ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ К ИЗУЧЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

Я. Л. Геронимус

§ 1

Обозначим через S класс функций $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, регулярных в области $|z|<1$ и удовлетворяющих в ней неравенству

$$|f(z)|<1,\ |z|<1. \tag{1.1}$$

Через $\{a_n\}_0^{\infty}$ обозначим параметры Шура функции $f(z)$, определяемые при помощи известного алгоритма Шура*

$$a_k=f_k(0),\ f_k(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{f_{k-1}(z)-f_{k-1}(0)}{1-\overline{f_{k-1}(0)}\cdot f_{k-1}(z)},\ (k=1,\ 2,\ \ldots),$$
$$f_0(z)\equiv f(z); \tag{1.2}$$

эти параметры могут быть выбраны независимо друг от друга, лишь бы выполнялись условия $\{|a_k|\}_0^{\infty}<1$.

Каждой функции $f(z)\in S$ соответствует функция $F(z)$, определяемая формулой

$$F(z)=\frac{1+zf(z)}{1-zf(z)},\qquad f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{F(z)-1}{F(z)+1}; \tag{1.3}$$

она также регулярна в области $|z|<1$, причем из неравенства

$$Re\{F(z)\}=\frac{1-|zf(z)|^2}{|1-zf(z)|^2}>0,\quad |z|<1, \tag{1.4}$$

вытекает, что она имеет в области $|z|<1$ положительную вещественную часть и поэтому, по теореме Рисса-Герглотца, допускает представление**

$$F(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\sigma(\theta),\ c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma(\theta), \tag{1.5}$$

где $\sigma(\theta)$ ограниченная, неубывающая на отрезке $[0,2\pi]$ функция.

Рассмотрим многочлены $\{\varphi_n(z)\}_0^{\infty}$, ортонормальные на окружности $z=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ относительно обложения $d\sigma(\theta)$. Мы покажем, что при помощи этих многочленов можно изучить некоторые граничные свойства функций класса S.

На первый взгляд связь между функцией $f(z)$ и многочленами $\{\varphi_n(z)\}$ кажется весьма отдаленной: по функции $f(z)$ надо построить функцию $F(z)$, по ней функцию $\sigma(\theta)$ и только тогда мы можем

* См. И. Шур [9], § 1.

** См., напр., [1], стр. 46.

построить ортонормальные многочлены $\{\varphi_n(z)\}$. Однако, мы покажем сейчас, что многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ можно назвать ассоциированными с функцией $f(z)$, ибо они, так же, как и функция $f(z)$, могут быть выражены через одни и те же параметры Шура.

Действительно, мы показали, что параметры Шура фигурируют в разложении функции $f(z)$ в непрерывную дробь

$$f(z) \sim \frac{a_0 \mid}{\mid 1} - \frac{a_1(1-|a_0|^2)z \mid}{\mid a_0 + a_1 z} - \frac{a_0 a_2 (1-|a_1|^2) z \mid}{\mid a_1 + a_2 z} - \frac{a_1 a_3 (1-|a_2|^2) z \mid}{\mid a_2 + a_3 z} \ldots, \tag{1.6}$$

причем при условии $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$ эта дробь сходится в области $|z| < 1$, равномерно при $|z| \leqslant r < 1$ и выражает функцию $f(z) \in S^*$. С другой стороны, если ввести обозначения

$$\varphi_k(z) = \lambda_k z^k + \ldots, \; P_k(z) = \frac{\varphi_k(z)}{\lambda_k} = z^k + \ldots, \\ \lambda_k > 0, \; (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.7}$$

то, как мы показали, имеют место соотношения**

$$\left.\begin{aligned} &P_{k+1}(z) = zP_k(z) - \overline{a}_k P_k^*(z), \; P_k^*(z) = z^k \overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right), \\ &\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{c_0 \prod_{\nu=0}^{k-1} (1-|a_\nu|^2)}} \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

§ 2

Рассмотрим сперва свойства угловой производной функции $f(z) \in S$, понимая под этим предел

$$D(f) = \lim_{z \to 1} \frac{f(z) - 1}{z - 1}, \; |z| < 1; \tag{2.1}$$

известно, что этот предел — конечный или бесконечный — всегда существует. Будем обозначать через $S_1 \subset S$ подкласс функций, для которых существует конечный предел; ясно, что в этом случае имеем $f(1) = 1$. Легко видеть, что из условий $f_1(z), f_2(z) \in S_1$ вытекает $f_1(z) f_2(z) \in S_1$, причем из тождества

$$\frac{f_1(z) f_2(z) - 1}{z - 1} = f_1(z) \frac{f_2(z) - 1}{z - 1} + \frac{f_1(z) - 1}{z - 1}$$

вытекает равенство

$$D(f_1 f_2) = D(f_1) + D(f_2). \tag{2.2}$$

Найдем оценки для угловой производной. Обозначим через μ массу обложения $d\sigma(\theta)$, сконцентрированную в точке $\theta = 0$, т. е.

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\{\sigma(+0) - \sigma(-0)\}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Угловая производная функции $f(z) \in S_1$ выражается формулой****

$$D(f) = \frac{c_0}{\mu} - 1 \geqslant 0, \; \mu \leqslant c_0. \tag{2.4}$$

* См. Я. Л. Геронимус [2]; [3], §§ 13, 15, 17, 18.
** См. Я. Л. Геронимус [3], §§ 3, 4.
*** Этот результат получен впервые в 1940 г. А. Герцигом [8]; не зная об этом, мы получили этот же результат в 1943 г. в [2].

