

$H(p, q)$ -розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій

О.Я. Бродяк^а, Я.В. Васильків^б, С.І. Тарасюк^б

^а Національний університет "Львівська політехніка",
e-mail:brodyakoksana@mail.ru

^б Львівський національний університет імені Івана Франка,
e-mail:YaVVasylikiv@gmail.com, e-mail:tidisi.dt@gmail.com

На основі методу гармонійного аналізу, розробленого А. Нейджелом та У. Рудіним для теорії унітарно інваріантних просторів функцій, знайдено розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функцій в ряд по однорідних голоморфних та антиголоморфних поліномах. Запропонований нами підхід природно об'єднує добре відомі методи гармонійного аналізу, розроблені Л. Рубелом і Б. Тейлором для функцій однієї комплексної змінної та А. Кнезером, В. Штоллем, Р. Куюлом і П. Новеразом для функцій багатьох комплексних змінних.

Бродяк О. Я., Васильків Я. В., Тарасюк С. И., $H(p, q)$ -разложения плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций. На основании метода гармонического анализа, разработанного А. Нейджелом и У. Рудиным для теории унитарно инвариантных пространств функций, найдено разложение плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функций в ряд по однородным голоморфным и антиголоморфным полиномам. Предложенный нами подход естественно объединяет хорошо известные методы гармонического анализа, разработанные Л. Рубелом и Б. Тейлором для функций одной комплексной переменной и А. Кнезером, В. Штоллем, Р. Куюлом и П. Новеразом для функций многих комплексных переменных.

O. Ya. Brodyak, Ya. V. Vasylikiv, S. I. Tarasyuk, $H(p, q)$ -expansion of plurisubharmonic on $\mathbb{C}^n$ functions. Based on the method of harmonic analysis, developed by A. Nagel and W. Rudin for the theory of unitarily invariant function spaces, the expansion of plurisubharmonic functions on $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) into series of homogeneous holomorphic and anti-holomorphic polynomials is found. Proposed approach naturally combines well known methods of harmonic analysis, developed by L. A. Rubel and B. A. Taylor for functions of one complex variable and by A. Nagel, W. Rudin, W. Stoll, R. Kujala and P. Noverraz for functions of several complex variables.

2000 Mathematics Subject Classification 32U05, 42B05.

© Бродяк О. Я., Васильків Я. В., Тарасюк С. І., 2010

1. **Вступ.** У 1899 р. Ієнсен [1] отримав точне співвідношення між середнім значенням на колі $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ логарифма модуля голоморфної в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функції f ($f(0) = 1$) і усередненою лічильною функцією $N(r, 0, f)$ послідовності її нулів $\{a_j\}$ у замиканні круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$:

$$N(r, 0, f) = \sum_{|a_j| \leq r} \log \frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < R.$$

Очевидно, що формула Ієнсена – це формула для нульового коефіцієнта Фур'є функції $\log |f(re^{i\theta})|$. Формули для усіх інших коефіцієнтів

$$c_k(r, \log |f|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

природно розглядати, як узагальнення цієї формули. Такі узагальнення, насправді, встановив ще сам Ієнсен [1].

В 1923 – 1925 р.р. Фріттьоф і Рольф Неванлінни [2], [3] (див. також [4, с. 15-16]) встановили низку інтегральних зображень логарифма мероморфної функції (зокрема, і відому формулу Пуассона-Ієнсена), які стали підвалинами створеної ними теорії розподілу значень аналітичних та мероморфних функцій. З цих зображень можна отримати співвідношення для коефіцієнтів $c_k(r, \log |f|)$ ($k \in \mathbb{Z}$) мероморфної функції f , що зображають їх через послідовності нулів, полюсів та коефіцієнтів тейлорового розвинення $\log f$ в деякому околі нуля. У 1927 р. це зробив Н. І. Ахієзер [5] (див. також [4, с. 85-88]) і дав їх перше принципове застосування до нового доведення теореми Ліндельофа про тип цілої функції цілого порядку. Принагідно зауважимо, що як співвідношення для $c_k(r, \log |f|)$, так і формулу Пуассона-Ієнсена, неодноразово перевіривали багато математиків, зокрема, М. Картрайт [6], Г. Кнезер [7], А. Пфлюгер [8], А. Едрей і В. Фукс [9]. Проте, ці роботи носили розрізнений характер і не призвели до широких застосувань методу рядів Фур'є. Свого ж систематичного розвитку та широких застосувань (див. огляди [10] – [12] та монографії [13], [14]) метод рядів Фур'є для логарифма модуля цілих та мероморфних функцій набув лише після досліджень Л. Рубела і Б. Тейлора, анонсованих в 1963–66 р.р. [15] – [18] і викладених в роботі [19]. Метод рядів Фур'є Рубела-Тейлора істотно доповнили Д. Майлз та Д. Шей (див. огляди [10] – [12] та монографії [13], [14]).

В роботах П. Новераза [20], [21] вихідні положення методу рядів Фур'є Рубела-Тейлора поширено на субгармонійні та δ -субгармонійні в $\mathbb{C}$, а також плурісубгармонійні в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функції. Для субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) функцій, близький до методу Рубела-Тейлора, метод сферичних гармонік (метод рядів Фур'є-Лапласа) вперше розробив А. Кондратюк [22] – [24]. Питання можливості розробки такого методу для субгармонійних в просторі функцій було поставлене Л. Рубелом в огляді [10]. Подальшого свого

розвитку метод рядів Фур'є для субгармонійних і δ -субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій набув в кандидатській дисертації Я. Васильківа [25].

Теорему Ліндельофа на випадок цілих та мероморфних в $\mathbb{C}^n$ функцій експоненційного типу узагальнено в роботі В. Штолля [26]. В основу цієї роботи покладено один варіант формули Пуассона-Ієнсена [27] для мероморфних функцій багатьох комплексних змінних і її еквівалент – розвинення логарифма цієї мероморфної функції в ряд по однорідних поліномах певного вигляду (деталі див. в [26]). Р. Куюла [28] розробив аналог теорії Рубела-Тейлора для цілих і мероморфних в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функцій, узагальнивши при цьому на більш загальний випадок основні результати з [26].

Зазначимо, як і в роботі П. Новераза [21], так і в роботі Р. Куюли [28], для відповідних об'єктів в $\mathbb{C}^n$ (плюрісубгармонійних функцій та логарифмів модулів мероморфних функцій) використовується техніка зріз-функцій, яка дозволяє зводити багатовимірні задачі до одновимірного випадку. Основна мета цієї роботи, на основі методів гармонійного аналізу, розробленого А. Нейджелом та У. Рудіним для теорії унітарно інваріантних просторів функцій [29] (див. також [30], [31]), об'єднати підходи, запропоновані в роботах Л. Рубела та Б. Тейлора [19], А. Кнезера [7], В. Штолля [26], Р. Куюли [28] і П. Новераза [21]. А саме, для плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функцій встановити аналог формули Пуассона-Ієнсена-Штолля (див. теорему 1 та зауваження 1) і, на цій основі, здійснити розвинення таких функцій в ряд по однорідних голоморфних та антиголоморфних поліномах (див. теорему 2 та зауваження 3). Крім того, у якості застосування, дати для плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій аналоги та уточнення деяких результатів Д. Майлза і Д. Шея з роботи [32] (див. теорему 3 та наслідок 4).

2. Означення та формулювання результатів. Нагадаємо (див., наприклад, [30, с. 134]), що дійснозначна напівнеперервна зверху функція $u(\zeta)$, $u(\zeta) \not\equiv -\infty$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, називається плюрісубгармонійною в $\mathbb{C}^n$, якщо для довільної комплексної прямої $\zeta := a + bz$, $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$, зріз-функція $u_{a,b}(z) := u(a + bz)$ є субгармонійною функцією однієї комплексної змінної z .

Оператори зовнішнього диференціювання ∂ і $\bar{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ визначаються співвідношеннями (див., наприклад, [33, Глава 1])

$$\partial = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

де $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, $\{x_k, y_k\} \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$, а

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$$

– оператори формальних похідних. Покладемо

$$d := \partial + \bar{\partial} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial}{\partial y_k} dy_k \right),$$

$$d^\perp := i(\partial - \bar{\partial}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_k} dx_k - \frac{\partial}{\partial x_k} dy_k \right).$$

Нехай

$$\omega^{n-1}(\eta) = \left(\frac{1}{4} d^\perp d \log |\eta|^2 \right)^{n-1}, \quad \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

– однорідна метрична форма Фубіні-Штуді,

$$\sigma(\eta) = -\frac{1}{2\pi^n} d^\perp \log |\eta| \wedge \omega^{n-1}(\eta)$$

– метрична форма Пуанкаре (тобто нормована форма об'єму на сферах $\mathbf{S}(r) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| = r\}$, $0 < r < +\infty$).

Довільний плюрісубгармонійний в $\mathbb{C}^n$ функції u взаємно-однозначно відповідає додатний замкнений потік (див., наприклад, [34])

$$t_u(\eta) := \frac{1}{4} d^\perp du(\eta) = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} u(\eta) = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta_j \partial \bar{\eta}_k} d\eta_j \wedge d\bar{\eta}_k,$$

де похідні $\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta_j \partial \bar{\eta}_k}$ визначені як розподіли (функція $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}^n)$).

Зазначимо, що звуження потоку $t_u(\zeta)$ на комплексну пряму $\eta = az$, $a \in \mathbf{S} := \mathbf{S}(1) \subset \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$, дорівнює

$$\begin{aligned} t_u(\eta) \Big|_{\eta=az} &= \frac{i}{2} \left[\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta_j \partial \bar{\eta}_k} a_j \bar{a}_k \right] dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \left[\frac{\partial^2 u_a(z)}{\partial z \partial \bar{z}} \right] \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \Delta u_a(z) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = 2\pi d\mu_{u_a}(z), \end{aligned}$$

де Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а $d\mu_{u_a}$ – міра, асоційована за Рісом з субгармонійною функцією $u_a(z) := u(az)$.

Говорять (див. [29], або [30, Глава 12], [31, Глава 1, §3]), що поліном M в $\mathbb{C}^n$ називається *однорідним степеня k* , якщо $M(z\zeta) = z^k M(\zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Нехай $\mathcal{P}_k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) – простір всіх однорідних комплекснозначних поліномів в $\mathbb{R}^N$ степеня k , а $\mathcal{H}_k$ – підпростір всіх $h \in \mathcal{P}_k$ для яких $\Delta h = 0$, де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$. Через $\mathfrak{A}[w_1, \dots, w_m]$ позначимо кільце всіх комплексних поліномів від змінних $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$. Нагадаємо, що простір $H(p, q)$ ($p, q \in \mathbb{Z}_+$) – це векторний підпростір *однорідних гармонійних поліномів* $h_{pq}(\zeta) \in \mathfrak{A}[\zeta_1, \dots, \zeta_n; \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_n]$ *бістепеня* (p, q) , тобто:

$$a) \forall z \in \mathbb{C}: \quad h_{pq}(z\zeta) = z^p \bar{z}^q h_{pq}(\zeta), \text{ де } \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n;$$

$$b) \forall \zeta \in \mathbb{C}^n: \quad \Delta h_{pq}(\zeta) = 4 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_{pq}(\zeta)}{\partial \zeta_k \partial \bar{\zeta}_k} = 0.$$

При цьому, простір $H(p, 0)$ складається із *голоморфних*, а простір $H(0, p)$ – із *антиголоморфних* однорідних поліномів степеня p . Зауважимо, що

$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{j=0}^k H(j, k-j)$. Також маємо $L^2(\mathbf{S}) = \bigoplus_{p,q \geq 0} H(p, q)$, точніше кожна функція $h \in L^2(\mathbf{S})$ єдиним чином розвивається в ряд $h = \sum_{p,q \geq 0} h_{pq}$, де $h_{pq} \in H(p, q)$, який збігається до h в топології L^2 -норм. Крім того, для довільних (p, q) і всіх $\zeta \in \mathbf{S}$ існує єдине твірне ядро $K_{pq}(\zeta, \bullet)$ із $H(p, q)$ таке, що

$$\forall h \in L^2(\mathbf{S}) : \pi_{pq} h(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} h(\eta) K_{pq}(\zeta, \eta) \sigma(\eta),$$

де π_{pq} – ортопроектори з $L^2(\mathbf{S})$ на $H(p, q)$. При цьому, оскільки $K_{pq}(\zeta, \bullet) \in C(\mathbf{S})$, то це дозволяє розширити область визначення π_{pq} до $L^1(\mathbf{S})$.

Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ і плюрігармонійна в деякому околі точки $z = 0$ функція, $u(0) = 0$, і

$$h_{pq}(r; \zeta) = \frac{1}{\mathcal{D}(p, q, n)} \int_{\mathbf{S}} u_r(\eta) K_{pq}(\zeta, \eta) \sigma(\eta), \quad r > 0, \quad \zeta \in \mathbf{S},$$

– ортопроекції функцій $u_r(\eta) = u(r\eta)$ на $H(p, q)$ -простори, де

$$\mathcal{D}(p, q, n) := \dim H(p, q) = C_{p+n-2}^p C_{q+n-2}^q \frac{p+q+n-1}{n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$K_{pq}(\zeta, \eta) = \mathcal{D}(p, q, n) \langle \zeta, \eta \rangle^p \langle \eta, \zeta \rangle^q F \left(-p, -q, n-1; 1 - \frac{|\zeta|^2 |\eta|^2}{|\langle \zeta, \eta \rangle|^2} \right)$$

– твірні ядра в просторах $H(p, q)$, $\langle \zeta, \eta \rangle = \zeta_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \zeta_n \bar{\eta}_n$ і

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(\alpha+j)(\beta+j)}{\gamma+j} \right) \frac{x^k}{k!}$$

– гіпергеометрична функція. Відмітимо, що $K_{p0}(\zeta, \eta) = C_{n+p-1}^p \langle \zeta, \eta \rangle^p$.

Нехай також $\mathbf{B}(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| < t\}$ і $\bar{\mathbf{B}}(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| \leq t\}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $0 < t < +\infty$, $\zeta \in \mathbf{S}$. Покладемо

$$n_{pq}(t; \zeta) = \frac{1}{\pi^{n-1} \mathcal{D}(p, q, n)} \int_{\bar{\mathbf{B}}(t)} K_{pq} \left(\zeta, \frac{\eta}{|\eta|} \right) d\mu_u(\eta), \quad (1)$$

де $d\mu_u(\eta) = \frac{1}{2\pi} t_u(\eta) \wedge \omega^{n-1}(\eta)$ і $t_u(\eta)$ – замкнений додатний потік, асоційований з u . Зауважимо, що $n(t) := n_{00}(t; \zeta) = \pi^{1-n} \mu_u(\bar{\mathbf{B}}(t))$. Через $\text{surr } \mu_u$ скрізь надалі будемо позначати носій міри Ріса μ_u плюрісубгармонійної функції u .

Теорема 1 *Нехай $u(\zeta)$ – плюрісубгармонійна функція у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$, $\bar{\mathbf{B}}(r) \subseteq G$, плюрігармонійна в $\bar{\mathbf{B}}(s)$, де $0 < s < r$*

і $u(0) = 0$. Нехай також, $F(\zeta)$ – голоморфна в $\mathbf{B}(s)$ функція така, що $u(\zeta) = \operatorname{Re} F(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$. Якщо $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, то

$$\begin{aligned} F(\zeta) = & 2 \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \left[\left(\frac{r}{r - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta) + \\ & + \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{t|\eta|}{t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t} + \\ & + \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta| - t\langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (2)$$

де перший і третій інтеграли є голоморфними в $\mathbf{B}(r)$ функціями, а другий – голоморфною в $\mathbf{B}(s)$ функцією.

Зазначимо, що для функції $F(\zeta)$ також правильне наступне зображення (див. [30, с. 48])

$$F(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} u(s\eta) \left[2 \left(\frac{s}{s - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta), \quad \zeta \in \mathbf{B}(s).$$

Для $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо (див. [26, с. 403], або [27, с. 165])

$$L(w) := L_n(w) := \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [w^{n-1} \operatorname{Log}(1-w)],$$

де символ Log означає головне значення логарифма.

Зауваження 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх $\zeta \in \mathbf{B}(s)$

$$\begin{aligned} F(\zeta) = & 2 \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \left[\left(\frac{r}{r - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta) + \\ & + \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left[L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right] d\mu_u(\eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Покажемо, що зображення (3), після відповідних перетворень, набуде вигляду (2). Справді, спочатку подамо співвідношення (3) у наступному вигляді

$$\begin{aligned} F(\zeta) = & 2 \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \left[\left(\frac{r}{r - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta) + \\ & + \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left[L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r|\eta|} \right) \right] d\mu_u(\eta) + \\ & + \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left[L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r|\eta|} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right] d\mu_u(\eta). \end{aligned}$$

Тоді (див. [26, с. 405]), враховуючи, що для $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$:

$$L(w) = - \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{w^p}{p} \quad \text{та} \quad \frac{1}{(1-w)^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n-1}^p w^p,$$

і той факт, що $\mu_u(\eta) = 0$ для $\eta \in \mathbf{B}(s)$, маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r|\eta|} \right) \right) d\mu_u(\eta) = \\ & = - \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{|\eta|^p} \right) d\mu_u(\eta) \int_{|\eta|}^r \frac{dt}{t^{p+1}} = \\ & = - \int_0^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{|\eta| \leq t} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{|\eta|^p} \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t^{p+1}} = \\ & = \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{t|\eta|}{t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

і, відповідно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r|\eta|} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right) d\mu_u(\eta) = \\ & = - \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^2 |\eta|^p} \right) d\mu_u(\eta) \int_{|\eta|}^r t^{p-1} dt = \\ & = - \int_0^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{|\eta| \leq t} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^2 |\eta|^p} \right) d\mu_u(\eta) \right] t^{p-1} dt = \\ & = \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{r^2 |\eta|}{r^2 |\eta| - t \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Враховуючи сказане вище, одержуємо (2).

Подібне до (3) зображення у випадку $u = \log |f|$ ($F = \log f$), де f – мероморфна в $\mathbb{C}^n$ функція, вперше встановив В. Штолль в 1949 році (див., наприклад, теорему 1.7 з [27]). Наведемо її формулювання лише для випадку голоморфної в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функції.

Нехай f – голоморфна в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функція, $Z_f = f^{-1}(\{0\}) = \{\zeta \in G : f(\zeta) = 0\}$ – її нульова поверхня, а ν_f – функція кратності нульової поверхні Z_f , тобто пара $(Z_f, \nu_f) := D_f$ – дивізор функції f (див., наприклад, [33, Глава 1], [35, Глава 1]).

