Означая черезъ $\triangle$ опредѣлитель, составленный изъ функцій x_{ij}, допустимъ, что всѣ функціи

$$\frac{e^{-\sum\limits_{s=1}^{n}\lambda_s t}}{\triangle}, \qquad x_{ij}e^{\lambda_j t} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

суть ограниченныя.

Можно показать, что при этомъ условіи система уравненій (15) есть приводимая.

Въ самомъ дѣлѣ, означая миноръ опредѣлителя $\triangle$, соотвѣтствующій элементу x_{ij}, черезъ $\triangle_{ij}$, изъ предыдущаго условія выводимъ, что всѣ функціи

$$\frac{\triangle_{ij}}{\triangle}e^{-\lambda_j t} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

суть ограниченныя. Такими-же будутъ поэтому и ихъ первыя производныя по t, ибо извѣстно, что функціи

$$\frac{\triangle_{1j}}{\triangle}, \quad \frac{\triangle_{2j}}{\triangle}, \ldots, \frac{\triangle_{nj}}{\triangle}$$

при всякомъ j удовлетворяютъ системѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, *присоединенной* (adjoint) къ системѣ (15).

Поэтому подстановка

$$z_s = \frac{\triangle_{1s}}{\triangle}e^{-\lambda_s t}x_1 + \frac{\triangle_{2s}}{\triangle}e^{-\lambda_s t}x_2 + \ldots + \frac{\triangle_{ns}}{\triangle}e^{-\lambda_s t}x_n \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

обладаетъ всѣми свойствами разсматриваемыхъ здѣсь подстановокъ, а при помощи нея система (15) преобразовывается въ систему уравненій

$$\frac{dz_s}{dt} + \lambda_s z_s = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

съ постоянными коэффиціентами.

О нѣкоторомъ общемъ случаѣ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

11. Обращаемся теперь къ уравненіямъ (1).

Разсматривая по прежнему только вещественныя значенія t, не меньшія нѣкотораго предѣла t_0, будемъ предполагать въ этихъ уравненіяхъ всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ непрерывными и ограниченными вещественными функціями t. При томъ будемъ предполагать, что могутъ быть найдены такія положительныя постоянныя M и A, при которыхъ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t будутъ справедливы неравенства:

$$\left|P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right| < \frac{M}{A^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}.$$

Допустимъ, что система дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующая первому приближенію, есть правильная, и что

$$\lambda_1\,,\quad \lambda_2\,,\quad .\ .\ .\ ,\ \lambda_n$$

суть характеристичныя числа этой системы.

Мы покажемъ, что выбирая изъ этихъ чиселъ какія-либо k

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ .\ .\ .\ ,\ \lambda_k\,, \tag{24}$$

можно составить формально удовлетворяющіе уравненіямъ (1) и содержащіе k постоянныхъ произвольныхъ

$$\alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\quad .\ .\ .\ ,\ \alpha_k$$

ряды слѣдующаго вида:

$$\left.x_s = \sum L_s^{(m_1,\, m_2,\, \dots,\, m_k)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \lambda_i t}\,, \quad (s=1,\, 2,\, \dots,\, n)\right\} \tag{25}$$

гдѣ $L_s^{(m_1,\, m_2,\, \dots,\, m_k)}$ суть независящія отъ постоянныхъ α_i непрерывныя функціи t, характеристичныя числа которыхъ не менѣе нуля, при чемъ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя неотрицательныя значенія чиселъ $m_1\,,\ m_2\,,\ \dots,\ m_k\,,$ подчиненныя условію

$$m_1 + m_2 + \ .\ .\ .\ + m_k > 0\,.$$

Мы будемъ затѣмъ исключительно разсматривать тотъ случай, когда выбранныя характеристичныя числа (24) всѣ положительны, и въ этомъ предположеніи покажемъ, что при всякихъ $\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \dots\,,\ \alpha_k\,,$ модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго предѣла, ряды (25) будутъ абсолютно сходящимися и представятъ функціи, дѣйствительно удовлетворяющія уравненіямъ (1), для всѣхъ значеній t, превосходящихъ t_0.

Обращаемся къ формуламъ параграфа 3^яго^.

Допустимъ, что система частныхъ рѣшеній уравненій (6), которою мы тамъ пользовались, есть нормальная, и что рѣшеніе

$$x_{1s}\,,\quad x_{2s}\,,\quad .\ .\ .\ ,\ x_{ns}$$

обладаетъ характеристичнымъ числомъ λ_s $(s=1,\, 2,\, \dots,\, n)$.

Полагаемъ

$$x_s^{(1)} = \alpha_1 x_{s1} + \alpha_2 x_{s2} + \ .\ .\ .\ + \alpha_k x_{sk}\,. \qquad (s=1,\, 2,\, \dots,\, n)$$

Затѣмъ интегрируемъ системы уравненій (7), соотвѣтствующія $m=2,\ 3,\ .\ .\ .\ .$

Въ параграфѣ 3^емъ^ мы при этомъ предполагали, что всѣ функціи $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m>1$, должны обращаться въ нуль при $t=t_0$.

Здѣсь болѣе не будемъ удерживать этого предположенія, а взамѣнъ того примемъ слѣдующее правило:

Допустимъ, что всѣ функціи $x_s^{(\mu)}$, для которыхъ $\mu < m$, найдены и представляютъ относительно постоянныхъ α_i цѣлыя однородныя функціи $\mu^{\text{ой}}$ степени. Тогда функціи $R_i^{(m)}$, по свойству своихъ выраженій черезъ величины $x_s^{(\mu)}$, представятся относительно тѣхъ же постоянныхъ подъ видомъ цѣлыхъ однородныхъ функцій $m^{\text{ой}}$ степени.

Пусть

$$\frac{\triangle_{ij}}{\triangle} R_i^{(m)} = \sum T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k},$$

гдѣ T суть функціи t, независящія отъ постоянныхъ α_s.

Тогда, дѣлая

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int \frac{\triangle_{ij}}{\triangle} R_i^{(m)} dt ,$$

$$\int \frac{\triangle_{ij}}{\triangle} R_i^{(m)} dt = \sum \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} \int T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} dt ,$$

каждый изъ интеграловъ

$$\int T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} dt ,$$

въ которомъ подъинтегральная функція обладаетъ положительнымъ характеристичнымъ числомъ, будемъ брать въ предѣлахъ отъ $+\infty$ до t. Что же касается тѣхъ, для которыхъ характеристичныя числа подъинтегральныхъ функцій отрицательны или нули, то вообще дѣлая

$$\int T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} dt = \int_{t_0}^{t} T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} dt + C_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)},$$

будемъ только предполагать, что постояннымъ C приписываются какія-либо независящія отъ постоянныхъ α_s опредѣленныя значенія.

Разсматриваемые интегралы будутъ при этомъ обладать характеристичными числами, не меньшими характеристичныхъ чиселъ соотвѣтствующихъ подъинтегральныхъ функцій (лемма VIII).

