ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММ ШВАРЦА И ЛЕВНЕРА

Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн

(Харьков и Одесса)

1. Принимая, чем общность рассмотрений не нарушается, полуплоскости в качестве стандартных круговых областей, обозначим через S класс всех аналитических функций $w=f(z)$, которые в верхней полуплоскости ($\mathrm{I}z>0$) регулярны и принимают значения из верхней же полуплоскости ($\mathrm{I}w>0$). В известной лемме Шварца [1] устанавливается важное неравенство относительно функций класса S.

Обозначим, далее, через $S(a, b)(-\infty<a, b<\infty)$ класс всех тех функций из S, которые на полуоси $-\infty<\mathrm{R}z<a$ регулярны и принимают значения, принадлежащие полуоси $-\infty<\mathrm{R}w<b$. Класс $S(a, b)$ фигурирует в лемме Левнера [1].

В настоящей заметке рассматривается класс $S(a, \infty)$. Мы устанавливаем для этого класса одно общее предложение (теорема 2). Частный случай этого предложения (теорема 1) содержит как лемму Шварца так и лемму Левнера.

2. *Теорема 1.* Пусть функция $w=F(z)$ принадлежит классу $S(a, \infty)$ и пусть $F(i)=i$. В таком случае значение ω этой функции в произвольно выбранной точке $z=\zeta$ ($\mathrm{I}\zeta>0$) лежит внутри или на границе некоторого кругового сегмента $D(a, \zeta)$ плоскости w.

Этот сегмент является конформным отображением при помощи функции

$$\omega=\zeta+\frac{1+\zeta^2}{t-\zeta}$$

изображенного на фиг. 1 угла величины

$$\varphi=\pi-\arg(\zeta-a)$$

плоскости комплексной переменной t.

Вершинами сегмента суть точки $A(w=\zeta)$ и $B\left(w=\frac{1+a\zeta}{a-\zeta}\right)$. Одной из границ является отрезок прямой BA, содержащий эти точки. Второй границей является дуга ACB окружности K, имеющей центром точку

$$\frac{1+|\zeta|^2}{2\eta}i \qquad (\zeta=\xi+i\eta).$$

Если значение ω попадает на дугу ACB, то

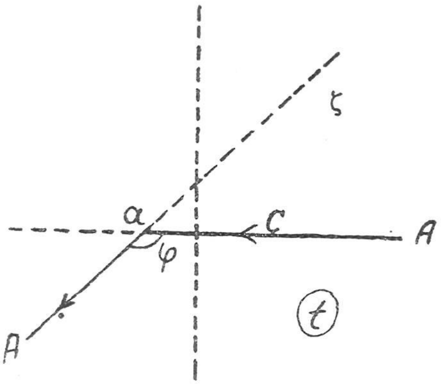
$$F(z)\equiv\frac{1+\lambda z}{\lambda-z}$$

при некотором λ из интервала $[a, \infty]$. Если же значение ω попадает на отрезок BA, то

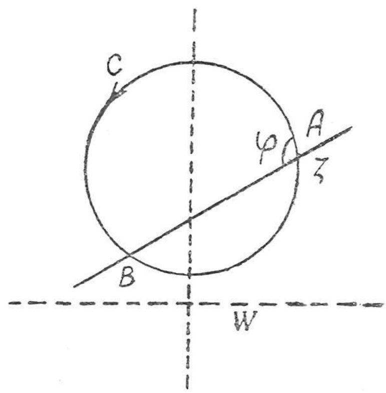
$$F(z) = z(1-\mu) + \mu \frac{1+az}{a-z}$$

при некотором значении μ из интервала $[0, 1]$.

Не мешает заметить, что K есть неевклидова окружность с неевклидовым центром $w = i$, проходящая через точку $w = \zeta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Из теоремы 1 лемма Шварца получается как предельный случай ($a \to -\infty$). Действительно, если $a \to -\infty$, то $\varphi \to \pi$. В пределе мы получаем полный круг Q с окружностью K, а класс $S(a, \infty)$ переходит в класс S. Из теоремы 1 следует, что неевклидово расстояние от точки ω до точки i не должно превосходить неевклидово расстояние от точки ζ до точки i, а в этом и состоит основная часть леммы Шварца.

4. Чтобы получить из теоремы 1 лемму Левнера, докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма. Если

$$\frac{F(z) - F(i)}{F(z) - \overline{F(i)}} = \frac{z-i}{z+i} \, \frac{G(z) - i}{G(z) + i},$$

то утверждения

$$\alpha)\ F(z) \in S(a, \infty),$$
$$\beta)\ G(z) \in S(a, -a)$$

эквивалентны.