Теорема А (Формула Пуассона-Ієнсена-Штолля, [27]). Нехай $f \neq 0$ – голоморфна у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$. Припустимо, що $\overline{B}(r) \subseteq G$ і $Z_f \cap B(s) = \emptyset$ при деякому $0 < s < r < +\infty$. Припустимо також, що $f(0) = 1$. В кулі $B(s)$ визначимо функцію $\log f(\zeta)$ умовою $\log f(0) = 0$. Якщо $\zeta \in B(s)$, то

$$\begin{aligned} \log f(\zeta) = & 2 \int_{S(r)} \log |f(\eta)| \left[\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle \zeta, \eta \rangle)^n} - 1 \right] \sigma(\eta) + \\ & + \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{Z_f \cap \overline{B}(r)} \nu_f(\eta) \left(L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L \left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right) \omega^{n-1}(\eta). \end{aligned}$$

З огляду на добре відому формулу Пуанкаре-Лелона (див., наприклад, [33, с. 71], [35, с. 161]), маємо: $[D_f] = \frac{i}{4\pi} \partial \bar{\partial} \log |f|$, де $[D_f]$ – потік, породжений дивізором D_f . Але, функція $u = \log |f|$, де f – голоморфна в $G \subset \mathbb{C}^n$, є плюрісубгармонійною в G . Отож, $[D_f] = t_u/(2\pi)$ і співвідношення (3) (або (2)) є узагальненням наведеної в теоремі А формули Пуассона-Ієнсена-Штолля.

Теорема 2 Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція, плюрігармонійна в $B(r_0)$, $u(0) = 0$ і $u(z) = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_p(z)$ в $B(r_0)$, де $\alpha_p(z)$ – однорідні голоморфні поліноми степеня p , $\alpha_{p0}(\zeta) = \alpha_p(\zeta)/C_{p+n-1}^p$, $r_0 = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} \mu_u \cap \overline{B}(r) \neq \emptyset\}$. Тоді

$$u(r\zeta) = \sum_{p,q \geq 0} h_{pq}(r; \zeta), \quad r > 0, \quad \zeta \in S,$$

де

$$h_{00}(r; \zeta) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt;$$

$$h_{p0}(r; \zeta) = \frac{r^p}{2} \alpha_{p0}(\zeta) + \frac{1}{2} \int_0^r \left[\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r} \right)^p \right] \frac{n_{p0}(t; \zeta)}{t} dt;$$

$$h_{0p}(r; \zeta) = \overline{h_{p0}(r; \zeta)}; \quad h_{pq}(r; \zeta) \equiv 0 \quad \text{при } pq \neq 0.$$

При $0 < r < +\infty$ покладемо (див., наприклад, [21])

$$N(r; u) = \int_S u(r\eta) \sigma(\eta) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt,$$

$$T(r; u) = \int_S u^+(r\eta) \sigma(\eta), \quad m_2(r; u) = \left(\int_S u^2(r\eta) \sigma(\eta) \right)^{1/2},$$

де $u^+ = \max\{u; 0\}$. Зауважимо, що при $0 < r < +\infty$ правильні наступні співвідношення

$$T(r; u) \leq 2T(r; u) - N(r; u) = \int_{\mathbf{S}} |u(r\eta)| \sigma(\eta) \leq m_2(r; u),$$

а також (див. [30, Твердження 1.4.7])

$$m_2(r; u) = \left(\int_{\mathbf{S}} \frac{\sigma(\eta)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}\eta) d\theta \right)^{1/2}.$$

Теорема 3 Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ і плюрігармонійна в деякому околі точки $z = 0$ функція, $u(0) = 0$. Тоді для довільної неперервної функції $\gamma : (0; +\infty) \rightarrow (1; 2]$ і для всіх $p \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbf{S}$, $0 < r < +\infty$, виконуються нерівності

$$|h_{p0}(r; \zeta)| \leq (2T(\gamma^2(r)r; u) - N(r; u)) \left[\left(\frac{1}{\gamma(r)} \right)^p + \frac{1 - (\gamma(r))^{-2p}}{2p \log \gamma(r)} \right],$$

$$m_2(r; u) \leq (2T(\gamma^2(r)r; u) - N(r; u)) \left[1 + \frac{4\sqrt{\log 2}}{\sqrt{2 \log \gamma(r)}} \right].$$

Наслідок 1 Нехай $\gamma(r) = \sqrt{1 + \varepsilon(\log T(r; u))}$, де $\varepsilon(t)$ – неперервна додатна незростаюча функція, визначена на $[t_0; +\infty)$ така, що $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ і $\int_{t_0}^{+\infty} \varepsilon(t) dt < +\infty$. Тоді для всіх $r \geq r_0$ ($t_0 = \log T(r_0; u)$) зовні, можливо, множини скінченної логарифмічної міри, для всіх $p \in \mathbb{N}$ і $\zeta \in \mathbf{S}$ виконуються нерівності

$$|h_{p0}(r; \zeta)| \leq (2eT(r; u) - N(r; u)) \left[\left(\frac{1}{\gamma(r)} \right)^p + \frac{1 - (\gamma(r))^{-2p}}{2p \log \gamma(r)} \right]$$

і

$$m_2(r; u) \leq (2eT(r; u) - N(r; u)) \left[1 + \frac{4\sqrt{\log 4}}{\sqrt{\varepsilon(\log T(r; u))}} \right].$$

3. Доведення результатів. При доведенні теореми 1 істотно використовуються наступні два оператори:

1⁰. інтегральний оператор –

$$\delta^n[g](\zeta) := (n-1) \int_0^1 (1-t)^{n-2} g(t\zeta) dt,$$

2⁰. диференціальний оператор –

$$\delta_n[g] := \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [z^{n-1} g(z\zeta)] \Big|_{z=1},$$

а також такі їх властивості (див. [26]–[28]).

Твердження 1 Нехай g голоморфна в $B(r) \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) функція, $\zeta \in B(r)$, $0 < r < +\infty$. Тоді

a) $\delta^n[g]$ голоморфна в $B(r)$;

b) $\delta^n[g](\zeta) = \int_{\mathbf{S}} g(\langle \zeta, \eta \rangle \eta) \sigma(\eta)$;

c) якщо $g(0) = 0$, то $\delta_n[g](0) = 0$;

d) $\delta_n[g]$ голоморфна в $B(r)$;

e) $\delta_n \circ \delta^n[g] = \delta^n \circ \delta_n[g] = g$.

Зауваження 2 (Н. Kneser [7]). Якщо P – однорідний поліном степеня $q \in \mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, то

$$P(\zeta) = C_{q+n-1}^q \int_{\mathbf{S}} P(\langle \zeta, \eta \rangle \eta) \sigma(\eta).$$

Доведення теореми 1. При доведенні зображення (3) будемо, в основному, дотримуватися схеми доведення теореми 1.7 з роботи [27].

Нехай $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$ і $a \in \mathbf{S}$. За формулою Пуассона-Ієнсена (див. [37, с. 139] для зріз-функції $u_a(z) = u(za)$ отримуємо

$$u_a(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) \operatorname{Re} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta - \int_{|b| \leq r} \log \left| \frac{r^2 - \bar{b}z}{r(z - b)} \right| d\mu_{u_a}(b), \quad (4)$$

де μ_{u_a} – міра Ріса субгармонійної функції $u_a(z)$. Нагадаємо, що звуження потоку $t_u(\zeta)$ на комплексну пряму $\zeta = az$, $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbf{S}$, дорівнює $t_u(\zeta)|_{\zeta=az} = 2\pi d\mu_{u_a}(z)$.

Підставляючи $z = 0$ в (4), отримуємо

$$0 = u_a(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) d\theta - \int_{|b| \leq r} \log \frac{r}{|b|} d\mu_{u_a}(b). \quad (5)$$

Враховуючи, що $\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} = 1 + \frac{2z}{re^{i\theta} - z}$ і (5), зобразимо (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(az) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) \operatorname{Re} \frac{z}{re^{i\theta} - z} d\theta + \\ &+ \int_{|b| \leq r} \log \left| 1 - \frac{z}{b} \right| d\mu_{u_a}(b) - \int_{|b| \leq r} \log \left| 1 - \frac{z}{r^2} \right| d\mu_{u_a}(b), \quad |z| < s. \end{aligned} \quad (6)$$

Водночас, із (6) випливає, що

$$F(az) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) \frac{z}{re^{i\theta} - z} d\theta + \int_{|b| \leq r} \operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{b} \right) d\mu_{u_a}(b) -$$

$$- \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{z \bar{b}}{r^2} \right) d\mu_{u_a}(b), \quad |z| < s. \quad (7)$$

Візьмемо $\zeta \in \mathbf{B}(s)$ і $a \in \mathbf{S}$. Замінімо в (7) z на $\langle \zeta, a \rangle$ і зауважимо, що $|\langle \zeta, a \rangle| < s$. Тоді

$$\begin{aligned} F(\langle \zeta, a \rangle a) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta} a) \frac{\langle \zeta, e^{i\theta} a \rangle}{r - \langle \zeta, e^{i\theta} a \rangle} d\theta + \\ &+ \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{\langle ba, ba \rangle} \right) d\mu_{u_a}(b) - \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{r^2} \right) d\mu_{u_a}(b). \end{aligned} \quad (8)$$

Покладемо ($b \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbf{S}$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, $0 < s < r$)

$$J_1(r; a) := \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{\langle ba, ba \rangle} \right) d\mu_{u_a}(b),$$

$$J_2(r; a) := \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{r^2} \right) d\mu_{u_a}(b).$$

Зауважимо, що $\forall \theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} J_1(r; ae^{i\theta}) &= \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba e^{i\theta} \rangle}{\langle ba e^{i\theta}, ba e^{i\theta} \rangle} \right) d\mu_{u_{ae^{i\theta}}}(b) = \\ &= \int_{|be^{i\theta}| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba e^{i\theta} \rangle}{\langle ba e^{i\theta}, ba e^{i\theta} \rangle} \right) d\mu_{u_a}(be^{i\theta}) = J_1(r; a), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} J_2(r; ae^{i\theta}) &= \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba e^{i\theta} \rangle}{r^2} \right) d\mu_{u_{ae^{i\theta}}}(b) = \\ &= \int_{|be^{i\theta}| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba e^{i\theta} \rangle}{r^2} \right) d\mu_{u_a}(be^{i\theta}) = J_2(r; a). \end{aligned}$$

Крім того,

$$J_1(r; a) = J_1(1; ra), \quad J_2(r; a) = J_2(1; ra). \quad (10)$$

Справді, маємо

$$\begin{aligned} J_1(r; a) &= \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{\langle ba, ba \rangle} \right) \frac{t_u(ba)}{2\pi} = \\ &= \int_{|z| \leq 1} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, zra \rangle}{\langle zra, zra \rangle} \right) \frac{t_u(zra)}{2\pi} = J_1(1; ra) \end{aligned}$$

і

$$J_2(r; a) = \int_{|b| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, ba \rangle}{r^2} \right) \frac{t_u(ba)}{2\pi} =$$

$$= \int_{|z| \leq 1} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, z r a \rangle}{r^2} \right) \frac{t_u(z r a)}{2\pi} = J_2(1; r a).$$

Тепер усереднемо всі складові рівності (8) за параметром $a \in \mathbf{S}$. Враховуючи п. б) твердження 5, маємо

$$\int_{\mathbf{S}} F(\langle \zeta, a \rangle a) \sigma(a) = \delta^n[F](\zeta).$$

Крім того, позаяк метрична форма Пуанкаре $\sigma(\bullet)$ інваріантна відносно обертань, то

$$\int_{\mathbf{S}} \frac{\sigma(a)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta} a) \frac{\langle \zeta, e^{i\theta} a \rangle}{r - \langle \zeta, e^{i\theta} a \rangle} d\theta = \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r - \langle \zeta, \eta \rangle} \sigma(\eta).$$

Далі, з огляду на співвідношення (10), маємо

$$\int_{\mathbf{S}} J_1(r; a) \sigma(a) = \int_{\mathbf{S}(r)} \left(\int_{|z| \leq 1} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, z \xi \rangle}{|z \xi|^2} \right) \frac{t_u(z \xi)}{2\pi} \right) \sigma(\xi).$$

Інтегрування по $\mathbf{S}(r)$ можна здійснити спочатку по перетину $\mathbf{S}(r)$ з комплексною прямою $l_a := \{\xi = \lambda a\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbf{S}$, тобто по колу $\{|\lambda| = r\}$, а потім по сукупності $\{l_a\}$ таких прямих (див., наприклад, [35, Глава 3], [36, с. 254-255]). Оскільки на комплексній прямій l_a форма $-\frac{1}{2\pi} d^\perp \log |\xi| = \frac{d\theta}{2\pi}$, де $\theta = \arg \lambda$, то враховуючи, що $\sigma(\xi) = -\frac{1}{2\pi^n} d^\perp \log |\xi| \wedge \omega^{n-1}(\xi)$ і ті факти, що метрична форма $\omega^{n-1}(\xi)$ інваріантна відносно розтягів та обертань і $d\mu_u(\xi) = \frac{1}{2\pi} t_u(\xi) \wedge \omega^{n-1}(\xi)$, а також співвідношення (9) і (10), одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{S}(r)} \left(\int_{|z| \leq 1} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, z \xi \rangle}{|z \xi|^2} \right) \frac{t_u(z \xi)}{2\pi} \right) \sigma(\xi) = \\ &= \int_{\{l_a\}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{|ze^{i\theta}| \leq r} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, z a r e^{i\theta} \rangle}{|z a r e^{i\theta}|^2} \right) \frac{t_u(z a r e^{i\theta})}{2\pi} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \right) \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) d\mu_u(\eta) \end{aligned}$$

тобто,

$$\int_{\mathbf{S}} J_1(r; a) \sigma(a) = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) d\mu_u(\eta).$$

З тих самих міркувань

$$\int_{\mathbf{S}} J_2(r; a) \sigma(a) = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \text{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) d\mu_u(\eta).$$

Отже,

$$\delta^n[F](\zeta) = 2 \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r - \langle \zeta, \eta \rangle} \sigma(\eta) + \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \operatorname{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) d\mu_u(\eta) - \\ - \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \operatorname{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) d\mu_u(\eta), \quad \forall \zeta \in \mathbf{B}(s). \quad (11)$$

Застосовуючи тепер оператор δ_n до співвідношення (11) і враховуючи, що

$$\delta_n \circ \delta^n[F] = F, \quad \delta_n \left[\frac{\langle \zeta, \bullet \rangle}{r - \langle \zeta, \bullet \rangle} \right] = \frac{r^n}{(r - \langle \zeta, \bullet \rangle)^n} - 1,$$

$$\delta_n \left[\operatorname{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \bullet \rangle}{\langle \bullet, \bullet \rangle} \right) \right] = L \left(\frac{\langle \zeta, \bullet \rangle}{\langle \bullet, \bullet \rangle} \right)$$

і

$$\delta_n \left[\operatorname{Log} \left(1 - \frac{\langle \zeta, \bullet \rangle}{r^2} \right) \right] = L \left(\frac{\langle \zeta, \bullet \rangle}{r^2} \right),$$

отримуємо (3), що, з огляду на зауваження 1, завершує доведення теореми 1.

Нехай

$$C(\zeta, \eta) = \frac{1}{(1 - \langle \zeta, \eta \rangle)^n}$$

– ядро Коші для $\mathbf{B} := \mathbf{B}(1)$. Коротко нагадаємо необхідні нам в подальшому факти (див., наприклад, [30, Глава 12]):

$$1^0. \quad C(\zeta, \eta) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \langle \zeta, \eta \rangle^p = \sum_{p=0}^{+\infty} K_{p0}(\zeta, \eta), \quad |\langle \zeta, \eta \rangle| < 1;$$

2⁰. Оператор $(Cf)(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} f(\zeta) C(\zeta, \eta) \sigma(\eta)$ є ортопроектором з $L^2(\mathbf{S})$ на $H^2(\mathbf{B})$, де $H^2(\mathbf{B})$ – клас Гарді, тобто простір всіх голоморфних функцій $f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{B}$ таких, що

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbf{S}} |f(r\eta)|^2 \sigma(\eta) < +\infty.$$

Доведення теореми 2. Нехай $0 < s < r_0$, де $r_0 = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} \mu_u \cap \overline{\mathbf{B}}(r) \neq \emptyset\}$. Доведемо, що для всіх $\zeta \in \mathbf{B}(s)$ правильне зображення

$$F(\zeta) = \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \left[2h_{p0} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) - \right. \\ \left. - \int_0^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r} \right)^p \right) \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \right] \left(\frac{|\zeta|}{r} \right)^p, \quad s < r < +\infty, \quad (12)$$

де $n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)$ означені співвідношеннями (1). При цьому, ряд (12) рівномірно збігається на компактах з $\mathbf{B}(s)$.

Справді, згідно з теоремою 1 маємо

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= 2 \int_{\mathbf{S}(r)} u(\eta) \left[\left(\frac{r^2}{r^2 - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta) + \\ &+ \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{t|\eta|}{t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t} + \\ &+ \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta| - t\langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що

$$\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle \zeta, \eta \rangle)^n} - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^{2p}}$$

і ряд збігається рівномірно при $(\zeta, \eta) \in \mathcal{K} \times \mathbf{S}(r)$, де $\mathcal{K}$ – довільний компакт з $\mathbf{B}(s)$, отримуємо

$$\begin{aligned} &2 \int_{\mathbf{S}(r)} u(\eta) \left[\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle \zeta, \eta \rangle)^n} - 1 \right] \sigma(\eta) = \\ &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p h_{p0} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) \left(\frac{|\zeta|}{r} \right)^p, \quad \zeta \in \mathbf{B}(s), \quad s < r < +\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Зазначимо, що $K_{p0}(\zeta, \eta) = C_{p+n-1}^p \langle \zeta, \eta \rangle^p$ і тому

$$\begin{aligned} \left| h_{p0} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) \right| &\leq \frac{1}{C_{p+n-1}^p} \int_{\mathbf{S}} |u(r\eta)| \left| K_{p0} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|}, \eta \right) \right| \sigma(\eta) \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{S}} |u(r\eta)| \sigma(\eta) = 2T(r; u) - N(r; u) \leq 2T(r; u) \end{aligned}$$

для всіх $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, $p \in \mathbb{N}$, $s < r < +\infty$. Отже, ряд (13) рівномірно збігається на компактах $\mathcal{K} \subset \mathbf{B}(s)$.

Надалі вважатимемо, що $r_0 \leq r < +\infty$, оскільки

$$\int_0^r \left(\frac{r}{t} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt = 0, \quad \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt = 0$$

при $r < r_0$.