Руководствуясь сказаннымъ правиломъ, начиная отъ $m = 2$, для всѣхъ $x_s^{(m)}$ получимъ выраженія, цѣлыя и однородныя относительно постоянныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Пусть въ этомъ предположеніи составлены ряды

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + \ldots . \qquad (s=1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

Желая придать имъ видъ (25), мы должны будемъ сдѣлать:

$$L_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} = e^{\sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int T_{ij}^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} dt .$$

Отсюда нетрудно заключить, что характеристичныя числа функцій $L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ не менѣе нуля.

Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе сдѣланнаго допущенія, что система уравненій (6) есть правильная, характеристичное число функціи $\frac{1}{\Delta}$ равно

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n);$$

а потому характеристичное число функціи $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ не менѣе $-\lambda_j$.

Вслѣдствіе этого, если допустимъ, что сейчасъ сказанное относительно функцій L справедливо для всѣхъ тѣхъ изъ нихъ, для которыхъ

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k < m,$$

то по свойству величинъ $R_i^{(m)}$ заключимъ (леммы IV, V), что характеристичное число функціи $T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, для которой

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m,$$

а слѣдовательно и характеристичное число интеграла

$$\int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt$$

не менѣе

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_j.$$

Отсюда же выведемъ, что характеристичное число всякой функціи L, для которой сумма значковъ m_i равна m, не менѣе нуля.

Поэтому разсматриваемое свойство функцій L, будучи справедливымъ въ случаѣ $\sum m_i = 1$, справедливо вообще.

Примѣчаніе. — Чтобы придти къ такому результату, очевидно, нѣтъ надобности, при составленіи рядовъ (25), интегрировать въ предѣлахъ отъ $+\infty$ до t непремѣнно каждую изъ функцій $T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ съ положительнымъ характеристичнымъ числомъ. Достаточно интегрировать въ такихъ предѣлахъ только тѣ изъ нихъ, для которыхъ

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_j > 0.$$

12. Переходя теперь къ вопросу о сходимости рядовъ (25), будемъ предполагать, что всѣ взятыя для составленія ихъ характеристичныя числа (24) положительны.

При этомъ для упрощенія изслѣдованія примемъ $t_0 = 0$.

Тогда докажется слѣдующее предложеніе.

Теорема. — *Если, разумѣя подъ ε нѣкоторую положительную постоянную, сдѣлаемъ*

$$a_s e^{-(\lambda_s - \varepsilon)t} = q_s \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

и величины α_s *въ рядахъ (25) замѣнимъ слѣдующими отсюда ихъ выраженіями, то получимъ новые ряды*

$$x_s = \sum Q_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k}, \quad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

расположенные по восходящимъ степенямъ величинъ q_s, *которые будутъ такого свойства, что при всякомъ* ε, *какъ бы оно мало ни было, найдутся такія положительныя постоянныя* $Q^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)}$, *при которыхъ для всѣхъ неотрицательныхъ значеній* t *будутъ справедливы неравенства*

$$\left| Q_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} \right| < Q^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)},$$

а рядъ

$$\sum Q^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k} \tag{27}$$

будетъ абсолютно сходящимся, пока модули величинъ q_s *не превосходятъ нѣкотораго отличнаго отъ нуля предѣла* q.

Будемъ разсматривать только такія положительныя значенія ε, которыя менѣе каждаго изъ чиселъ

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k.$$

Тогда найдется такое цѣлое положительное число l, что всѣ выраженія

$$m_1(\lambda_1 - \varepsilon) + m_2(\lambda_2 - \varepsilon) + \ldots + m_k(\lambda_k - \varepsilon) - \lambda_j + \varepsilon \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

при всякихъ цѣлыхъ неотрицательныхъ $m_1, m_2, \ldots, m_k$, удовлетворяющихъ условію

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k \geqq l,$$

будутъ болѣе нѣкоторой произвольно заданной положительной величины H.

Пусть η есть нѣкоторая положительная постоянная, меньшая ε.

Всѣ функціи

$$Q_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} e^{\eta t} = L_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} e^{-[(m_1+m_2+\ldots+m_k)\varepsilon - \eta]t} \tag{28}$$

будутъ исчезающими. Поэтому для модуля каждой изъ нихъ можетъ быть назначенъ нѣкоторый постоянный высшій предѣлъ, годный для всѣхъ положительныхъ значеній t.

Пусть такіе предѣлы, которые при томъ предположимъ независящими отъ s и означимъ черезъ $Q^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)}$, найдены для всѣхъ тѣхъ изъ нихъ, для которыхъ

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k < l.$$

Между ними будутъ между прочимъ функціи

$$x_{ij} e^{(\lambda_j - \varepsilon + \eta)t}.$$

Если же предположимъ еще $\eta > \frac{\varepsilon}{2}$, то и для модулей функцій

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} e^{-(\lambda_j+2\eta-\varepsilon)t}$$

найдутся подобные высшіе предѣлы.

Пусть K и K' суть такія постоянныя, что

$$|x_{ij}|\, e^{(\lambda_j-\varepsilon+\eta)t} < K, \qquad \left|\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right| e^{-(\lambda_j+2\eta-\varepsilon)t} < K'$$

для всякихъ i и j, взятыхъ изъ ряда 1, 2, 3,..., n, и для всякаго положительнаго t.

Для опредѣленія высшихъ предѣловъ модулей тѣхъ изъ величинъ (28), для которыхъ сумма значковъ $m_1, m_2, \ldots, m_k$ не менѣе l, обращаемся къ формуламъ

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{\infty}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)}\, dt\,, \qquad (s=1,\, 2,\, \ldots,\, n) \qquad \textbf{(29)}$$

въ которыхъ, согласно принятому нами правилу, всѣ интегрированія производятся въ предѣлахъ отъ $+\infty$ до t, ибо при $m \geqq l$ характеристичныя числа всѣхъ подъинтегральныхъ функцій будутъ положительны.

Пусть

$$R_i^{(m)} = \sum R_i^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)}\, q_1^{m_1}\, q_2^{m_2} \cdots q_k^{m_k}\,, \qquad (m_1+m_2+\ldots+m_k=m)$$

гдѣ $R_i^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)}$ суть величины, не зависящія отъ постоянныхъ α_s.

Тогда, полагая для сокращенія

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k - m\varepsilon = N,$$

изъ (29) выведемъ:

$$Q_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)} = -e^{Nt} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{t}^{\infty} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} e^{-Nt} R_i^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k)}\, dt\,. \qquad \textbf{(30)}$$

Допустимъ, что пользуясь такими формулами, мы нашли годные для всѣхъ положительныхъ значеній t высшіе предѣлы модулей всѣхъ величинъ

$$Q_s^{(\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_k)}, \qquad \textbf{(31)}$$

для которыхъ сумма значковъ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ менѣе m, и что эти предѣлы и для случаевъ, когда

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k \geqq l,$$

получены нами подъ видомъ:

$$e^{-\eta t}\, Q^{(\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_k)},$$

гдѣ $Q^{(\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_k)}$ суть постоянныя величины.

При помощи этихъ предѣловъ составимъ высшіе предѣлы модулей всѣхъ $R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, фигурирующихъ въ формулахъ (30).

