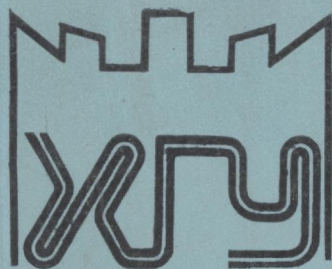


К-14038

П308894



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

✓ К-14038
П308894

273'85

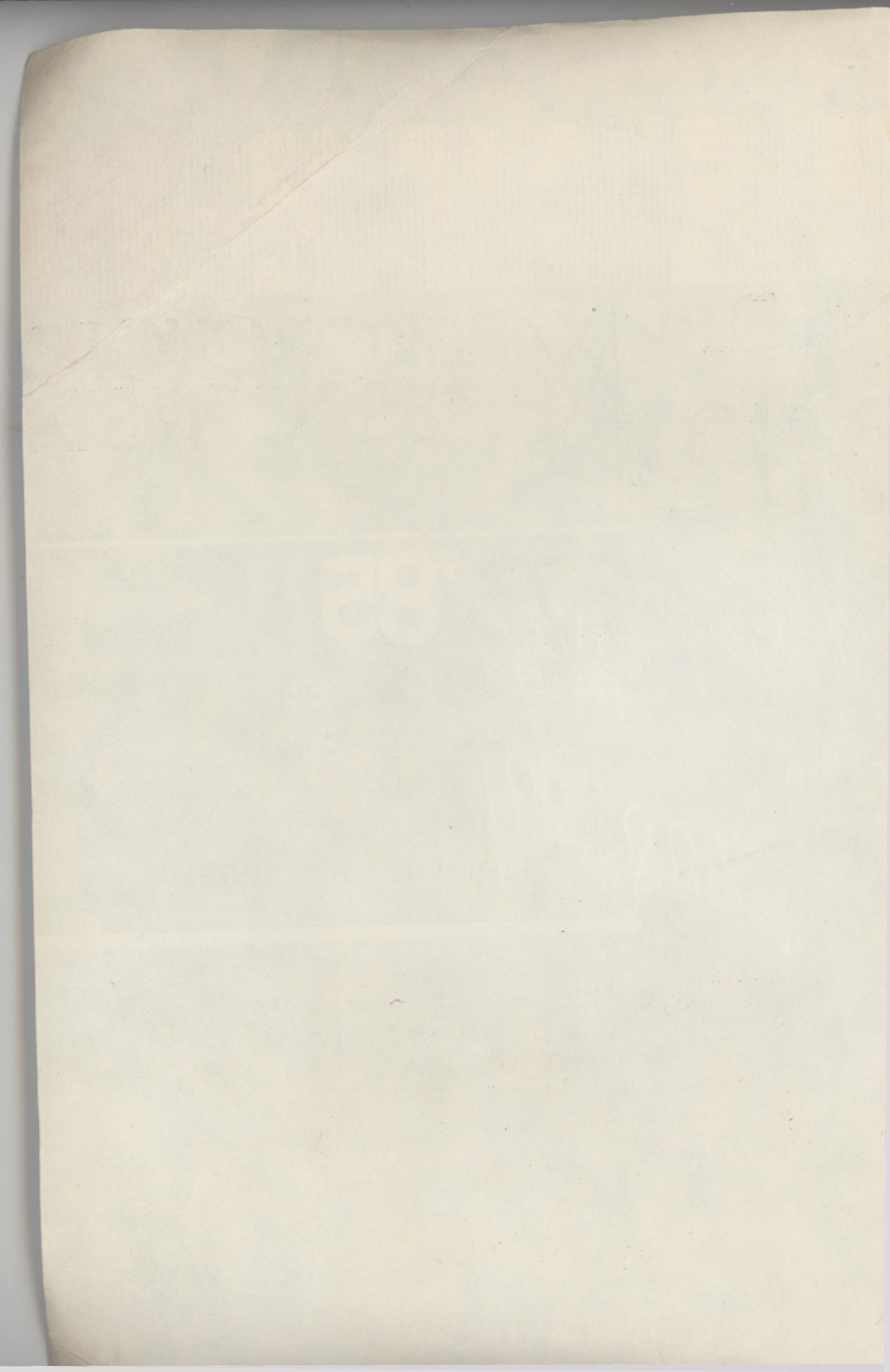
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ
В СРЕДАХ

»ВИЩА ШКОЛА«

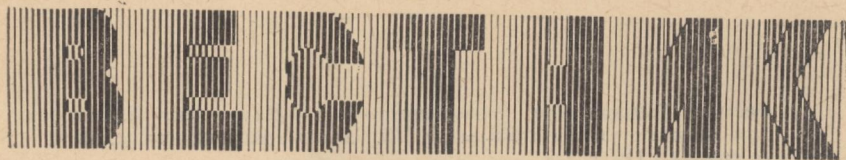
1 p.

Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 273, 1—112.





МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 273

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ
В СРЕДАХ

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1985

Вестник Харьковского университета.— Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985.— № 273. Электромагнитные волны в средах. 112 с.

В вестнике рассмотрены вопросы распространения электромагнитных волн в ионосфере и искусственных средах, дифракции электромагнитных волн на решетках и экранах с учетом дополнительных граничных условий на поверхности примыкающих к ним сред. Освещены аспекты генерирования и излучения волн генераторами дифракционного излучения и твердотельными генераторами.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1985 г.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: Н. А. Хижняк (отв. ред.), Л. Д. Степин (отв. секр.), Н. Н. Горобец, В. А. Мишюра, М. В. Неофитный, Э. Д. Прохоров, В. А. Свич, О. А. Третьяков

Печатается по решению Ученого совета радиофизического факультета (протокол № 7 от 17 февраля 1984 г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, радиофизический факультет, тел. 40-14-76

Редакция естественнонаучной литературы

А. А. ГОЛЫНКИН

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НАГРЕВА ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ
В РЕЖИМАХ С ОБОСТРЕНИЕМ**

Вопросы локализации греющего воздействия на ионосферу связаны с задачами нелинейной теплопроводности [1, 2]. Определенные успехи в решении последних достигнуты А. А. Самарским и его сотрудниками, в частности ими обнаружен и исследован эффект инерции тепла, состоящий в следующем. В соответствии с известным принципом термодинамики, любые температурные неоднородности со временем выравниваются. «Инерция» тепла означает противоположное — при увеличении вклада энергии в среду возмущение некоторое время концентрируется, локализуется на определенном участке среды. Объясняется это зависимостью распространения тепла от пространственной неоднородности распределения температуры в веществе. Кроме того, можно сформировать и поддерживать столь пологое распределение, что тепло в течение конечного времени не будет покидать область локализации.

Создание названных профилей температуры оказывается возможным при нагреве среды в режиме с обострением. Так называют существенно нестационарный процесс, в котором наблюдается степенной рост характерных величин, обуславливающих протекание процесса (например, температуры). При этом обращение их в бесконечность происходит в конечный момент времени — момент обострения. Естественно, в реальных явлениях до момента обострения включаются механизмы, ограничивающие бесконечный рост. Но характерные свойства процесса с обострением, например локализация тепла, могут успевать проявиться до включения ограничивающих обострение факторов. Конкретный временной масштаб процесса обострения определяется выбранной моделью, скажем, применимостью закона Фурье для теплопроводности, отсутствием газодинамических движений и т. п. Темп обострения должен быть определенным образом связан с параметрами теплопроводности среды. В противном случае и в режимах с обострением локализации тепла не наступает, так как тепла в среду поступает больше, чем необходимо для формирования пологого профиля.