Действительно, из (1.5) вытекает существование предела*

$$\lim_{z\to 1}\{F(z)(z-1)\} = -\frac{2\mu}{c_0} \tag{2.5}$$

и таким образом мы имеем для $f(z)\in S_1$

$$D(f) = -2\lim_{z\to 1}\frac{1}{[F(z)+1](z-1)} - 1 = \frac{c_0}{\mu} - 1 \geqslant 0;$$

неравенство $\mu \leqslant c_0$ справедливо потому, что по (1.5) c_0 является полной массой нашего обложения.

§ 3

Теорема 2. *Угловая производная функции $f(z)\in S_1$ выражается формулой*

$$D(f) = c_0\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(1)|^2, \tag{3.1}$$

где $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ — ортонормальные многочлены, ассоциированные с функцией $f(z)$. Действительно, мы показали, что концентрированная масса μ выражается формулой**

$$\mu = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(1)|^2},\quad \varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{c_0}},\quad c_0|\varphi_0(1)|^2 = 1.$$

Рассмотрим подробнее формулу (3.1); если ввести обозначение

$$\sqrt{c_0}\,\varphi_k(1) = \gamma_k,\quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.2}$$

то из (1.8) находим

$$\gamma_{k+1} = \frac{\gamma_k - \overline{a_k\gamma_k}}{\sqrt{1-|a_k|^2}},\quad (k = 0, 1, 2, \ldots);\ \gamma_0 = 1; \tag{3.3}$$

следовательно, задавая параметры Шура $\{a_k\}_0^n$, удовлетворяющие условиям $\{|a_k|\}_0^n < 1$, мы можем однозначно определить величины $\{\gamma_k\}_0^{n+1}$. Из (3.3) легко находим

$$\overline{a}_k = \frac{\gamma_k^2 - \gamma_{k+1}^2}{|\gamma_k|^2 + |\gamma_{k+1}|^2},\quad (k = 0, 1, 2, \ldots); \tag{3.4}$$

таким образом, задавая произвольно величины $\{\gamma_k\}_0^{n+1}$, мы сможем однозначно определить параметры Шура $\{a_k\}_0^n$, удовлетворяющие условиям $\{|a_k|\}_0^n < 1$. Кроме того, задание коэффициентов $\{\alpha_k\}_0^n$ эквивалентно заданию параметров Шура $\{a_k\}_0^n$***; отсюда вытекает

Теорема 3. *Для всякой функции $f(z)\in S_1$, подчиненной условиям*

$$\omega_i(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m),\ 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{3.5}$$

имеем

$$D(f) \geqslant c_0\sum_{k=1}^{n+1}|\varphi_k(1)|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}|\gamma_k|^2; \tag{3.6}$$

* См. [8].

** См. [3], § 20.

*** См. [9], § 4.

для нахождения минимального значения угловой производной надо найти минимум суммы (3.6) *при выполнении условий* (3.5), *связывающих значения величин* $\{\gamma_k\}_0^{n+1}$. *Экстремальная функция такова*

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{z\bar{P}_{n+1}(1)\{\Omega_{n+1}(z)+P_{n+1}(z)\}+P_{n+1}(1)\{\Omega^*_{n+1}(z)-P^*_{n+1}(z)\}}{z\bar{P}_{n+1}(1)\{\Omega_{n+1}(z)-P_{n+1}(z)\}+P_{n+1}(1)\{\Omega^*_{n+1}(z)+P^*_{n+1}(z)\}}, \tag{3.7}$$

где многочлены $\{\Omega_k(z)\}_0^{n+1}$ *построены по формуле* (1.8), *но с параметрами* $\{-a_k\}_0^n$, *т. е. они ассоциированы с функцией* $\{-f(z)\}$.

Действительно, соотношение (3.5) можно заменить соответствующим соотношением между величинами $\{\gamma_k\}_0^{n+1}$, откуда, на основании правил нахождения условного экстремума, имеем $\{\varphi_k(1)\}_{n+2}^{\infty}=0$. Так как все корни ортонормальных многочленов лежат в области $|z|<1$, то отсюда вытекает условие $|a_{n+1}|=1$, причем формула (1.8) показывает, что надо взять

$$a_{n+1}=\frac{\bar{P}_{n+1}(1)}{P_{n+1}(1)}. \tag{3.8}$$

При этих условиях имеем*

$$F(z)=-\frac{\Omega_{n+2}(z)}{P_{n+2}(z)}=-\frac{z\Omega_{n+1}(z)+\bar{a}_{n+1}\Omega^*_{n+1}(z)}{zP_{n+1}(z)-\bar{a}_{n+1}P^*_{n+1}(z)}=$$

$$=\frac{z\Omega_{n+1}(z)\bar{P}_{n+1}(1)+\Omega^*_{n+1}(z)P_{n+1}(1)}{P^*_{n+1}(z)P_{n+1}(1)-zP_{n+1}(z)\bar{P}_{n+1}(1)};$$

пользуясь (1.3), получим (3.7).