Маємо

$$1 - \frac{t^n |\eta|^n}{(t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle)^n} = - \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{t^p |\eta|^p}$$

і ряд рівномірно збігається при $(t, \zeta, \eta) \in [r_0, r] \times \mathcal{K} \times \{\text{supp } \mu_u \cap R(r_0, r)\}$, де $\mathcal{K}$ – компактна підмножина з $\mathbf{B}(s)$, $R(r_0, r) := \overline{\mathbf{B}}(r) \setminus \mathbf{B}(r_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{t|\eta|}{t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t} = \\ & = - \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \int_0^r \left(\frac{r}{t} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \left(\frac{|\zeta|}{r} \right)^p, \end{aligned} \quad (14)$$

де $r_0 \leq r < +\infty$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$. При цьому, оскільки $|n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)| \leq n(t)$, то

$$\left| \int_0^r \left(\frac{r}{t} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \right| \leq \int_{r_0}^r \left(\frac{r}{t} \right)^p \frac{n(t)}{t} dt \leq \left(\frac{r}{r_0} \right)^p N(r; u)$$

для всіх $r_0 \leq r < +\infty$, $p \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, то ряд (14) також рівномірно збігається на компактах $\mathcal{K} \in \mathbf{B}(s)$.

Далі, оскільки

$$1 - \frac{r^{2n}|\eta|^n}{(r^2|\eta| - t\langle \zeta, \eta \rangle)^n} = - \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \frac{t^p \langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^{2p}|\eta|^p}$$

і ряд рівномірно збігається при $(t, \zeta, \eta) \in [r_0, r] \times \mathcal{K} \times \{\text{supp } \mu_u \cap R(r_0, r)\}$, то

$$\begin{aligned} & \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \leq |\eta| \leq t} \left(1 - \left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta| - t\langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\mu_u(\eta) \right] \frac{dt}{t} = \\ & = - \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \left(\frac{|\zeta|}{r} \right)^p, \end{aligned} \quad (15)$$

де $r_0 \leq r < +\infty$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$. Тоді, враховуючи, що

$$\left| \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \right| \leq N(r; u)$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$, $r_0 \leq r < +\infty$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, отримуємо рівномірну збіжність ряду (15) на компактах $\mathcal{K} \subset \mathbf{B}(s)$.

Тепер, додаючи співвідношення (13), (14) і (15), отримуємо (12). Зазначимо, що для довільного $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, $0 < s < r_0$

$$F(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} u(s\eta) \left[2 \left(\frac{s}{s - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n - 1 \right] \sigma(\eta).$$

Окрім того, маємо

$$\left(\int_{\mathbf{S}} |F(\tau\zeta)|^2 \sigma(\zeta) \right)^{1/2} < +\infty, \quad \forall \tau \in (0, s).$$

Тоді, враховуючи співвідношення (12) і результати роботи [29] (див. також [30, Глава 12]), отримуємо

$$\alpha_{p0} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|} \right) r^p = \left[2h_{p0} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) - \int_0^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r} \right)^p \right) \frac{n_{p0}(t; \zeta/|\zeta|)}{t} dt \right],$$

а також

$$h_{pq} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) = 0 \quad \text{при} \quad p \cdot q \neq 0.$$

Співвідношення

$$h_{0p} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right) = \overline{h_{0p}} \left(r; \frac{\zeta}{|\zeta|} \right)$$

безпосередньо випливає з того, що $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$ є дійсною функцією.

І, нарешті, оскільки $K_{00}(\zeta, \eta) = 1$, то співвідношення для h_{00} – це формула Іенсена для плюрісубгармонійних функцій (див., наприклад, [21]).

Зауваження 3. Нехай плюрісубгармонійна функція задовольняє умови теореми 2. Тоді для довільних $0 < r < +\infty$, $\zeta \in \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ маємо

$$u(re^{i\theta}\zeta) = N(r; u) + \sum_{p=1}^{+\infty} h_{p0}(r; \zeta) e^{ip\theta} + \sum_{p=1}^{+\infty} h_{0p}(r; \zeta) e^{-ip\theta},$$

тобто

$$c_0(r; u_\zeta) = h_{00}(r; \zeta), \quad c_p(r; u_\zeta) = h_{p0}(r; \zeta), \quad c_{-p}(r; u_\zeta) = h_{0p}(r; \zeta),$$

де

$$c_p(r; u_\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} u_\zeta(re^{i\theta}) d\theta$$

– коефіцієнти Фур'є зріз-функцій $u_\zeta(z) = u(z\zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbf{S}$ (порівн. з [21] та [22]).

Доведення теореми 3. При $p \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^n$, $0 < r < +\infty$, $1 < \gamma(r) \leq 2$, маємо

$$\begin{aligned} h_{p0}(r; \zeta) - (\gamma(r))^{-p} h_{p0}(r\gamma(r); \zeta) &= -\frac{1}{2} \int_0^{r\gamma(r)} \left[\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r\gamma^2(r)} \right)^p \right] \frac{n_{p0}(t; \zeta)}{t} dt + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - (\gamma(r))^{-2p} \right) \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^p \frac{n_{p0}(t; \zeta)}{t} dt, \end{aligned}$$

і, тому

$$|h_{p0}(r; \zeta)| \leq \frac{|h_{p0}(r\gamma(r); \zeta)|}{\gamma^p(r)} + \frac{n(r) + n(r\gamma(r))}{2p} \left(1 - (\gamma(r))^{-2p} \right).$$

Тоді, враховуючи нерівності

$$|h_{p0}(r\gamma(r); \zeta)| \leq 2T(r\gamma(r); u) - N(r; u) \leq 2T(r\gamma^2(r); u) - N(r; u),$$

$$n(r) + n(r\gamma(r)) \leq \frac{N(r\gamma^2(r); u) - N(r; u)}{\log \gamma(r)} \leq \frac{2T(r\gamma^2(r); u) - N(r; u)}{\log \gamma(r)},$$

отримуємо

$$|h_{p0}(r; \zeta)| \leq (2T(\gamma^2(r)r; u) - N(r; u)) \left[\left(\frac{1}{\gamma(r)} \right)^p + \frac{1 - (\gamma(r))^{-2p}}{2p \log \gamma(r)} \right].$$

Звідси, з огляду на рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}\zeta) d\theta = |h_{00}(r; \zeta)|^2 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} |h_{p0}(r; \zeta)|^2$$

і нерівності

$$N(r; u) \leq 2T(r; u) - N(r; u) \leq 2T(r\gamma^2(r); u) - N(r; u),$$

як і при доведенні леми 2.1 з [32] дістаємо

$$m_2(r; u) \leq (2T(\gamma^2(r)r; u) - N(r; u)) \left[1 + \frac{4\sqrt{\log 2}}{\sqrt{2 \log \gamma(r)}} \right],$$

що завершує доведення теореми 3.

Нагадаємо, що множина $E \subset [1, +\infty)$ називається множиною скінченної логарифмічної міри, якщо інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається. При доведенні леми 2 з [38], по суті справи, встановлено наступне твердження.

Лема 6 Нехай $\varepsilon(t)$ – неперервна, додатна функція, задана на $[t_0, +\infty)$, незростаюча, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, причому $\int_{t_0}^{+\infty} \varepsilon(t) dt < +\infty$. Тоді, для всіх $r \geq r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри

$$T((1 + \varepsilon(\log T(r, u)))r, u) < eT(r, u).$$

Доведення наслідку 4. Покладемо в твердженнях теореми 3 $\gamma(r) = \sqrt{1 + \varepsilon(\log T(r; u))}$ і застосуємо лему 6. Тоді для всіх $r \geq r_0$ зовні, можливо, множини скінченної логарифмічної міри правильне наступне співвідношення

$$2T(r\gamma^2(r); u) - N(r; u) \leq 2eT(r; u) - N(r; u).$$

Вважаючи, що $0 < \varepsilon(t) \leq 1$, звідси і тверджень теореми 3, з урахуванням елементарної нерівності $\log(1 + x) \geq x/2$, $0 < x \leq 1$, отримуємо всі твердження цього наслідку.

Подяка. Автори висловлюють щирю подяку рецензенту за цілу низку істотних зауважень та порад, які дозволили усунути з нашої статті допущені в першому її варіанті неточності, недогляди та описки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Jensen J. L. W. V. Sur un nouvel et important theoreme de la theorie des fonctions. // *Acta Math.*, – 1899. – **22**. – P. 359–364.
2. Nevanlinna F. Bemerkungen zur Theorie der ganzen Functionen endlicher Ordnung. // *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math.*, – 1923. – V. 2, 4. – P. 1–7.
3. Nevanlinna R. Zur theorie der meromorphen Functionen. // *Acta Math.*, – 1925. – **46**. – P. 1–99.
4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. Ахієзер Н.І. Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу. // *Запис. фіз.-мат. відділення АН УРСР.*, – 1927. – Т. 2, **3**. – С. 29–33.
6. Cartwright M. L. On integral function of integral order. // *Proc. London Math. Soc.*, – 1932. – V. 33, **33**. – P. 209–224.
7. Kneser H. Zur theorie der gebrochenen Functionen mehrer Veränderlicher. // *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, – 1938. – **48**. – P. 1–28.
8. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer Speziellen Klasse analitischen Functionen. I. // *Comm. Helv.*, – 1938. – **11**. – P. 180–213.
9. Edrei A., Fuchs W. H. J. Meromorphic functions with several deficient values. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, – 1959. – **93**. – P. 292–328.
10. Rubel L. A. A survey of a Fourier series method for meromorphic functions. // *Lect. Not. in Math.*, – 1973. – **336**. – P. 51–62.
11. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции. // *Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр.*, – 1990. – **85**. – С. 5–186.
12. Miles J. A Fourier series method in value distribution theory. // *Fourier Series Methods in Complex Analysis (Mekriärvi, 2005). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser.*, – 2006. – **10**. – P. 129–158.
13. Rubel L. A. Entire and meromorphic functions. – New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. – 187 p.
14. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа, 1988. – 195 с.
15. Rubel L. A. A Fourier series method for entire functions. // *Duke Math. J.*, – 1963. – **39**. – P. 437–442.

16. Rubel L. A. Une methode de series de Fourier pour les fonctions meromorphes. // Seminaire P. Lelong, 6eme annee. – 1965/66.
17. Rubel L. A. Croissance et zeros des Fonctions Meromorphes – Espace Duals de Fonctions Entieres. // Publ. Sem. Math. d'Orsay. 1965/66. – P. 77.
18. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. // Bul. Amer. Math. Soc., – 1966. – V. 73, 5. – P. 857–860.
19. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. // Bul. Soc. Math. France., – 1968. – 96. – P. 53–96.
20. Noverraz P. Extension d'une methode de series de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1967. – 264. – P. 675–678.
21. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes. // Ann. Inst. Fourier., – 1969. – V. 19, 2. – P. 419–493.
22. Кондратюк А. А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций. // Матем. сб. – 1981. – Т. 116, 2. – С. 147–165.
23. Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции. // Докл. АН СССР., – 1983. – Т. 268, 3. – С. 541–544.
24. Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции. // Матем. сб. – 1984. – Т. 125, 2. – С. 147–166.
25. Василькив Я. В. Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье: Дис... канд. физ.-мат. наук; – Львов, – 1986. – 129 с.
26. Stoll W. About entire and meromorphic functions of exponential type. // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., – 1968. – 11. – P. 392–430.
27. Stoll W. Normal families of non-negative divisors. // Math. Z., – 1964. – 84. – P. 154–218.
28. Kujala R. O. Functions of finite λ -type in several complex variables. // Trans. Amer. Math. Soc., – 1971. – 161. – P. 327–358.
29. Nagel A., Rudin W. Moebius-invariant function spaces on balls and spheres. // Duke Math. J., – 1976. – V. 43, 4. – P. 841–865.
30. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

31. Александров А. Б. Теория функций в шаре. // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. проблемы матем. Фундаментальные направления., – 1985. – 8. – С. 115–190.
32. Miles J., Shea D. F. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value. // Duke Math. J., – 1976. – V. 43, 1. – P. 171–186.
33. Шабат Б. В. Распределение значений голоморфных отображений. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
34. Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et formes differentiales positives. – Paris–London–New York: Gordon and Breach, 1968. – 79 p.
35. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
36. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. 2. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
37. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
38. Васильків Я.В. Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці. Ч. 1. // Матем. Студії., – 1999. – Т. 12, 1. – С. 37–58.

Стаття одержана: 5.05.2010; перероблений варіант: 15.11.2010; прийнята: 19.11.2010.

О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора

Т. В. Рвачева

Национальный аэрокосмический университет
 имени Н. Е. Жуковского "ХАИ", Украина
 E-mail: rvachova@gmail.com

В статье рассматриваются приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора, построенного на основе атомарной функции $up(x)$. Получены оценки скорости приближения для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций.

Рвачова Т. В., Про швидкість наближення нескінченно диференційовних функцій частинними сумами узагальненого ряду Тейлора. У статті розглянуті наближення нескінченно диференційовних функцій частинними сумами узагальненого ряду Тейлора, побудованого на основі атомарної функції $up(x)$. Одержані оцінки швидкості наближення для деяких класів нескінченно диференційовних функцій.

T. V. Rvachova, On the rate of approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the generalized Taylor series. Approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the based on the atomic function $up(x)$ generalized Taylor series is considered in the paper. The rate of approximation for some classes of the infinitely differentiable functions is estimated.

2000 Mathematics Subject Classification: 41A58.

1. Введение.

Пусть $H(M)$ — класс функций $\varphi \in C^\infty[a, b]$ таких, что

$$\|\varphi^{(n)}(x)\|_{C[a,b]} \leq C(\varphi)M_n, n \in \mathbb{N},$$

где $M = \{M_n\}$.

Класс функций $H(M)$ называется квазианалитическим классом, если всякая функция $\varphi \in H(M)$ определяется единственным образом по последовательности чисел $\{\varphi^{(n)}(x_0)\}_0^\infty$, где x_0 — произвольно заданная точка из $[a, b]$. В противном случае $H(M)$ называется неквазианалитическим классом (см. [1, 2]).

Если класс квазианалитичен, то он не может содержать финитных функций, то есть функций, носитель которых строго содержится в $[a, b]$. С другой стороны, в работе Хьюз [3] показано, что если класс неквазианалитичен, то он содержит финитные функции со сколь угодно малым носителем.

В. А. Рвачев в 1982 г. предложил и исследовал обобщенные ряды Тейлора для классов

$$H_\rho = \{f \in C^\infty[-1, 1] : \|f^{(k)}\|_{C[-1, 1]} \leq C(f) \rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

В его работах [4, 5] доказан следующий факт: если

$$f \in H_\rho, \text{ где } \rho \in [1, 2), \quad (1)$$

то f раскладывается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x), \quad (2)$$

где

$$N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1} - 1, 2^{n-1}\}, n \neq 0; N_0 = \{-1, 0, 1\};$$

$$x_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^{n-1}} \right\}, n \neq 0, k \in N_n; x_{0,k} = \{k\}, k \in N_0,$$

а функции $\tilde{\varphi}_{n,k}(x) \in H_1$ — так называемые базисные функции обобщенного ряда Тейлора — однозначно определяются из условий

$$(\tilde{\varphi}_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)} = \delta_n^m \delta_s^k.$$

Они представляют собой конечные линейные комбинации сдвигов функций $up(x)$:

$$\tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_l c_l^{(n,k)} up(x - l2^{-n})$$

и играют роль функций x^n в обычных рядах Тейлора.

Функция

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

является решением с компактным носителем ФДУ

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Ряд (2) сходиться на промежутке $[-1, 1]$ равномерно.

В работах [6, 7] автором была исследована связь между коэффициентами и суммой обобщенного ряда Тейлора.

Настоящая работа посвящена получению результатов о приближении бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора.

2. Теоремы о приближении.

Для доказательства теорем о приближении частичными суммами обобщенного ряда Тейлора сформулируем следующую лемму, принадлежащую В. А. Рвачеву (лемма 6 из [5]):

Лемма 1 Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{k \in N_n} c_k \tilde{\varphi}_{n,k}(x),$$

где $|c_k| \leq M 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Тогда

$$\|\varphi^{(r)}\|_{C[-1,1]} \leq \begin{cases} \hat{C} M 2^{\frac{r(r+1)}{2}}, & r > n, \\ \hat{C} M 2^{\frac{r(r+1)}{2} + r - n}, & r \leq n, \end{cases}$$

где $\hat{C}$ — абсолютная константа.

Автором получены следующие теоремы о приближении бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора:

Теорема 1 Пусть $f(x)$ удовлетворяет (1) и

$$\exists C : |f^{(n)}(x_{n,k})| \leq C r^n n^{\alpha n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in N_n \quad (3)$$

для некоторого $r > 0$, $\alpha \geq 1$. Тогда справедлива следующая оценка для скорости приближения $f(x)$ частичной суммой ряда (2):

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{\hat{C}(r, \alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2} - \alpha m \log_2(m+1) - m \log_2 r}},$$

где

$$R_m(x) = f(x) - \sum_{n=0}^m \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x). \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку $f(x)$ удовлетворяет (1),

$$R_m(x) = f(x) - \sum_{n=0}^m \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x).$$

По лемме 1, сформулированной выше, с учетом (3) имеем:

$$\|P_n(x)\| \leq \tilde{C} r^n n^{\alpha n} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} 2^{-n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |P_n(x)| \leq \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\frac{n(n+1)}{2}-\alpha n \log_2 n - n \log_2 r}} = \\ &= \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\alpha \log_2 n - \log_2 r + \frac{3}{2}}} \right)^n. \end{aligned}$$

Очевидно, что при m , больших некоторого $m_0(\alpha)$

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\leq \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha \log_2(m+1)-\log_2 r}} \right)^n = \\ &= \tilde{C} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha \log_2(m+1)-\log_2 r}} \right)^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha \log_2(m+1)-\log_2 r}} \right)^{n-m} \\ &= \tilde{C} \left(\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m \log_2(m+1)-m \log_2 r}} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha \log_2(m+1)-\log_2 r}} \right)^l. \end{aligned}$$

Для m , больших некоторого $m_1(r, \alpha)$

$$\frac{m+1}{2} - \alpha \log_2(m+1) - \log_2 r > \beta > 0,$$

и, следовательно, для таких m

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\leq \tilde{C} \frac{1}{2^{\beta}-1} \frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m \log_2(m+1)-m \log_2 r}} \\ &= \hat{C} \frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m \log_2(m+1)-m \log_2 r}}. \end{aligned}$$

Положив теперь

$$\hat{m}(r, \alpha) = \max(m_0(\alpha), m_1(r, \alpha))$$

и выбрав

$$\hat{C}(r, \alpha) = \max_{k=0, \dots, \hat{m}(r, \alpha)} (\hat{C}, \|R_k(x)\| 2^{\frac{k(k+1)}{2}-\alpha k \log_2(k+1)-k \log_2 r}),$$

получим, что для любого $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{\hat{C}(r, \alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2} - \alpha m \log_2(m+1) - m \log_2 r}}.$$

Теорема 2 Пусть $f(x)$ удовлетворяет (1) и

$$\exists C : |f^{(n)}(x_{n,k})| \leq CA(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in N_n,$$

где $\frac{A(n+1)}{A(n)} \leq 2^{n+\frac{1}{2}}.$

Тогда

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{\tilde{C}}{8^{\frac{m}{2}}},$$

где $R_m(x)$ определено в (4).