Доказательство. Докажем, что α) влечет β). Функция

$$\varphi(z) = \frac{F(z) - F(i)}{F(z) - \overline{F(i)}} : \frac{z-i}{z+i}$$

в верхней полуплоскости регулярна и в силу принципа максимума модуля она в этой области по модулю меньше единицы*. А так как на полуоси $-\infty < \mathrm{R}z < a$ функция $\varphi(z)$ регулярна и по модулю равна единице, то во всяком случае $G(z) \in S(a, \infty)$.

Пусть точка z движется по вещественной оси от точки $-\infty$ до точки a. Тогда

$$\arg \frac{z-i}{z+i}$$

* Если исключить тривиальный случай, когда (z) есть константа.

будет возрастать от 0 до некоторого $\vartheta < 2\pi$. Что же касается

$$\arg \frac{G(z) - i}{G(z) + i}$$

то он будет возрастать в интервале, скажем, от σ до τ. Тогда изменение

$$\arg \frac{F(z) - F(i)}{F(z) - \overline{F(i)}},$$

будеть происходить в интервале $[\sigma, \tau + \vartheta]$. Этот интервал должен составлять часть* интервала $[0, 2\pi]$. Поэтому $\tau \leqslant 2\pi - \vartheta$, то есть значения функции $G(x)$ при $-\infty < x < a$ принадлежат во всяком случае полуоси $-\infty < v < -a$. Доказательство закончено.

Аналогично доказывается, что β) влечет α).

5. Обратимся к выводу леммы Левнера из теоремы 1. Пусть $G(z) \in S(a, b)$ и пусть $G(\zeta) = \Omega$. Положим $\widetilde{G}(z) = G(z) - b - a$, так что $\widetilde{G}(z) \in S(a, -a)$, и пусть $\widetilde{G}(\zeta) = \widetilde{\Omega} = \Omega - a - b$. В соответствии с леммой предыдущего n° введем функцию

$$F(z) = \frac{z\widetilde{G}(z) - 1}{\widetilde{G}(z) + z},$$

которая принадлежит $S(a, \infty)$ и для которой

$$F(i) = i, \quad F(\zeta) = \omega = \frac{\zeta\widetilde{\Omega} - 1}{\widetilde{\Omega} + \zeta},$$

откуда

$$\widetilde{\Omega} = \frac{1 + \zeta\omega}{\zeta - \omega}.$$

Область $D(a, \zeta)$, в которой изменяется ω, известна по теореме 1. Нахождение области $\widetilde{\Delta}(a, \zeta)$, в которой изменяется $\widetilde{\Omega}$, сводится к конформному отображению угла в плоскости t, изображенного на фиг. 1, при помощи функции

$$\widetilde{\Omega} = \frac{1 + \zeta^2 + \dfrac{1 + \zeta^2}{t - \zeta^2}\zeta}{-\dfrac{1 + \zeta^2}{t - \zeta}} = -t.$$

Мы получаем в качестве области $\widetilde{\Delta}(a, \zeta)$ угол величины φ с вершиной в точке $w = -a$, одной стороной которого является полуось $-\infty < Rw < -a$.

Искомая область $\Delta(a, b; \zeta)$ изменения точки Ω есть угол величины φ с вершиной в точке $w = b$, одной стороной которого является полуось $-\infty < Rw < b$.

В этом состоит основная часть леммы Левнера.

---

* В противном случае в некоторой точке x из $(-\infty, a)$ мы имели бы равенство

$$\frac{F(x) - F(i)}{F(x) - \overline{F(i)}} = 1,$$

которое невозможно, так как $F(i) \neq \overline{F(i)}$, а $F(x)$ в интервале $(-\infty, a)$ регулярна.

6. Всякая функция класса $S(a, \infty)$ допускает представление

$$g(z)=\alpha+\mu+\int_a^\infty \frac{1+zt}{t-z}\,d\sigma(t) \qquad (\mathrm{I}z>0)$$

где $\mu \geqslant 0$ и α — вещественные константы, а $\sigma(t)$ — ограниченная неубывающая функция. Если положить $a=-\infty$, то мы получим представление функции класса S. Эти представления единственны, если ввести понятную нормировку функции $\sigma(t)$.

Теорема 1 является частным случаем ($n=1$) следующего предложения.