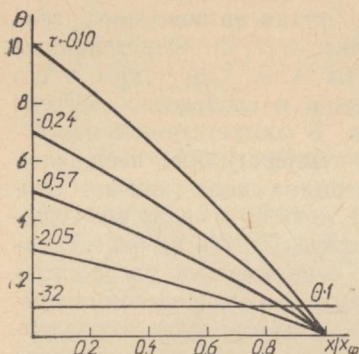
Рассмотрим нагрев F -области ионосферы вблизи уровня отражения мощной волны. Идеализация процесса приводит к задаче нагрева однородного плазменного полупространства горячей стен-

Кой-областью отражения, температура которой задается амплитудой радиоволны и изменяется во времени по закону:

$$\theta(\tau) = A(-\tau)^n; \quad \theta \equiv (T_e - T_{e0})T_{e0}^{-1}; \quad \tau = \delta_0 v_0 t, \quad (1)$$

T_e — температура электронов; δ — коэффициент передачи энергии; v — частота соударений; t — время; n — константа; знак «минус» безразмерного времени τ выбран для удобства, $-\infty < \tau < \infty$, причем в момент обострения $\tau = 0$; A — энергетическая константа процесса, индекс «0» у начальных величин. Для закона модуляции, обеспечивающего (1), определим условия и толщину области локализации. В области F ионосферы передача энергии из электронной подсистемы «резервуару» малоэффективна и с ростом температуры ухудшается, а теплопередача в электронном газе существенна. Уравнение теплового баланса в этих условиях принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad x = \frac{z}{L_T}, \quad L_T = (\kappa_{e0}/\delta_0 v_0)^{1/2}, \quad (2)$$



κ_0 — удельная теплопроводность электронного газа; z — вертикальная координата, зависимость теплопроводности от температуры $\kappa_e = \kappa_{e0} \theta^\sigma$.

На развитой стадии процесса, когда вкладываемая энергия превышает начальную примерно на порядок, решение уравнения (2) выходит на автомодельный режим. При условии $n = \sigma^{-1}$ уравнение типа (2) имеет автомодельное решение:

$$\Theta(x, \tau) = \begin{cases} A(-\tau)^{-1/\sigma} (1 - x/x_\phi)^{2/\sigma}, & x \leq x_\phi; \\ 0, & x > x_\phi; \end{cases} \quad x_\phi = [2A^\sigma(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}, \quad (3)$$

начальные и граничные условия детально обсуждаются в работе [2].

Решение (3) описывает стоячую тепловую волну, которая при увеличении вклада тепловой энергии растет по амплитуде, но полуширина нагретой области сохраняется, тепло не проникает дальше $x = x_\phi$.

На рисунке приведены результаты расчета $\Theta(x, \tau)$ для следующих значений параметров [3]: $\delta_0 v_0 = 1$, $L_T = 10^5$ см, $\sigma = 5/2$, $A = 4$. При этом глубина прогрева задана $z = 10L_T$, температура в начале процесса $\Theta_0 = 1$ ($\tau = -32$), в конце $\Theta = 10$ ($\tau = -0,1$), время прогрева ~ 32 с. Учет осложняющих факторов (ненулевого температурного фона, газодинамических движений, отличия реальных зависимостей от степенных), производившийся с помощью машинного эксперимента, показывает, что для некоторой эффективной глубины прогрева локализация сохраняется и в этих случаях.

Таким образом, выбирая закон модуляции, обеспечивающий равенства (1), можно создавать с помощью управляемого локального прогрева области заданного размера с параметрами, существенно отличными от фоновых, что может иметь применение в практических приложениях.

Список литературы: 1. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1963, № 4, с. 703—719. 2. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. — В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. М., 1982, с. 217—243. 3. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

Поступила в редколлегию 16.12.83.

УДК 535. + 543.47 + 621.396.96

Н. Н. ГОРОБЕЦ, д-р физ.-мат. наук,
Ю. И. ДАВИДЧЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Г. М. ЧЕКАЛИН

СОБСТВЕННЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ КАК КРИТЕРИИ В ФАЗОРНОЙ ЭЛЛИПСОМЕТРИИ

При отражении, дифракции и прохождении электромагнитной волны через различные среды ее поляризация в общем случае изменяется. Это явление положено в основу методики получения информации о свойствах, состояниях и параметрах материалов, сред, тел, т. е. различных электродинамических объектов. «Эллипсометрия» — такое название получила данная методика [1—7] — понимается в широком смысле — для различных взаимодействий и диапазонов волн. Одно из направлений ее развития связано с «собственными поляризациями». Известно, что при взаимодействии волны с веществом или телом можно подобрать в зондирующей волне определенные поляризации, которые не изменяются. Такие поляризации названы собственными. Как параметр взаимодействия волны собственные поляризации рассматривались ранее [6]. В работе [5] они также вводятся, однако используются в неявной форме как методологический критерий двояко: во-первых, если они априорно известны или неизвестны, во-вторых, если принадлежат к определенным группам собственных поляризаций (круговых, линейных ортогональных, эллиптических). Исходные соотношения, из которых следуют их методологические свойства, в работе [5] отсутствуют.

Нами выводятся основные эллипсометрические соотношения, куда входят собственные поляризации как численный критерий, определяющий их методологические свойства. Получены ответы на вопросы: что дает априорная известность собственных поляризаций и их принадлежность к одной из трех групп.

Рассмотрим так называемый фазорный подход в эллипсометрии, начатый в [5] и продолженный в [6]. Сущность его заключается в использовании свойств функции комплексного переменного — поляризационной передаточной функции взаимодействия, переменными которой служат комплексные параметры поляризации — фазоры, т. е. отношения комплексных амплитуд базисных компонент одного из векторов волны (обычно вектора E). В [5] фазорами названы сами комплексные амплитуды, что в отечественной литературе не принято.

Введем два фазора как комплексные параметры поляризации эллиптически поляризованной (в общем случае) волны, вектор E которой представлен, например, в линейно поляризованном базисе ортов x^0, y^0 ТЕМ-плоскости:

$$E = E_x + E_y = x^0 E_x \cos(\omega t + \varphi_x) + y^0 E_y \cos(\omega t + \varphi_y). \quad (1)$$

Один фазор — по линейно поляризованному базису

$$\dot{p} = j \frac{\dot{E}_y}{\dot{E}_x}, \quad (2)$$

где $\dot{E}_x, \dot{E}_y$ — комплексные амплитуды векторных линейно поляризованных гармоник E_x и E_y .

Второй фазор — по кругополяризованному базису:

$$\dot{q} = \dot{E}_\pi^* / \dot{E}_{\text{пр}}, \quad (3)$$

где $\dot{E}_{\text{пр}}, \dot{E}_\pi$ — комплексные амплитуды векторных гармоник кругополяризованного базиса эллиптически поляризованной волны, записанной в форме комплексной гармоники.