§ 4

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть задан один коэффициент α_0, $|\alpha_0|<1$; мы имеем

$$P_1(z)=z-\bar{a}_0,\ P_1^*(z)=1-a_0z;\ \Omega_1(z)=z+\bar{a}_0,\ \Omega_1^*(z)=1+a_0z;$$
$$D(f)\geqslant c_0|\varphi_1(1)|^2=\frac{|1-a_0|^2}{1-|a_0|^2}=\frac{|1-\alpha_0|^2}{1-|\alpha_0|^2},\ a_0=\alpha_0; \tag{4.1}$$

равенство имеет место лишь для функции

$$f(z)=\frac{z(1-\alpha_0)+\alpha_0(1-\bar{\alpha}_0)}{\bar{\alpha}_0(1-\alpha_0)z+1-\bar{\alpha}_0}. \tag{4.2}$$

Пусть теперь заданы два коэффициента α_0, α_1, удовлетворяющие условиям $|\alpha_0|<1$, $|\alpha_1|<1-|\alpha_0|^2$; мы имеем

$$P_2(z)=z^2-z(\bar{a}_0-a_0\bar{a}_1)-\bar{a}_1,\ P_2^*(z)=1-z(a_0-\bar{a}_0a_1)-a_1z^2,$$
$$\Omega_2(z)=z^2+z(\bar{a}_0+a_0\bar{a}_1)+\bar{a}_1,\ \Omega_2^*(z)=1+z(a_0+\bar{a}_0a_1)+a_1z^2, \tag{4.3}$$
$$D(f)\geqslant c_0|\varphi_1(1)|^2+c_0|\varphi_2(1)|^2=\frac{|1-\alpha_0|^2}{1-|\alpha_0|^2}+$$
$$+\frac{|(1-\bar{\alpha}_0)(1-|\alpha_0|^2)-\bar{\alpha}_1(1-\alpha_0)|^2}{(1-|\alpha_0|^2)\{(1-|\alpha_0|^2)^2-|\alpha_1|^2\}};$$

* См. [3], § 17.

равенство имеет место лишь для функции

$$f(z)=\frac{z(1-a_0-a_1+\overline{a_0}a_1)(z+a_0\overline{a_1})+(1-\overline{a_0}+a_0\overline{a_1}-\overline{a_1})(a_0+a_1z)}{z(1-a_0-a_1+\overline{a_0}a_1)(\overline{a_0}z+\overline{a_1})+(1-\overline{a_0}+a_0\overline{a_1}-\overline{a_1})(1+\overline{a_0}a_1z)}, \qquad (4.4)$$

причем надо подставить $a_0=\alpha_0, \quad a_1=\frac{\alpha_1}{1-|\alpha_0|^2}$.

Следовательно, если задано одно соотношение между коэффициентами α_0, α_1, то надо найти минимум (4.3) при выполнении этого условия.

Рассмотрим еще тот частный случай, когда заданы параметры Шура $\{a_k\}_0^n$, причем они все вещественны и неотрицательны.

Из (1.8) вытекает формула

$$P_k^*(z)=\prod_{\nu=0}^{k-1}\left\{1-za_\nu\frac{P_\nu(z)}{P_\nu^*(z)}\right\} \qquad (4.5)$$

и, следовательно, неравенство

$$|P_k^*(z)|=\prod_{\nu=0}^{k-1}\left|1-za_\nu\frac{P_\nu(z)}{P_\nu^*(z)}\right|\geqslant\prod_{\nu=0}^{k-1}\{1-|a_\nu|\},\ |z|\leqslant 1, \qquad (4.6)$$

откуда вытекает

$$\sqrt{c_0}\,|\varphi_k(1)|=\frac{|P_k(1)|}{\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}(1-|a_\nu|^2)}}\geqslant\sqrt{\prod_{\nu=0}^{k-1}\frac{1-|a_\nu|}{1+|a_\nu|}},$$

$$D(f)\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{\nu=0}^{k-1}\frac{1-|a_\nu|}{1+|a_\nu|}; \qquad (4.7)$$

при наших условиях неравенства являются точными, ибо

$$\sqrt{c_0}\varphi_k(1)=\sqrt{\prod_{\nu=0}^{k-1}\frac{1-a_\nu}{1+a_\nu}},\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \qquad (4.8)$$

Пусть, например, заданы коэффициенты

$$\alpha_k=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k,\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n);\ \alpha>1; \qquad (4.9)$$

им соответствуют параметры Шура*

$$a_k=\frac{1}{k+\alpha},\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \qquad (4.10)$$

откуда вытекает неравенство

$$D(f)\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha(\alpha-1)}{(k+\alpha)(k+\alpha-1)}=\frac{(\alpha-1)(n+1)}{n+\alpha+1}. \qquad (4.11)$$

Из формулы (4.7) вытекает

Теорема 4. *Если для функции $f(z)\in S_1$ параметры Шура удовлетворяют неравенствам $|a_k|\leqslant\rho_k<1$, $(k=0,\ 1,\ \ldots\ n)$, то*

$$D(f)\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{\nu=0}^{k-1}\frac{1-\rho_\nu}{1+\rho_\nu}; \qquad (4.12)$$

* См. [3], § 24.