Для этого замѣчаемъ, что по свойству выраженій $R_i^{(m)}$ величина $R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ представляетъ цѣлую функцію $m^{\text{ой}}$ степени отъ тѣхъ изъ величинъ (31), для которыхъ сумма значковъ μ_s менѣе m, а коэффиціенты въ ней суть линейныя формы съ *положительными* коэффиціентами тѣхъ изъ величинъ

$$P_i^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)}, \tag{32}$$

для которыхъ сумма значковъ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ не болѣе m. При томъ относительно величинъ (31) степень каждаго члена этой функціи не ниже второй.

Отсюда слѣдуетъ, что если $R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ есть постоянная, въ которую обращается каждая изъ функцій

$$R_1^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}, \qquad R_2^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}, \ldots, R_n^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

послѣ замѣны въ ней величинъ (32) нѣкоторыми независящими отъ i высшими предѣлами ихъ числовыхъ значеній для всѣхъ положительныхъ значеній t, а величинъ (31) величинами $Q^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)}$, то для всѣхъ такихъ значеній t будутъ справедливы неравенства

$$\left| R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \right| < e^{-2\eta t} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}.$$

Вторыя части ихъ и примемъ за искомые высшіе предѣлы.

Пользуясь всѣми найденными высшими предѣлами, выведемъ изъ (30) слѣдующее неравенство:

$$\left| Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \right| < nKK' R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{Nt} \sum_{j=1}^{n} e^{-(\lambda_j - \varepsilon + \eta)t} \int_t^{\infty} e^{-(N - \lambda_j + \varepsilon)t} dt,$$

справедливое для всякаго положительнаго t. А замѣчая, что

$$N - \lambda_j + \varepsilon = m_1(\lambda_1 - \varepsilon) + m_2(\lambda_2 - \varepsilon) + \ldots + m_k(\lambda_k - \varepsilon) - \lambda_j + \varepsilon > H,$$

и что слѣдовательно

$$\int_t^{\infty} e^{-(N - \lambda_j + \varepsilon)t} dt < \frac{1}{H} e^{-(N - \lambda_j + \varepsilon)t},$$

можемъ замѣнить это неравенство слѣдующимъ:

$$\left| Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \right| < \frac{n^2 KK'}{H} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{-\eta t}.$$

Отсюда заключаемъ, что можно положить:

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = \frac{n^2 KK'}{H} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

для всякихъ $m_1, m_2, \ldots, m_k$, сумма которыхъ не менѣе l.

Но выбирая достаточно большія величины для K и K' или достаточно малую величину для H, очевидно, можемъ достигнуть того, что величины Q, опредѣляемыя по этой формулѣ для значковъ, удовлетворяющихъ условію

$$1 < m_1 + m_2 + \ldots + m_k < l,$$

будутъ не менѣе тѣхъ, которыя мы нашли для нихъ раньше.

Поэтому, замѣняя послѣднія, если это необходимо, бо́льшими величинами и означая черезъ G нѣкоторую достаточно большую положительную постоянную, можемъ сдѣлать

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = GR^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \tag{33}$$

для всякихъ $m_1, m_2, \ldots, m_k$, сумма которыхъ болѣе 1. Для тѣхъ-же, сумма которыхъ равна 1, можемъ положить

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = K.$$

Означимъ сумму

$$\sum Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k},$$

распространенную на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$, удовлетворяющія условію

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m,$$

черезъ $x^{(m)}$. Тогда для $m > 1$ равенство (33) приведетъ къ слѣдующему:

$$x^{(m)} = GR^{(m)},$$

гдѣ $R^{(m)}$ есть то, во что обращается $R_i^{(m)}$ послѣ замѣны величинъ $x_s^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величинъ (32) вышепринятыми высшими предѣлами.

При этомъ рядъ

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \ldots, \tag{34}$$

расположенный по восходящимъ степенямъ величинъ q_s, будетъ обладать членами, модули которыхъ болѣе модулей соотвѣтственныхъ членовъ каждаго изъ рядовъ (26) для всякаго положительнаго t (они будутъ даже болѣе этихъ модулей, умноженныхъ на $e^{\eta t}$).

Но рядъ (34) можно разсматривать, какъ расположенный по восходящимъ степенямъ величины

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k,$$

и если, согласно замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, за высшій предѣлъ числовыхъ значеній величинъ (32) примемъ слѣдующую

$$\frac{M}{A^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}},$$

то рядъ этотъ, по существу, не будетъ отличаться отъ того, къ изслѣдованію котораго привелся вопросъ въ параграфѣ 4$^{\text{омъ}}$.

Поэтому, если остановимся на такой гипотезѣ, то навѣрно найдется такая положительная величина q, что для всякихъ $q_1, q_2, \ldots, q_k$, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|q_s| \leqq q, \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

рядъ (34) будетъ абсолютно сходящимся.

Теорема, слѣдовательно, доказана.

Слѣдствіе. — *Можно найти такую положительную постоянную* α, *что при всякихъ* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *удовлетворяющихъ условіямъ*

$$|\alpha_s| \leqq \alpha, \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

и для всякаго неотрицательнаго t *ряды (25) будутъ абсолютно сходящимися, представляя при томъ непрерывныя функціи* t.

Что функціи эти удовлетворяютъ уравненіямъ (1), докажется такъ-же, какъ въ параграфѣ 4$^{\text{омъ}}$.

Примѣчаніе. — Если система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія не есть правильная, то означая черезъ S сумму всѣхъ ея характеристичныхъ чиселъ, а черезъ μ характеристичное число функціи $\frac{1}{\Delta}$, будемъ имѣть

$$S + \mu = -\sigma,$$

гдѣ σ нѣкоторое положительное число.

Въ этомъ случаѣ характеристичное число функціи

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$$

не менѣе $-\lambda_j - \sigma$. А на основаніи этого нетрудно доказать, что если для разсматриваемаго случая по правилу, изложенному въ предыдущемъ параграфѣ, составить ряды, подобные (25), то характеристичное число функціи

$$L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

будетъ не менѣе

$$-(m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1)\sigma .$$

Допустимъ, что σ менѣе каждаго изъ чиселъ

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k .$$

Тогда надлежащимъ выборомъ чиселъ ε и η можно будетъ удовлетворить всѣмъ неравенствамъ

$$\lambda_s > \varepsilon > \eta > \frac{\varepsilon + \sigma}{2} . \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

А при выполненіи послѣднихъ будутъ выполнены и всѣ условія предыдущаго доказательства, въ чемъ легко убѣдимся, принимая въ расчетъ только-что указанное свойство функцій L.

Поэтому теорема будетъ справедлива и въ случаѣ, когда система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія не есть правильная, но каждое изъ характеристичныхъ чиселъ, взятыхъ для составленія рядовъ (25), болѣе σ, — если только условіе $\varepsilon > 0$ замѣнимъ въ ней условіемъ $\varepsilon > \sigma$.