Фазор $\dot{q}$ просто связан с геометрическими параметрами поляризационного эллипса в ТЕМ-плоскости волны [5]:

$$\dot{q} = \frac{1-r}{1+r} e^{-j2\beta}, \quad (4)$$

где r — коэффициент эллиптичности; β — угол ориентации эллипса. Известна связь обоих фазоров между собой:

$$p = (1-q)/(1+q) \quad (5)$$

(здесь и далее все величины — комплексные, обозначенные без точек). Для широкого класса объектов при различных взаимодействиях гармонической волны связь поляризации падающей (зондирующей) волны E_π и волны отклика E_o функциональна. Математически эта связь описывается дробно-линейной функцией комплексного переменного вида

$$W_o = \frac{a_w W_\pi + b_w}{c_w W_\pi + d_w}, \quad (6)$$

где $W_{\pi, o}$ — комплексные переменные (комплексные параметры поляризации гармонической волны) — фазоры $W \equiv p, q$ (7), $a_w,$

b_w, c_w, d_w — коэффициенты отражения, прохождения, дифракции или их отношения, индексы которых — соответствующие формы фазов. Функция (6) определяет и фазы собственных поляризаций при условии

$$W_0 = W_n = W_c. \quad (8)$$

Тогда из (6) при условии (8) получим уравнение для фазов собственных поляризаций

$$c_w W_c^2 - (a_w - d_w) W_c - b_w = 0. \quad (9)$$

Решениями уравнения (9) будут в общем случае два фазора:

$$W_c = W_{c1, c2} = \frac{a_w - d_w \pm \sqrt{(a_w - d_w)^2 + 4b_w c_w}}{2c_w}. \quad (10)$$

В эллипсометрии основными искомыми параметрами являются отношения коэффициентов (6). Определим эти отношения через фазоры падающей волны W_n , фазоры волны отклика W_0 и фазоры собственных поляризаций W_{c1} и W_{c2} . Для этого воспользуемся теоремой Виета:

$$W_{c1} + W_{c2} = \frac{a - d}{c}; \quad (11)$$

$$W_{c1} W_{c2} = -\frac{b}{c}, \quad (12)$$

где у коэффициентов a, b, c, d опущены индексы. Отношения коэффициентов (6) равны:

$$\rho_1 = \frac{d}{a}, \quad \rho_2 = \frac{b}{a}, \quad \rho_3 = \frac{b}{c}. \quad (13)$$

Подставив (12) в (6), получим одно уравнение, а разделив соответственно левые и правые части (11) и (12), второе уравнение для ρ_1 и ρ_2 :

$$W_0 \rho_1 - \left(1 + \frac{W_n W_0}{W_{c1} W_{c2}}\right) \rho_2 = W_n; \quad (14)$$

$$\rho_1 - \frac{W_{c1} + W_{c2}}{W_{c1} W_{c2}} \rho_2 = 1. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) образуют систему двух линейных уравнений, решение которой существует и единственно, если $\Delta_a \neq 0$ (16), где

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} W_0 - \left(1 + \frac{W_n W_0}{W_{c1} W_{c2}}\right) \\ 1 - \frac{W_{c1} + W_{c2}}{W_{c1} W_{c2}} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Посмотрим, к чему приводит условие $\Delta_a = 0$ (18). Из неравенства (17) при этом условии получим

$$W_0 = \frac{W_{c1} W_{c2}}{-W_n + W_{c1} + W_{c2}}. \quad (19)$$

Сравнивая выражения (19) и (6), определим коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} a &= 0; & c &= -1; \\ b &= W_{c1} W_{c2}; & d &= W_{c1} + W_{c2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Отсюда видно, что существование решений системы (14), (15) связано с условием $a \neq 0$ (21). Далее по известному правилу Крамера находим решения системы

$$\rho_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_a}, \quad \rho_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_a}, \quad (22)$$

где

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{c} W_n - \left(1 + \frac{W_n W_0}{W_{c1} W_{c2}} \right) \\ 1 - \frac{W_{c1} + W_{c2}}{W_{c1} W_{c2}} \end{array} \right| \quad (23), \quad \Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} W_0 & W_n \\ 1 & 1 \end{array} \right|. \quad (24)$$

Раскрыв определители Δ_1 , Δ_2 , Δ_a , запишем искомые отношения:

$$\rho_1 = \frac{W_n (W_{c1} + W_{c2}) - (W_n W_0 + W_{c1} W_{c2})}{W_0 (W_{c1} + W_{c2}) - (W_n W_0 + W_{c1} W_{c2})}; \quad (25)$$

$$\rho_2 = \frac{(W_0 - W_n) W_{c1} W_{c2}}{W_0 (W_{c1} + W_{c2}) - (W_n W_0 + W_{c1} W_{c2})}. \quad (26)$$

Полученные решения позволяют ответить на первый из поставленных вопросов: что дает знание собственных поляризаций. Если известны численные значения фазов W_{c1} , W_{c2} , то искомые эллипсометрические параметры ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 можно получить следующим образом. Параметр ρ_3 находим из уравнения (12), а ρ_1 , ρ_2 — с помощью эксперимента, в ходе которого фазор зондирующей волны W_n известен, а фазор волны отклика W_0 определяем любым из способов необобщенной [5] эллипсометрии (суть необобщенной эллипсометрии и состоит в возможности получить искомые эллипсометрические параметры посредством измерения только одного фазора W_0).

Если фазоры неизвестны, переходим к обобщенной эллипсометрии и рассчитываем параметры $\rho_{1,2,3}$ по результатам трехкратного зондирования волнами, фазоры которых W_{n1} , W_{n2} , W_{n3} известны, а соответствующие фазоры отклика W_{01} , W_{02} , W_{03} определяем экспериментально методами необобщенной или обобщенной эллипсометрии.

Таким образом, априорное знание или незнание собственных поляризаций служит критерием при выборе метода эллипсометрии.

Рассмотрим далее, что дает знание принадлежности собственных

поляризаций к различным группам. Для наглядности обозначим группы собственных поляризаций:

Группа	Характеристика
Г-1	Круговые
Г-2	Линейные ортогональные отражательной эллипсометрии
Г-3	Эллиптические произвольные

Найдем численные значения фазов q_{c1} , q_{c2} , p_{c1} , p_{c2} для каждой из групп.

Г-1. Как известно, численные значения геометрических параметров круговых поляризаций определяются только коэффициентом эллиптичности:

$$r_{c1}^{(1)} = 1, \quad r_{c2}^{(1)} = -1. \quad (27)$$

Тогда по (4) и (5) получим численные значения фазов:

$$\begin{aligned} q_{c1}^{(1)} &= 0, \quad q_{c2}^{(1)} = \infty; \\ p_{c1}^{(1)} &= 1, \quad p_{c2}^{(1)} = -1. \end{aligned} \quad (28)$$

Г-2. Определим поляризацию волн, фазоры которых являются собственными поляризациями этой группы. Для этого рассмотрим классическую (Снеллеву) задачу падения и отражения плоской однородной волны на идеально гладкую и плоскую поверхность раздела двух изотропных диэлектриков. Совместим орт $\mathbf{x}^0$ ТЕМ-плоскости волны с плоскостью падения. Тогда орт $\mathbf{y}^0$ будет перпендикулярен плоскости падения. Известно, что не изменят поляризации (будут собственными) векторы $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{E}_y$:

$$\mathbf{E}_{c1} = \mathbf{x}^0 \mathbf{E}_x, \quad \mathbf{E}_{c2} = \mathbf{y}^0 \mathbf{E}_y. \quad (29)$$