знак равенства имеет место лишь для функции (3.7) *в предположении*

$$a_k = \rho_k, \ (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{4.13}$$

Пусть, в частности, заданы модули коэффициентов α_0, α_1, удовлетворяющие неравенствам $|\alpha_0| \leqslant S_0 < 1$, $|\alpha_1| \leqslant S_1 < 1 - S_0^2$; в таком случае имеем

$$D(f) \geqslant \frac{2(1 - S_0)^2}{1 - S_0^2 + S_1}; \tag{4.14}$$

знак равенства имеет место лишь для функции

$$f(z) = \frac{(1 - S_0)z^2 + S_1 z + S_0(1 - S_0)}{S_0(1 - S_0)z^2 + S_1 z + 1 - S_0}. \tag{4.15}$$

§ 5

Мы рассмотрели нахождение некоторых экстремальных значений угловой производной при условиях, наложенных на коэффициенты; рассмотрим теперь такие условия:

$$f(z_k) = \mu_k, \ |z_k| < 1, \ |\mu_k| < 1, \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Теорема 5. *Для каждой функции* $f(z) \in S_1$, *удовлетворяющей условиям* (5.1), *справедливо неравенство*

$$D(f) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k|^2} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |\mu_k|^2}{|1 - \mu_k|^2}. \tag{5.2}$$

Для доказательства положим

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(z), \quad \varphi_k(z) = \frac{f(z) - \mu_k}{1 - \overline{\mu}_k f(z)} \cdot \frac{1 - \overline{\mu}_k}{1 - \mu_k}, \ (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{5.3}$$

очевидно имеем $\varphi_k(z) \in S_1$ и $\varphi_k(z_k) = 0$; следовательно, и $\varphi(z) \in S_1$ $\varphi(z_k) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots n)$. На основании (2.2) мы находим

$$D(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} D(\varphi_k) = D(f) \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |\mu_k|^2}{|1 - \mu_k|^2}. \tag{5.4}$$

С другой стороны, мы можем представить $\varphi(z)$ в таком виде:

$$\varphi(z) = f_1(z) f_2(z), \ f_1(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \cdot \frac{1 - \bar{z}_k}{1 - z_k}; \tag{5.5}$$

функция $f_1(z)$, очевидно, принадлежит классу S_1, но этим же свойством обладает и функция $f_2(z)$.* Мы имеем таким образом

$$\begin{aligned} D(\varphi) = D(f_1) + D(f_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k|^2} + D(f_2) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k|^2}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

откуда вытекает (5.2).

* См. [7], отд. III, зад. № 294.

Неравенство (5.2) можно уточнить, если воспользоваться (5.6) и найти минимальное значение $D(f_2)$ при тех или иных условиях, наложенных на функцию

$$f_2(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(z)-\mu_k}{1-\overline{\mu}_k f(z)} \cdot \frac{1-\overline{\mu}_k}{1-\mu_k} : \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z}_k z} \cdot \frac{1-\overline{z}_k}{1-z_k}. \tag{5.7}$$

Неравенство (5.2) является обобщением известного **неравенства Жюлиа**, которое получим, полагая $n=1$, $z_1=\zeta$, $\mu_1=f(\zeta)$

$$\frac{|1-f(\zeta)|^2}{1-|f(\zeta)|^2} \leqslant D(f) \cdot \frac{|1-\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}, \ |\zeta|<1. \tag{5.8}$$

Возвращаясь к случаю любого n, положим

$$f(z) = z^n(\alpha_n + \alpha_{n+1}z + \ldots) = z^n\psi(z) \in S_1, \ z_k = \mu_k = 0, \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{5.9}$$

Мы имеем в этом случае

$$D(f) = n + D(\psi) = n + c_0' \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k'(1)|^2, \tag{5.10}$$

где $\{\varphi_k'(z)\}$ — ортонормальные многочлены, ассоциированные с функцией $\psi(z)$; мы можем рассмотреть частные случаи, аналогичные тем, которые рассмотрены в § 4, заменяя в (4.1) — (4.4) α_0 на α_n, α_1 на α_{n+1}. Этот частный случай (5.9) был рассмотрен Г. Ункельбахом [10] для $n=1$ и А. Герцигом [8] для любого натурального n; все их результаты могут быть получены из формулы (5.10).

§ 6

Применим формулу (4.5) к изучению еще одного свойства ограниченных функций, не связанного с угловой производной. И. Шур [9] считал особенно интересным тот случай, когда для $f(z) \in S$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$; он доказал, что в этом случае функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяет в ней неравенству*

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{\frac{A-1}{A}} < 1, \ A = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}. \tag{6.1}$$

Мы уточнили это неравенство — именно, для $f(z) \in S$, $f(0)=0$ мы показали, что при условии $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ выполняется точное неравенство **

$$|f(z)| \leqslant \frac{A-1}{A+1}, \quad |z| \leqslant 1. \tag{6.2}$$

И. Шур поставил следующий интересный вопрос: **может ли функция** $f(z) \in S$ **быть непрерывной в замкнутой об-**

---

* См. [9], § 15.
** См. [3], § 27 [4]

ласти $|z| \leqslant 1$ и удовлетворять в ней неравенству $|f(z)| \leqslant M < 1$ при условии $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$? Мы дадим ответ на этот вопрос, считая, что заданы не самые параметры Шура, а только их модули.