Доказательство. $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n(x)$, где

$$P_n(x) = \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x).$$

Из леммы 1 с учетом условий теоремы, имеем:

$$|P_n(x)| \leq \tilde{C} A(n) 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\leq \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} A(n) 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A(n)}{A(m)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \\ &= \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A(n)}{A(n-1)} \frac{A(n-1)}{A(n-2)} \dots \frac{A(m+1)}{A(m)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} \leq \\ &\leq \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}(n^2 - m^2)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \tilde{C} \frac{A(m)}{2^{\frac{m^2}{2}}} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^n = \\ &= \hat{C} \frac{A(m)}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \leq C_1 \frac{A(m-1) 2^{m-1+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \leq \\ &\leq C_2 \frac{A(m-2) 2^{m-2+\frac{1}{2}} \cdot 2^{m-1+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \leq \dots \leq C_m \frac{A(1) 2^{\frac{1}{2}(m^2-1)}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \leq \frac{C}{2^{\frac{3}{2}m}}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений. // Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций. – 1952. – С.285–320.
2. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.:Мир, – 1986. – 464 с.
3. Hughes R. B. Zero sets of functions from non-quasi analytic classes. // Proc. Amer. Math. Soc., – 1971. – 27(3). – P. 539–542.
4. Рвачев В. А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций. // Мат. методы анализа динамических систем., – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.
5. Рвачев В. А. Фinitные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение. // Успехи матем. наук., – 1990. – Т. 45, Вып. 1 (271). – С. 77–103.
6. Рвачова Т. В. Про зв'язок між коефіцієнтами і сумами узагальненого ряду Тейлора. // Доповіді Національної академії наук України., – 2002. – №7. – С. 26–30.
7. Rvachova T. V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series. // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya., – 2003. – Vol. 10, No. 2. – P. 262–268.

Статья получена: 26.10.2010; принята: 19.11.2010.

Adding an integrator and uniform ISS stabilization for switched MIMO triangular systems with unknown switched signal and right invertible input-output maps

S. Dashkovskiy, S.S. Pavlichkov

University of Bremen, Germany

Taurida National University, Ukraine

dsn@math.uni-bremen.de, svyatoslav_pavlichkov@rambler.ru,

We extend some recent (2009,2010) results devoted to the Lyapunov stabilization for the switched systems in the strict-feedback form. More specifically, we prove that a multi-input and multi-output triangular switched system with an unknown switching signal, with right-invertible input-output links, and with dynamics, which is affine in external disturbances is globally uniformly input-to-state stabilizable with respect to the disturbances.

Дашковський С., Павличков С.С., Обхід інтегратора і рівномірна стабілізація вхід-стан трикутних систем з перемиканнями з багатьма входами і виходами, з невідомими перемиканнями і з правооборотними відображеннями вхід-вихід. У роботі узагальнюються деякі нові (2009,2010) результати, які присвячені стабілізації за Ляпуновим систем з перемиканнями трикутного вигляду. Точніше, ми доводимо, що трикутні системи з правооборотними відображеннями вхід-вихід і з правими частинами афінними щодо зовнішніх збурень рівномірно стабілізуються за входом-станом відносно збурень.

Дашковский С., Павличков С.С., Обход интегратора и равномерная стабилизация вход-состояние треугольных систем с переключениями со многими входами и выходами, с неизвестными переключениями и с правообратимыми отображениями вход-выход. В работе обобщаются некоторые новые (2009,2010) результаты, посвященные стабилизации по Ляпунову систем с переключениями треугольного вида. Более точно, мы доказываем, что треугольные системы с правообратимыми отображениями, с многими входами и выходами, с правообратимыми отображениями вход-выход и с правыми частями аффинными относительно внешних возмущений равномерно стабилизируемы по входу-состоянию относительно возмущений.

2000 *Mathematics Subject Classification* 93C10, 93B10, 93B11, 93B05, 93B52.

1. Introduction

In 90th and 2000th various backstepping algorithms (which were originally motivated by earlier (1973) work [5]) were designed and become very fruitful in solving many problems of robust and adaptive nonlinear control. Originally developed for ODE systems [8], this technique was extended to other types of systems (as examples we can mention Volterra systems [6], discrete-time systems [17, 19], or delay systems [2]). On the other hand, during the last decade, switched systems (with or without control) have received a lot of attention. Therefore it is natural to extend well-known recursive designs to the switched systems case.

Some authors made their efforts along this research line during the last years [11, 3, 18, 16, 13]. However, it should be noted that most backstepping designs for switched systems presume that some information about the switching signal is available [3, 18]. Furthermore, sometimes the switching signal is treated as a component of the control input to be designed [11]. The problem of asymptotic stabilization with unknown switched signal was investigated in work [16]. More specifically, in this work it was proven that the classical backstepping design is possible for this class under the so-called "simultaneous domination assumption", which means the existence of a common virtual control and common Lyapunov function at each step of the recursive design. On the other hand, no constructive conditions for verification of the "simultaneous domination assumption" were proposed in [16].

In the most recent work [12] it was proved that the class of strict-feedback form single-input and single-output (SISO) switched systems considered in [16] indeed does satisfy the "simultaneous domination assumption" and the Lyapunov stabilization is possible (independently this result was announced in [1]). Thus, in order to stabilize these systems by means of a smooth feedback, one does not need to impose any additional assumptions on this class.

The goal of the current paper is to extend this above-mentioned result to the case of ISS uniform stabilization for the multi-input and multi-output triangular switched system with an unknown switching signal and with right-invertible input-output links.

2. Preliminaries

Throughout the paper, by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ we denote the scalar product in $\mathbb{R}^q$ (for any $q \in \mathbb{N}$ and from the context it will be clear which q is considered); for $A \subset \mathbb{R}^q$ by $\overline{A}$ we denote the closure of A . For a vector $\xi \in \mathbb{R}^q$, by $|\xi|$ we denote its quadratic norm, i.e., $|\xi| = \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Also we use the following standard abbreviations: ODE for "ordinary differential equations", MIMO for "multi-input and multi-output", SISO for "single-input and single-output", GAS for "global asymptotic stability/globally asymptotically stable", GES for "global exponential stability/globally exponentially stable", (and respectively LAS and LES for the corresponding local asymptotic or exponential stability), ISS for "input-to-state stability/input-to-state stable".

We say that function α of $[0, +\infty)$ to $[0, +\infty)$ is of class $\mathcal{K}$ iff it is continuous,

positive definite and strictly increasing, and α is of class $\mathcal{K}_\infty$ if it is of class $\mathcal{K}$ and unbounded. A function β of $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$ is said to be of class $\mathcal{KL}$ iff for each fixed $t \geq 0$ the function $\beta(\cdot, t)$ is of class $\mathcal{K}_\infty$ and for each fixed $s \geq 0$, we have $\beta(s, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ and $t \mapsto \beta(s, t)$ is decreasing.

Consider the nonlinear switched system

$$\dot{x} = F_{\sigma(t)}(t, x, \Delta) \quad (1)$$

where $[0, +\infty) \ni t \mapsto \sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ is the piecewise constant switching signal, $x \in \mathbf{R}^n$ is the state, $\Delta(t) \in \mathbf{R}^N$ is the input, which is treated as an external disturbance. Suppose that each F_σ is continuous w.r.t. (t, x, Δ) and satisfies the local Lipschitz condition w.r.t. (x, Δ) .

Given any $\Delta(\cdot)$ in $L_\infty([0, +\infty); \mathbf{R}^N)$ by $\|\Delta(\cdot)\|$ denote its L_∞ -norm on $[0, +\infty[$, and for each $x^0 \in \mathbf{R}^n$ and each $t_0 \geq 0$ and each piecewise constant $\sigma(\cdot)$ by $x(t, x^0, t_0, \Delta(\cdot), \sigma(\cdot))$ denote solution of the Cauchy problem $x(t_0) = x^0$, of system (1) with these $\Delta = \Delta(t)$ and $\sigma = \sigma(t)$.

Definition 1 System (1) is said to be uniformly input-to-state stable (ISS) iff there are $\beta \in \mathcal{KL}$, and $\gamma \in \mathcal{K}$ such that for each t_0 , each $x^0 \in \mathbf{R}^n$ and each $\Delta(\cdot) \in L_\infty([t_0, +\infty); \mathbf{R}^N)$ and each piece-wise constant $t \mapsto \sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ we obtain for all $t \geq t_0$

$$|x(t, x^0, t_0, \Delta(\cdot), \sigma(\cdot))| \leq \beta(|x^0|, t - t_0) + \gamma(\|\Delta(\cdot)\|_{L_\infty[t_0, +\infty[)}) \quad (2)$$

Definition 2 In the special case, if system (1) has the form

$$\dot{x} = F_{\sigma(t)}(x, \Delta)$$

it is said to be uniformly input-to-state stable (ISS) iff there are $\beta \in \mathcal{KL}$, and $\gamma \in \mathcal{K}$ such that for each $x^0 \in \mathbf{R}^n$, each $\Delta(\cdot) \in L_\infty([0, +\infty); \mathbf{R}^N)$ and each piecewise constant $t \mapsto \sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ we obtain

$$|x(t, x^0, 0, \Delta(\cdot), \sigma(\cdot))| \leq \beta(|x^0|, t) + \gamma(\|\Delta(\cdot)\|_{L_\infty}), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Remark 1. It is clear that in the special case $\Delta(t) \equiv 0$ the uniform ISS property implies that, whatever piecewise constant $\sigma(\cdot)$ is, $x(t) \equiv 0$ is a GAS solution of the obtained ODE system (1).

Remark 2. Note that this definition is coordinate-free in the following sense: if $z = F(x)$ is a global diffeomorphism of the state space then the definition of the uniform ISS property of system (1) is invariant w.r.t. all such state transformations. The proof is the same as for the classical ISS concept introduced in [15] and is based on the properties of $\gamma \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{KL}$ functions.

Definition 3 Similarly to the ODE case, given a differentiable function $V(t, x)$, define its derivative w.r.t. system (1) as

$$\frac{d}{dt}V(t, x)|_{(1)} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} F_{\sigma(t)}(t, x, \Delta)$$

for all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$ and all (t, x, Δ) (in the special case $V = V(x)$ the first term vanishes). If we deal with a control switched system

$$\dot{x} = F_{\sigma(t)}(t, x, u, \Delta), \quad (4)$$

with controls $u \in \mathbb{R}^m$ then we define

$$\frac{d}{dt}V(t, x, u, \Delta)|_{(4)} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} F_{\sigma}(t, x, u, \Delta)$$

for all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$ and all (t, x, u, Δ) , and, for a certain controller $u = u(t, x)$, we denote

$$\frac{d}{dt}V(t, x)|_{(4), u=u(t, x)} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} F_{\sigma}(t, x, u(t, x), \Delta)$$

for all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$ and all (t, x, Δ) (the same holds true for the special cases $u = u(x)$ and $u = u(t)$).

3. Main result.

We consider the following switched system

$$\dot{X} = A(X, u) + B_{\sigma(t)}(X) + C_{\sigma(t)}(X)d(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

where $\sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ is the piecewise constant *unknown* switching signal, $X = [x_1, \dots, x_{\nu}]^T$, is the state with $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i=1, \dots, \nu$, $u = [u_1, \dots, u_{m_{\nu+1}}]^T$ in $\mathbb{R}^{m_{\nu+1}}$ is the control, and $d(t) = [d_1(t), \dots, d_N(t)]^T$ is the external input signal considered as some external disturbances.

We assume that $A(X, u)$, $B_{\sigma}(X)$ and $C_{\sigma}(X)$ have the following form

$$A(X, u) = \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \\ a_{\nu}(x_1, x_2, \dots, x_{\nu}, u) \end{pmatrix}; \quad B_{\sigma}(X) = \begin{pmatrix} b_{\sigma,1}(x_1) \\ b_{\sigma,2}(x_1, x_2) \\ \dots \\ b_{\sigma,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_{\nu}) \end{pmatrix}$$

$$\text{and } C_{\sigma}(X) = \begin{pmatrix} c_{\sigma,1}(x_1) \\ c_{\sigma,2}(x_1, x_2) \\ \dots \\ c_{\sigma,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_{\nu}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

for all $\sigma = 1, \dots, M$ and satisfy the following conditions:

- (a) functions $A(\cdot, \cdot)$, $B_{\sigma}(\cdot)$, and $C_{\sigma}(\cdot)$ are of class $C^{\nu+1}$, and $A(0, 0) = 0$, $B_{\sigma}(0) = 0$, and $C_{\sigma}(0) = 0$ for all $\sigma = 1, \dots, M$;
- (b) for each fixed $i = 1, \dots, \nu$ function $a_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \cdot)$ is right invertible in the following sense: there exists a function $[x_1, \dots, x_i, \xi] \mapsto \chi_i(x_1, \dots, x_i, \xi)$ of class $C^{\nu+1}(\mathbb{R}^{(m_1+\dots+m_i)+m_i}; \mathbb{R}^{m_{i+1}})$ such that $\chi_i(0, \dots, 0, 0) = 0$ and

$$a_i(x_1, \dots, x_i, \chi_i(x_1, \dots, x_i, \xi)) = \xi \quad \text{for all } (x_1, \dots, x_i, \xi) \text{ in } \mathbb{R}^{(m_1+\dots+m_i)+m_i}.$$

Remark 3 Assumption (b) holds true for instance if following [5] we assume that $x_i \in \mathbb{R}^1$ and there is $a > 0$ such that $|\frac{\partial a_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}| \geq a > 0$ for all $(x_1, \dots, x_{i+1})$ in $\mathbb{R}^{i+1}$, $i = 1, \dots, \nu$. Of course, in the general MIMO case $m_i \geq 1$, if $m_i \leq m_{i+1}$ for all $i = 1, \dots, \nu$, then there are many systems which satisfy condition (b) as well (while, if $m_i > m_{i+1}$, then by the well-known Sard theorem, Condition (b) becomes impossible). It is also clear that condition (b) is more restrictive than the case of the generalized triangular forms (GTF) introduced (for ODE systems) in [7, 14]. Currently as open challenging problem is that of extension of the result from [14] (as well as those of the current paper) to the GTF switched systems.

Our main result devoted to the switched systems of the form (5) is as follows.

Theorem 1 Suppose that system (5) with $A(\cdot, \cdot)$, $B_\sigma(\cdot)$, $C_\sigma(\cdot)$ of form (6) satisfies (a), (b). Then there exists a feedback $u = u(X)$ of class C^1 such that the closed-loop system (5) with this $u = u(X)$ is uniformly ISS with respect to the disturbance $d(t)$.

The proof of Theorem 1 is reduced to the recursive design given in the next section.

4. Adding an integrator and backstepping design.

Consider a switched control system

$$\dot{z} = f(z, z_{k+1}) + \psi_{\sigma(t)}(z) + \varphi_{\sigma(t)}(z)\Delta(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

where $z_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_k}$ is the control, $z \in \mathbb{R}^n$, is the state, $\Delta(t) \in L_\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^N)$ is some external disturbance and $[0, +\infty) \ni t \mapsto \sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ is the *unknown* piecewise constant switching signal which takes values from some finite set of indices $\{1, \dots, M\}$.

In addition, we consider its dynamical extension of the form

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, z_{k+1}) + \psi_{\sigma(t)}(z) + \varphi_{\sigma(t)}(z)\Delta(t) \\ \dot{z}_{k+1} = f_{k+1}(z, z_{k+1}, u) + \psi_{k+1, \sigma(t)}(z, z_{k+1}) + \varphi_{k+1, \sigma(t)}(z, z_{k+1})\Delta(t) \end{cases} \quad (8)$$

with states $[z, z_{k+1}]^T$, controls $u \in \mathbb{R}^m$ (and with the same external disturbance $\Delta(t)$ and *unknown* switching signal $\sigma(t)$).

Next we suppose that systems (7)-(8) satisfy the following conditions

- (i) functions f , ψ_σ , φ_σ and f_{k+1} , $\psi_{k+1, \sigma}$, $\varphi_{k+1, \sigma}$ are of class C^p and $f(0, 0) = \psi_\sigma(0) = 0$, $\varphi_\sigma(0) = 0$ and $f_{k+1}(0, 0, 0) = \psi_{k+1, \sigma}(0, 0) = 0$, $\varphi_{k+1, \sigma}(0, 0) = 0$ for all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$
- (ii) $f_{k+1}(z, z_{k+1}, \cdot)$ is right invertible for every $[z, z_{k+1}]^T$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_k}$ in the following sense: there exists the map $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{n_k} \ni [z, z_{k+1}, \xi] \mapsto u(z, z_{k+1}, \xi) \in \mathbb{R}^m$ of class C^p such that $f_{k+1}(z, z_{k+1}, u(z, z_{k+1}, \xi)) = \xi$ for all $[z, z_{k+1}, \xi]$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{n_k}$ and $u(0, 0, 0) = 0$.

Our main Theorem 1 can be reduced to the following statement on adding an integrator.

Theorem 2 Assume that Conditions (i),(ii) hold true and, for system (7) with the Lyapunov function $V(z) := \frac{1}{2}\langle z, z \rangle$ and for every $\lambda > 0$ there exists $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$ such that the following inequality holds

$$\frac{d}{dt}V(z)|_{(7), z_{k+1}=0} = \langle z, f(z, 0) + \psi_\sigma(z) + \varphi_\sigma(z)\Delta \rangle \leq -\lambda V(z) + \gamma(|\Delta|)$$

for all $z \in \mathbb{R}^n, \Delta \in \mathbb{R}^N, \sigma \in \{1, \dots, M\}$ (9)

Then, for system (8) with the Lyapunov function

$$V_{k+1}(z, z_{k+1}) = \frac{1}{2}\langle z, z \rangle + \frac{1}{2}\langle z_{k+1}, z_{k+1} \rangle,$$

for every $\varepsilon > 0$, for every $\delta > 0$ and for $\gamma_{k+1}(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ given by $\gamma_{k+1}(|\Delta|) = \gamma(|\Delta|) + \delta|\Delta|^2$, there exists a feedback $u(z, z_{k+1})$ of class C^{p-1} such that $u(0, 0) = 0$ and such that the following Lyapunov inequality holds true

$$\frac{d}{dt}V_{k+1}(z, z_{k+1})|_{(8), u=u(z, z_{k+1})} \leq -(\lambda - \varepsilon)V_{k+1}(z, z_{k+1}) + \gamma_{k+1}(|\Delta|)$$

for all $z \in \mathbb{R}^n, z_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_k}, \Delta \in \mathbb{R}^N, \sigma \in \{1, \dots, M\}$ (10)

If $n = 0$ (and $k = 0$) and system (7) is empty, then the extension (8) becomes

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, u) + \psi_{1,\sigma(t)}(z_1) + \varphi_{1,\sigma(t)}(z_1)\Delta(t).$$

In this case, if Conditions (i),(ii) hold, we say by definition that the conditions of the current theorem are satisfied with $\gamma(|\Delta|) = 0$ and the current theorem states the existence of the corresponding feedback $u(z_1)$ ($u(0) = 0$) which satisfies (10) with $\gamma_{k+1}(|\Delta|) = \gamma_1(|\Delta|) = \delta|\Delta|^2$.

