обозначим G область, лежащую внутри Γ, и $\varphi(z)$ — функцию, отображающую конформно внешность области G на внешность единичного круга, такую, что существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$.

Теорема 2: *Если $f(z)$ аналитична в G, а ее производная $f^{(r)}(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяет там условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(z)$ степени $\leqslant n$, таких что*

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant \frac{C}{[n \cdot |\varphi'(z)|]^{r+\alpha-\nu}}$$

во всех точках кривой Γ и при всех $n \geqslant N(r, \Gamma)$.

Будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Нам понадобится следующее утверждение, обобщающее упомянутую выше лемму Р. М. Тригуба.

Лемма. *Пусть ν и μ — произвольные натуральные числа, z_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) — угловые точки нашей кривой Γ, $\rho_R(z)$ — расстояние от точки z на Γ до линии уровня $|\varphi(z)| = R > 1$. Тогда найдется последовательность алгебраических многочленов $R_n(z)$ степени $\leqslant n$, таких что при всех n и всех $z \in \Gamma$*

$$\left|\prod_{i=1}^{k}(z - z_i)^{\nu} - \prod_{i=1}^{k}(z - z_i)^{\nu+\mu} \cdot R_n(z)\right| \leqslant C(\nu, \mu, \Gamma) \cdot \rho^{\nu}_{1+\frac{1}{n}}(z).$$

Доказательство. Рассмотрим одну из угловых точек z_i с внешним углом $\beta_i\pi$. Как показал Г. Сегё [8], существует последовательность алгебраических многочленов $\Phi_n(z)$ n-й степени, таких что $|\Phi_n(z)| \leqslant 1$ на Γ и $|\Phi_n'(z_i)| \geqslant Ln^{\beta_i}$, где L — положительная постоянная. Можно считать еще $\Phi_n(z_i) = 0$. Тогда $\Phi_n(z) = \Phi_n'(z_i)(z - z_i) + (z - z_i)^2 \cdot P(z - z_i)$, где $P(u)$ — алгебраический многочлен. Следовательно, можно подобрать коэффициенты b_s так, чтобы

$$z - z_i = \sum_{s=1}^{\mu} b_s \Phi_n^s(z) + (z - z_i)^{\mu+1} \cdot Q(z), \tag{4}$$

где $Q(z)$ — алгебраический многочлен. Для того, чтобы оценить коэффициенты b_s, запишем последовательные производные от обеих частей равенства (4) в точке z_i:

$$1 = b_1 \cdot \Phi_n'(z_i),$$

$$0 = \sum_{s=1}^{q} b_s \cdot \frac{d^q}{dz^q}\Phi^s(z)\big|_{z=z_i}, \quad 2 \leqslant q \leqslant \mu.$$

Это дает

$$|b_1| = O(n^{-\beta_i}) \tag{5}$$

и

$$\left|b_q\right| \cdot \left|\frac{d^q}{dz^q}\Phi_n^q(z)\right|_{z=z_i}\Bigg| \leqslant \sum_{s=1}^{q-1}|b_s| \cdot \left|\frac{d^q}{dz^q}\Phi_n^s(z)\right|_{z=z_i}\Bigg|,$$

$$|b_q| \cdot |\Phi_n'(z_i)|^q \cdot q! \leqslant A \cdot \sum_{s=1}^{q-1}|b_s| \cdot (ns)^{q\beta_i},$$

т. е. $|b_q| = O\left(\sum_{s=1}^{q-1}|b_s|\right)$.

Учитывая (5), получаем $|b_q| = O(n^{-\beta_i})$. Так как $|\Phi_n(z)| \leqslant 1$ на Γ, то из (4) выводим

$$(z - z_i) - (z - z_i)^{\mu+1} \cdot Q_i(z) = O(n^{-\beta_i}).$$

Возведя левую и правую части последнего равенства в степень ν, получим

$$(z-z_i)^{\nu} = (z-z_i)^{\nu+\mu} \cdot R_{n,i}(z) + O(n^{-\nu\beta_i}),$$

где $R_{n,i}(z)$ — алгебраический многочлен, степень которого можно считать равной n. Перемножим левые и правые части таких равенств при разных i. Это дает

$$\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)^{\mu} = \prod_{i=1}^{k}(z-z_i)^{\nu+\mu} \cdot R_n(z) + O\left\{\sum \prod{}'\left(|z-z_i|^{\nu} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{n^{\nu\beta_i}}\right) \cdot \prod{}'' \frac{1}{n^{\nu\beta_i}}\right\},$$