Теорема 6. *Если заданы модули параметров Шура* $\{|a_n|\}_0^{\infty}$, *удовлетворяющие условиям*

$$|a_n| < 1, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty, \tag{6.3}$$

то среди бесчисленного множества функций $f(z) \in S$, *имеющих заданные модули параметров Шура, найдется такая функция, для которой*

$$\operatorname*{Max}_{|z| \leqslant 1} |f(z)| = 1. \tag{6.4}$$

Применим метод доказательства от противного. Пусть при $|z| \leqslant 1$ имеем для всех функций, удовлетворяющих условиям теоремы, неравенство

$$|f(z)| \leqslant M < 1. \tag{6.5}$$

В таком случае мы имеем по (1.4)

$$Re\{F(z)\} \geqslant \frac{1 - M^2}{(1 + M)^2} = \frac{1 - M}{1 + M} = m > 0, \quad |z| \leqslant 1. \tag{6.6}$$

Но по формуле обращения мы имеем *

$$\frac{\sigma(\theta + 0) + \sigma(\theta - 0)}{2} = \text{const} + c_0 \lim_{r \to 1-0} \int_0^{\theta} Re\{F(re^{i\alpha})\} d\alpha \tag{6.7}$$

и, таким образом, справедливо неравенство

$$\sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1) \geqslant c_0 m (\theta_2 - \theta_1), \quad 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi. \tag{6.8}$$

Отсюда следует неравенство **

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(e^{i\theta})|^2 \leqslant \frac{1}{c_0 m}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{6.9}$$

Если взять все параметры вещественными и неположительными, то по (4.5) получим

$$\sqrt{c_0}\, \varphi_k(1) = \sqrt{\prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{1 + |a_\nu|}{1 - |a_\nu|}}, \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{6.10}$$

благодаря условию $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$ отсюда следует

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n(1)| = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(1)|^2 \right\} = \infty,$$

что противоречит (6.9).

* См. [1], стр. 50.

** См. [5], теорема 3.3.

§ 7

Рассмотрим теперь тот случай, когда функция $w = f(z) \in S$ имеет на дуге $l_z = [e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}]$ окружности $|z| = 1$ непрерывные граничные значения

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} f(re^{i\theta}),$$

по модулю равные единице, т. е. отображает эту дугу l_z на дугу $l_w = [e^{i\mu_1}, e^{i\mu_2}]$ окружности $|w| = 1$.

По принципу симметрии можно аналитически продолжить функцию $f(z)$ через дугу l_z; следовательно, она регулярна на дуге l_z и поэтому ее угловая производная $D(f)$ равна ее производной $\frac{dw}{dz} = f'(z)$, $z \in l_z$. Пусть мы имеем

$$w = e^{i\mu} \in l_w, \quad z = e^{i\theta} \in l_z;$$

положим еще

$$w_0 = e^{i\mu_0} = f(z_0) \in l_w, \quad z_0 = e^{i\theta_0} \in l_z.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_0 = \left(\frac{de^{i\mu}}{de^{i\theta}}\right)_0 = \frac{e^{i\mu_0}}{e^{i\theta_0}} \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 = \frac{w_0}{z_0} \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0; \tag{7.1}$$

введем обозначение

$$f(z) = w_0 \varphi(z), \quad z = z_0 \zeta, \quad \varphi(z_0 \zeta) = u(\zeta);$$

тогда мы будем иметь

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{w_0}{z_0} \lim_{\zeta \to 1} \frac{u(\zeta) - 1}{\zeta - 1}, \tag{7.2}$$

и, следовательно, производную функции $f(z)$ в любой точке z_0 дуги l_z можно выразить через производную функции $u(\zeta)$ в точке $\zeta = 1$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{w_0}{z_0} \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 = \frac{w_0}{z_0} D(u), \quad \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 = D(u). \tag{7.3}$$

Мы имеем разложения

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots,$$

$$u(\zeta) = \frac{f(z_0 \zeta)}{w_0} = \frac{\alpha_0}{w_0} + \frac{\alpha_1 z_0}{w_0} \zeta + \ldots + \frac{\alpha_n z_0^n}{w_0} \zeta^n + \ldots;$$

так как $u(\zeta) = \frac{f(z)}{w_0} \in S$, то, обозначая через $\{a'_k\}_0^\infty$ ее параметры Шура, можно показать (И. Шур [9], § 15), что параметры функций $u(\zeta)$ и $f(z)$ связаны соотношениями

$$a'_k = \frac{a_k z_0^k}{w_0}, \quad |a'_k| = |a_k|, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7.4}$$

Таким образом, справедлива теорема, дающая точную оценку граничной производной функции $f(z) \in S$.

Теорема 7. *Пусть функция* $f(z)\in S$ *имеет на дуге* l_z *окружности* $|z|=1$ *непрерывные граничные значения и отображает эту дугу на дугу* l_w *окружности* $|w|=1$*; в таком случае для* $z_0\in l_z$ *имеем*

$$f'(z_0)=\frac{w_0}{z_0}\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0,\quad \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0=c_0\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k'(1)|^2,\quad w_0=f(z_0);\tag{7.5}$$

ортонормальные многочлены $\{\varphi_k'(z)\}_0^\infty$ *построены по параметрам Шура* $\left\{a_k'=\frac{a_k z_0^k}{w_0}\right\}_0^\infty$, где $\{a_k\}_0^\infty$ — *параметры Шура функции* $f(z)$.

Мы нашли, таким образом, точную величину той скорости, с которой движется точка w по дуге l_w, когда точка z движется по дуге l_z равномерно с единичной скоростью.

Из этой теоремы легко получить некоторые неравенства, которым должны удовлетворять длины L_z, L_w дуг l_z, l_w при тех, или иных условиях, наложенных на функцию $f(z)$; эти результаты можно рассматривать как обобщение известной леммы Лёвнера, в которой функция $f(z)\in S$ подчинена условию $f(0)=0$.