13. Изъ доказаннаго могутъ быть выведены слѣдующія теоремы:

Теорема I. — *Если система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія есть правильная, и если всѣ ея характеристичныя числа положительны, то невозмущенное движеніе устойчиво.*

При сказанномъ условіи можно принять $k = n$.

Тогда, называя значенія функцій x_s для $t = 0$ черезъ a_s, и полагая въ уравненіяхъ (25) $t = 0$, найдемъ

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ f_s суть голоморфныя функціи величинъ α_j, обращающіяся въ нуль при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

и при томъ такія, что функціональный опредѣлитель ихъ въ отношеніи величинъ α_j не обращается въ нуль, когда всѣ α_j сдѣлаемъ равными нулю (ибо онъ принимаетъ при этомъ значеніе опредѣлителя Δ для $t = 0$).

Поэтому предыдущія уравненія разрѣшимы относительно величинъ α_j, и когда величины a_s численно достаточно малы, мы можемъ изъ нихъ вывести:

$$\alpha_s = \varphi_s(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

гдѣ φ_s суть голоморфныя функціи величинъ a_j, обращающіяся въ нуль при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Пусть x есть произвольно малая положительная величина.

Мы можемъ найти такую положительную величину r, что для всѣхъ значеній перемѣнныхъ $q_1, q_2, \ldots, q_n$, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|q_s| \leqq r, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

рядъ (27) (относящійся къ предположенію, что ε менѣе каждаго изъ характеристичныхъ чиселъ) будетъ абсолютно сходящимся, а модуль его суммы будетъ менѣе x.

Затѣмъ можемъ найти такую положительную величину a, что для всѣхъ значеній величинъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|a_s| \leqq a, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

модули величинъ α_s, опредѣляемыхъ уравненіями (35), не будутъ превосходить величины r.

Тогда можемъ быть увѣрены, что если начальныя обстоятельства возмущеннаго движенія выбраны согласно условіямъ (36), то въ теченіе всего послѣдующаго времени движенія будутъ выполняться условія:

$$|x_s| < x. \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

А этимъ и доказывается теорема.

Примѣчаніе. — При условіяхъ предыдущей теоремы, во всякомъ возмущенномъ движеніи, достаточно близкомъ къ невозмущенному, всѣ функціи x_s съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t стремятся къ нулю. Это обстоятельство мы будемъ выражать, говоря, что *возмущенное движеніе* (поскольку оно опредѣляется выраженіями величинъ x_s въ функціяхъ t) *асимптотически приближается къ невозмущенному.*

Далѣе мы будемъ часто говорить также о движеніяхъ, асимптотически приближающихся къ какому-либо данному движенію. Послѣ замѣченнаго сейчасъ значеніе такого выраженія не требуетъ особыхъ разъясненій.

Теорема II. — *Если система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія есть правильная, а въ группѣ ея характеристичныхъ чиселъ находятся положительныя, то невозмущенное движеніе всегда обладаетъ извѣстною условною устойчивостью. А именно, если число положительныхъ характеристичныхъ чиселъ есть k, то для устойчивости достаточно, чтобы начальныя значенія $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неизвѣстныхъ функцій удовлетворяли нѣкоторымъ $n-k$ уравненіямъ вида*

$$F_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad (j=1, 2, \ldots, n-k)$$

гдѣ F_j суть голоморфныя функціи величинъ a_s, уничтожающіяся при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Уравненія эти таковы, что позволяютъ выражать всѣ a_s, какъ вещественныя голоморфныя функціи нѣкоторыхъ k вещественныхъ независимыхъ величинъ.

Будемъ предполагать всѣ функціи, входящія въ составъ нормальной системы рѣшеній уравненій (6), которою мы пользовались для составленія рядовъ (25), вещественными.

Тогда вычисленія можно вести такъ, что всѣ коэффиценты L въ уравненіяхъ (25) также будутъ вещественными, и слѣдовательно уравненіями этими при вещественныхъ α_j будетъ опредѣляться нѣкоторое вещественное рѣшеніе системы уравненій (1).

Допуская это и дѣлая въ уравненіяхъ (25) $t=0$, найдемъ:

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ f_s суть вещественныя голоморфныя функціи величинъ α_j, обращающіяся въ нуль, когда всѣ α_j полагаются равными нулю. При томъ функціи эти таковы, что между функціональными опредѣлителями, которые можно изъ нихъ составить, комбинируя ихъ по k, найдется по крайней мѣрѣ одинъ, который не будетъ обращаться въ нуль, когда сдѣлаемъ

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0,$$

ибо при этомъ опредѣлители эти обращаются въ значенія, соотвѣтствующія $t = 0$, миноровъ опредѣлителя $\triangle$, составленныхъ изъ элементовъ его первыхъ k строкъ.

Вслѣдствіе этого изъ предыдущихъ уравненій при достаточно малыхъ $|a_s|$ можемъ вывести слѣдующія:

$$a_j = \varphi_j(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

$$F_s(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad (s=1, 2, \ldots, n-k) \qquad \textbf{(37)}$$

гдѣ φ_j, F_s суть нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, обращающіяся въ нуль, когда послѣднія всѣ дѣлаются равными нулю.

Дальнѣйшій ходъ доказательства будетъ тотъ же, что и для предыдущей теоремы, съ тою только разницею, что здѣсь мы должны имѣть въ виду $n-k$ уравненій (37), связывающихъ величины a_s.

Можно замѣтить, что при всякихъ численно достаточно малыхъ возмущеніяхъ, удовлетворяющихъ условіямъ (37), возмущенныя движенія будутъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Примѣчаніе. — Если система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія не есть правильная, но имѣетъ k характеристичныхъ чиселъ, бóльшихъ величины σ (пар. 12, примѣч.), то найдется $n-k$ подобныхъ предыдущимъ условій для возмущеній, при которыхъ невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Нѣкоторыя общія предложенія.

14. Переходя теперь къ изложенію основаній второй методы, прежде всего обратимъ вниманіе на нѣкоторыя общія заключенія, которыя могутъ быть выведены изъ изложеннаго въ параграфахъ 3[емъ] и 4[омъ].

Какъ и въ предыдущемъ отдѣлѣ, мы будемъ здѣсь разсматривать уравненія (1) исключительно въ предположеніи, что для функцій A_s, о которыхъ шла рѣчь въ параграфахъ 2[омъ] и 4[омъ], при значеніяхъ t, бóльшихъ его начальнаго значенія t_0, можетъ быть назначенъ нѣкоторый положительный низшій предѣлъ A.

Въ этомъ предположеніи, означая черезъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ какія-либо постоянныя, выбранныя согласно неравенствамъ

$$|a_s| < A, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

разсмотримъ функціи x_s, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и принимающія значенія a_s для $t = t_0$ *).

На основаніи изложеннаго мы можемъ утверждать, что такія функціи по крайней мѣрѣ для значеній t, достаточно близкихъ къ t_0, всегда найдутся и выйдутъ вещественными всякій разъ, когда такими выбраны всѣ a_s (это мы и будемъ здѣсь предполагать), и что при томъ всегда найдется такой предѣлъ t_1, бо́льшій t_0, чтобы въ промежуткѣ отъ t_0 до t_1 включительно функціи эти представлялись рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ постоянныхъ a_s.