Теорема 2. Для того чтобы существовала функция $F(z)\in S(a, \infty)$, удовлетворяющая условиям

$$F(z_\alpha)=w_\alpha \qquad (\mathrm{I}z_\alpha>0, \quad \alpha=1, 2, \ldots n),$$
$$F(z_{n+1})=F(i)=iT=w_{n+1}\,(T>0)^*,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых ξ_α, η_β

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{w_\alpha-\overline{w}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\,\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}\geqslant 0\\ &\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\Omega_\alpha-\overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\alpha}\,\eta_\alpha\overline{\eta_\beta}\geqslant 0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где

$$\Omega_\alpha=\frac{(w_\alpha-Tz_\alpha)(z_\alpha-a)}{1+z^2{}_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство А. Необходимость. Пусть требуемая функция

$$F(z)=\mu z+\int_a^\infty \frac{1+tz}{t-z}\,d\sigma(t)$$

существует. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{w_\alpha-\overline{w}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\,\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}=\mu\left|\sum_{\alpha=1}^{n+1}\xi_\alpha\right|^2+\int_a^\infty\left|\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\xi_\alpha}{t-z}\right|^2(1+t^2)\,d\sigma(t)\geqslant 0. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\frac{\{F(z)-Tz\}(z-a)}{1+z^2}=-\int_a^\infty d\sigma(t)=\int_a^\infty\frac{(t-a)\,d\sigma(t)}{t-z}$$

и значит

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\Omega_\alpha-\overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\,\eta_\alpha\overline{\eta_\beta}=\int_a^\infty\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\eta_\alpha}{t-z_\alpha}\right|^2(t-a)\,d\sigma(t)\geqslant 0. \tag{3}$$

В. Достаточность мы докажем, опираясь на следующий факт функционального анализа, относящийся к пространству $C[l, \infty]$ не-

* Делаемое нами предположение, что $z_{n+1}=i$, $w_{n+1}=iT$ $(T>0)$, очевидно не ограничивает общности.

прерывных функций $\varphi(t)$ в замкнутом интервале $[l, \infty]$*: если Φ есть линейный функционал в подпространстве $H \subset C(l, \infty)(a \leqslant l < \infty)$ с нормой $\|\Phi\|_H$, то существует такая функция ограниченной вариации $\sigma(t)$ и такое число λ, что

$$|\lambda| + \operatorname{var} \sigma(t) = \|\Phi\|_H$$

и

$$\Phi(\varphi) = \lambda\varphi(\infty) + \int\limits_l^\infty \varphi(t)\, d\sigma(t) \qquad (\varphi(t) \in H);$$

если к тому же любая функция $\varphi(t) \in H$ равна нулю при $t = \infty$, то $\lambda = 0$.

Обозначим через H линейную оболочку совокупности функций

$$1, \ \frac{1 + z_m t}{t - z_m}, \ \frac{1 + \bar{z}_m t}{t - \bar{z}_m} \qquad \begin{matrix}(a \leqslant t \leqslant \infty) \\ (m = 1, 2, \ldots n).\end{matrix}$$

Определим в H аддитивный и однородный функционал Φ, полагая

$$\Phi(1) = T, \quad \Phi\left(\frac{1 + z_m t}{t - z_m}\right) = w_m, \quad \Phi\left(\frac{1 + \bar{z}_m t}{t - \bar{z}_m}\right) = \bar{w}_m.$$

Условие (1) выражает, что Φ есть позитивный функционал в H. Действительно, пусть

$$g(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ A_k \frac{1 + z_k t}{t - z_k} + \bar{A}_k \frac{1 + \bar{z}_k t}{t - \bar{z}_k} \right\} \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant \infty).$$

Отсюда следует, что

$$g(t) = \frac{|P_n(t)|^2}{\prod\limits_{\alpha=1}^n |t - z_\alpha|^2} + \frac{(t-a)\,|Q_{n-1}(t)|^2}{\prod\limits_{\alpha=1}^n |t - z_\alpha|^2} = g_1(t) + g_2(t),$$

где $P_n(t)$, $Q_{n-1}(t)$ многочлены степени n и $n - 1$. Так как

$$\frac{g_1(t)}{1 + t^2} = \left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\xi_k}{z - z_k} \right|^2 = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n+1} \frac{\xi_\alpha \bar{\xi}_\beta}{(t - z_\alpha)(t - \bar{z}_\beta)},$$