Геометрические параметры поляризации этих ортогональных векторов

$$\begin{aligned} r_{c1}^{(2)} &= 0, \quad \beta_{c1}^{(2)} = 0; \\ r_{c2}^{(2)} &= 0, \quad \beta_{c1}^{(2)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (30)$$

По коэффициенту эллиптичности и углу ориентации векторов $\mathbf{E}_{c1}$ и $\mathbf{E}_{c2}$ определим из уравнений (4) и (5) их фазоры:

$$\begin{aligned} q_{c1}^{(2)} &= 1, \quad q_{c2}^{(2)} = -1; \\ p_{c1}^{(2)} &= 0, \quad p_{c2}^{(2)} = \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

Сравнивая (31) с (28), отметим двойственность численных значений фазов для Г-1 и Г-2. Поэтому вопрос о том, что дает принадлежность к первой и второй группам будем решать только для

Г-1. Как видим из (28) и (31), фазоры Г-1 принадлежат к характерным точкам плоскостей фазоров q и p (или более наглядно — к их отображениям на сферу Пуанкаре). Г-3. Их численные значения принадлежат всем остальным (нехарактерным) точкам плоскостей фазоров q и p (отображениям на сферу Пуанкаре).

Получим основные эллипсометрические параметры ρ_1, ρ_2, ρ_3 собственных поляризаций первой группы, подставив (28) в (25) и (26). Для фазорной формы q

$$W_{c1}^{(1)} \equiv q_{c1}^{(1)} = 0, \quad W_{c2}^{(1)} \equiv q_{c2}^{(1)} = \infty. \quad (32)$$

Тогда (25) и (26) будут иметь вид

$$\rho_1^{(1)}(q) = \frac{q_p}{q_0} \quad (33); \quad \rho_2^{(1)}(q) = 0. \quad (34)$$

Учитывая (21) и (11), получаем $b_q^{(1)} = c_q^{(1)} = 0$ (35). Для фазорной формы p

$$W_{c1}^{(1)} \equiv p_{c1}^{(1)} = 1; \quad W_{c2}^{(1)} \equiv p_{c2}^{(1)} = -1. \quad (36)$$

Тогда (25) и (26) запишутся так:

$$\rho_1^{(1)}(p) = \frac{d_p^{(1)}}{a_p^{(1)}} = 1; \quad (37)$$

$$\rho_2^{(1)}(p) = \frac{p_0 - p_p}{p_0 p_p - 1}. \quad (38)$$

Выражение (37) определяет соотношение коэффициентов $d_p^{(1)} = a_p^{(1)}$ (39). Аналогичные выражения (с учетом двойственности) и соотношения коэффициентов для Г-2:

$$\rho_1^{(2)}(p) = \frac{p_p}{p_0} \quad (40); \quad b_p^{(2)} = c_p^{(2)} = 0; \quad (41)$$

$$\rho_2^{(2)}(q) = \frac{q_0 - q_p}{q_0 - q_p - 1} \quad (42); \quad d_q^{(2)} = a_q^{(2)}. \quad (43)$$

Полученные результаты имеют также методологический характер. В случае принадлежности к Г-1 или Г-2, во-первых, остается одно эллипсометрическое отношение, во-вторых, оно упрощается, в-третьих, появляются соотношения коэффициентов, определяющие принадлежность к одной из групп. Соотношения коэффициентов таковы:

$$\text{Г-1: } b_q^{(1)} = c_q^{(1)} = 0; \quad d_p^{(1)} = a_p^{(1)};$$

$$\text{Г-2: } b_p^{(2)} = c_p^{(2)} = 0; \quad d_q^{(2)} = a_q^{(2)}.$$

Известная принадлежность к Г-3 упрощения не дает, отношения находят по полным формулам (25), (26).

Список литературы: 1. Урывский Ю. И. Эллипсометрия. — Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1971. — 131 с. 2. Горшков М. М. Эллипсометрия. — М. : Сов. радио, 1974. — 22 с. 3. Ржанов А. В., Свитаев К. К., Семенов А. И. Основы эллипсометрии. — Новосибирск : Наука, 1979. — 419 с. 4. Современные проблемы эллипсометрии / Под ред. А. В. Ржанова. — Новосибирск : Наука, 1980. — 192 с. 5. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. — М. : Мир, 1981. — 583 с. 6. Канарейкин Д. Б., Павлов Н. Ф., Потехин В. А. Эллипсометрия. — М. : Сов. радио, 1966. — 440 с. 7. Канарейкин Д. Б., Потехин В. А., Шишкин И. Ф. Морская поляриметрия. — Л. : Судостроение, 1968. — 327 с.

Поступила в редколлегию 26.01.84.

УДК 621.396.67

М. В. НЕСТЕРЕНКО, В. А. ПЕТЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ТОНКИЙ ИМПЕДАНСНЫЙ ВИБРАТОР В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Асимптотическое решение уравнения Поклингтона, полученное методом усреднения для случая идеально проводящей вибраторной антенны [1], справедливо и для антенны, на поверхности которой выполняется импедансное граничное условие [2, 3]. При этом вибратор может находиться в произвольной однородной изотропной (в том числе проводящей) среде [4, 5]. Если r и $2L$ соответственно радиус и длина антенны ($r/L \ll 1$), исходное интегральное уравнение для тока имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1\right) \int_{-L}^L J(s') \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} R}}{R} ds' = -i\omega \varepsilon_1 E_{0s}(s) + i\omega \varepsilon_1 z_i J(s), \quad (1)$$

где z_i — комплексный внутренний импеданс вибратора;

$$z_s = r_s + ix_s = 2\pi r z_i \quad (2)$$

— поверхностный импеданс; $E_{0s}(s)$ — осевая составляющая электрического поля сторонних источников; $R = \sqrt{(s-s')^2 + r^2}$ — расстояние между точками наблюдения и интегрирования; ε_1 и μ_1 — комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала среды ($|kr\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}| \ll 1$); s — продольная координата; $J(s)$ — ток в антенне: $J(\pm L) = 0$.

Следуя методике, развитой в работе [1], уравнение для тока приведем к интегриродифференциальному уравнению с малым параметром*

$$\frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) = \alpha \{i\omega \varepsilon_1 E_{0s}(s) + F_0[s, J(s)] - i\omega \varepsilon_1 z_i J(s)\}, \quad (3)$$

* В дальнейшем обозначим: $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_r + \frac{4\pi\sigma_1}{i\omega}$; σ_1 — проводимость среды.