Если опредѣляемыя этими рядами функціи при $t = t_1$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|x_s| < A, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{38}$$

то для нихъ, конечно, возможны будутъ аналитическія продолженія и за предѣлъ t_1, представляемыя подобными же рядами, расположенными по степенямъ значеній этихъ функцій для $t = t_1$.

Эти новыя выраженія функцій x_s вообще будутъ справедливы только для значеній t, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла t_2. Но если при $t = t_2$ неравенства (38) остаются выполненными, для нашихъ функцій будетъ возможно дальнѣйшее продолженіе подъ видомъ нѣкоторыхъ новыхъ рядовъ такого же характера.

Такимъ образомъ, исходя изъ данныхъ начальныхъ значеній a_s, можно будетъ слѣдить за непрерывнымъ измѣненіемъ нашихъ функцій при непрерывномъ возрастаніи t по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока не нарушаются неравенства (38).

Можетъ случиться, что при какомъ-либо выборѣ постоянныхъ a_s неравенства эти будутъ выполняться для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ t_0. Тогда функціи x_s опредѣлятся для всѣхъ такихъ значеній t.

Въ другихъ случаяхъ для t будетъ существовать нѣкоторый высшій предѣлъ t', при которомъ по крайней мѣрѣ одно изъ неравенствъ (38) перейдетъ въ равенство.

Аналитическое продолженіе нашихъ функцій за такой предѣлъ t' потребовало бы, конечно, особаго изслѣдованія. Но намъ входить въ него не представится надобности, такъ какъ для нашей цѣли будетъ достаточно разсматривать всякое возмущенное движеніе только до тѣхъ поръ, пока величины $|x_s|$ не превосходятъ какихъ-либо данныхъ отличныхъ отъ нуля предѣловъ.

Во всякомъ случаѣ постоянныя a_s всегда можно будетъ выбрать настолько численно малыми, чтобы наши аналитическія выраженія функцій x_s годились для всѣхъ значеній t, лежащихъ между t_0 и T, какъ бы велико ни было данное число T, и

---

*) Заданіемъ постоянныхъ a_s функціи x_s опредѣляются вполнѣ по крайней мѣрѣ для достаточно близкихъ къ t_0 значеній t. Это выводится изъ легко доказываемаго предложенія, состоящаго въ томъ, что система (1) кромѣ очевиднаго рѣшенія

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

не можетъ имѣть другого, въ которомъ начальныя значенія всѣхъ неизвѣстныхъ функцій были бы равны нулю.

чтобы значенія $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ этихъ функцій для $t = T$ были всѣ сколь угодно численно малыми. При томъ, если бы мы пожелали опредѣлять функціи x_s ихъ значеніями ξ_s для $t = T$, то какъ бы велико ни было T, всѣ ξ_s всегда можно было бы выбрать настолько численно малыми, чтобы этимъ значеніямъ соотвѣтствовала одна опредѣленная система начальныхъ значеній a_s, и чтобы послѣднія были всѣ сколь угодно численно малыми.

Изъ этого послѣдняго замѣчанія слѣдуетъ, что при рѣшеніи вопросовъ объ устойчивости достаточно будетъ разсматривать только значенія t, бо́льшія сколь угодно большого предѣла T, и замѣнять разсмотрѣніе начальныхъ значеній функцій x_s разсмотрѣніемъ ихъ значеній, соотвѣтствующихъ $t = T$.

Мы будемъ далѣе разсуждать о функціяхъ x_s только до тѣхъ поръ, пока не нарушаются неравенства (38). Поэтому, говоря о какихъ-либо предѣлахъ для величинъ $|x_s|$, эти предѣлы всегда будемъ предполагать ме́ньшими A.

15. Мы будемъ здѣсь разсматривать вещественныя функціи вещественныхъ перемѣнныхъ

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad t, \tag{39}$$

подчиненныхъ нѣкоторымъ условіямъ вида

$$t \geqq T, \qquad |x_s| \leqq H, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

гдѣ T и H суть постоянныя, изъ которыхъ вторая всегда будетъ предполагаться отличною отъ нуля.

При томъ мы будемъ разсуждать только о функціяхъ, которыя при условіяхъ (40) остаются непрерывными и однозначными и *уничтожаются при*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Такими свойствами будутъ обладать всѣ разсматриваемыя нами функціи (хотя бы объ этомъ и не было упомянуто). Но кромѣ того онѣ могутъ обладать болѣе спеціальными свойствами, для обозначенія которыхъ мы введемъ нѣкоторые термины.

Пусть разсматривается функція V, которая такова, что при условіяхъ (40), если въ нихъ T сдѣлать достаточно большимъ, а H достаточно малымъ, она можетъ получать, кромѣ равныхъ нулю, только значенія одного какого-либо знака.

Такую функцію будемъ называть *знакопостоянною*. Когда же пожелаемъ указать на ея знакъ, то будемъ говорить, что это есть функція положительная или отрицательная.

При томъ, если функція V не зависитъ отъ t, а постоянная H можетъ быть выбрана достаточно малою для того, чтобы при условіяхъ (40) равенство $V = 0$ могло имѣть мѣсто только для одной системы значеній перемѣнныхъ

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

то функцію V будемъ называть *знакоопредѣленною*, а желая обратить вниманіе на ея знакъ,—*опредѣленно-положительною* или *опредѣленно-отрицательною*.

Послѣдними терминами мы будемъ пользоваться также и по отношенію къ функціямъ, зависящимъ отъ t. Но въ этомъ случаѣ функцію V будемъ называть знакоопредѣленною только при условіи, если для нея возможно найти такую независящую отъ t опредѣленно-положительную функцію W, при которой одно изъ двухъ выраженій

$$V - W \quad \text{или} \quad -V - W$$

представляло бы функцію положительную.

Такъ каждая изъ функцій

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos t, \qquad t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 \cos t,$$

есть знакопостоянная. Но первая есть только знакопостоянная, а вторая, если $n = 2$, есть въ то же время знакоопредѣленная.

Всякую функцію V, для которой постоянная H можетъ быть выбрана настолько малою, чтобы для числовыхъ значеній этой функціи при условіяхъ (40) существовалъ нѣкоторый высшій предѣлъ, мы будемъ называть *ограниченною*.

Въ силу свойствъ, которыми по нашему предположенію обладаютъ всѣ разсматриваемыя нами функціи, такою будетъ напр. всякая независящая отъ t функція.

Ограниченная функція можетъ быть такова, что для всякаго положительнаго ε, какъ бы оно мало ни было, найдется такое отличное отъ нуля число h, при которомъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условіямъ

$$t \geqq T, \qquad |x_s| \leqq h, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будетъ выполняться слѣдующее

$$|V| \leqq \varepsilon.$$

Этому требованію удовлетворяетъ напр. всякая независящая отъ t функція. Но функціи, зависящія отъ t, хотя бы и ограниченныя, могутъ ему не удовлетворять. Такой случай представляется напр. для функціи

$$\sin[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)t].$$

Когда для функціи V предыдущее требованіе выполнено, мы будемъ говорить, что она *допускаетъ безконечно-малый высшій предѣлъ*.