Мы будем рассматривать оценки, в которых фигурируют лишь модули параметров Шура, ибо $\{|a_k'|=|a_k|\}_0^\infty$ независимо от положения точки z_0 на дуге l_z.

Пусть задано неравенство $|\alpha_0|\leqslant\rho_0<1$; в таком случае имеем

$$L_w\geqslant\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\cdot L_z.\tag{7.6}$$

Действительно, мы имеем по (1.8)

$$\sqrt{c_0}\,\varphi_1'(\zeta)=\frac{\zeta-\bar a_0'}{\sqrt{1-|a_0|^2}}=\frac{\zeta-w_0\bar a_0}{\sqrt{1-|a_0|^2}},\quad c_0|\varphi_1'(1)|^2=\frac{|1-w_0\bar\alpha_0|^2}{1-|\alpha_0|^2},$$

откуда по (7.5) имеем при $w_0=e^{i\mu_0}$, $\alpha_0=|\alpha_0|e^{i\psi}$ оценку

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0=c_0\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k'(1)|^2\geqslant c_0|\varphi_1'(1)|^2=\frac{1-2|\alpha_0|\cos(\mu_0-\psi)+|\alpha_0|^2}{1-|\alpha_0|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1-|\alpha_0|}{1+|\alpha_0|}\geqslant\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\tag{7.7}$$

во всех точках дуги l_z; интегрируя это неравенство, получим (7.6).

Примечание 1. Неравенство (7.6) не может быть точным; в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k'(1)|^2\geqslant|\varphi_1'(1)|^2$$

равенство, конечно, имеет место для экстремальной функции (4.2), но в дальнейшем неравенстве

$$\frac{1-2|\alpha_0|\cos(\mu_0-\psi)+|\alpha_0|^2}{1-|\alpha_0|^2}\geqslant\frac{1-|\alpha_0|}{1+|\alpha_0|}\tag{7.8}$$

мы заменили переменную величину $\cos(\mu_0-\psi)$ ее наибольшим значением, равным единице.

Для получения точного соотношения между длинами дуг L_w и L_z поступаем следующим образом: из (7.7) имеем

$$\frac{1-|\alpha_0|^2}{1-2|\alpha_0|\cos(\mu-\psi)+|\alpha_0|^2}\cdot d\mu\geqslant d\theta;$$

если $l_z = [e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}]$, $l_w = [e^{i\mu_1}, e^{i\mu_2}]$, то, интегрируя это неравенство, получим*

$$\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{1-|\alpha_0|^2}{1-2|\alpha_0|\cos(\mu-\psi)+|\alpha_0|^2}\,d\mu \geqslant \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\theta = \alpha_2-\alpha_1 = L_z. \tag{7.9}$$

Пользуясь геометрическим значением ядра интеграла Пуассона, мы видим, что интеграл в левой части равенства равен длине дуги L_w окружности $|w|=1$, в которую проектируется дуга l_w из точки α_0; следовательно, точное неравенство таково

$$L_w \geqslant L_z. \tag{7.10}$$

Как известно, оно следует из принципа гармонической меры, по которому $L'_w \geqslant L'_z$, где L'_z — длина дуги окружности $|z|=1$, в которую проектируется дуга l_z из точки $z=0$, т. е. в этом случае $L_z = L'_z$

§ 8

Рассмотрим теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5.

Теорема 4′. *Пусть при условиях теоремы 7 заданы неравенства*

$$|a_k| \leqslant \rho_k < 1, \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n) \tag{8.1}$$

для модулей параметров Шура функции $f(z) \in S$; в таком случае имеем неравенство

$$L_w \geqslant L_z \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{1-\rho_\nu}{1+\rho_\nu}; \tag{8.2}$$

если, в частности, $n=1$ и коэффициенты α_0, α_1 удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha_0| \leqslant \rho_0 < 1, \quad |\alpha_1| \leqslant \rho_1 < 1-\rho_0^2,$$

то справедливо неравенство

$$L_w \geqslant L_z \cdot \frac{2(1-\rho_0^2)}{1-\rho_0^2+\rho_1}. \tag{8.3}$$

Доказательство вытекает из теоремы 4.

Теорема 5′. *Пусть при условиях теоремы 7 заданы условия*

$$f(z_k) = \mu_k, \quad |z_k| < 1, \quad |\mu_k| < 1, \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \tag{8.4}$$

в таком случае справедливы неравенства

$$L_w \geqslant A_n L_z, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|}{1+|z_k|} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1+|\mu_k|}{1-|\mu_k|}. \tag{8.5}$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.

Рассмотрим простейший частный случай предыдущей теоремы. Пусть

$$f(z) = z^n(\alpha_n + \alpha_{n+1}z + \ldots) = z^n\psi(z) \in S, \quad z_k = \mu_k = 0, \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{8.6}$$

* См. Р. Неванлинна [6], пункты 4, 5, 32, 33, 47, 48.

