УДК 517.9

В. С. ЗАЯЧКОВСКИЙ, А. А. ПАНКОВ

СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

В конечномерном комплексном пространстве E рассмотрим полиномиальный операторный пучок $A(z) = z^n - 1_E + z^{n-1}A_1 + \cdots + A_n$. Факторизацией пучка $A(z)$ называется его представление в виде $A(z) = B(z)C(z)$. Пространство P_n пучков степени n с единичным старшим коэффициентом очевидным образом отождествляется с пространством $L(E)^n$ и, тем самым, наделяется естественной метрикой и комплексной структурой.

Введем отображение $m: P_k \times P_l \to P_n$, $n = k + l$, действующее по формуле $(B(z), C(z)) \mapsto B(z)C(z)$. Очевидно, что слой $m^{-1}(A)$, $A \in P_n$, состоит из всевозможных факторизаций пучка $A(z)$, у которых степень правого делителя равна l.

Представляет интерес исследование устойчивых в том или ином смысле факторизаций. Наиболее сильное понятие устойчивости изучалось в работах [1, 2]: факторизация называется устойчивой, если отображение m биголоморфно в некоторой окрестности точки (B, C) (замена условия биголоморфности условием липшицевой гомеоморфности [3] или даже просто гомеоморфности в силу известных результатов (см. [4], с. 290) не дает ничего нового).

Более слабое понятие устойчивости рассматривалось в [5, 6]. Факторизация $A = BC$ называется слабо устойчивой, если для любого пучка A, близкого к A, имеется (не обязательно единственная) факторизация $\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}$, где пучки $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ близки к B и C соответственно. Это равносильно открытости отображения m в точке (B, C) (определение отображения, открытого в точке, см. в [7]).

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения об операторных пучках и их факторизациях. Каждому операторному пучку каноническим образом можно сопоставить линейный оператор

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1_E & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1_E \\ -A_n & \dots & & -A_1 \end{bmatrix},$$

действующий в пространстве E^n. Этот оператор наследует все спектральные свойства пучка $A(z)$. Каждому левому делителю $C(z)$ (а, следовательно, и факторизации) пучка $A(z)$ ставится в соответствие инвариантное подпространство $\varphi(C)$ оператора F_A, которое задается явно через коэффициенты пучка $C(z)$ [8]. При этом спектральные свойства пучка $C(z)$ такие же, как и у оператора $F_A|_{\varphi(C)}$. Множество всех инвариантных подпространств оператора F обозначим через $\operatorname{Lat} F$; оно является проективным алгебраическим многообразием.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *факторизация* $A(z) = B(z)C(z)$ *слабо устойчива;*

б) (B, C) — *изолированная точка слоя* $m^{-1}(A)$;

в) *подпространство* $\varphi(C)$ *является изолированной точкой в* $\operatorname{Lat} F_A$;

г) *каждому общему собственному значению пучков* $B(z)$ и $C(z)$ *отвечает единственный собственный вектор пучка* $A(z)$.

Доказательство. Импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из фундаментального принципа открытости Зарисского [7].

Отображение Лангера задает изоморфизм φ аффинного алгебраического многообразия $m^{-1}(A)$ в $\operatorname{Lat} F_A$. Отсюда вытекает эквивалентность б) и в).

Простые доказательства импликаций а) $\Rightarrow$ г) и в) $\Rightarrow$ г) см. в [5]. Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ в). Пусть $L = \varphi(C)$, а $\tilde{L}$ — инвариантное подпространство F_A, близкое к L. Тогда характеристические многочлены $\chi(F_A|_L)$ и $\chi(F_A|_{\tilde{L}})$ совпадают. Действительно, характеристический многочлен непрерывно зависит от оператора, а $\chi(F_A|_L)$ необходимо делит $\chi(F_A)$. Отсюда и из условия г) следует, что спектральные типы операторов $F_A|_L$ и $F_A|_{\tilde{L}}$ совпадают. Действительно, перестройка спектрального типа может произойти только за счет распадения жордановых клеток, что запрещено условием г).