Такова напр. функція

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\sin t.$$

Пусть V есть функція, допускающая безконечно-малый высшій предѣлъ. Тогда, если намъ извѣстно, что перемѣнныя удовлетворяютъ условіямъ

$$t \geqq T, \qquad |V| \geqq l,$$

гдѣ l есть нѣкоторое положительное число, то отсюда заключимъ, что найдется нѣкоторое другое положительное число λ, менѣе котораго не можетъ быть наибольшая изъ величинъ $|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|$.

Одновременно съ функціей V мы будемъ часто разсматривать выраженіе

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t},$$

представляющее ея полную производную по t, взятую въ предположеніи, что x_1, $x_2, \ldots, x_n$ суть функціи t, удовлетворяющія дифференціальнымъ уравненіямъ возмущеннаго движенія.

Въ такихъ случаяхъ всегда будемъ предполагать функцію V такою, чтобы V', какъ функція перемѣнныхъ (39), обладала всѣми свойствами вообще разсматриваемыхъ нами здѣсь функцій.

Говоря далѣе о производной функціи V, будемъ подразумѣвать, что рѣчь идетъ о только-что названной полной производной.

16. Всѣмъ извѣстна теорема Лагранжа объ устойчивости равновѣсія при существованіи силовой функціи и изящное доказательство, предложенное для нея Леженъ-Дирихле. *) Послѣднее основывается на соображеніяхъ, которыя могутъ служить для доказательства многихъ подобныхъ теоремъ.

Руководствуясь такими соображеніями, мы докажемъ здѣсь слѣдующія предложенія:

Теорема I. — *Если дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія таковы, что возможно найти знакоопредѣленную функцію V, производная которой V' въ силу этихъ уравненій была бы или знакопостоянною функціей противоположнаго знака съ V, или тожественно равною нулю,— то невозмущенное движеніе устойчиво.*

Допустимъ, что найденная функція V опредѣленно-положительна, а производная ея V' представляетъ отрицательную функцію или тожественно равна нулю.

Тогда найдутся такія постоянныя T и H, при которыхъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, удовлетворяющихъ условіямъ: $t \geqq T$ и

$$|x_s| \leqq H, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{41}$$

будутъ выполняться слѣдующія:

$$V' \leqq 0, \qquad V \geqq W, \tag{42}$$

гдѣ W есть нѣкоторая независящая отъ t положительная функція перемѣнныхъ x_s, не обращающаяся при условіяхъ (41) въ нуль иначе, какъ для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Разсматривая величины x_s, какъ функціи t, удовлетворяющія дифференціальнымъ уравненіямъ возмущеннаго движенія, допустимъ, что значенія ξ_s этихъ функцій для $t = T$ удовлетворяютъ условіямъ (41) со знаками неравенства. Тогда въ силу непрерывности

---

*) *Mécanique analytique* de Lagrange. Troisième ou quatrième édition. Tome premier, note II.

этихъ функцій условія (41) будутъ выполняться по крайней мѣрѣ для всѣхъ достаточно близкихъ къ T значеній t.

Будемъ разсматривать только такія значенія послѣдняго, которыя не менѣе T.

Тогда, называя значеніе функціи V для $t = T$ черезъ V_0, изъ уравненія

$$V - V_0 = \int_T^t V' dt \tag{43}$$

выведемъ, что если въ промежуткѣ отъ T до t условія (41) постоянно выполняются, то въ томъ же промежуткѣ функціи x_s навѣрно будутъ удовлетворять условію

$$W \leqq V_0, \tag{44}$$

вторую часть котораго, дѣлая всѣ ξ_s численно достаточно малыми, можно сдѣлать сколь угодно малою.

Означимъ черезъ x наибольшую изъ величинъ $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$, а черезъ ε нѣкоторое отличное отъ нуля, но произвольно малое положительное число (которое во всякомъ случаѣ будемъ предполагать меньшимъ H), и разсмотримъ всевозможныя системы значеній величинъ x_s, удовлетворяющія условію

$$x = \varepsilon. \tag{45}$$

Пусть l есть *точный* низшій предѣлъ функціи W (какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$) при этомъ условіи.

Число l необходимо будетъ отличнымъ отъ нуля и положительнымъ, ибо функція W по своему характеру не можетъ дѣлаться при условіи (45) ни отрицательною, ни равною нулю, а l въ силу ея непрерывности необходимо будетъ однимъ изъ значеній, которыя она при этомъ условіи можетъ принимать.

Поэтому всегда можно будетъ сдѣлать

$$V_0 < l,$$

и при томъ всегда найдется такое отличное отъ нуля число λ, при которомъ неравенство это будетъ выполняться для всякихъ ξ_s, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|\xi_s| \leqq \lambda. \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

Установивши это, допустимъ, что величины ξ_s дѣйствительно выбраны согласно условіямъ (46).

Такъ какъ число λ необходимо менѣе ε, то функціи x_s будутъ тогда удовлетворять неравенствамъ

$$|x_s| < \varepsilon \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{47}$$

для всѣхъ достаточно близкихъ къ T значеній t.

Но измѣняясь съ теченіемъ времени непрерывно, функціи x_s не могутъ перестать удовлетворять этимъ неравенствамъ иначе, какъ достигнувши предварительно нѣкоторыхъ значеній, удовлетворяющихъ условію (45). Послѣднее же при $V_0 < l$ несовмѣстно съ условіемъ (44).

Мы должны поэтому заключить, что каковы бы ни были ξ_s, удовлетворяющія условіямъ (46), функціи x_s будутъ удовлетворять неравенствамъ (47) для всѣхъ значеній t, бóльшихъ T.

Такимъ образомъ теорему нашу можемъ считать доказанной.

Какъ нѣкоторый частный случай, изъ нея выводится тотчасъ же упомянутая выше теорема Лагранжа.

Примѣчаніе 1. — Если бы для дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія было найдено нѣсколько интеграловъ $U_1, U_2, \ldots, U_m$ (уничтожающихся, какъ и всѣ разсматриваемыя здѣсь функціи, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) и если бы найденная функція V удовлетворяла условіямъ (42) (при прежнемъ значеніи буквы W) только для перемѣнныхъ, подчиненныхъ, кромѣ (40), еще условіямъ

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots, \quad U_m = 0,$$

то мы заключили бы, что невозмущенное движеніе устойчиво по крайней мѣрѣ для возмущеній, не нарушающихъ этихъ послѣднихъ условій.

Въ случаѣ, когда функція V сама есть одинъ изъ интеграловъ, и когда функціи $V, U_1, U_2, \ldots, U_m$ не зависятъ явнымъ образомъ отъ t, въ этомъ заключается предложеніе, на которое было указано Routh'омъ *).