Теорема 8. *При условиях теоремы 7 и при условиях* (6.8) *имеем*

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 = n + c_0 \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k'(1)|^2, \quad z_0 = e^{i\theta_0} \in l_z, \quad f(z_0) = e^{i\mu_0} \in l_w, \tag{8.7}$$

причём ортонормальные многочлены $\{\varphi_k'(z)\}$ *построены по параметрам* $\left\{a_k' = \frac{a_k z_0^k}{w_0}\right\}_0^\infty$, *где* $\{a_k\}_0^\infty$ *параметры Шура функции* $\psi(z)$, *а* $w_0 = \psi(z_0)$. Накладывая на функцию $\psi(z)$ те или иные из рассмотренных выше ограничений, будем получать соответствующие обобщения леммы Лёвнера; в частности,

$$L_w \geqslant n L_z, \tag{8.8}$$

или точнее

$$L_w \geqslant \left(n + \frac{1-\rho_n}{1+\rho_n}\right) L_z, \quad |\alpha_n| \leqslant \rho_n < 1. \tag{8.9}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что $\psi(z) \in S$ и применить формулу $D(f) = n + D(\psi)$.

Примечание 2. При заданном коэффициенте $\alpha_n = \rho e^{i\psi}$ А. Герциг [8] пишет неравенство

$$L_w \geqslant \left(n + \frac{1 - 2\rho\cos\psi + \rho^2}{1-\rho^2}\right) L_z; \tag{8.10}$$

оно неверно: из (8.7), пользуясь (7.7), мы находим точное неравенство

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 \geqslant n + \frac{1 - 2\rho\cos(\mu_0 - \psi) + \rho^2}{1-\rho^2}, \quad w_0 = \psi(z_0) = e^{i\mu_0}, \; z_0 = e^{i\theta_0}, \tag{8.11}$$

откуда не следует (8.10), ибо мы не можем утверждать, что $\cos(\mu_0 - \psi) < \cos\psi$.

§ 9

Случай (8.6) был рассмотрен при $n = 1$ Г.织нкельбахом [10], а при $n \geqslant 1$ А. Герцигом [8].

Следует отметить, что экстремальные функции, которые приводит А. Герциг, отображают всю окружность $|z| = 1$ на $(n+1)$ раз покрытую окружность $|w| = 1$. Нам кажется небезынтересным рассмотреть тот случай, когда дуги l_z, l_w отличаются от полных окружностей.

Пусть при условиях теоремы 7 имеем

$$|a_n| \leqslant \rho < 1, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{9.1}$$

в таком случае из (8.2) имеем оценку

$$L_w \geqslant L_z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^k = L_z \cdot \frac{1-\rho}{2\rho} = L_z \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{9.2}$$

если положить $\rho = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Чтобы сравнить эту оценку с точной, построим по формуле (1.6) функцию $f(z)$, для которой все параметры Шура одинаковы: $\{a_n\}_0^\infty = \rho$. Мы будем иметь

$$f(z) = \frac{\rho^2 |}{|\rho} - \frac{\rho^2(1-\rho^2) z |}{|\rho(1+z)} - \frac{\rho^2(1-\rho^2) z |}{|\rho(1+z)} - \ldots,$$

т. е.

$$f(z)=\frac{\rho^2}{\rho-v}, \quad v=\frac{\rho^2(1-\rho^2)z}{\rho(1+z)-v},$$

откуда находим

$$v^2-v\rho(1+z)+\rho^2(1-\rho^2)z=0, \; v=\rho\frac{1+z\pm\sqrt{(z+1)^2-4z(1-\rho^2)}}{2},$$

$$f(z)=\frac{z-1\mp\sqrt{(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})}}{2\rho z},$$

если ввести обозначение

$$e^{i\alpha}=1-2\rho^2+2i\rho\sqrt{1-\rho^2}.$$

Разрежем окружность $|z|=1$ вдоль дуги $l_z=[e^{-i\alpha}, e^{i\alpha}]$; пусть в формуле

$$f(z)=\frac{z-1+\sqrt{(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})}}{2\rho z} \tag{9.4}$$

выбрано то значение радикала, которое обращается в единицу при $z=0$. Полагая $z=e^{i\theta}$, мы имеем

$$f(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}-1+\sqrt{(e^{i\theta}-e^{i\alpha})(e^{i\theta}-e^{-i\alpha})}}{2\rho e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta}-1+2e^{i\frac{\theta}{2}}\sqrt{-\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}}{2\rho e^{i\theta}}=$$

$$=\frac{i\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{-\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}}{\rho e^{\frac{i\theta}{2}}}. \tag{9.5}$$

На дуге l_z имеем $-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha$, т. е. подрадикальное выражение неотрицательно, откуда следует по (9.5)

$$|f(e^{i\theta})|^2=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\rho^2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\rho^2}=1, \; -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha.$$

Найдем длину L_w дуги l_w, на которую функция (9.4) отображает дугу l_z; мы имеем

$$f(e^{i\alpha})=\frac{i\sin\frac{\alpha}{2}}{\rho e^{\frac{i\alpha}{2}}}=ie^{-\frac{i\alpha}{2}}, \quad f(e^{-i\alpha})=-ie^{\frac{i\alpha}{2}},$$

откуда

$$\arg f(e^{i\alpha})-\arg f(e^{-i\alpha})=\arg\frac{f(e^{i\alpha})}{f(e^{-i\alpha})}=\pi-\alpha;$$

таким образом, точное соотношение таково:

$$\frac{L_w}{L_z}=\frac{\pi-\alpha}{2\alpha},$$

в то время, как неравенство (9.2) дает только

$$\frac{L_w}{L_z}\geqslant\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}<\frac{\pi-\alpha}{2\alpha}.$$

§ 10

Рассмотрим в заключение следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять параметры Шура $\{a_n\}_0^\infty$ функции $f(z) \in S$, для того чтобы она отображала некоторую дугу l_z окружности $|z|=1$ на дугу l_w окружности $|w|=1$?

