УДК 513.83+513.88

В. М. КАДЕЦ

К ТЕОРЕМЕ О ВЫДЕЛЕНИИ ω-ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ элементов топологического векторного пространства E называется ω-линейно независимой, если равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0$ может выполняться только для нулевых коэффициентов α_n. Очевидно, что ω-линейная независимость влечет обычную линейную независимость, но эти свойства не эквивалентны. В 1953 г. Эрдеш и Штраус [1] доказали, что из любой линейно независимой последовательности в нормированном пространстве можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность (см. также [2, 3]). Охарактеризуем те пространств Фреше, на которые переносится этот результат Эрдеша и Штрауса.

Теорема. *Для пространства Фреше E следующие два условия эквивалентны:*

1) *на E существует непрерывная норма;*

2) *из любой линейно независимой последовательности элементов пространства E можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность.*

Для доказательства нам потребуются вспомогательные утверждения. Первое из них в несколько более общей формулировке принадлежит Б. М. Макарову [4, замечание 1], но так как [4] представляет собой краткое сообщение (без доказательств), мы для полноты изложения это утверждение также докажем.

Лемма 1. *Пусть E — пространство Фреше $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \ldots$ — система полунорм, задающая топологию на E. Пусть далее последовательность функционалов $f_n \in E'$ подчиняется следующему условию: функционал f_n разрывен относительно полунорм p_k при $k \leqslant n$ и непрерывен относительно p_{n+1}, p_{n+2} и т. д. Тогда для любой* *числовой последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует элемент* $e \in E$, *на котором* $f_n(e) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Построим по индукции элементы $e_n \in E$ со следующими свойствами:

а) $p_n(e_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$;

б) $f_k(e_n) = 0$ при $k < n$;

в) $f_n(\sum_{k=1}^{n} e_k) = a_n$.

Если нам это удастся, то ряд $\sum_1^{\infty} e_n$ будет сходиться (согласно а)) и его сумма (согласно б) и в)) будет удовлетворять всем требованиям леммы. Теперь поясним, как осуществляется индуктивное построение. Так как f_1 разрывен относительно p_1, на шаре $\left\{x \in E : p_1(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ функционал f_1 принимает все числовые значения. Поэтому существует $e_1 \in E$, для которого $f_1(e_1) = a_1$ и $p_1(e_1) \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть уже построены $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Рассмотрим подпространство $F = \bigcap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_k$. F имеет конечную коразмерность в E, замкнуто относительно сходимости в p_n и содержит ядро полунормы p_n (так как $\{f_k\}_1^{n-1}$ непрерывны относительно p_n). Поэтому ограничение функционала f_n на F так же как и сам f_n, разрывно относительно p_n. Следовательно, на множестве $\left\{x \in F : p_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}\right\}$ функционал f_n принимает все числовые значения, и существует $e_n \in F$, для которого выполняются свойства а) и в). Свойство б) выполняется автоматически по построению подпространства F. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — *последовательность натуральных чисел,* $\{a_k\}_1^{\infty}$ — *произвольные числа. Тогда существует целая функция* $g(z)$, *разложение которой в степенной ряд имеет вид* $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$ *и* $g(k) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Рассмотрим пространство E всех целых функций вида $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Зададим полунормы (точнее, нормы) $p_n : p_n(g) = \sup\left\{|g(z)| : |z| \leqslant n - \frac{1}{2}\right\}$ и функционалы $f_n \in E' : f_n(g) = g(n)$. Пространство E, полунормы p_n и функционалы f_n удовлетворяют условиям леммы 1; применив эту лемму, получим требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\|\cdot\|$ — непрерывная норма на E, $\{x_n\}_1^{\infty}$ — линейно независимая последовательность в E. Рассмотрим $\{x_n\}$ как элементы нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$. Воспользуемся теоремой Эрдеша—Штрауса и выделим последовательность $\{x_{n_k}\}$ ω-линейно независимую в $(E, \|\cdot\|)$. Эта подпоследовательность будет ω-линейно независимой и в любой более сильной топологии, в частности, в естественной топологии пространства E.

(2) → (1). Будем рассуждать методом «от противного». Пусть E не обладает ни одной непрерывной нормой. Тогда [5] E обладает подпространством, изоморфным пространству S всех числовых последовательностей, наделенному топологией покоординатной сходимости. Если мы докажем, что S содержит линейно независимую последовательность без ω-линейно независимых подпоследовательностей, то этим мы придем к противоречию с условием (2). Рассмотрим следующую последовательность x_n элементов пространства S:

$$x_1 = (2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots);$$
$$x_2 = (2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ \dots);$$
$$\cdots$$
$$x_n = (2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ 5^n,\ 6^n,\ \dots).$$
$$\cdots$$

Очевидно, что $\{x_n\}$ — линейно независимая последовательность. Докажем отсутствие в $\{x_n\}$ ω-линейно независимых подпоследовательностей. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ — произвольная последовательность индексов. Воспользуемся леммой 2 и построим функцию $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$ так, что $g(1) = 1$, $g(n) = 0$ при $n > 1$. Тогда для этих коэффициентов S_k ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S_k x_{n_k}$ сходится к $(g(2), g(3), g(1), \dots) = 0$. Следовательно, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ не является ω-линейно независимой. Теорема доказана.

Список литературы: *1. Erdös P., Straus E. G.* On linear independence of sequences in a Banach spaces // Pacific J. Math. **1953. 3.** P. 689—694. 2. *Terenzi P.* Proof of a theorem on ω-linear independence in Banach spaces // Rend. Ist. lombardo Accad. Sci. e lett. № 114. P. 56—64. 3. *Гурарий В. И.* Счетно линейно независимые последовательности в банаховых пространствах // УМН. 1981. **36**. Вып. 5. С. 171—172 4. *Макаров Б. М.* О проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах // Докл. АН СССР. 1959. **127, № 5.** С. 957—960. 5. *Bessaga C., Pelczynski A.* On a class of B_0-spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. 1957. **C1, III, № 4.** P. 375—377.

Поступила в редколлегию 08.08.91