где $\prod'$ — произведение сомножителей, отвечающих каким-нибудь l различным значениям номера i, $\prod''$ — произведение сомножителей, отвечающих остальным $k-l \geqslant 1$ значениям i, $\sum$ — сумма произведений, отвечающих всем таким разбиениям множества номеров на две группы, наконец, $R_n(z)$ — алгебраический многочлен, степень которого снова можно считать равной n. Если все $\beta_i \geqslant 1$, то каждое произведение, стоящее под знаком Σ, есть $O\{\rho^{\nu}_{1+\frac{1}{n}}(z)\}$, так как $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) =$

$$= \frac{\theta(z,n)}{n} \cdot \prod_{i=1}^{k}\left(|z-z_i|) + \frac{1}{n^{\beta_i}}\right)^{\frac{\beta_i-1}{\beta_i}}, \text{ где } 0 < A \leqslant \theta(z,n) < B < \infty.$$

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме В. К. Дзядыка при наших предположениях существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(z)$ степени $\leqslant n$, таких, что на Γ

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant C \cdot \rho^{r+\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z). \tag{6}$$

Покажем, что эти же многочлены удовлетворяют еще условиям:

$$1)\ |f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant C \cdot \rho^{r-\nu+\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z),\ 0 < \nu < r;$$

$$2)\ |P_n^{(r+1)}(z)| < C \cdot \rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{n}}(z).$$

Действительно, так как на Γ выполнено неравенство (6), то, применяя неравенство для производной алгебраического многочлена [9] к оценке каждого члена ряда, стоящего в правой части

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant |P_{2^m}^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| + \sum_{k=m}^{\infty}|P_{2^k}^{(\nu)}(z) - P_{2^{k+1}}^{(\nu)}(z)|,$$

где $m = [\log_2 n] + 1$, получим

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z) < C_1 \cdot \sum_{k=m}^{\infty} \rho^{r-\nu+\alpha}_{1+\frac{1}{2^k}}(z) \leqslant C_2 \cdot \rho^{r-\nu+\alpha}_{1+\frac{1}{2^m}}(z) \cdot \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^q}\right)^{r-\nu+\alpha} <$$
$$\leqslant C_3 \rho^{r-\nu+\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z)$$

при любом $z \in \Gamma$ и $\nu < r$. Аналогично на Γ при $\alpha < 1$

$$|P_n^{(r+1)}(z)| < |P_n^{(r+1)}(z) - P_{2^{m-1}}^{(r+1)}(z)| + |P_{2^{m-1}}^{(r+1)}(z) - P_{2^{m-2}}^{(r+1)}(z)| + \cdots +$$
$$+ |P_2^{(r+1)}(z) - P_1^{(r+1)}(z)| + |P_1^{(r+1)}(z)| < C_4 \cdot \{\rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{2^{m-1}}}(z) +$$
$$\rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{2^{m-1}}}(z) + \cdots\} < C_5 \cdot \rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{n}}(z) \cdot \sum_{q=0}^{m-1}(2^q)^{\alpha-1} < C_6 \cdot \rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{n}}(z),$$

а при $\alpha = 1$, очевидно, $|P_n^{(r+1)}(z)| < C_7$.

Покажем, что последовательность $P_n(z)$ можно подчинить еще условию

3) $P_n^{(\nu)}(z_i) = f^{(\nu)}(z_i)$ при всех $\nu \leqslant r$ и всех i.

Для доказательства рассмотрим алгебраический многочлен $Q(z)$ степени $< k(r+1) - 1$, для которого

$$Q^{(\nu)}(z_i) = P_n^{(\nu)}(z_i) - f^{(\nu)}(z_i),\quad 0 \leqslant \nu \leqslant r, \text{ при всех } i.$$

Тогда, очевидно

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{r} \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{\nu} \cdot \sum_{j=1}^{k} Q^{(\nu)}(z_j) \cdot A_{\nu, j}(z),$$

где $A_{\nu, j}(z)$ — некоторые фиксированные алгебраические многочлены степени $< k(r - \nu + 1) - 1$, делящиеся на $\prod_{i \neq j}(z - z_i)^{r-\nu+1}$, выбор которых определяется только точками z_i и числами r, ν и j. Применим лемму. Так как $|Q^{(\nu)}(z_j)| < C \cdot \rho^{r-\nu+\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z_j)$, то мы приходим к равенству $Q(z) = Q_{n,1}(z) + Q_{n,2}(z)$, где $Q_{n,1}(z)$ и $Q_{n,2}(z)$ — алгебраические многочлены степени $< n$ и при этом $Q_{n,1}(z)$ делится на $\prod_{i=1}^{k}(z - z_i)^{r+1}$, а $Q_{n,2}^{(\nu)}(z_i) = Q^{(\nu)}(z_i)$ при всех i и $\nu \leqslant r$; кроме того $|Q_{n,2}(z)| < C_8 \cdot \rho^{r+\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z)$ на Γ.