в котором $\alpha = 1/2 \ln(r/2L)$, а оператор $F_0[s, J(s)]$ определяет некоторую собственную э. д. с., действующую в антенне наряду со сторонней. Выполняя замену переменных

$$J(s) = A(s) \cos ks + B(s) \sin ks, \quad (4)$$

уравнение (3) преобразуем в систему уравнений стандартного вида относительно неизвестных функций $A(s)$ и $B(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{dA(s)}{ds} &= -\frac{\alpha}{k} \{i\omega \epsilon_1 E_{0s}(s) + F_0[s, A(s), B(s)] - \\ &\quad - i\omega \epsilon_1 z_i (A(s) \cos ks + B(s) \sin ks)\} \sin ks; \\ \frac{dB(s)}{ds} &= +\frac{\alpha}{k} \{i\omega \epsilon_1 E_{0s}(s) + F_0[s, A(s), B(s)] - \\ &\quad - i\omega \epsilon_1 z_i (A(s) \cos ks + B(s) \sin ks)\} \cos ks, \end{aligned} \quad (5)$$

которую подвергнем частичному усреднению по явно входящей переменной s . В результате получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}(s)}{ds} &= -\alpha \left\{ \frac{i\omega \epsilon_1}{k} E_{0s}(s) + \bar{F}_0[s, \bar{A}, \bar{B}] \sin ks + \kappa \bar{B}(s) \right\}; \\ \frac{d\bar{B}(s)}{ds} &= +\alpha \left\{ \frac{i\omega \epsilon_1}{k} E_{0s}(s) + \bar{F}_0[s, \bar{A}, \bar{B}] \cos ks - \kappa \bar{A}(s) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\kappa = \alpha (i\omega \epsilon_1 / 2k) z_i$,

$$\bar{F}_0[s, \bar{A}, \bar{B}] = [\bar{A}(s') \sin ks' - \bar{B}(s') \cos ks'] \frac{e^{-ikR}}{R} \Big|_{-L}^L \quad (7)$$

— усредненное собственное поле вибратора в свободном пространстве. После интегрирования системы (6), используя $\bar{A}(s)$ и $\bar{B}(s)$ в качестве аппроксимирующих функций в (4), находим ток в антенне при произвольном возбуждении:

$$\begin{aligned} J(s) &= \bar{A}(-L) \cos[(k + \kappa)s + \kappa L] + \bar{B}(-L) \sin[(k + \kappa)s + \\ &\quad + \kappa L] + \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega \epsilon_1}{k} E_{0s}(s') + \bar{F}_0[s', \bar{A}, \bar{B}] \right\} \times \\ &\quad \times \sin[(k + \kappa)(s - s')] ds'. \end{aligned} \quad (8)$$

Для симметричного возбуждения $\bar{A}(L) = \bar{A}(-L)$, $\bar{B}(L) = -\bar{B}(-L)$ и выражение (8) с точностью до членов второго порядка малости приобретает вид

$$\begin{aligned} J(s) &= -\alpha \frac{i\omega \epsilon_1 / k}{\sin 2\tilde{k}L + \alpha P_s(kr, \tilde{2}kL)} \left\{ \sin \tilde{k}(L - s) \int_{-L}^s E_{0s}(s') \times \right. \\ &\quad \times \sin \tilde{k}(L + s') ds' + \sin \tilde{k}(L + s) \int_s^L E_{0s}(s') \sin \tilde{k}(L - s') ds' \Big\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{k} = k + \kappa$,

$$P_s(kr, 2\tilde{k}L) = \int_{-L}^L \left[\frac{e^{-ik\sqrt{(L+s)^2+r^2}}}{\sqrt{(L+s)^2+r^2}} + \frac{e^{-ik\sqrt{(L-s)^2+r^2}}}{\sqrt{(L-s)^2+r^2}} \right] \sin \tilde{k}(L-s) ds \quad (10)$$

— функция собственного поля: $P_s(kr, 2\tilde{k}L) = 2 \sin \tilde{k}LP(kr, \tilde{k}L)$, которая выражается через обобщенные интегральные функции.

Формулы (9), (10) при $z_i = 0$ и $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ совпадают с аналогичными выражениями работы [1], которые в свою очередь переходят в известные формулы Халлена, Леонтовича и Левина соответствующих приближений. Принимая в качестве уточненной модели возбуждения вибратора $E_{0s}(s) = V_0\delta(s) + \bar{E}_0$, где $\bar{E}_0 = V_0 \frac{\pi}{\lambda} P_0(kr, \tilde{k}L)$, из выражения (9) получим модифицированную формулу Кинга

$$J(s) = -\alpha V_0 \frac{i\omega\varepsilon_1/2k}{\cos \tilde{k}L + \alpha P(kr, \tilde{k}L)} \{ \sin \tilde{k}(L-|s|) + P_0(kr, \tilde{k}L) (\cos \tilde{k}s - \cos \tilde{k}L) \}, \quad (11)$$

с помощью которой решаются многие практические задачи теории тонких проволочных антенн [6, 7].

Таким образом, относительная простота и в то же время достаточная общность получаемых на основе принципов усреднения результатов, описанные в [1] для случая идеальной проводимости, остаются в силе и для рассматриваемой здесь импедансной антенны в веществе. Более того, преимущества найденного асимптотического решения по сравнению с известными в литературе возрастают. В частности, поскольку уравнение (1) справедливо при произвольной реализации поверхностного импеданса, формула (9) пригодна для учета скин-эффекта проводника, а также если вибратор представляет собой диэлектрический стержень, покрытый тонкой пленкой металла, или проводящий стержень с диэлектрической оболочкой [2, 3]. Последнее обстоятельство позволяет с единых позиций проводить исследования изолированных и неизолированных антенн в поглощающей среде [7].

Список литературы: 1. Петленко В. А. Асимптотическое решение интегрального уравнения тонкой антенны. — Вестн. Харьк. ун-та, 1979, № 201. Радиофизика и электроника, вып. 8, с. 24—27. 2. Глушковский Э. А., Левин Б. М., Рабинович Е. Я. Интегральное уравнение для тока в тонком импедансном вибраторе. — Радиотехника, 1967, 22, № 12, с. 18—23. 3. King R., Harrison C., Aronson E. The imperfectly conducting cylindrical transmitting antenna: numerical results. — IEEE Trans, 1966, AP-14, N 5, p. 535—543. 4. Чугунов Ю. В. К теории тонкой металлической антенны в анизотропных средах. — Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12, № 6, с. 830—834. 5. King P. Многогранность изолированной антенны. — Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1976, 64, № 2, с. 43—54. 6. King R., Har-

УДК 621.39

О. В. ЛЬВОВА

ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ Е-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩЕМ ЭКРАНЕ

Одна из классических задач математической теории дифракции — о дифракции плоской волны на бесконечно тонком идеально отражающем экране-полуплоскости впервые решена А. Зоммерфельдом [1].

Большой интерес для многих приложений представляет данная задача в том случае, когда идеально отражающими свойствами экран не обладает. Чтобы корректно сформулировать граничные условия для полного поля, связывающие граничные значения векторов E и H на обеих сторонах экрана, нами решается вспомогательная задача о дифракции плоской электромагнитной волны, наклонно падающей на бесконечный проводящий диэлектрический слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями. Далее отыскивается предел, к которому стремится полученное решение вспомогательной задачи при условии, что одновременно стремятся к нулю толщина h слоя, а к бесконечности — его проводимость $\text{Im}\epsilon$, причем так, что соблюдается соотношение $\lim kh \sqrt{\epsilon} = Q$. Здесь Q — некоторое комплексное число; $k = \omega/c$, где ω — частота*, c — скорость света.

Заменяя коэффициенты прохождения и отражения падающей волны главными членами их асимптотик, найдем предельные граничные условия для электромагнитного поля, имеющие двусторонний характер (условия типа линейного сопряжения).