Let us note that (10) implies the uniform ISS of the system (8), if $0 < \varepsilon < \lambda$. Indeed, take any piecewise constant $[0, +\infty) \ni t \mapsto \sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$, any disturbance $\Delta(\cdot) \in L_\infty$ and define $V_{k+1}(t) := V_{k+1}(z(t), z_{k+1}(t))$. Define $\lambda_0 := \lambda - \varepsilon > 0$. Then multiplying

$$\frac{d}{dt}V_{k+1}(t) \leq -\lambda_0 V_{k+1}(t) + \gamma_{k+1}(|\Delta(t)|) \quad \text{for all } t \geq 0$$

by $e^{\lambda_0 t}$ we obtain

$$\frac{d}{dt}(V_{k+1}(\tau)e^{\lambda_0 \tau}) \leq \gamma_{k+1}(|\Delta(\tau)|e^{\lambda_0 \tau}) \quad \text{for all } \tau \geq 0$$

and then integrating we have

$$0 \leq V_{k+1}(t) \leq V_{k+1}(0)e^{-\lambda_0 t} + \int_0^t \gamma_{k+1}(|\Delta(\tau)|)e^{-\lambda_0(t-\tau)} d\tau \quad \text{for all } t \geq 0,$$

i.e.,

$$0 \leq \|z(t), z_{k+1}(t)\|^2 \leq \|z(0), z_{k+1}(0)\|^2 e^{-\lambda_0 t} + \frac{1}{\lambda_0} \gamma_{k+1} (\|\Delta(\cdot)\|_{L_\infty}) \quad \text{for all } t \geq 0,$$

which yields Definition 1.

Let us assume for a moment that Theorem 2 is proved and prove that Theorem 2 implies Theorem 1. The proof of Theorem 2 is given in the next section.

Proof of Theorem 1. The proof is by induction over $i = 1, \dots, \nu$.

(The base case $i = 1$) Fix an arbitrary $\lambda > 0$. For $i = 1$, consider the system

$$\dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2) + b_{\sigma(t),1}(x_1) + c_{\sigma(t),1}(x_1)d(t), \quad t \geq 0 \quad (11)$$

with states $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, controls $x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, external disturbances $d \in \mathbb{R}^N$ and an unknown switching signal $\sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$. Take the Lyapunov function $V_1(x_1) = \frac{1}{2} \langle x_1, x_1 \rangle$, and any $\delta > 0$. Applying Theorem 2, we obtain the existence of a feedback $x_2 = \alpha_1(x_1)$ of class C^ν such that

$$\frac{d}{dt} V_1(x_1)|_{(11), x_2 = \alpha_1(x_1)} \leq -\lambda V_1(x_1) + \delta \langle d, d \rangle \quad (12)$$

for all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ and all $d \in \mathbb{R}^N$. At this first step, we consider the (identical) state transformation $z = z_1 := x_1 - \alpha_0 = x_1 - \bar{\alpha}_0$ with $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = 0$, which brings the dynamics of (11) to the form

$$\dot{z} = \hat{f}(z, x_{i+1}) + \hat{\psi}_{\sigma(t)}(z) + \hat{\varphi}_{\sigma(t)}(z)\Delta, \quad \text{i.e.,} \quad \dot{z} = \hat{f}(z, x_2) + \hat{\psi}_{\sigma(t)}(z) + \hat{\varphi}_{\sigma(t)}(z)\Delta \quad (13)$$

with

$$z = z_1 = x_1; \quad \hat{f}(z, x_2) = a_1(z, x_2); \quad \hat{\psi}_{\sigma}(z) = b_{\sigma,1}(z), \quad \Delta = d, \quad \hat{\varphi}_{\sigma} = c_{\sigma,1}(z)$$

Then from (12), we obtain

$$\frac{d}{dt} (V_1(z))|_{(13), x_2 = \alpha_1(z)} = -\lambda V_1(z) + \delta \langle \Delta, \Delta \rangle \quad \text{with} \quad V_1(z) = \frac{1}{2} \langle z, z \rangle. \quad (14)$$

(The inductive step $i \rightarrow (i+1)$) Suppose that for any $\lambda > 0$, and an arbitrarily small $\delta > 0$ there exist functions $\alpha_0 = 0, \alpha_1(z_1), \dots, \alpha_i(z_1, \dots, z_i), \bar{\alpha}_0 = 0, \bar{\alpha}_1(x_1), \dots, \bar{\alpha}_i(x_1, \dots, x_i)$ of classes $C^{\nu+1}, C^\nu, \dots, C^{\nu-i+1}$, respectively such that the following conditions hold:

1. $\alpha_i(0) = 0$ and $\bar{\alpha}_i(0) = 0$ and the coordinate transformation

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \alpha_0 \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1) \\ \dots \\ z_i = x_i - \alpha_i(z_1, \dots, z_{i-1}) \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = x_1 - \bar{\alpha}_0 \\ z_2 = x_2 - \bar{\alpha}_1(x_1) \\ \dots \\ z_i = x_i - \bar{\alpha}_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \end{cases} \quad (15)$$

brings the dynamics of the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2) + b_{\sigma(t),1}(x_1) + c_{\sigma(t),1}(x_1)d(t) \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1, x_2, x_3) + b_{\sigma(t),2}(x_1, x_2) + c_{\sigma(t),2}(x_1, x_2)d(t) \\ \dots \\ \dot{x}_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + b_{\sigma(t),i}(x_1, x_2, \dots, x_i) + c_{\sigma(t),i}(x_1, x_2, \dots, x_i)d(t) \end{cases} \quad (16)$$

with states $[x_1, \dots, x_i]^T$, controls x_{i+1} and external disturbances d to the form

$$\dot{z} = \hat{f}(z, x_{i+1}) + \hat{\psi}_{\sigma(t)}(z) + \hat{\varphi}_{\sigma(t)}(z)\Delta(t) \quad (17)$$

where $z = [z_1, \dots, z_i]$ is the state defined by the transformation (15), x_{i+1} is the control, $\Delta(\cdot) = d(\cdot)$ is the disturbance, $\sigma(t) \in \{1, \dots, M\}$ is the unknown (piecewise constant) switching signal.

2. For the Lyapunov function $V_i(z) = \frac{1}{2}\langle z, z \rangle$ we obtain

$$\frac{d}{dt}(V_i(z))|_{(17), x_{i+1}=\alpha_i(z_1, \dots, z_i)} = -\lambda V_i(z) + \delta\langle d, d \rangle \quad (18)$$

for all z , d and all $\sigma \in \{1, \dots, M\}$.

Let the system

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{f}(z, x_{i+1}) + \hat{\psi}_{\sigma(t)}(z) + \hat{\varphi}_{\sigma(t)}(z)\Delta(t) \\ \dot{x}_{i+1} = \hat{f}_{i+1}(z, x_{i+1}, w) + \hat{\psi}_{i+1, \sigma(t)}(z, x_{i+1}) + \hat{\varphi}_{i+1, \sigma(t)}(z, x_{i+1})\Delta(t) \end{cases} \quad (19)$$

(with states $[z, x_{i+1}]$, controls $w \in \mathbb{R}^{m_{i+2}}$ and disturbances $\Delta = d$) be the corresponding dynamical extension obtained by the state transformation

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \alpha_0 \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1) \\ \dots \\ z_i = x_i - \alpha_i(z_1, \dots, z_{i-1}) \\ x_{i+1} = x_{i+1} \end{cases} \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 - \bar{\alpha}_0 \\ z_2 = x_2 - \bar{\alpha}_1(x_1) \\ \dots \\ z_i = x_i - \bar{\alpha}_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \\ x_{i+1} = x_{i+1} \end{cases}$$

of the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2) + b_{\sigma(t),1}(x_1) + c_{\sigma(t),1}(x_1)d(t) \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1, x_2, x_3) + b_{\sigma(t),2}(x_1, x_2) + c_{\sigma(t),2}(x_1, x_2)d(t) \\ \dots \\ \dot{x}_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + b_{\sigma(t),i}(x_1, x_2, \dots, x_i) + c_{\sigma(t),i}(x_1, x_2, \dots, x_i)d(t) \\ \dot{x}_{i+1} = a_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, w) + b_{\sigma(t),i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + \\ + c_{\sigma(t),i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1})d(t) \end{cases}$$

(with states $[x_1, \dots, x_{i+1}]$, controls $w \in \mathbb{R}^{m_{i+2}}$ and disturbances d). Then the state transformation $z = z$, $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_{i+1}(z)$ brings the system (19) to the form

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, z_{i+1}) + \psi_{\sigma(t)}(z) + \varphi_{\sigma(t)}(z)\Delta(t) \\ \dot{z}_{i+1} = f_{i+1}(z, z_{i+1}, w) + \psi_{\sigma(t),i+1}(z, z_{i+1}) + \varphi_{\sigma(t),i+1}(z, z_{i+1})\Delta(t) \end{cases} \quad (20)$$

(with states $[z, z_{i+1}]$, controls $w \in \mathbb{R}^{m_{i+2}}$ and disturbances $\Delta(t) = d(t)$) By the induction hypothesis (more specifically by the definition of α_i and by (18)), system (20) satisfies all the assumptions of Theorem 2. Applying Theorem 2, for each $\lambda > 0$, each $\varepsilon > 0$ and each $\delta > 0$, we obtain the existence of a feedback $w = \alpha_{i+1}(z, z_{i+1})$ of class $C^{\nu-i}$ with $\alpha_{i+1}(0, 0) = 0$ such that the Lyapunov function $V_{i+1}(z) = V_i(z) + \frac{1}{2}\langle z_{i+1}, z_{i+1} \rangle$ satisfies the inequality

$$\frac{d}{dt}(V_{i+1}(z, z_{i+1}))|_{(20), w=\alpha_{i+1}(z_1, \dots, z_i, z_{i+1})} = -(\lambda - \varepsilon)V_{i+1}(z, z_{i+1}) + \delta\langle d, d \rangle \quad (21)$$

Thus, using the induction over $i = 1, \dots, \nu$, we obtain for $i = \nu$ and for every $\lambda > 0$ and $\delta > 0$ that there exist $2(\nu + 1)$ functions $\alpha_0 = 0, \alpha_1(z_1), \dots, \alpha_\nu(z_1, \dots, z_\nu)$, and $\bar{\alpha}_0 = 0, \bar{\alpha}_1(x_1), \dots, \bar{\alpha}_\nu(x_1, \dots, x_\nu)$, such that α_i and $\bar{\alpha}_i$ are of class $C^{\nu-i+1}$ and $\alpha_i(0) = \bar{\alpha}_i(0) = 0$ and such that the following two properties hold

1. The state transformation

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \alpha_0 \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1) \\ \dots \\ z_\nu = x_\nu - \alpha_{\nu-1}(z_1, \dots, z_{\nu-1}) \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = x_1 - \bar{\alpha}_0 \\ z_2 = x_2 - \bar{\alpha}_1(x_1) \\ \dots \\ z_\nu = x_\nu - \bar{\alpha}_{\nu-1}(x_1, \dots, x_{\nu-1}) \end{cases} \quad (22)$$

or in vector form

$$Z = X - \alpha(Z), \iff Z = X - \bar{\alpha}(X) \quad (23)$$

brings the dynamics of the system (5) to the form

$$\dot{Z} = F(Z, u) + Q_{\sigma(t)}(Z) + R_{\sigma(t)}(Z)d(t), \quad (24)$$

with states $Z \in \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_\nu}$, controls $u \in \mathbb{R}^{m_{\nu+1}}$ and external disturbances $d(t)$, where $F(Z, u)$, $Q_\sigma(Z)$, and $R_\sigma(Z)$ are defined by the transformation (22) as follows

$$F(Z, u) = A(Z + \alpha(Z), u) - \frac{\partial \bar{\alpha}(Z + \alpha(Z))}{\partial X} A(Z + \alpha(Z), u), \quad (25)$$

$$Q_\sigma(Z) = B_\sigma(Z + \alpha(Z)) - \frac{\partial \bar{\alpha}(Z + \alpha(Z))}{\partial X} B_\sigma(Z + \alpha(Z)), \quad (26)$$

$$R_\sigma(Z) = C_\sigma(Z + \alpha(Z)) - \frac{\partial \bar{\alpha}(Z + \alpha(Z))}{\partial X} C_\sigma(Z + \alpha(Z)). \quad (27)$$

2. For the Lyapunov function $V_\nu(Z) := \frac{1}{2}\langle Z, Z \rangle$ with $Z = [z_1, \dots, z_\nu]$ given by (22) we have

$$\frac{d}{dt}(V_\nu(Z))|_{(24), u=\alpha_\nu(Z)} = -\lambda V_\nu(Z) + \delta\langle d, d \rangle \quad (28)$$

Thus, the control $u = \alpha_\nu(Z)$ uniformly ISS stabilizes (24). Taking the state transformation $Z \mapsto X$ which is inverse to (22), we obtain the statement of our Theorem 1.

5. Proof of Theorem 2

Next we use the following straightforward equality

$$\langle z, f(z, z_{k+1}) - f(z, 0) \rangle = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \langle z, f(z, \theta z_{k+1}) \rangle d\theta = \langle z, J(z, z_{k+1}) z_{k+1} \rangle$$

where

$$J(z, z_{k+1}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} f(z, \theta z_{k+1}) d\theta \quad (29)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{k+1}(z, z_{k+1})|_{(8), u} &= \langle z, f(z, z_{k+1}) + \psi_\sigma(z) + \varphi_\sigma(z) \Delta \rangle + \\ &+ \langle z_{k+1}, f_{k+1}(z, z_{k+1}, u) + \psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) + \varphi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \Delta \rangle = \\ &= \langle z, f(z, 0) + \psi_\sigma(z) + \varphi_\sigma(z) \Delta \rangle + \langle z, J(z, z_{k+1}) z_{k+1} \rangle \\ &+ \langle z_{k+1}, f_{k+1}(z, z_{k+1}, u) + \psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) + \varphi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \Delta \rangle \leq \\ &\leq -\lambda V(z) + \gamma(|\Delta|) + \langle z_{k+1}, f_{k+1}(z, z_{k+1}, u) + J^T(z, z_{k+1}) z + \psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) + \\ &+ \varphi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \Delta \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Our next goal is to find a controller $u = u(z, z_{k+1})$ such that the last term in (30) will provide (10) with the new gain γ_{k+1} mentioned in the statement of Theorem 2 to be proved.

By definition we denote the components of z and z_{k+1} as follows:

$$z = [z^1, \dots, z^n]^T \quad \text{and} \quad z_{k+1} = [z_{k+1}^1, \dots, z_{k+1}^{n_{k+1}}]^T.$$

Using the well-known Hadamard lemma we obtain the existence of matrix functions $\Psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1})$ and $\Phi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1})$ of class C^{p-1} such that

$$\begin{aligned} \psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) &= \Psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \begin{bmatrix} z \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \\ \varphi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) &= \Phi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \begin{bmatrix} z \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{for all } \sigma = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (31)$$

Next we estimate (30) by using (31). To make the estimates shorter, we omit the arguments (z, z_{k+1}) of $\Psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1})$ and $\Phi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1})$.

Take an arbitrary $\varepsilon > 0$. From the first equality of (31) it follows that for every $z \in \mathbb{R}^n$, every $z_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_{k+1}}$ and every $\sigma \in \{1, \dots, M\}$ we obtain

$$\left\langle z_{k+1}, \Psi_{k+1, \sigma}(z, z_{k+1}) \begin{bmatrix} z \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{\varepsilon} z_{k+1}^i \Psi_{k+1,\sigma}^{i,j} \varepsilon z^j + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n_{k+1}}} z_{k+1}^i \bar{\Psi}_{k+1,\sigma}^{i,j} z_{k+1}^j \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} (z_{k+1}^i)^2 (\Psi_{k+1,\sigma}^{i,j})^2 + \varepsilon^2 (z^j)^2 \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n_{k+1}}} \left((z_{k+1}^i)^2 + (\bar{\Psi}_{k+1,\sigma}^{i,j})^2 (z_{k+1}^j)^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{\varepsilon^2} z_{k+1}^i z_{k+1}^i (\Psi_{k+1,\sigma}^{i,j})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq j \leq n}} \varepsilon^2 (z^j)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} n_{k+1} \sum_{1 \leq i \leq n_{k+1}} (z_{k+1}^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{j=1}^{n_{k+1}} z_{k+1}^j \sum_{i=1}^{n_{k+1}} (\bar{\Psi}_{k+1,\sigma}^{i,j})^2 z_{k+1}^j = \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^2 n_{k+1} \langle z, z \rangle + \langle z_{k+1}, H(z, z_{k+1}) \rangle, \quad \text{where } H^i(z, z_{k+1}) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon^2} z_{k+1}^i (\Psi_{k+1,\sigma}^{i,j})^2 + \frac{1}{2} n_{k+1} z_{k+1}^i + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{j=1}^{n_{k+1}} (\bar{\Psi}_{k+1,\sigma}^{j,i})^2 z_{k+1}^i, \quad (32)
\end{aligned}$$

where $\Psi_{k+1,\sigma}^{i,j}$ and $\bar{\Psi}_{k+1,\sigma}^{i,j}$ denote the corresponding components of $\Psi_{k+1,\sigma}$.