Для многочленов $P_n(z) = P_n(z) - Q_{n,2}(z)$ выполнены все условия 1)—3) при любом $n > N(r, \Gamma)$. Новую последовательность мы будем попрежнему обозначать $\{P_n(z)\}$.

Оценим теперь разность $|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)|$ в точках Γ. Если при всех i $|z - z_i| > \frac{1}{n^{\beta_i}}$, то из свойств 1) получим (см. [10]).

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| < C_1 \left[\frac{1}{n} \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\frac{\beta_i - 1}{\beta_i}}\right]^{r-\nu+\alpha} < \frac{C_2}{(n \cdot |\varphi'(z)|)^{r-\nu+\alpha}}.$$

Если при каком-нибудь i $|z - z_i| < \frac{1}{n^{\beta_i}}$ (можно считать, что при остальных i это неравенство нарушается), обозначим для данного z $m = m_z = \left[\frac{1}{|z - z_i|^{\frac{1}{\beta_i}}}\right] + 1$. Тогда

$$|P_n^{(\nu)}(z) - P_m^{(\nu)}(z)| < C_3 [s(z, z_i)]^{r+1-\nu} \max_{\substack{\xi \in \Gamma \\ |\xi - z_i| < n^{-\beta_i}}} |P_n^{(r+1)}(\xi) - P_m^{(r+1)}(\xi)|,\quad \nu < r,$$

где $s(z, z_i)$ — длина дуги кривой Γ между точками z_i и z. Так как $s(z, z_i) = O(|z_i - z|)$, то благодаря свойству 3) получим

$$|P_n^{(\nu)}(z) - P_m^{(\nu)}(z)| \leqslant C_4 \cdot |z - z_i|^{r+1-\nu} \max_{|\xi - z_i| < n^{-\beta_i}} \rho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{m}}(\xi) \leqslant C_5 \cdot |z - z_i|^{r+1-\nu} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{m^{\beta_i}}\right)^{\alpha-1} \leqslant C_6 \cdot |z - z_i|^{r-\nu+\alpha} \leqslant C_6 \cdot \left[\frac{|z - z_i|^{\frac{\beta_i - 1}{\beta_i}}}{n}\right]^{r-\nu+\alpha} \leqslant \frac{C_7}{(n \cdot |\varphi'(z)|)^{r-\nu+\alpha}}.$$

Но поскольку $|z - z_i| \geqslant \frac{1}{m^{\beta_i}}$, (по доказанному выше)

$$|f^{(\nu)}(z) - P_m^{(\nu)}(z)| \leqslant \frac{C_2}{(m \cdot |\varphi'(z)|)^{r-\nu+\alpha}} \leqslant \frac{C_2}{(n \cdot |\varphi'(z)|)^{r-\nu+\alpha}}.$$

Таким образом, при всех $z \in \Gamma$ и $\nu \leqslant r$

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant \frac{C_8}{(n \cdot |\varphi'(z)|)^{r-\nu+\alpha}}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Тиман. Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси. ДАН СССР, 78, № 1 (1951), 17—20.
2. В. К. Дзядык. К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях, и о проблеме С. М. Никольского, (второе сообщение). «Изв. АН СССР, сер. матем.», 27, № 5 (1963), 1135—1164.
3. Ю. А. Брудный. Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана. ДАН СССР, 148, № 6 (1963) 1237—1240.
4. Р. М. Тригуб. Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 26, № 2 (1962), 261—280.
5. Б. Д. Котляр. О приближении функций, заданных вне интервала целыми функциями конечной степени. ДАН СССР, 151, № 4, (1963), 770—771.
6. Ю. А. Брудный. Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси. ДАН СССР, 124, № 4 (1959), 739—742.
7. Р. М. Тригуб. Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси. ДАН СССР, 132, № 2 (1960), 303—306.
8. G. Szegö. Über einen Satz von A. Markoff. Mathem. Zeitschr, 23 (1925), 45—61.
9. В. К. Дзядык. О проблеме С. М. Никольского в комплексной области. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 23, № 5 (1959), 697—736.
10. W. F. Osgood and E. H. Taylor. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition, Trans. Amer. Math. Soc., 14 (1913), 277—298.

Поступила 11 апреля 1966 г.