Предельные граничные условия затем постулируются для дифракционной задачи о дифракции на неидеально проводящей полуплоскости. В качестве примера опишем результаты, относящиеся к случаю E -поляризованных полей. Предельные условия линейного сопряжения, полученные по описанной выше схеме, имеют следующий вид: при $y = 0$ $x > 0$ (предполагается, что экран совмещен с этой полуплоскостью так, что ось Oz является ее краем)

$$\begin{aligned} E_z^- - E_z^+ &= -\frac{i}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{tg} Q (H_x^- + H_x^+), \\ E_z^- + E_z^+ &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{ctg} Q (H_x^- - H_x^+); \end{aligned} \tag{1}$$

* В данной работе предполагается, что множитель, выражающий зависимость векторов поля от времени, имеет вид $e^{-i\omega t}$.

знак «—» означает сторону экрана, обращенную к источнику поля.

Рассмотрим следующую двумерную задачу о дифракции E -поляризованной плоской волны. Пусть на экран-полуплоскость $y = 0$ ($x > 0$) (свойства которого характеризуются граничными условиями

(1) со стороны отрицательных значений y под углом θ_0 ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$) к оси Ox падает плоская волна

$$E^{\text{пад}}(x, y) = (0, 0, E_z^{\text{пад}}(x, y)),$$

где

$$E_z^{\text{пад}}(x, y) = e^{ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}. \quad (2)$$

Требуется найти полное поле, обусловленное наличием экрана-полуплоскости. Полное дифрагированное поле $E(x, y) = (0, 0, E_z(x, y))$ будем искать, представив функцию $E_z(x, y)$ по формуле

$$E_z(x, y) = E_z^{\text{пад}}(x, y) + u(x, y) = e^{ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)} + u(x, y), \quad (3)$$

где $u(x, y)$ — вторичное или рассеянное скалярное поле.

Должны соблюдаться следующие условия:

1) всюду вне экрана функция $u(x, y)$ является ограниченным решением однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad (4)$$

2) на экране $y = 0$ ($x > 0$) полное поле удовлетворяет краевым условиям (1);

3) функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям излучения;

4) в любой ограниченной области пространства поле имеет конечную энергию.

Поскольку условия излучения могут быть заменены принципом предельного поглощения, поставленная задача решается следующим образом. Сначала отыскивается обладающее конечной энергией во всем пространстве вторичное поле $u(x, y)$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (4) при $\text{Im } k > 0$ и обеспечивающее выполнение краевых условий (1); затем в окончательных формулах осуществляется предельный переход при $\text{Im } k \rightarrow +0$.

Функцию $u(x, y)$ ищем в виде преобразования Фурье:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4), получаем с учетом принципа предельного поглощения

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\lambda, y) &= A^+(\lambda) e^{i\kappa(\lambda)y} \quad \text{при } y > 0, \\ \tilde{u}(\lambda, y) &= A^-(\lambda) e^{-i\kappa(\lambda)y} \quad \text{при } y < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $A^\pm(\lambda)$ — функции, подлежащие отысканию; функция $\kappa(\lambda)$ представляет собой ту ветвь двузначной функции $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$, которая определяется разрезами в комплексной плоскости $\lambda = \sigma + i\tau$, идущими из точки $\lambda = k$ вдоль луча $\arg \lambda = \arg k = \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) и из точки $\lambda = -k$ — вдоль луча $\arg \lambda = \arg(-k) = \pi + \varphi$ (рис. 1), а также условием $\text{Im } \kappa \lambda > 0$ в точках вещественной оси плоскости переменной λ .

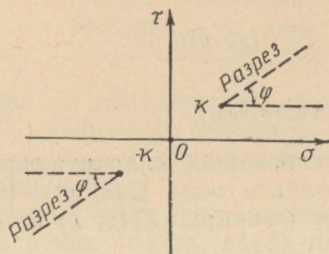


Рис. 1

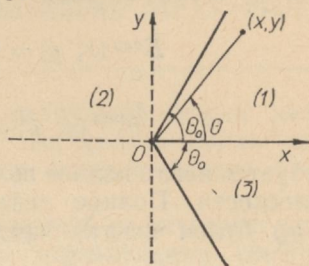


Рис. 2

Сочетая формулы (5) и (6) находим, что

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A^+(\lambda) e^{i[x(\lambda)y - \lambda x]} d\lambda & \text{при } y > 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} A^-(\lambda) e^{-i[x(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Требуя, чтобы при $y = 0$, $x < 0$ функции $u(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ были непрерывными, а при $y = 0$, $x > 0$ соблюдались краевые условия (1), приходим к двум системам парных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 & (x < 0); \\ \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) \kappa(\lambda) K_1(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 2k \sin \theta_0 e^{ikx \cos \theta_0} & (x > 0); \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\lambda) \kappa(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 & (x < 0); \\ \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\lambda) \kappa(\lambda) K_2(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = -2i\delta_2 e^{ikx \cos \theta_0} & (x > 0) \end{cases} \quad (9)$$

относительно функций

$$A_1(\lambda) = A^-(\lambda) - A^+(\lambda), \quad A_2(\lambda) = A^-(\lambda) + A^+(\lambda). \quad (10)$$

Здесь

$$K_j(\lambda) = 1 + \frac{i\delta_j}{\kappa(\lambda)} \quad (j = 1, 2); \quad (11)$$

$$\delta_1 = k\sqrt{\varepsilon} \operatorname{ctg} Q, \quad \delta_2 = -k\sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} Q. \quad (12)$$

Каждая из систем (8) и (9) решается при помощи метода факторизации Винера — Хопфа (см., например, [2]). С этой целью каждая из функций $\kappa(\lambda)$ и $K_j(\lambda)$ ($j = 1, 2$) раскладывается на два множителя:

$$\kappa(\lambda) = \kappa^+(\lambda) \kappa^-(\lambda), \quad K_j(\lambda) = K_j^+(\lambda) K_j^-(\lambda) \quad (j = 1, 2), \quad (13)$$

причем функции $\kappa^+(\lambda) = \sqrt{k + \lambda} (\kappa^+(0) = \sqrt{|k|} e^{i\frac{\varphi}{2}})$ и $K_j^+(\lambda)$ аналитичны и отличны от нуля в верхней полуплоскости (включая вещественную ось), а функции $\kappa^-(\lambda) = \sqrt{k - \lambda} (\kappa^-(0) = \sqrt{|k|} \times e^{i\frac{\varphi}{2}})$ и $K_j^-(\lambda)$ обладают аналогичными свойствами в нижней полуплоскости (рис. 1). При этом факторизация функций $K_j(\lambda)$ осуществляется таким образом, что имеют место равенства

$$K_j^\pm(-\lambda) = K_j^\mp(\lambda) \quad (j = 1, 2). \quad (14)$$

Заметим, что функции $K_j^\pm(\lambda)$ допускают интегральное представление:

$$K_j^\pm(\lambda) = \exp \left[\int_0^\infty \varphi_j(\xi) e^{\pm i\lambda\xi} d\xi \right],$$

308894

где

$$\varphi_j(\xi) = \frac{e^{ik\xi} - e^{is_j\xi}}{2\xi} - \frac{i\delta_j}{4\xi} \int_0^\infty [H_0^{(1)}(k|\xi + u|) - H_0^{(1)}(k|\xi - u|)] e^{is_j u} du;$$

$H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля; $s_j \sqrt{k^2 + \delta_j^2}$ ($\operatorname{Im} s_j > 0$). См. также работу [2].