Примѣчаніе 2. — Если функція V, удовлетворяя условіямъ теоремы, въ то же время допускаетъ безконечно-малый высшій предѣлъ, а производная ея представляетъ знакоопредѣленную функцію, то можно доказать, что всякое возмущенное движеніе, достаточно близкое къ невозмущенному, будетъ приближаться къ нему асимптотически.

Съ этою цѣлью разсмотримъ какое-либо возмущенное движеніе, которому соотвѣтствуютъ величины ξ_s, численно достаточно малыя для того, чтобы условія (41) выполнялись во все время, слѣдующее за моментомъ, когда $t = T$.

Легко убѣдиться, что если постоянная H достаточно мала, то при названныхъ свойствахъ функціи V (которую опять предположимъ опредѣленно-положительною) нельзя найти такого положительнаго числа l, которое было бы менѣе всѣхъ значеній, получаемыхъ функціей V въ этомъ движеніи при $t > T$.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое число существовало, то по свойству V, какъ функціи перемѣнныхъ (39), допускающей безконечно-малый высшій предѣлъ, мы нашли

---

*) *The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies* (4 edition, 1884; p. 52, 53).

бы такое положительное число λ, при которомъ было бы $x > \lambda$ (если x по прежнему означаетъ наибольшую изъ величинъ $|x_s|$) для всѣхъ значенiй t, превосходящихъ T. А тогда для функцiи $-V'$ при тѣхъ же значенiяхъ t существовалъ бы нѣкоторый положительный низшiй предѣлъ l'.

Дѣйствительно, функцiя $-V'$, согласно допущенному, есть опредѣленно-положительная. Поэтому постоянныя T и H всегда можно предположить такими, чтобы при $t \geqq T$ и $x \leqq H$ выполнялось условiе $-V' \geqq W'$, въ которомъ W' есть нѣкоторая независящая отъ t положительная функцiя перемѣнныхъ x_s, не уничтожающаяся при условiи $x \leqq H$ иначе, какъ для $x = 0$. Но этотъ послѣднiй случай будетъ исключенъ, если перемѣнныя x_s подчинить условiю

$$\lambda \leqq x \leqq H.$$

Поэтому при послѣднемъ функцiя W' будетъ имѣть нѣкоторый положительный низшiй предѣлъ l'.

Но если при $t > T$ всегда выполняется условiе $-V' > l'$, то изъ уравненiя (43) выведемъ

$$V < V_0 - l'(t - T)$$

для всѣхъ превосходящихъ T значенiй t. А это невозможно, ибо первая часть неравенства есть положительная функцiя t, а вторая при достаточно большомъ t дѣлается отрицательной.

И такъ, какъ бы мало ни было число l, всегда наступитъ моментъ, когда функцiя V сдѣлается меньшею l. А будучи убывающею функцiей t, она затѣмъ всегда будетъ оставаться меньшею l.

Поэтому, какъ бы мало ни было положительное число ε, всегда наступитъ моментъ, когда функцiя V сдѣлается и будетъ затѣмъ оставаться меньшею точнаго низшаго предѣла функцiи W при условiи

$$\varepsilon \leqq x \leqq H.$$

А начиная по крайней мѣрѣ съ этого момента, функцiи x_s будутъ всегда оставаться по числовымъ значенiямъ меньшими ε.

Отсюда заключаемъ, что при всякихъ численно достаточно малыхъ ξ_s функцiи x_s съ безпредѣльнымъ возрастанiемъ t стремятся къ нулю.

Теорема II. — *Если дифференцiальныя уравненiя возмущеннаго движенiя таковы, что возможно найти функцiю V, которая обладала бы въ силу этихъ уравненiй знакоопредѣленною производною V', при томъ допускала бы безконечно-малый высшiй предѣлъ и была бы такова, чтобы при всякомъ t, бо́льшемъ нѣкотораго предѣла, надлежащимъ выборомъ величинъ x_s, численно насколько угодно малыхъ, ее можно было сдѣлать величиною одинаковаго знака съ ея производною, — то невозмущенное движенiе неустойчиво.*

Допустимъ, что найдена функцiя V, удовлетворяющая этимъ требованiямъ, и что производная ея V' опредѣленно-положительна.

Для этой функціи найдутся такія постоянныя T и H, при которыхъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условіямъ $t \geqq T$ и

$$|x_s| \leqq H, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{48}$$

будутъ выполняться слѣдующія

$$V' \geqq W, \quad |V| < L, \tag{49}$$

гдѣ L есть нѣкоторая положительная постоянная, а W независящая отъ t положительная функція перемѣнныхъ x_s, не уничтожающаяся при условіяхъ (48) иначе, какъ при равенствѣ нулю всѣхъ x_s.

Тогда, предполагая, что значенія ξ_s функцій x_s для $t = T$ удовлетворяютъ условіямъ (48) со знаками неравенства, и называя значеніе функціи V для того-же t черезъ V_0, изъ уравненія

$$V - V_0 = \int_T^t V' dt \tag{50}$$

выведемъ

$$V \geqq V_0 \tag{51}$$

для всѣхъ значеній t, превосходящихъ T и удовлетворяющихъ требованію, чтобы въ промежуткѣ отъ T до t условія (48) оставались постоянно выполненными.

Мы замѣчаемъ теперь, что по свойству функціи V постоянную T можно предположить достаточно большою для того, чтобы надлежащимъ выборомъ величинъ ξ_s, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|\xi_s| < \varepsilon, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

при всякомъ отличномъ отъ нуля, но сколь угодно маломъ положительномъ ε, постоянную V_0 можно было сдѣлать положительной.

Если-же V_0 положительная величина, то по свойству V, какъ функціи, допускающей безконечно-малый высшій предѣлъ, найдемъ такое положительное число λ, которое будетъ менѣе всѣхъ значеній, возможныхъ при условіи (51) (когда въ немъ предполагается $t \geqq T$) для наибольшей x изъ величинъ $|x_s|$. А тогда, если означимъ черезъ l какое-либо положительное число, меньшее всѣхъ значеній, возможныхъ для функціи W при условіи

$$\lambda \leqq x \leqq H,$$

то изъ уравненія (50) выведемъ слѣдующее неравенство:

$$V > V_0 + l(t - T), \tag{52}$$

которому будетъ удовлетворять функція V для $t > T$, если въ промежуткѣ отъ T до t условія (48) никогда не нарушаются.

Но при тѣхъ-же условіяхъ функція V должна удовлетворять неравенству (49). А послѣднее можетъ существовать совмѣстно съ неравенствомъ (52) только при значеніяхъ t, меньшихъ величины

$$\tau = T + \frac{L - V_0}{l}.$$

Поэтому, если неравенство (52) не должно нарушаться ранѣе условій (48), то въ промежуткѣ отъ T до τ навѣрно найдется такое значеніе t, начиная съ котораго (по крайней мѣрѣ въ теченіи извѣстнаго промежутка времени) хотя одно изъ этихъ условій не будетъ выполняться.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что какъ-бы мало ни было ε, котораго по нашему желанію не должны превосходить числовыя значенія величинъ ξ_s, но если послѣднія выбраны такъ, чтобы V_0 было положительнымъ, то всегда наступитъ моментъ, когда по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ $|x_s|$ достигнетъ *неизмѣннаго* предѣла H. А этимъ и обнаруживается неустойчивость невозмущеннаго движенія.