Similarly, from the second equality of (31), for every $\delta > 0$ and for each $z \in \mathbb{R}^n$, each $z_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_k}$ and each $\sigma \in \{1, \dots, M\}$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\left\langle z_{k+1}, \Phi_{k+1,\sigma}(z, z_{k+1}) \begin{bmatrix} z \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \Delta \right\rangle = \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{\delta} z_{k+1}^i \delta \Delta_l \Phi_{k+1,\sigma,l}^{i,j} z^j + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n_{k+1}}} \frac{1}{\delta} z_{k+1}^i \delta \Delta_l \bar{\Phi}_{k+1,\sigma,l}^{i,j} z_{k+1}^j \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\delta^2 \Delta_l^2 + z_{k+1}^i \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^i (\Phi_{k+1,\sigma,l}^{i,j} z^j)^2 \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_{k+1} \\ 1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n_{k+1}}} \left(\delta^2 \Delta_l^2 + z_{k+1}^i \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^j \left(\bar{\Phi}_{k+1, \sigma, l}^{i, j} z_{k+1}^j \right)^2 \right) \leq \\
& \leq n_{k+1}(n+n_{k+1}) \delta^2 \sum_{l=1}^N \Delta_l^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{k+1}} z_{k+1}^i \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq \sigma \leq M}} \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^j \left(\bar{\Phi}_{k+1, \sigma, l}^{i, j} z_{k+1}^j \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{k+1}} z_{k+1}^i \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n_{k+1} \\ 1 \leq \sigma \leq M}} \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^j \left(\bar{\Phi}_{k+1, \sigma, l}^{i, j} z_{k+1}^j \right)^2, \quad (33)
\end{aligned}$$

where $\Phi_{k+1, \sigma, l}^{i, j}$ and $\bar{\Phi}_{k+1, \sigma, l}^{i, j}$ denote the corresponding components of $\Phi_{k+1, \sigma}$.

Summing up (30)-(33), we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_{k+1}(z, z_{k+1})|_{(8), u} & \leq -(\lambda - \frac{1}{2} \varepsilon^2 n_{k+1}) V(z) + \gamma(|\Delta|) + n_{k+1}(n + n_{k+1}) \delta^2 |\Delta|^2 + \\
& + \langle z_{k+1}, f_{k+1}(z, z_{k+1}, u) \rangle + J^T(z, z_{k+1})z + H(z, z_{k+1}) + G(z, z_{k+1}), \quad \text{where} \\
G^i(z, z_{k+1}) & := \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq \sigma \leq M}} \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^j \left(\Phi_{k+1, \sigma, l}^{i, j} z_{k+1}^j \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n_{k+1} \\ 1 \leq \sigma \leq M}} \frac{1}{\delta^2} z_{k+1}^j \left(\bar{\Phi}_{k+1, \sigma, l}^{i, j} z_{k+1}^j \right)^2.
\end{aligned}$$

By Assumption (ii), there is $u(z, z_{k+1})$ of class C^{p-1} such that $u(0, 0) = 0$ and

$$f_{k+1}(z, z_{k+1}, u(z, z_{k+1})) + J^T(z, z_{k+1})z + H(z, z_{k+1}) + G(z, z_{k+1}) =$$

$$= -(\lambda - \frac{1}{2} \varepsilon^2 n_{k+1}) z_{k+1} \quad \text{for all } [z, z_{k+1}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_k}.$$

(Note that J, H, G are of class C^{p-1} in general (due to the proof of the Hadamrd lemma); therefore the feedback $u(z, z_{k+1})$ obtained is of class C^{p-1} as a composition of functions of class C^p (see Assumption (ii)) and those of class C^{p-1}).

Since $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ are chosen arbitrarily small, this completes the proof of Theorem 2.

Acknowledgement. This research is funded by the German Research Foundation (DFG) as part of the Collaborative Research Center 637 "Autonomous Cooperating Logistic Processes: A Paradigm Shift and its Limitations" (SFB 637). This result was presented at the conference [1].

REFERENCES

1. S. Dashkovskiy, S.S. Pavlichkov. Stabilization of a class of nonlinear switched systems with unobservable switching function // X Crimean International Mathematical School "Lyapunov function method and its applications" Book of Abstracts, Alushta 13-18 September 2010 Simferopol, DIAPI P. 166
2. S.S. Ge, F. Hong, T.H. Lee, Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients *IEEE Transactions on System, Man, Cybernetics B* **34**(1) (2004) 499-516.
3. Han T.T., Ge S.S., Lee T.H. Adaptive neural control for a class of switched nonlinear systems // *Syst. Contr. Lett.* – 2009. – **58**. – P. 109-118.
4. Lyapunov A. M. General problem on stability of motion.– M.: Gostexizdat, 1960. – 471 p.
5. Korobov V.I. Controllability and stability of certain nonlinear systems // *Differential Equations*. – 1973. – **9**. – P. 614-619.
6. V.I. Korobov, S.S. Pavlichkov, W.H. Schmidt, Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems, *J. Math. Anal. Appl.* **309** (2005) 743 – 760.
7. V.I. Korobov, S.S. Pavlichkov, Global properties of the triangular systems in the singular case, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 342, 2008, pp 1426-1439.
8. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design. – NY: Wiley, 1995. – 563 p.
9. Y.Lin, Y.Wang, and D.Cheng, On non-uniform and semi-uniform input-to-state stability for time-varying systems, *Proc. 16th IFAC* 2005.
10. Lyapunov A. M. General problem on stability of motion.– M.: Gostexizdat, 1960. – 471 p.
11. Long F., Zhang S., Yang J. Backstepping Stabilization for a class of SISO switched nonlinear systems with trigonal structure // *Int. J. of Computer Science and Network Security*., – 2007. – **7**. – P. 110-113.
12. Ma R., Zhao J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchingsI // *Automatica*. – 2010. – doi:10.1016/j.automatica.2010.06.050

13. Han T.T., Ge S.S., Lee T.H. Adaptive neural control for a class of switched nonlinear systems // *Syst. Contr. Lett.* – 2009. – **58**. – P. 109-118.
14. S.S. Pavlichkov, S.S. Ge, Global stabilization of the generalized MIMO triangular systems with singular input-output links, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 54(8), 2009, pp 1794-1806.
15. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization // *IEEE Trans. Automat. Control*, – 1989. – **34**. – P. 435-443.
16. Wu J.-L. Stabilizing controller design for switched nonlinear systems in strict-feedback form // *Automatica*. – 2009. – **45**. – P 1092-1096.
17. P. C. Yeh, P.V. Kokotovic, Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems *Int. J. Control* **62(2)** (1995) 303–324.
18. Yu J.-T. A new adaptive backstepping Coulomb friction compensator for servo control systems // *Asian Journal of Control*. – 2009. – **11**. – P 1-10.
19. Y. Zhang, C.Y. Wen, Y.C. Soh, Discrete-time robust backstepping adaptive control for nonlinear time-varying systems *IEEE Trans. Automat. Control* **45(9)** (2000) 1749–1755.

Article history: Received: 1 October 2010; Final form: 18 November 2010;
Accepted: 19 November 2010.

Распространение волн в заполненных жидкостью вязкоупругих трубках: сравнение одномерной и двумерной моделей

Н.Н. Кизилова

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
n.kizilova@gmail.com

Представлены постановки и решения одномерной нелинейной и двумерной линеаризованной задач, описывающих распространение пульсовых волн в артериях. Для моделей артериальных русел, представленных системами трубок с разной топологией, выполнены сравнительные расчеты на одномерной и двумерной моделях. Проведено моделирование патологий, связанных с наличием стеноза и нарушениями микроциркуляции. Показано, что метод анализа интенсивностей волн позволяет определять локализацию патологии.

Кизилова Н.М., Розповсюдження хвиль в заповнених рідиною в'язкопружних трубках: порівняння одновимірної та двовимірної моделей Наведені постановки та розв'язки одновимірної нелінійної і двовимірної линеаризованої задач, які описують поширення пульсових хвиль в артеріях. Для моделей артеріальних русел, які представлені системами трубок з різною топологією, виконані порівняльні розрахунки на одновимірній і двовимірній моделях. Проведено моделювання патологій, які пов'язані з наявністю стенозу і порушеннями мікроциркуляції. Показано, що метод аналізу інтенсивностей хвиль дозволяє визначати локалізацію патології.

N.N. Kizilova, **Wave propagation in fluid-filled viscoelastic tubes: a comparative study of 1D and 2D models** Formulations and solutions of the one-dimensional nonlinear and two-dimensional linearized problems describing the pulse wave propagation in arteries are presented. For several models of arterial beds that are presented by the systems of tubes with different topology, the comparative study of the one-dimensional and two-dimensional models is carried out. The modeling of pathologies, related to the stenosis and microcirculatory problems is conducted. It is shown that the wave-intensity analysis method allows determination of localization of the pathology.

2000 Mathematics Subject Classification 76D33, 76Z05, 74F10, 92C35.

Введение. Распространение волн давления и скорости в заполненных жидкостью вязкоупругих трубках исследуется в механике, прежде всего, в связи с задачами гидромеханики кровообращения. Собственно, вся теоретическая гидромеханика, начало которой было положено Л.Эйлером, началась с его интереса к задаче о движении крови по артериям, в результате решения которой была получена система уравнений для невязкой жидкости (уравнения Эйлера) [1].

Волны давления $P(t)$ и скорости кровотока $U(t)$ в артериях человека и животных легко регистрируются с помощью современной ультразвуковой аппаратуры или магнито-резонансной томографии. Прямые методы с помощью микродатчиков, введенных с катетером, позволяют проводить длительную непрерывную запись пульсовых кривых. Таким образом, к настоящему времени в медицине накоплен достаточно большой экспериментальный материал, и анализ кривых показывает, что форма пульсовых кривых и ряд интегральных параметров могут быть использованы для своевременной диагностики сердечно-сосудистых патологий и нарушений кровообращения во внутренних органах. Эмпирические данные медицины и клинические наблюдения нуждаются в биомеханическом обосновании, поскольку разброс и относительных параметров, и безразмерных параметров волн довольно большой, что вообще-то свойственно биологическим данным.

Важным для биомеханики является представление о том, что пульсовые волны, регистрируемые в разных артериях, представляют собой результат наложения падающей волны $P^+(t)$, генерируемой сокращающимся сердцем, и отраженных волн $P^-(t)$ [2]. Отраженные волны распространяются вверх по течению и связаны с наличием сосудистых бифуркаций и локальных неоднородностей (стенозов, аневризм), вызывающих несогласование волновых проводимостей последовательных участков сосудистого русла [3]. Тогда регистрируемые в артерии кривые $P(t)$ будут представлять собой результат суперпозиции падающей и отраженной волн: $P(t) = P^+(t) + P^-(t)$. Поскольку волны давления $P^+(t)$ и $P^-(t)$ способствуют перемещению крови в соответствующем направлении, то $U(t) = U^+(t) - U^-(t)$. Таким образом, при достаточно большом волновом сопротивлении систем средних и малых артерий могут появляться периоды времени, когда кровоток отрицателен (направлен от периферических сосудов к сердцу). Подобные периоды чаще всего свойственны различным патологиям, но могут появляться в некоторых артериях и у здоровых пациентов [4].

Линейная теория пульсовых волн в артериях была разработана Дж. Лайтхиллом для невязкой жидкости, как для сжимаемой, так и для несжимаемой [5]. Одним из наиболее интересных методов анализа волн в артериях, который выявляет детальную картину многократных отражений волн во времени, является метод анализа волновых интенсивностей (wave-intensity analysis, WIA), заимствованный из газовой динамики [6]. Для использования этого метода необходимо одновременно зарегистрировать кривые $P(t)$ и $U(t)$ на одном и том же участке артерии, что возможно с помощью современной

техники. Проводя синхронний аналіз кривих, можна убедитися, що інтервали часу, коли тиск в судині і швидкість кровотоку зростають або зменшуються, не завжди збігаються [2,6,7]. На певних ділянках тиск і швидкість зростають або зменшуються синхронно, а на інших – одна з величин зростає, а друга зменшується. Якщо вважати, що інтервал часу, коли $dU > 0$, відповідає умові $dU^+ > dU^-$, тобто переважає падаюча хвиля, і навпаки, а також що випадок $dP > 0$ відповідає хвилі стиснення, а $dP < 0$ – розрідження (формальна аналогія до стиснутого газу), то, порівнюючи криві $dP(t)$ і $dU(t)$, можна виділити на них наступні ділянки [6]:

$dU > 0, dP > 0$ – падаюча хвиля стиснення;

$dU > 0, dP < 0$ – падаюча хвиля розрідження;

$dU < 0, dP > 0$ – відбита хвиля стиснення;

$dU < 0, dP < 0$ – відбита хвиля розрідження.

Звичайно, терміни "хвиля стиснення" і "хвиля розрідження" в застосуванні до нестиснутої рідини, нефізичні, але за десять років після їх введення в англійську літературу, вони прижилися і широко використовуються в застосуванні до теорії імпульсних хвиль в артеріях. Для нестиснутої рідини фізичний зміст хвиль стиснення і розрідження пов'язаний не стільки з властивостями рідини, скільки з деформацією стінки трубки: при $dP > 0$ трубка розширюється і площа її поперечного перерізу S збільшується, а при $dP < 0$ S зменшується. Прямі вимірювання показали, що криві $P(t)$ і $S(t)$, перераховані в одні і ті ж безрозмірні величини, практично збігаються [8]. На цьому оснований широко застосовуваний в сучасній медицині метод неінвазивної (бескровної) реєстрації кривих $P(t)$ в довільній артерії шляхом відновлення їх з кривих $S(t)$, реєструваних ультразвуковою апаратурою. Метод WIA добре зарекомендував себе в останні роки як важливий діагностичний прийом для аналізу не тільки центральної гемодинаміки, але і кровообігу в внутрішніх органах і в коронарних артеріях, в яких багаторазові відбиття хвиль мають місце при скороченні м'язових волокон в окремих камерах серця [6,7,9,10]. Існують і інші ефективні методи діагностики, засновані на аналізі кривих $P(U)$ і фазових кривих $P_t'(P)$, $U_t'(U)$ [11].

Для аналізу хвиль в артеріях деякі автори використовують нелінійні одномерні моделі, засновані на рівняннях Ейлера (плоскі хвилі), а інші – лінеаризовані двовимірні рівняння (осесиметричний випадок). В даній роботі представлені результати порівняльного дослідження параметрів хвиль тиску і швидкості в трубці і системах трубок на основі чисельних розрахунків за заданими одномерною і двовимірною моделями.

1. Одномерна модель. Закони збереження маси і імпульсу для середньої по перерізу S трубки швидкості кровотоку $U=Q/S$, де Q – об'ємний витіток через перерізу, були записані в [1] і строго виведені в [5] для випадку невязкої нестиснутої рідини в вигляді:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, x – аксиальная координата, отсчитываемая от входного сечения трубки, $U = U(t, x)$, $S = S(t, x)$.

Для замыкания системы (1) в [1] были использованы две, как выяснилось впоследствии, несвойственных артериям зависимости $P(S)$. Многочисленные эксперименты показали, что кривая $P(S)$ имеет две нелинейные ветви, которые различны для случаев $P < P_0$ (схлопывание артерии) и $P > P_0$ (раздувание артерии), где P_0 – так называемое нерастягивающее давление, при котором артерия полностью расправлена, но напряжения в ее стенке равны нулю. При этом P_0 соответствует давлению в окружающих артерию тканях. В случае $P < P_0$ осесимметричность схлопывающейся трубки не сохраняется, и такие задачи решают в трехмерной постановке методом конечных элементов. При $P > P_0$ зависимость $P(S)$ хорошо описывается соотношением [2]:

$$P = P_0 + k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0}), \quad (2)$$

где $S_0 = S(P_0)$ – невозмущенная площадь сечения сосуда, k – коэффициент.

В физически линейных моделях используют аппроксимацию нелинейного участка $P(S)$ линейной зависимостью в виде [12]

$$P = P_0 + k(S - S_0), \quad (3)$$

где $k = \alpha_3 \lambda$, λ – окружная жесткость стенки трубки, α_3 – эмпирический коэффициент, обеспечивающий близость линейной аппроксимации нелинейной экспериментальной зависимости для данного типа сосудов (крупные, средние, малые, эластического, мышечного или смешанного типов) [2]. На основе системы (1), (3) были исследованы разные случаи распространения волн в артериях и системах артерий и получены результаты, соответствующие результатам клинических исследований [13–15].

Обобщение системы (1) на случай вязкой жидкости получают добавлением в правую часть уравнения импульсов слагаемого, соответствующего осредненного по периметру трения на стенке на единицу длины трубки $2\pi a \tau_w / \rho S$, где τ_w – среднее по периметру напряжение трения на стенке. В качестве τ_w чаще всего выбирают напряжение трения в стационарном Пуазейлевском течении [2] или в пульсирующем течении Уомерсли [16]. При этом для одномерной задачи возникает проблема граничных условий на стенке [10].

Для однородной изотропной упругодеформируемой стенки с конечной невозмущенной толщиной h_0 выражение для k может быть получено из известных соотношений теории упругости [12]:

$$k = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \nu^2) S_0}, \quad (4)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала стенки.

2. Численный метод решения одномерной задачи. Задачи (1), (2) и (1), (3) сводятся к гиперболическим системам уравнений для определения неизвестных U, S и могут быть решены методом характеристик. Рассмотрим случай нелинейного закона упругости стенки (2) и будем считать, что $k = k(x)$ и $S_0 = S_0(x)$ (трубка переменного невозмущенного сечения), тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad (5)$$

где частные производные от P берутся при постоянстве остальных параметров. Из (1) следует, что $\partial P / \partial S = k / (2\sqrt{S})$.

Запишем задачу (1), (2) с учетом (5) в виде квазилинейной системы уравнений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + |M| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{F}, \quad (6)$$

где $\vec{V}^T = (S, U)$, $\vec{F}^T = (0, f)$, $f = -\left(\frac{\partial P}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial x}\right) \frac{1}{\rho}$, $c^2 = \frac{S}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{k\sqrt{S}}{2\rho}$,

$$|M| = \begin{vmatrix} U & S \\ c^2 & U \end{vmatrix}.$$

Матрица $|M|$ имеет два действительных собственных значения $\lambda_{1,2} = U \pm c$ и ее можно представить в виде $|M| = |G| |\Lambda| |G|^{-1}$, где

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad |G| = \begin{vmatrix} S & -S \\ c & c \end{vmatrix}.$$

Тогда (6) можно переписать в виде

$$|G|^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + |\Lambda| |G|^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = |G|^{-1} \vec{F}.$$

Поскольку в артериях скорость распространения волн $c=8-20$ м/с превышает линейную скорость кровотока $\max\{U\}=0.6-0.8$ м/с, то $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Если существует векторная функция $\vec{W} = \vec{W}(\vec{V})$ такая, что $\partial \vec{W} / \partial \vec{V} = |G|^{-1}$, то ее компоненты W_1, W_2 – инварианты Римана:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{V}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial S} & \frac{\partial W_1}{\partial U} \\ \frac{\partial W_2}{\partial S} & \frac{\partial W_2}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c}{S} & 1 \\ -\frac{c}{S} & 1 \end{vmatrix} = |G|^{-1}. \quad (7)$$

Здесь W_1 соответствуют волне, бегущей вправо (вниз по течению), а W_2 – волне, бегущей влево (вверх по течению). Интегрируя (7), получим выражения

$$W_{1,2} = U - U_0 \pm \int_{S_0}^S \frac{c(S)}{S} dS = U - U_0 \pm 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}} (S^{1/4} - S_0^{1/4}). \quad (8)$$

Откуда

$$S = \left(\frac{W_1 - W_2}{4} \right)^4 \left(\frac{\rho}{2k} \right)^2, \quad U = \frac{(W_1 + W_2)}{2}. \quad (9)$$

Теперь система (6) может быть записана в виде

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + |\Lambda| \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = |G|^{-1} \vec{F},$$

причем в случае $\vec{F} = 0$ правая часть обращается в ноль и может быть применена обычная схема численных расчетов [17].