Таким образом, инвариантное подпространство $L = \varphi(C)$ вместе со своей окрестностью в $\operatorname{Lat} F_A$ целиком содержится в множестве $V \subset \operatorname{Lat} F_A$, состоящем из интервальных подпространств фиксированного спектрального типа. Этот спектральный тип однозначно определяется условием г): если $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ — частные спектральные кратности собственного значения z_0 пучка $A(z)$, то либо точка z_0 не является собственным значением пучка $C(z)$ (тогда ее частные спектральные кратности $\lambda = (0, 0, \dots 0)$), либо z_0 — собственное значение пучка $C(z)$, частные спектральные кратности которого равны $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_p)$, если $n_2 > 0$, или же $\lambda = (n_0, 0, \dots, 0)$, если $\nu = (n_1, 0,$

$\ldots, 0)$, $n_0 \leqslant n_1$. Множество инвариантных подпространств фиксированного спектрального типа является гладким подмногообразием в $\mathrm{Lat}\, F$ и для его размерности имеется явная формула [9]. В данном случае вычисления по этой формуле показывают, что $\dim v = 0$.

Применим теорему 1 к задаче продолжения факторизации по параметру. Пусть задан пучок $A_\varepsilon(z)$, коэффициенты которого голоморфно зависят от локального параметра $\varepsilon \in \boldsymbol{C}$ и при $\varepsilon = 0$ имеет место факторизация $A_0(z) = B(z)C(z)$. Если эта факторизация устойчива, то существует факторизация $A_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z)C_\varepsilon(z)$, где $B_\varepsilon(z)$, $C_\varepsilon(z)$ голоморфно зависят от ε и $B_0(z) = B(z)$, $C_0(z)$. В работе [1] показано, что устойчивость эквивалентна спектральности факторизации.

В общем случае представляют интерес продолжения факторизаций, голоморфные по дробным степеням ε.

Теорема 2. *Пусть факторизация $A(z) = B(z)C(z)$ слабо устойчива. Тогда для любого голоморфного семейства $A_\varepsilon(z)$, $A_0(z) = A(z)$, существует факторизация $A_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z)C_\varepsilon(z)$, где B_ε и C_ε разлагаются в сходящиеся ряды вида*

$$B_\varepsilon(z) = B(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/r} B_i(z),$$

$$C_\varepsilon(z) = C(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/r} C_i(z).$$

Доказательство. Точка $(B(z), C(z)) \in \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_l$ является в силу предыдущей теоремы изолированной точкой в $m^{-1}(A)$. По теореме Осгуда (см. [4]) локально вблизи точки A существует многозначное, обратное к m, отображение $g: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_l$, которое строится следующим образом. Вблизи пары (B, C) можно ввести координаты $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{np})$, $p = \dim E$, так что $\zeta_1 = g_1/(A)$ находится из уравнения

$$\zeta_1^r + \alpha_1(A)\zeta_1^{r-1} + \cdots + \alpha_r(A) = 0,$$

а остальные функции $\zeta_i = g_i(A)$, $i \in [2, np]$, голоморфно и однозначно выражаются через $g_1(A)$ и A. Теперь делители $B_\varepsilon(z)$ и $C_\varepsilon(z)$ строятся по формуле $(B_\varepsilon, C_\varepsilon) = g(A_\varepsilon)$.

Список литературы: 1. *Заячковский В. С., Панков А. А.* Об устойчивости факторизаций полиномиальных операторов пучков // Функцион. анализ и его прил. 1983. **17**, вып. 2. С. 73—74. 2. *Gohberg J. et al.* Perturbation theory for divisors of operator polynomials / J. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman// Math. Anal. 1979. **10**, № 6. P. 1161—1183. 3. *Ran A. C. M., Rodman L.* Stability af neutral invariant subspaces in indefinite inner products and stable symmetric factorizations // Jntegral Eguations and Operator Theory. 1983. **6**, № 4. P. 536—571. 4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 2. М., 1976. 400 с. 5. *Bart H. et al.* Stable factorizations of monic matrix polynomials and stable invariant subspaces / H. Bart, J. Gohberg, M. A. Kaashoek// Jntegral Eguations and Operator Theory. 1978. **1**, № 4. P. 496—517. 6. *Lancaster P.* Generalized Hermitian matrices: new frontier for numerical analysts? // Lect. Notes math. 1982. **912**. P. 179—189. 7. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. *I.* Комплексные проективные многообразия. М., 1979. 256 с. 8. *Langer H.* Factorization of operator pencils// Acta Sci Math. 1976. **38**, f. 1—2. P. 83—96. 9. *Shayman M. A.* On the variety of invariant subspaces of finite-dimensional linear operator// Trans. Amer. Math. Soc. 1982. **274**, № 2. P. 721—747.

Поступила в редколлегию 18.09.86