Из формулы (1.4) видно, что условие $|f(z)|=1$, $z \in l_z$ эквивалентно условию $Re F(z)=0$, $z \in l_z$; из (1.5) вытекает

$$Re\left\{F(re^{i\varphi})\right\} = \frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\sigma(\theta), \quad r<1; \tag{10.1}$$

отсюда можно найти функцию $\sigma(\theta)$ по формуле обращения (6.7); следовательно, имеем $\sigma(\theta)=\text{const}$, если $z=e^{i\theta}\in l_z$. Обозначим через $M \subset [0,2\pi]$ множество точек роста функции $\sigma(\theta)$, через E — соответствующее множество на окружности $|z|=1$ (т. е. $z=e^{i\theta}\in\mathrm{E}$, если $\theta\in M$), и через $\overline{\mathrm{E}}$ его замыкание.

Теорема 9. *Если $d(\overline{\mathrm{E}})$ трансфинитный диаметр множества $\overline{\mathrm{E}}$*, то справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)} \leqslant d(\overline{\mathrm{E}}). \tag{10.2}$$

Действительно, обозначим через $T_n(z)=z^n+\ldots$ многочлен Чебышева наименее уклоняющийся от нуля на множестве $\overline{\mathrm{E}}$, и через μ_n его максимальный модуль на $\overline{\mathrm{E}}$. Мы имеем по (1.8) неравенство при $z=e^{i\theta}$

$$\frac{1}{\lambda_n^2} = c_0\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n(z)|^2\,d\sigma(\theta) =$$

$$= \operatorname*{Min}_{\gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|z^n+\gamma_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\gamma_1 z+\gamma_0|^2\,d\sigma(\theta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|T_n(z)|^2\,d\sigma(\theta) \leqslant \mu_n^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma(\theta) = c_0\mu_n^2, \tag{10.3}$$

откуда

$$\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)} \leqslant \sqrt[n]{\mu_n}. \tag{10.4}$$

Известно, что существует предел**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n} = d(\overline{\mathrm{E}}), \tag{10.5}$$

откуда следует (10.2).

Таким образом условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)} < 1 \tag{10.6}$$

---

* См. Р. Неванлинна [6], п. 110.

** См. [6], п. 110.

необходимо для того, чтобы $|f(z)|=1$ на некоторой дуге l_z; для выполнения (10.6) в свою очередь необходимо условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| > 0, \tag{10.7}$$

ибо в противном случае мы имели бы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и существовал бы предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (1-|a_k|^2)} = \lim_{n\to\infty} (1-|a_{n-1}|^2) = 1. \tag{10.8}$$

Обратно, при выполнении (10.6) неравенство

$$|f(z)| \leqslant M < 1 \tag{10.9}$$

не может быть справедливым на всей окружности $|z|=1$.

Действительно, применяя метод доказательства от противного, мы получим (6.6)—(6.8), как в теореме 6; из (6.8) следует, что множество $\overline{\mathrm{E}}$ совпадает со всей окружностью; но тогда мы имели бы*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1} (1-|a_k|^2)} = 1,$$

что противоречит (10.6). Отметим в заключение, что для функции $f(z)$ рассмотренной в § 9, мы имеем

$$\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1} (1-|a_k|^2)} = \sqrt[2n]{(1-\rho^2)^n} = \sqrt{1-\rho^2} = \cos\frac{\alpha}{2};$$

так как множеством $\overline{\mathrm{E}}$ служит дуга длиной $2\pi - 2\alpha$, то

$$d(\overline{\mathrm{E}}) = \sin\frac{2\pi-2\alpha}{4} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

т. е. в этом случае в формуле (10.2) имеет место равенство.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. «О некоторых вопросах теории моментов». Харьков, ДНТВУ, 1938.

[2]. Я. Л. Геронимус. О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Каратеодори и Шура. Математ. сб., т. 15 (57), № 1, 1944, стр. 99—130.

[3]. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. Зап. науч.-исслед. ин-та математики и механики и Харьковского математ. об-ва, т. XIX, 1946, стр. 35—120.

[4]. Я. Л. Геронимус. О некоторых неравенствах в теории функций типа Каратеодори и Шура, «ДАН СССР», т. 60, № 6, 1948, стр. 953—956.

[5]. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Москва, Физ.-мат., 1958.

---

* См. Я. Л. Геронимус [5], теорема 6.1, формулы 6.7, 8.6. Пользуясь теми методами, которые мы применили при доказательстве указанной теоремы, нетрудно найти простые условия, достаточные для того, чтобы в (10.2) имело место равенство.

[6]. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., ГТТИ, 1941.
[7]. Г. Полиа и Г. Сегё. Задачи и теоремы из анализа, М.—Л., ОНТИ, 1937.
[8]. A. Herzig. Die Winkelderivierte und das Poisson—Stieltjes—Integral. Mathematische Zeitschrift, т. 46, 1940, стр. 129—156.
[9]. I. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschänkt sind. Crelle, т. 147, 1917, стр. 205—232; т. 148, 1918, стр. 122—145.
[10]. H. Unkelbach. Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung. Mathematische Zeitschrift, т. 43, 1938, стр. 739—742.