3. Граничные условия. В качестве граничных условий для гиперболической системы (6) достаточно задать значения $U(t)$ или $S(t)$ во входном сечении трубки. В силу наличия зависимости вида (2), (3) это означает задание $U(t)$ или $P(t)$, а эти кривые могут быть измерены для конкретной артерии конкретного пациента.

На выходном конце трубки следует задать условие отражения падающей волны от нижележащего участка сосудистого русла, представленного сложной системой артерий, и называемого обычно терминальным элементом. Для случая последовательного соединения двух трубок (1 и 2) с разными площадями сечения и свойствами стенки (например, нормальный сосуд и участок стеноза или атеросклеротической бляшки) условия непрерывности объемного расхода и давления дают следующие условия в сечении, разделяющем две трубки:

$$\frac{\rho}{2} U_1^2 + k_1 (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_{10}}) = \frac{\rho}{2} U_2^2 + k_2 (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_{20}}), \quad U_1 S_1 = U_2 S_2. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в сечении, разделяющем две трубки, встречаются волна, распространяющаяся по первой трубке в положительном направлении, и волна, отраженная во второй трубке, так что

$$\begin{aligned} W_1 &= U_1 - U_{10} + 4\sqrt{\frac{k_1}{2\rho}} (S_1^{1/4} - S_{10}^{1/4}), \\ W_2 &= U_2 - U_{20} + 4\sqrt{\frac{k_2}{2\rho}} (S_2^{1/4} - S_{20}^{1/4}). \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (10), (11) позволяют задавать граничные условия для вычисления величин $U_j(t, x)$, $S_j(t, x)$ в системе с произвольным числом трубок $j=1, \dots, N$, зная входные условия в первой трубке и условия отражения волн в последней из трубок последовательного соединения или в терминальных трубках ветвящихся систем, например, бинарных деревьев, достаточно хорошо моделирующих артериальное русло.

Для терминальной трубки (8) примет вид

$$W_1 = U_t + 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4}, \quad W_2 = U_t - 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4}, \quad (12)$$

где U_t и S_t – скорость и площадь сечения в терминальном элементе.

Вводя коэффициент отражения волн Γ на терминальном элементе $\Gamma = -W_2/W_1$, из (12) получим

$$U_t = \sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4} \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}.$$

Приравнявая соответствующие выражения из (11) и (12), получим граничное условие на правом конце трубки для другой переменной

$$S_t = \left(S_1^{1/4} + (U_1 - U_t) \sqrt{\frac{k_1}{8\rho}} \right)^4.$$

Коэффициент Γ может принимать значения от нуля (проводимости трубок согласованы и отраженная волна отсутствует) до единицы (полное отражение, в терминальный элемент жидкость не поступает) [5].

4. Постановка двумерной задачи и метод решения. Исследование пульсовых волн в артериях чаще всего основано на задаче об осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости в толстостенной трубке из несжимаемого вязкоупругого материала. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (13)$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$, p , ρ_f и μ – скорость, гидростатическое давление, плотность и вязкость жидкости.

Система уравнений для трубки имеет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div} \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = 2G \left(I + \tau_1 \frac{\delta}{\delta t} \right)^{-1} \left(I + \tau_2 \frac{\delta}{\delta t} \right) \hat{\varepsilon}, \quad (14)$$

где $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ – вектор перемещения, ρ_s и p_s – плотность материала и гидростатическое давление в стенке. Последнее соотношение в (14) соответствует трехэлементной модели вязкоупругой стенки, где $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\tau_{1,2}$ – времена релаксации напряжений и деформаций, G – модуль сдвига.

На границе раздела жидкость-стенка выполняются условия непрерывности радиальной и аксиальной компонент скорости, нормальных и тангенциальных напряжений.

Задачи (13) и (14) связаны через граничные условия на стенке, поэтому их решения можно найти независимо, а затем из граничных условий получить систему уравнений для определения постоянных интегрирования. В соответствии с подходом Лайтхилла, пульсовые волны рассматриваются как малые возмущения, накладываемые на стационарную компоненту [5]. Лайтхилл впервые исследовал распространение и отражение волн на основании системы (1), (3), линеаризованной относительно состояния покоя $U_0 = 0$, $P = P_0$, $S = S_0$ [5]. Для двумерного случая решение линеаризованной системы (13) было получено в [18] и [19] соответственно для бесконечно длинной чисто упругой трубки из изотропного и ортотропного материала. В [20] было показано, что при учете вязкости стенки трубки получаются результаты, лучше соответствующие данным клинических измерений. Решение линеаризованной задачи (13)-(14) может быть найдено в виде $f(t, r, x) = f^*(r, x) e^{i\omega t}$, где $f = \{u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_s\}$, а звездочкой обозначены амплитуды соответствующих величин. При этом выражения для всех компонент f получаются в явном виде. Для трубки конечной длины, то есть с учетом отражения волн, решение выписано в [21]. Отличие состоит в учете падающей и отраженной волн, которые переносят жидкость вниз и вверх по течению соответственно. При этом волны давления и скорости жидкости записываются в виде

$$\begin{aligned} p(t, x) &= e^{i\omega t} (p^+ e^{-i\omega x/c} + p^- e^{i\omega(x-2L)/c}), \\ v_x(t, x) &= e^{i\omega t} (p^+ e^{-i\omega x/c} - p^- e^{i\omega(x-2L)/c}) / S_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где p^+ и p^- — амплитуды падающей и отраженной волн.

Решение (15) можно также записать, используя коэффициент отражения волн на конце трубки $\Gamma = p^-/p^+$, как это было сделано выше для одномерной модели.

Решение связанной задачи (13)-(14) в нелинейной постановке было получено в [22] в виде разложений по степеням малого параметра. При этом полученное решение для нулевого приближения соответствует решению [21] линеаризованной задачи.

5. Граничные условия для двумерной задачи. На входе в трубку $x = 0$ задается волна давления в виде Фурье-разложения:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^0 e^{i\omega_k t}. \quad (16)$$

В соответствии с результатами анализа пульсовых волн в артериях, 4-6 гармоник достаточно точно описывают большинство из зарегистрированных кривых, соответствующих как норме, так и сердечно-сосудистым патологиям [2,12]. На выходе из трубки $x = L$ записываются условия непрерывности объемного расхода и среднего по сечению гидростатического давления

$$Q(t, L) = Q_t, \quad P(t, L) = P_t. \quad (17)$$

Из определения входной проводимости терминального элемента $Y_t = Q_t/P_t$ с учетом (17) получим граничное условие $Y_t P(t, L) = Q(t, L)$ для задачи (13). Предложенный подход можно использовать и для систем с произвольным числом трубок. При этом для каждой из трубок могут быть записаны условия (17), где терминальный элемент представлен входной волновой проводимостью всей совокупности трубок, расположенных от данной вниз по течению. Соотношения вида (15) могут быть записаны также для каждой из трубок с номером $j=1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} P_j(t, x_j) &= P_j^0 e^{i\omega t} \left(e^{-i\omega x_j/c_j} + \Gamma_j e^{i\omega(x_j-2L_j)/c_j} \right), \\ Q_j(t, x_j) &= Y_j^0 P_j^0 e^{i\omega t} \left(e^{-i\omega x_j/c_j} - \Gamma_j e^{i\omega(x_j-2L_j)/c_j} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где координата x_j отсчитывается в каждой трубке от ее входного сечения, S_j^0 и $Y_j^0 = \rho S_j^0/c_j$ – невозмущенная площадь сечения и характеристическая проводимость j -й трубки, $\Gamma_j = (Y_j^0 - Y_{tj}) / (Y_j^0 + Y_{tj})$, Y_{tj} – терминальный элемент для j -й трубки. Общее решение задачи (13) может быть найдено путем суммирования выражений (18), вычисленных для каждой из гармоник в (15).

6. Отличия одномерной и двумерной моделей пульсовых волн. Для невязкой жидкости отсутствует дисперсия волн, поэтому скорость волны, характеристическая волновая проводимость трубок и входная проводимость терминальных элементов не зависят от частоты. В модели (13) дисперсия присутствует как за счет вязкости жидкости, так и за счет вязкоупругости стенки.

В задачах (1), (2) и (1), (3) радиальная координата отсутствует, поэтому толщина стенки входит неявно, например, в виде соотношения (4). В модели (14) толщина стенки входит явно и на ней могут быть заданы различные граничные условия: отсутствие продольных или полных перемещений, отсутствие напряжений, закрепление к окружающим вязкоупругим тканям, что значительно расширяет диапазон применимости модели к конкретным случаям.

В одномерной модели условия на конце трубки (10)-(12) соответствуют случаю $Im(\Gamma) = 0$, то есть чисто резистивному терминальному элементу. Вообще говоря, любое артериальное русло обладает как резистивными свойствами, связанными со способностью оказывать сопротивление стационарному потоку (импеданс Z_0) и распространению волн (волновое сопротивление Z_ω), так и емкостными свойствами, связанными со способностью артерий растягиваться и аккумулировать некоторый объем крови. В силу условия непрерывности объемного расхода крови в бифуркациях сосудов стационарная (Пуазейлевская) проводимость Y_{t0} терминального элемента постоянна $Y_{t0} = (Z_0)^{-1}$, а его волновая проводимость $Y_{t\omega}$ имеет действительную и мнимую части $Y_{t\omega} = (Z_\omega)^{-1} = Y_t^{re} + iY_t^{im}$, которые характеризуют соответственно резистивные и емкостные свойства терминального

элемента. Для чисто резистивного терминального элемента $Im(Y_{tw}) = 0$ отраженная волна совпадает с падающей по фазе, для чисто мнимого $Re(Y_{tw}) = 0$ – противоположна по фазе [5]. В общем случае будет иметь место некоторый фазовый сдвиг, что приводит к появлению в артериях сложных волновых форм с одним основным и несколькими дополнительными максимумами [2].

Таким образом, различия одномерной и двумерной моделей довольно существенны и для наглядности сведены в таблице (Табл.1).

Таблица 1. Отличия одномерной и двумерной моделей.

№	Свойства	Одномерная модель	Двумерная модель
1	Физическая нелинейность задачи	Нелинейная	Линеаризованная
2	Свойства жидкости	Невязкая	Вязкая
3	Решение задачи	Суперпозиция бегущих волн конечной амплитуды	Суперпозиция малых возмущений
4	Граничные условия на конце трубки	Непрерывность динамического давления	Непрерывность гидростатического давления
5	Свойства стенки трубки	Чисто упругая, толщина не учитывается	Упругая или вязкоупругая, толщина учитывается. На наружной поверхности можно задавать разные условия закрепления.
6	Свойства терминального элемента	Чисто резистивный	Содержит и резистивную, и емкостную компоненты

7. Результаты численных расчетов по одномерной и двумерной моделям. Для тестирования задач (1), (2), (4) и (13), (14) были выбраны модели артериальных русел в виде бинарных деревьев, содержащих 4 генерации (порядка ветвления) (рис.1а). Длины L_j и диаметры d_j трубок последовательных генераций $j = 1, \dots, n$ связаны следующими закономерностями:

$$d_{j+1} = d_{j+1}(d_j), \quad L_j = L_j(d_j). \quad (19)$$

Соотношения (19) могут быть заданы в произвольной форме, а могут соответствовать зависимостям, обнаруженным путем измерений на препаратах проводящих систем животных и растений [9,23]. Длины и диаметры трубок в одной генерации приняты одинаковыми (симметричные деревья).

Если $d_{j+1} = \sqrt[3]{2}d_j$, то получим оптимальный с точки зрения линейной теории [5] волновод, в котором отражение волн отсутствует на всех бифуркациях [24]. Некоторые артериальные русла содержат циклы (петли), поэтому в работе исследовалось также бинарное дерево с трубкой, образующей цикл на уровне трубок 2-го (рис.1б) и 3-го (рис.1в) порядков генерации. Поскольку соотношение между Y_t и d_n также определяется формулами вида (19), то величины Y_t отличаются для разных деревьев. Чтобы унифицировать подход к описанию терминальных элементов, будем рассматривать вместо Y_t коэффициент отражения $\Gamma \in [0; 1]$ (введены выше и для одномерной, и для двумерной моделей). При моделировании стеноза проводилось уменьшение диаметра отдельных трубок в модели в 10 раз. Для определенности введена нумерация трубок (рис.1а), так что трубки 2-й генерации имели номера 2,3, 3-й номера 4-7 и 3-й номера 8-15. Соответственно трубка, создающая цикл, имеет N17.

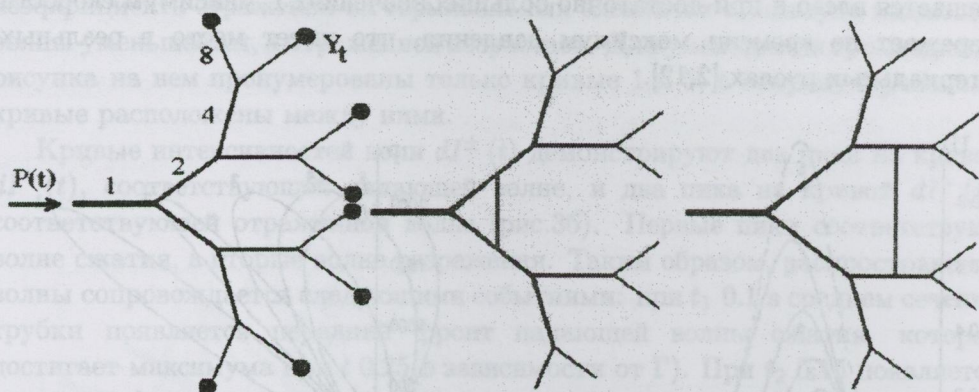


Рис.1. Модель артериального русла в виде бинарного дерева (а) и дерева с циклом на уровне трубок 2-й (б) и 3-й (в) генераций.

Для численных расчетов были выбраны значения, соответствующие артериальной системе человека:

$p_0 = 10^4$ Па, $G = 10^5 - 10^6$ Па, $h_0 = 0.01 - 0.5$ мм, $E = 5 \cdot (10^5 - 10^7)$ Па, $\sigma = 0.2 - 0.4$, $\mu = (3 - 10) \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 1050$ кг/м³, $\rho_s = 1000 - 1100$ кг/м³, $S_0 = \pi R_0^2$, $R_0 = 0.1 - 5$ мм, $L = 0.02 - 0.16$ м, $\tau_{1,2} = 0.05 - 0.1$ с, основная частота $\omega_1 = 2\pi f_0$ в (16) соответствовала пульсу человека, где $f_0 = 1 - 1.5$ Гц.

В качестве входной волны давления для задачи (1), (2), (4) выбирался Гауссиан $P_G(t) = P_{amp} \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{\zeta^2}\right)$, где P_{amp} - амплитуда, а параметры t_0 и ζ определяют положение и ширину пика волны. Задание входной волны в такой форме предпочтительнее перед введением реальных кривых колебаний давления в артериях, поскольку эти кривые имеют, как правило, несколько максимумов и минимумов разной амплитуды, что приводит к сложной физической картине чередования многочисленных падающих и отраженных волн разрежения и сжатия. Входная волна, содержащая один пик, приведет к появлению одной пары "волна сжатия - волна разрежения",

распространяющейся по течению, и еще одной пары, связанной с отраженной волной и распространяющейся против течения. Для задачи (13), (14) в условии (16) использовалось Фурье-разложение $P_G(t)$, содержащее пять гармоник, что обеспечивало достаточно высокую точность.

Результаты расчетов по одномерной модели идеального волновода без циклов (рис.1а) приведены на рис.2. Во всех случаях для определенности приведены результаты расчетов колебаний давления и скорости в среднем сечении ($x = L_1/2$) первой трубки. При отсутствии отражений на терминальных элементах форма волны скорости соответствует с точностью до масштабного коэффициента и сдвига по времени волне давления (кривые 1 и 6 на рис.2а). При снижении проводимости терминальных элементов амплитуда волны скорости монотонно уменьшается и одновременно увеличивается амплитуда волны и длительность фазы обратного тока жидкости (кривые 2-5 на рис.2а). При этом положение амплитуды максимума скорости смещается влево и при достаточно больших значениях Γ максимум скорости опережает по времени максимум давления, что имеет место в реальных артериальных руслах [2,12].

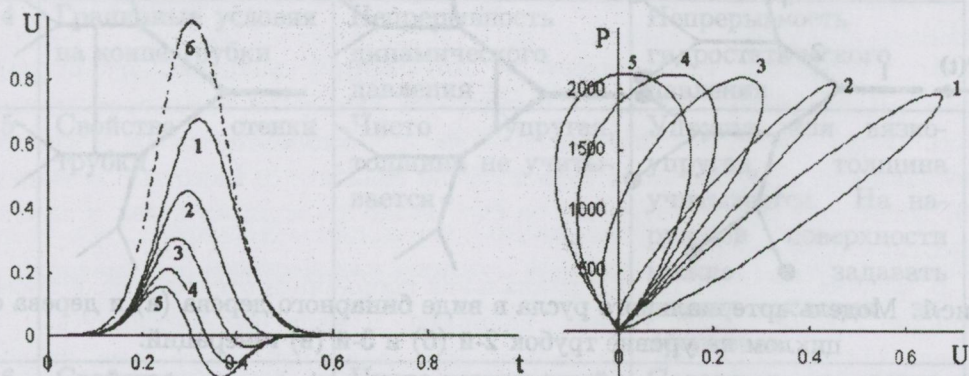


Рис.2. Зависимости $U(t)$ (а) и $P(U)$ (б), одномерная модель, кривые 1-5 соответствуют случаям $\Gamma = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$, а кривая 6 входному давлению $P_G(t)$.

Зависимость давление-расход, которую удобно использовать в диагностике [25], имеет вид вытянутой петли. С увеличением коэффициента отражения длинная ось петли поворачивается против часовой стрелки, а площадь петли увеличивается (рис.2б). Это соответствует как результатам численных расчетов по другой модели [25], так и экспериментам на латексных трубках [26] и на аорте собаки [27].