Примѣръ 1. — Пусть данная система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

гдѣ V есть независящая отъ t голоморфная функція величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разложеніе которой начинается членами не ниже второго порядка.

Въ силу этихъ уравненій будемъ имѣть:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2.$$

Поэтому всякій разъ, когда V есть функція опредѣленно-отрицательная, невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ. Напротивъ, движеніе это будетъ неустойчивымъ всякій разъ, когда V не есть такая функція, если только мы не имѣемъ дѣла съ тѣмъ случаемъ, когда системѣ уравненій

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

возможно удовлетворить (не равными нулю одновременно) вещественными значеніями величинъ x_s, насколько угодно численно малыми.

Послѣдній случай будетъ сомнительнымъ и потребуетъ особаго изслѣдованія.

Случай этотъ навѣрно не представится, если гессіянъ (опредѣлитель Hesse) функціи V не обращается въ нуль, когда сдѣлаемъ

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Примѣръ 2. — Пусть система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія есть $2k^{\text{аго}}$ порядка и имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_s'} - \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \qquad \frac{dx_s}{dt} = x_s', \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

гдѣ

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} x_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} v_{ij} x_i' x_j' + U,$$

а $v_{ij} = v_{ji}$ и U суть независящія отъ t голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$, обращающіяся въ нуль, когда всѣ эти перемѣнныя дѣлаются равными нулю. При томъ функція U такова, что разложеніе ея начинается членами не ниже второго порядка.

Эта система, очевидно, приводится къ типу вообще разсматриваемыхъ нами системъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

Пусть

$$U = U_m + U_{m+1} + \ldots,$$

гдѣ вообще U_l означаетъ цѣлую однородную функцію $l^{\text{ой}}$ степени величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Тогда, дѣлая

$$V = x_1\frac{\partial F}{\partial x_1'} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2'} + \ldots + x_k\frac{\partial F}{\partial x_k'},$$

въ силу нашихъ уравненій найдемъ:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{k} x_s\frac{\partial F}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^{k} x_s'\frac{\partial F}{\partial x_s'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(v_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} x_s\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_s}\right)x_i'x_j' + mU_m + (m+1)U_{m+1} + \ldots$$

Пусть U_m есть опредѣленно-положительная функція перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (для чего конечно m должно быть числомъ четнымъ).

Тогда это выраженіе $\frac{dV}{dt}$ будетъ опредѣленно-положительною функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1', x_2', \ldots, x_k'$, и всѣ условія теоремы II будутъ выполнены. Поэтому заключимъ, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Разсматриваемый здѣсь случай можетъ представиться напр. при изслѣдованіи устойчивости равновѣсія (въ обычномъ смыслѣ) при существованіи силовой функціи (U).

Всякій разъ, когда для положенія равновѣсія силовая функція обращается въ minimum, и это обнаруживается изъ изслѣдованія совокупности членовъ наинизшаго порядка въ разложеніи приращенія этой функціи по степенямъ приращеній координатъ, мы заключимъ о неустойчивости равновѣсія.

Теорема III. —*Если дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія таковы, что возможно найти ограниченную функцію* V, *производная которой въ силу этихъ уравненій приводилась бы къ виду:*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W, \tag{53}$$

гдѣ λ *положительная постоянная, а* W *или тожественно равна нулю, или представляетъ нѣкоторую знакопостоянную функцію, и если въ послѣднемъ случаѣ найденная функція* V *такова, что при всякомъ* t, *большемъ нѣкотораго предѣла, надлежащимъ выборомъ величинъ* x_s, *насколько угодно численно малыхъ, ее можно сдѣлать величиною одинаковаго знака съ* W, *— то невозмущенное движеніе неустойчиво.*

Пусть найденная функція V, удовлетворяющая этимъ требованіямъ, такова, что W есть функція положительная.

По свойству функцій V и W найдутся такія постоянныя T и H, при которыхъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условіямъ $t \geqq T$ и

$$|x_s| \leqq H, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{54}$$

будутъ выполняться слѣдующія:

$$|V| < L, \qquad W \geqq 0,$$

гдѣ L нѣкоторая положительная постоянная. При томъ постоянную T можемъ предположить достаточно большою для того, чтобы надлежащимъ выборомъ значеній ξ_s функцій x_s для $t = T$, насколько угодно численно малыхъ, соотвѣтствующее значеніе V_0 функціи V можно было сдѣлать положительнымъ.

Разсматривая только не меньшія T значенія t, изъ уравненія (53) выведемъ:

$$\frac{dV}{dt} - \lambda V \geqq 0$$

для всѣхъ значеній t, при которыхъ условія (54) остаются выполненными.

Поэтому, если отъ T до t условія эти постоянно выполняются, будемъ имѣть:

$$V \geqq V_0 e^{\lambda(t-T)},$$

и слѣдовательно

$$L > V_0 e^{\lambda(t-T)}.$$

Но при положительномъ V_0 послѣднее неравенство можетъ имѣть мѣсто только для значеній t, меньшихъ величины

$$\tau = T + \frac{1}{\lambda} \log \frac{L}{V_0}.$$

Поэтому въ промежуткѣ отъ T до τ условія (54) не могутъ постоянно выполняться.

Отсюда такъ-же, какъ при доказательствѣ предыдущей теоремы, заключаемъ, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Подобнымъ-же образомъ докажется теорема и въ случаѣ, когда $W=0$ тожественно.

Варіируя условія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи, можно было бы конечно предложить и множество другихъ теоремъ, подобныхъ доказаннымъ. Но для приложеній, которыя мы имѣемъ въ виду, послѣднія совершенно достаточны. Поэтому ими и ограничиваемся.

Примѣчаніе. — До сихъ поръ мы предполагали, что для перемѣнныхъ x_s возможны всякія вещественныя величины, численно достаточно малыя. Но могутъ встрѣтиться случаи, когда, по самому значенію этихъ перемѣнныхъ, для нѣкоторыхъ изъ нихъ возможны величины только одного изъ двухъ знаковъ (болѣе сложныхъ условій разсматривать не будемъ).

Для этого конечно дифференціальныя уравненія (1) должны быть таковы, чтобы условія эти, которыя будутъ вида

$$x_i \geqq 0\,, \qquad x_j \leqq 0\,, \tag{55}$$

выполнялись во все время движенія, будучи выполнены въ начальный моментъ.

Въ этомъ случаѣ въ теоремахъ II и III, при выраженіи требованія относительно знака функціи V, условія (55) всегда должны быть подразумѣваемы. При томъ во всѣхъ предыдущихъ теоремахъ терминамъ „знакопостоянная“ или „знакоопредѣленная функція“ достаточно приписывать болѣе условное значеніе, которое они получили бы, если-бы въ опредѣленіяхъ предыдущаго параграфа предполагалось, что перемѣнныя подчинены не только условіямъ (40), но и условіямъ (55).