Решая системы (8), (9) и используя затем равенства (10), находим, что

$$A^\pm(\lambda) = \frac{1}{2\pi(\lambda + k \cos \theta_0)} \left[\frac{\delta_2}{K_2^+(k \cos \theta_0) \kappa(\lambda) K_2^+(\lambda)} \mp \mp \frac{i\sqrt{k(1 - \cos \theta_0)}}{K_1^+(k \cos \theta_0) \kappa^+(\lambda) K_1^+(\lambda)} \right]. \quad (15)$$

Если теперь подставить найденные выражения для функций $A^+(\lambda)$ $A^-(\lambda)$ в (7), то получим рассеянное скалярное поле $u(x, y)$, а следовательно, и искомое полное дифрагированное поле.

Выражение для полного поля может быть преобразовано к другому виду, удобному для последующего анализа. Это представле-

ние существенно зависит от того, в каком из трех интервалов $(0, \Theta_0)$, $(\Theta_0, 2\pi - \Theta_0)$, $(2\pi - \Theta_0, 2\pi)$ находится угол Θ ($0 < \Theta < 2\pi$), который радиус-вектор точки (x, y) составляет с осью Ox , иными словами, в каком из трех секторов рис. 2 расположена точка (x, y) .

1) Если $0 < \Theta < \Theta_0$, то, переходя от интеграла по вещественной оси к интегралу по левой ветви гиперболы $\lambda = -k \cos(\theta + it)$ ($-\infty < t < \infty$) (рис. 3), получаем с учетом формул (11) и (12), что полное поле $E_z(x, y)$ представимо в виде суммы плоской волны, прошедшей через экран, и краевой волны, порожденной краем экрана:

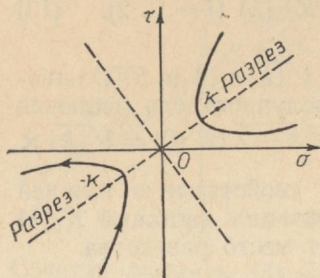


Рис. 3

$$E_z(x, y) = \frac{2i \operatorname{cosec} 2Q \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon}}{\sin^2 \theta_0 + 2i \sqrt{\varepsilon} \operatorname{ctg} 2Q \sin \theta_0 + \varepsilon} \times \\ \times e^{i(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)} + \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) \times \\ \times A^+ [-k \cos(\theta + it)] \sin(\theta + it) e^{ik\rho \cosh t} dt \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Используя метод стационарной фазы (см., например, [3]), легко показать, что при $k\rho \gg 1$ краевая волна допускает асимптотическое представление:

$$\sqrt{2\pi} (-ik) A^+ (-k \cos \theta) \sin \theta (k\rho)^{-\frac{1}{2}} e^{i(k\rho + \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{k\rho}\right) \right].$$

2. Если $\Theta_0 < \Theta < 2\pi - \Theta_0$, то полное поле $E_z(x, y)$ представляет собою сумму падающей плоской волны (2) и краевой волны, равной

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ik) A^+ [-k \cos(\theta + it)] \sin(\theta + it) e^{ik\rho \cosh t} dt \quad \text{при } \theta_0 < \theta < \pi; \\ \int_{-\infty}^{\infty} ik A^- [-k \cos(\theta + it)] \sin(\theta + it) e^{ik\rho \cosh t} dt \quad \text{при } \pi < \theta < 2\pi - \theta_0.$$

Асимптотическое представление краевой волны при больших $k\rho$, как и в предыдущем случае, получаем при помощи метода стационарной фазы.

3. Если $2\pi - \Theta_0 < \Theta < 2\pi$, то полное поле $E_z(x, y)$ представляет собою сумму падающей волны (2), отраженной и краевой:

$$E_z(x, y) = e^{ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)} + \\ + \frac{\sin^2 \theta_0 - \varepsilon}{\sin^2 \theta_0 + 2i \sqrt{\varepsilon} \operatorname{ctg} 2Q \sin \theta_0 + \varepsilon} e^{ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} ik A^- [-k \cos(\theta + it)] \sin(\theta + it) e^{ik\rho \cosh t} dt.$$

Список литературы: 1. Зоммерфельд А. Оптика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 487 с. 2. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 279 с. 3. Копсон Э. Асимптотические разложения.— М.: Мир, 1966.— 159 с.

Поступила в редколлегию 08.04.83.

УДК 538.574.6

И. В. ГОНЧАРЕНКО, В. В. ХОРОШУН, канд. физ.-мат. наук

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ ЛЕНТ В ПЛОСКОСТИ РАЗДЕЛА ВАКУУМ-ФЕРРИТ

Как известно [1, 2], задача о дифракции плоской E -поляризованной волны, нормально падающей на ленточную металлическую решетку, расположенную на границе раздела вакуум—поперечно-намагниченный феррит, сводится к дуальной системе функциональных уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta\xi} = 0 \quad (1 \leq \xi \leq 2\pi/\theta - 1); \quad (1a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \Gamma_n e^{in\theta\xi} = 2\kappa \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (16)$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2} + M \sqrt{\kappa^2 \epsilon \mu_{\perp} - n^2} + iKn; \quad \kappa = l/\lambda; \\ \xi = -\frac{2y}{d}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad M = \frac{\mu}{\mu^2 - \mu_a^2} = \frac{1}{\mu_{\perp}}, \quad K = -\frac{\mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2},$$

μ и μ_a — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита, определенные в [3]; ϵ — диэлектрическая проницаемость феррита; l — период решетки; λ — длина волны падающего поля; d — ширина щелей решетки; b_n — искомые амплитуды дифракционного спектра в пространстве, заполненном гиромангнитной средой. Начало прямоугольной системы координат выбрано посередине щели решетки. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

В данной работе решение системы функциональных уравнений (1a)—(16) получено методом, предложенным в [4], который основывается на представлении искомых амплитуд дифракционных спектров b_n в виде ряда Неймана

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} x_k J_{2k+1}(n\theta). \quad (2)$$

Заметим, что это разложение следует из удовлетворения дифрагированного поля условию Мейкснера.

Подставляя ряд (2) в систему (1а)—(1б), приходим к одному функциональному уравнению, поскольку второе уравнение (1а) удовлетворяется при этом почленно

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k F_k(\xi) = 2\kappa \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (3)$$

где

$$F_k(\xi) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_{\perp}}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} [T_{n0} \cos(n\theta\xi) - R_{n0} \sin(n\theta\xi)], & (k=0); \\ \sum_{n=1}^{\infty} [T_{nk} \cos(n\theta\xi) - R_{nk} \sin(n\theta\xi)], & (k \geq 1); \end{cases}$$

$$T_{nk}(\theta) = \frac{2}{n} (V \overline{\kappa^2 - n^2} + M V \overline{\kappa^2 \varepsilon \mu_{\perp} - n^2}) J_{2k+1}(n\theta),$$

$$R_{nk}(\theta) = 2K J_{2k+1}(n\theta).$$

Свободный член и коэффициенты $F_k(\xi)$ полученного функционального уравнения (3) разложим по полиномам Чебышева второго рода $U_s(\xi)$

$$2\kappa = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \frac{U_s(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}; \quad (4a)$$

$$F_k(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{ks} \frac{U_s(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (4б)$$

Подставляя (4а)—(4б) в уравнение (3), приходим к следующей системе уравнений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k B_{ks} = A_s, \quad (5)$$