Метод WIA предполагает вычисление интенсивностей падающей и отраженной волн по измеренным экспериментально или рассчитанным в ходе решения задачи кривым $P(t)$ и $U(t)$ по формулам [6,7,10,11]:

$$dI^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{4\rho c} (dP(t) \pm \rho c dU(t))^2,$$

где знак d обозначает приращение.

Падающая и отраженная компоненты волн давления и скорости определяются по формулам [6,7,10,11]:

$$P^+(t) = \frac{Y_0 P(t) + S U(t)}{2Y_0}, \quad P^-(t) = \frac{Y_0 P(t) - S U(t)}{2Y_0};$$

$$U^+(t) = \frac{S U(t) + Y_0 P(t)}{2SZ^0}, \quad U^-(t) = \frac{S U(t) - Y_0 P(t)}{2S}.$$

При этом $P(t) = P^+(t) + P^-(t)$, $U(t) = U^+(t) - U^-(t)$. Результат вычисления падающей и отраженной волн давления $P^+(t)$ и $P^-(t)$ по решению одномерной задачи для неидеального волновода приведен на рис.3а. Видно, что при $\Gamma = 0$ есть ненулевая компонента $P^-(t)$, которая, как было показано в [25], представляет собой колебания давления в системе трубок как упругом резервуаре (компонента Франка). При увеличении коэффициента отражения на терминальных элементах амплитуда падающей волны уменьшается, а отраженной возрастает. Для уменьшения громоздкости рисунка на нем пронумерованы только кривые 1 и 5, а пронумерованные кривые расположены между ними.

Кривые интенсивностей волн $dI^\pm(t)$ демонстрируют два пика на кривой $dI^+(t)$, соответствующей падающей волне, и два пика на кривой $dI^-(t)$, соответствующей отраженной волне (рис.3б). Первые пики соответствуют волне сжатия, а вторые волне разрежения. Таким образом, распространение волны сопровождается следующими событиями: при t_1 0.1 в среднем сечении трубки появляется передний фронт падающей волны сжатия, которая достигает максимума при t 0.25 (в зависимости от Γ). При t_2 0.15 появляется передний фронт отраженной волны сжатия, которая достигает максимума при t 0.28. Затем появляется падающая волна разрежения, которая всегда сопровождает волну сжатия, и вслед за ней отраженная волна разрежения. С увеличением Γ амплитуда падающих волн монотонно снижается, а амплитуда отраженных волн растет. Разница во времени $\Delta t = t_2 - t_1$, умноженная на скорость волны c , дает расстояние до места отражения. Для идеального волновода это расстояние до терминальных элементов, но из рис.3б видно, что в модели (рис.1а) присутствует небольшая по амплитуде отраженная волна, связанная с нелинейностью свойств стенки трубки и задачи. Таким образом, условия отсутствия отражения волн для нелинейной модели должны быть получены отдельно и, в силу (2), они будут зависеть от P_0 , так как при малых P_0 проявляются линейные свойства стенки, а с ростом P_0 становится существенной нелинейность.

Для сравнения результаты расчетов по модели идеального волновода без петель приведены на рис.4. При увеличении Γ амплитуда волны давления монотонно возрастает, поскольку падающая волна накладывается на отраженную и, в силу малости длины трубки по сравнению с длиной волны, отраженная волна быстро достигает середины трубки. Для обеих моделей выражена тенденция к небольшому смещению максимума падающей

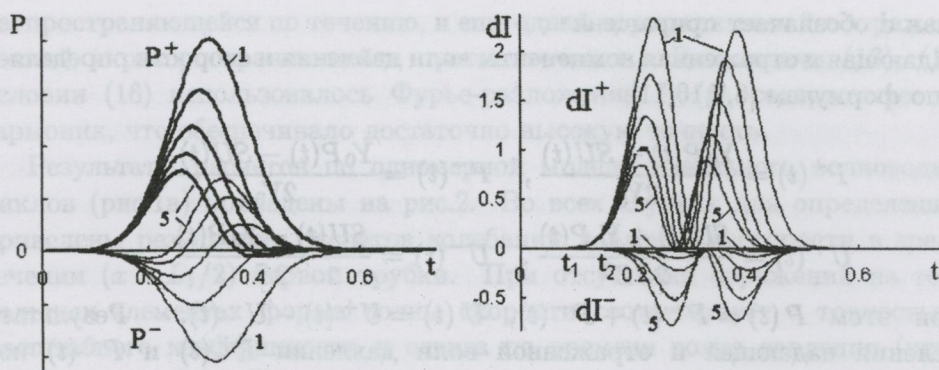


Рис.3. Зависимости $P^\pm(t)$ (а) и $dI^\pm(t)$ (б), одномерная модель, кривые 1 и 5 соответствуют случаям $\Gamma = 0; 1$, а кривые между 1 и 5 - случаям $\Gamma = 0.25; 0.5; 0.75$.

волны давления (рис.3а и рис.4а) влево с ростом коэффициента отражения, причем сдвиг волны скорости больше, чем волны давления, что соответствует рис.2а и данным физиологии.

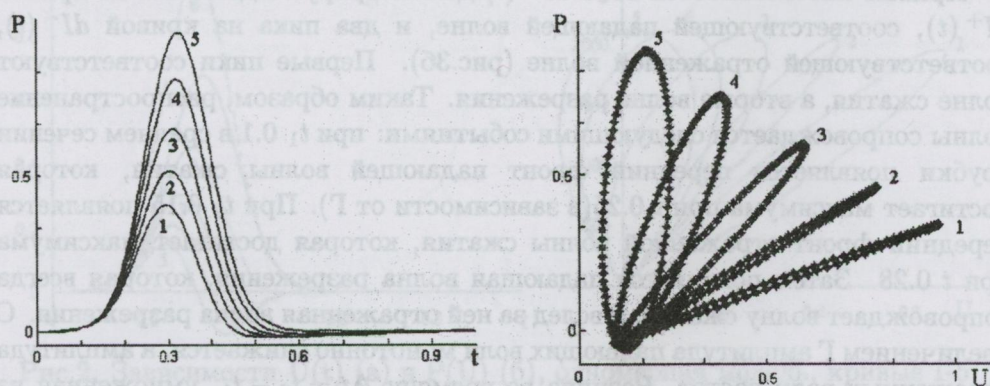


Рис.4. Зависимости $U(t)$ (а) и $P(U)$ (б), двумерная модель, кривые 1-5 соответствуют случаям $\Gamma = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$.

Зависимость давление-расход, рассчитанная по линеаризованной двумерной модели, проявляет те же свойства: с ростом Γ длинная ось петли поворачивается против часовой стрелки, а площадь петли увеличивается (рис.2б). Следует обратить внимание на различия кривых $P(U)$. Для линеаризованной модели при $\Gamma = 0$ участки синхронного возрастания давления и скорости практически линейны (кривая 1 на рис.4б), что связано с отсутствием отраженных волн. Для нелинейной модели эта зависимость линейна только в начальном периоде распространения волны вдоль трубки. Поскольку скорость волны пропорциональна величине dP/dU , которая определяет угол наклона касательной к кривой, это значит, что скорость пульсовой волны возрастает со временем, очевидно, в связи с нелинейным

возрастанием жесткости трубки по мере роста давления. Поэтому в линеаризованной модели кривые $P(U)$ для всего диапазона значений Γ близки к эллипсам, а для нелинейной модели их форма отличается от эллипсоидальной и присутствует точка в нижней части кривой, где dP/dU терпит разрыв (рис.26).

Результаты моделирования стеноза путем уменьшения диаметра соответствующей трубки в 10 раз приведены на рис.5-6 для нелинейной модели. На рис.5 показаны измерения колебаний скорости. На обоих рисунках кривая 1 соответствует неподжатым трубкам. На рис.5а кривые 2,3,4 соответствуют пережатию следующих наборов трубок: {8}, {8,9}, {8,9,10,11}. Таким образом, поджатие каждой дополнительной из трубок 4-й генерации вызывает небольшое дополнительное уменьшение амплитуды волны и увеличения амплитуды обратного тока. По мере увеличения числа пережатых трубок момент времени начала обратного тока становится все раньше. На рис.5б кривые 2-4 соответствуют пережатию 2-й, 3-й и 4-й трубок. В отличие от предыдущего случая, здесь форма волны несколько изменяется, поскольку трубки 2-3-й генераций имеют больший диаметр и их пережатие более существенно для тока жидкости. Трубки N2 и N3 расположены в дереве симметрично, поэтому соответствующие им кривые 2 и 3 практически совпадают.

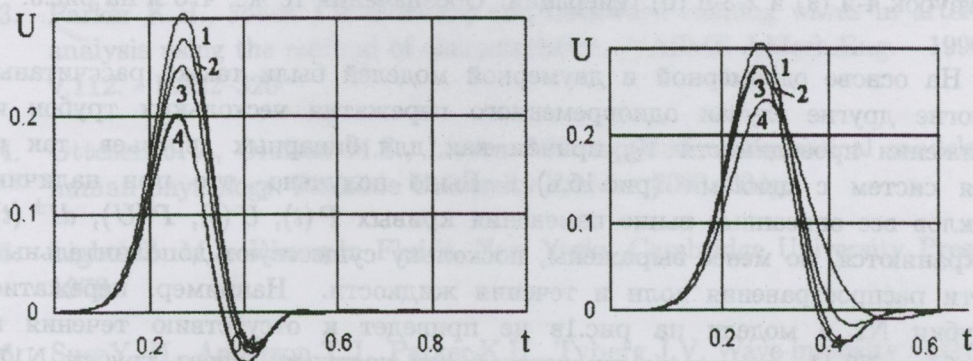


Рис.5. Зависимости $U(t)$, одномерная модель, для $\Gamma = 0.25$ и пережатия трубок 4-й (а) и 2-3-й (б) генераций. Пояснения в тексте.

Зависимости $P(U)$ для тех же случаев пережатия трубок приведены на рис.6. Закупорка трубок последней генерации ведет к повороту длинной оси петли против часовой стрелки и увеличению «ширины» петли, то есть ее максимального размера в направлении, ортогональном длинной оси. Таким образом, характер изменений петли $P(U)$ сходен с тем, что происходит при увеличении коэффициента отражения, то есть с уменьшением проводимости терминальных элементов (рис.26, 46). Это не удивительно, поскольку трубки последней генерации также играют роль терминальных, то есть по сути система, представленная последовательным соединением трубки последней

генерации и ее терминального элемента Y_t , сама играет роль терминального элемента, и его проводимость можно уменьшить как пережимая трубку, так и уменьшая Y_t . В отличие от петель, приведенных на рис.2б, петли на рис.6а несимметричны, что позволяет отличать случаи уменьшения проводимости Y_t и пережатия трубок последней генерации, что можно использовать в медицинской диагностике. Сходные изменения прослеживаются и при пережатии трубок 2-3-й генерации (рис.6б) с заметной асимметрией петли $P(U)$.

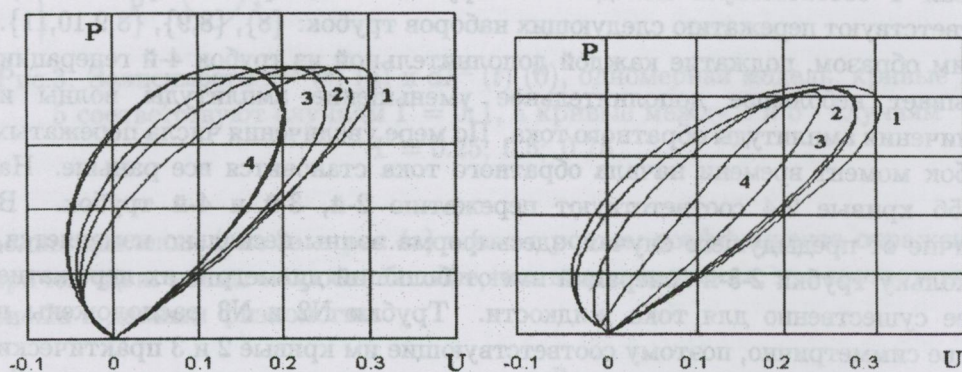


Рис.6. Зависимости $P(U)$, одномерная модель, для $\Gamma = 0.25$ и пережатия трубок 4-й (а) и 2-3-й (б) генераций. Обозначения те же, что и на рис.5.

На основе одномерной и двумерной моделей были также рассчитаны многие другие случаи одновременного пережатия нескольких трубок и снижения проводимости Y_t , причем как для бинарных деревьев, так и для систем с циклами (рис.1б,в). Было получено, что при наличии циклов все описанные выше изменения кривых $P(t)$, $U(t)$, $P(U)$, $dI^\pm(t)$ сохраняются, но менее выражены, поскольку существуют дополнительные пути распространения волн и течения жидкости. Например, пережатие трубки N2 в модели на рис.1в не приведет к отсутствию течения в трубках N8-11, поскольку жидкость будет поступать через трубку N17. Наличие дополнительных путей для распространения волн приводит к усложнению картины отражения волн, поэтому на кривых $dI^\pm(t)$ появляется гораздо больший набор отраженных волн разрежения-сжатия. По временам запаздывания передних фронтов соответствующих падающих и отраженных волн можно вычислить расстояние до соответствующего участка отражения. При наличии закупорки амплитуда отраженной волны больше, а при наличии дополнительных циклов в системе трубок – меньше.

7. Заключение. Таким образом, сравнительные расчеты по представленным нелинейной одномерной и линеаризованной двумерной моделям показали, что обе дают качественно сходные результаты как для бинарных деревьев, так и для систем с циклами, при наличии пережатий трубок и многочисленных участков отражения волн. Зависимости давление-

расход и распределение интенсивностей падающей и отраженных волн имеют характерные отличия при наличии пережатых трубок, циклов и больших терминальных сопротивлений, поэтому их можно использовать в медицине для дифференциальной диагностики нарушений в системе кровообращения. При больших гидростатических давлениях проявляются нелинейные свойства стенки трубок, поэтому использование одномерной модели предпочтительнее.

Работа выполнена при частичной поддержке международного Украинско-Белорусского гранта Ф29.1/046 и Royal Society London (Royal Society London fellowship). Автор выражает глубокую признательность проф. Kim Parker и проф. Spenser Sherwin (Imperial College, London) за плодотворные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Euler, L. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando // Opera Postuma. - 1862. v.2. - P. 814-823.
2. McDonald D.A. Blood flow in arteries. Baltimore: Williams & Wilkins. 1974. 480p.
3. Parker K.H., Jones J.H. Forward and backward running waves in arteries: analysis using the method of characteristics. // ASME J. Mech. Eng. - 1990. - v.112. - P.322-326.
4. Ottesen J.T., Olufsen M.S., Larsen J.K. Applied mathematical models in human physiology. Roskilde University Press. - 2003. 234p.
5. Lighthill, M.J. Waves in Fluids. New York: Cambridge University Press, - 1978.
6. Sun Y.-H., Anderson T.J., Parker K.H., Tyberg J.V. Wave-intensity analysis: a new approach to coronary hemodynamics. // J. Appl. Physiol. - 2000. - v.89. - P.1636-1644.
7. Кизилова Н.Н. Новые направления и перспективы теории пульсовых волн в артериях // Современные проблемы биомеханики. - М.: Издательство Московского университета, 2006. Вып. 11. - С. 44-63.
8. Belani K., Ozaki M., Hynson J., et al A new noninvasive method to measure blood pressure. // Anesthesiology. - 1999. - v.91, N3. - P.686-692.
9. Зенин О.К., Кизилова Н.Н., Филиппова Е.Н. Исследование закономерностей строения русла коронарных артерий человека. // Биофизика. - 2007. - т.52, №5. - С.924-930.

10. Кизилова Н.Н. Разложение волн давления, распространяющихся в податливых трубках, на падающую и отраженную компоненты // Вестник Харьковского национального университета. Сер."Математика, прикладная математика и механика". - 2004. - т.645, N54. - С. 85-92.
11. Кизилова Н.Н. Исследование зависимостей давление-расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах // Акустический вестник. - 2004. - т.7, N1. - С.50-61.
12. Pedley T.J. The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge University Press. - 1980. - 246p.
13. Моисеева И.Н., Регирер С.А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях. // Изв.РАН. МЖГ. - 1993. - N4. - С.134-139.
14. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел // Известия РАН. Серия МЖГ. - 2003. N5. - С.127-137.
15. Matthys K.S., Alastruey J., Peiror J. et al Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements. // J. Biomech. - 2007. - v.40. - P. 3476-3486.
16. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. // Phil.Mag. - 1955. - v.46, N73. - P.199-221.
17. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука. - 1970. - 904с.
18. Cox R.H. Wave propagation through the Newtonian fluid contained within thick-walled viscoelastic tube. // Biophys.J. - 1968. - v.8, N2. - P.691-709.
19. Atabek H.B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube. // Biophys.J. - 1968. - v.8, N2. - P.626-649.
20. Taylor M.G. The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes. // Biophys.J. - 1966. - Vol.6, N1. - P.29-51.
21. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в толстостенной трубке конечной длины из вязкоупругого материала: приложение к распространению пульсовых волн в артериальных руслах // Вестник Харьковского национального университета. Сер."Математика, прикладная математика и механика". - 2003. - т.602, N53. - С.82-93.
22. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала. // Известия РАН. МЖГ. - 2006. - N3. - С.125-139.

23. Кизилова Н.Н., Попова Н.А. Критерии оптимального функционирования ветвящихся транспортных систем живой природы // Вестник Харьковского университета. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 1999. - N444. - С.148-156.
24. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics // Lecture Notes in Computer Science. - 2004. - Vol.3044. - P.476-485.
25. Кизилова Н.Н. Спектральные характеристики и зависимости давление-расход при волновых течениях жидкости в системах вязкоупругих трубок. // Акустический вестник. - 2005. - т.8, N1-2. - С.54-63.
26. Ovadia-Blechman Z., Einav Sh., Zaretsky U. et al The area of the pressure flow loop for assessment of arterial stenosis: A new index. // Technology and Health Care. - 2002. V.10. - P.39-56.
27. Khir A.W., Zambanini A., Parker K.H. Local and regional wave speed in the aorta: effects of arterial occlusion. // Medical Eng. Physics. - 2004. - V.26. - P.23-29.
28. Tyberg J.V., Davies J.E., Wang Z. et al Wave intensity analysis and the development of the reservoir wave approach. // Med. Biol. Eng. Comput. - 2009. - V.47. - P.221-232.

Статья получена: 1.10.2010; окончательный вариант: 17.11.2010;
принята: 19.11.2010.

Visit our Web-page

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Editorial Board
- Abstracts
- Full-texts available (PDF)

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
№ 931 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 01.12.2010 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 8,3

Обл.– вид. арк. – 9,6

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

13-66

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

ОБОВ'ЯЗКОВИЙ
ПРИМІРНИЙ