то

$$g_1(t) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n+1} \frac{1}{z_\alpha - \bar{z}_\beta} \left\{ \frac{1 + t z_\alpha}{t - z_\alpha} - \frac{1 + t \bar{z}_\beta}{t - \bar{z}_\beta} \right\} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$$

и значит

$$\Phi(g_1) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n+1} \frac{w_\alpha - \bar{w}_\beta}{z_\alpha - \bar{z}_\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta \geqslant 0.$$

С другой стороны

$$g_2(t) = (t - a) \left| \sum_{\alpha=1}^n \frac{\eta_\alpha}{t - z_\alpha} \right|^2 = \sum_{\alpha, \beta = 1}^n \frac{\eta_\alpha \bar{\eta}_\beta}{z_\alpha - \bar{z}_\beta} \left\{ \frac{z_\alpha - a}{t - z_\alpha} - \frac{\bar{z}_\beta - a}{t - \bar{z}_\beta} \right\}.$$

А так как

$$\frac{1}{t - z_\alpha} = \frac{1}{1 + z_\alpha^2} \left\{ \frac{1 + t z_\alpha}{t - z_\alpha} - z_\alpha \right\},$$

* Если $a = -\infty$, будем требовать, чтобы $\varphi(-\infty) = \varphi(\infty)$.

то

$$\Phi\left(\frac{z_\alpha - a}{t - z_\alpha}\right) = \frac{z_\alpha - a}{1 + z_\alpha^2}(w_\alpha - z_\alpha T) = \Omega_\alpha$$

и, следовательно,

$$\Phi(g_2) = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\Omega_\alpha - \overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta}\eta_\alpha \overline{\eta}_\beta \geqslant 0.$$

Из позитивности функционала $\Phi(g)\,(g \in H)$ легко заключить, что он ограничен, и что $\|\Phi\|_н = T$. В самом деле, пусть $g(t) \in H$ и $|g(t)| \leqslant M\,(a \leqslant t \leqslant \infty)$. В таком случае при любом вещественном θ

$$R\{e^{i\theta} g(t)\} + M \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant \infty)$$

и в силу позитивности функционала

$$R\{e^{i\theta}\Phi(g)\} + MT \geqslant 0,$$

откуда

$$|\Phi(g)| \leqslant \|g\| \cdot T,$$

А так как

$$\Phi(1) = T,$$

то

$$\|\Phi\|_н = T.$$

На основании приведенного выше общего предложения существует такая константа μ и такая функция ограниченной вариации

$$\sigma(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant \infty),$$

что

$$\Phi(g) = \mu g(\infty) + \int_a^\infty g(t)\,d\sigma(t) \qquad (g(t) \in H),$$

то

$$|\mu| + \mathrm{var}\,\sigma(t) = T.$$

Но $\Phi(1) = T$. Значит $\sigma(t)$ — неубывающая функция, а $\mu \geqslant 0$. Теперь остается положить

$$F(z) = \mu z + \int_a^\infty \frac{1 + zt}{t - z}\,d\sigma(t).$$

7. Формулы (2), (3) позволяют сделать следующее

Добавление к теореме 2. Если формы (1) неотрицательны и при некоторой нетривиальной системе чисел ξ_α или η_β одна из них обращается в нуль, то функция $F(z) \in S(a, \infty)$ единственна и имеет вид

$$F(z) = \mu z + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1 + t_k z}{t_k - z},$$

где

$$\mu \geqslant 0, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty.$$

Если речь идет о классе S вместо класса $S(a, \infty)$, то доказательство теоремы 2 упрощается, а второе из условий (1) отпадает, и мы получаем известную теорему [2] (которая в несколько более узкой форме была впервые доказана Пиком) о том, что первое из условий (1) необходимо и достаточно, чтобы $F(z) \in S$ и $F(z_m) = w_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие. Для того чтобы функция $F(z)$ принадлежала классу $S(a, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы принадлежали классу S обе функции $F(z)$ и

$$\{F(z) - \mathrm{R}\, F(i)\} \frac{z-a}{1+z^2} + \frac{\mathrm{I} F(i)}{1+z^2} (1 + az).$$

В заключение отметим, что классы $S(a, \infty)$ и $S(a, b)$ в связи с некоторыми проблемами моментов изучались нами в наших прежних работах [3].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, стр. 54 и 58, 1941.
2. Н. Ахиезер и М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, стр. 147, 1938.
3. Н. Ахиезер и М. Крейн. Сообщения Харьковского Математич. Общества, 4, томы IX, X.