где

$$A_s = 2\kappa \delta_{s0}; \quad (6a)$$

$$B_{ks} = \begin{cases} \frac{\theta\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_{\perp}}} \right) \delta_{k0} + C_{0s}, & (k=0); \\ C_{sk}, & (k \geq 1); \end{cases} \quad (6б)$$

$$C_{ks} = (-1)^s \frac{4(2s+1)}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (V \overline{\kappa^2 - n^2} + M V \overline{\kappa^2 \varepsilon \mu_{\perp} - n^2}) J_{2k+1}(n\theta) J_{2s+1}(n\theta) +$$

$$+ (-1)^s \frac{8sK}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_{2k+1}(n\theta) J_{2s}(n\theta). \quad (6в)$$

Подставляя найденные из решения системы (5) значения x_k в (2), получим искомые значения амплитуд дифракционных спектров b_n . В частности, при $n = 0$ из (2) следует выражение для амплитуды основной волны прошедшего поля $b_0 = x_0 \frac{\theta}{2}$. Если внешнее постоянное магнитное поле $H_0 = 0$, то $K = 0$, $M = 1$ и система уравнений (5), а следовательно, и (2) характеризует дифракцию E -поляризованной волны на решетке, расположенной на границе раздела вакуум — идеальный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε . При $\varepsilon = 1$ решетка из лент находится в свободном пространстве.

Список литературы: 1. Хорошун В. В. Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решетке с гиромангнитной средой. — Радиотехника, 1967, вып. 4, с. 61—64. 2. Хорошун В. В. Дифракция плоских электромагнитных волн на экранированной решетке с поперечно-намагниченным реальным ферритом. — Радиотехника, 1968, вып. 7, с. 35—37. 3. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: Физматгиз, 1960. — 408 с. 4. Кеванишвили Г. Ш., Сикмашвили Э. И., Цагарейшвили О. П. О дифракции плоской электромагнитной волны на решетке из лент. — Сообщ. АН ГССР, 1975, 79, № 1, с. 69—72.

Поступила в редколлегию 29.12.83.

УДК 621.371

Н. А. ХИЖНЯК, д-р физ.-мат. наук,
С. Н. ХИЖНЯК, асп.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ, ОБРАЗОВАННОЙ ЧАСТИЦАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Как известно, распространение электромагнитных волн в трехмерной пространственной структуре однотипных рассеивающих частиц в приближении $ks \ll 1$ ($k = 2\pi/\lambda$, s — среднее расстояние между частицами) в электродинамическом отношении эквивалентно распространению волн в некоторой однородной среде, характеризующейся эффективными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей ε_{eff} и μ_{eff} (искусственный диэлектрик). Ранее предложен метод вычисления эффективных значений проницаемостей для случая, когда все рассеивающие частицы одинаковы*.

Рассмотрим обобщение этих результатов на случай, когда искусственный диэлектрик образован системой частиц, хаотически распределенных в пространстве, а параметры этих частиц случайным образом распределены около некоторого среднего значения.

* Х и ж н я к Н. А. Искусственные анизотропные диэлектрики. — Журн. теорет. физики, 1957, 27, с. 2006—2015.

Исходным является выражение для поля, которое рассеяно малой частицей объема $v (kv^{1/3} \ll 1)$ с проницаемостями ϵ и μ , расположенной в точке с радиус-вектором $\vec{r}_n$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{рас}}(\vec{r}) &= (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^{\text{э}} - ik \mu_1 \text{rot} \vec{\Pi}^{\text{м}}; \\ \vec{H}_{\text{рас}}(\vec{r}) &= (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^{\text{м}} + ik \epsilon_1 \text{rot} \vec{\Pi}^{\text{э}},\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\vec{\Pi}^{\text{э}} = \hat{g} \vec{E}_b(\vec{r}_n) \frac{e^{-ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}_n|}}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad \text{и} \quad \vec{\Pi}^{\text{м}} = \hat{p} \vec{H}_b(\vec{r}_n) \frac{e^{-ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}_n|}}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} - \quad (2)$$

электрический и магнитный потенциалы Герца; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения поля; ϵ_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды; $\vec{E}_b(\vec{r}_n)$ и $\vec{H}_b(\vec{r}_n)$ — напряженности электрического и магнитного полей, рассеиваемых рассматриваемой частицей. Матрицы g_{ik} и p_{ik} характеризуют рассеивающие свойства отдельной частицы при заданной ориентации относительно координатных осей.

Поставленная задача формулируется следующим образом. Пусть искусственный диэлектрик представляет собой систему, состоящую из N рассеивающих частиц. Тогда на частице, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}_n$, с учетом переотражений рассеивается электромагнитная волна, компоненты которой

$$\begin{aligned}\vec{E}_b(\vec{r}_n) &= \vec{E}_0(\vec{r}_n) + \sum'_{n \neq m} \vec{E}_{\text{рас}}(\vec{r}_n, \vec{r}_m); \\ \vec{H}_b(\vec{r}_n) &= \vec{H}_0(\vec{r}_n) + \sum'_{n \neq m} \vec{H}_{\text{рас}}(\vec{r}_n, \vec{r}_m).\end{aligned}\quad (3)$$

Таких уравнений столько, сколько рассеивающих частиц. Получена замкнутая система уравнений, в принципе позволяющая найти все $\vec{E}_b$ и $\vec{H}_b$ через невозмущенное поле падающей волны $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$. Штрих у сумм в (3) означает, что суммирование ведется по всем частицам, кроме рассматриваемой.

По известным $\vec{E}_b$ и $\vec{H}_b$ можно построить выражения для полей, создаваемых каждой из частиц (1), а значит, построить полное поле в точке $\vec{r}$ внутри системы (предполагается, что $\vec{r}_n \neq \vec{r}$)

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \vec{E}_{\text{рас}}(\vec{r}, \vec{r}_n); \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \vec{H}_{\text{рас}}(\vec{r}, \vec{r}_n).\end{aligned}\quad (4)$$

Однако практически систему (3) решают лишь при малом числе рассеивающих частиц. В случае искусственных диэлектриков, когда рассеивающих частиц много, путем усреднения истинного поля в пределах каждой элементарной ячейки среды вводят понятие среднего или макроскопического поля. Это усреднение позволяет перейти от дискретной структуры рассеивателей к непрерывной среде и никак не связано со статистическим усреднением. Осуществляя усреднение полей по объему элементарной ячейки, как описано в [1], вместо соотношений (3), (4) получим

$$\vec{E}_b(\vec{r}) = \vec{\varepsilon}(\vec{r}) - \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g} \vec{E}_b(\vec{r}); \quad \vec{H}_b(\vec{r}) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) - \frac{1}{\Omega} \delta \vec{p} \vec{H}_b(\vec{r}) \quad \text{и} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \int_V \frac{1}{\Omega} \vec{g} \vec{E}_b(\vec{r}') \frac{e^{-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' - \\ - ik \mu_1 \text{rot} \int_V \frac{1}{\Omega} \vec{p} \vec{H}_b(\vec{r}') \frac{e^{-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'; \quad (6) \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) + (\text{grad div} + \\ + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \int_V \frac{1}{\Omega} \vec{p} \vec{H}_b(\vec{r}') \frac{e^{-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' + \\ + ik \varepsilon_1 \text{rot} \int_V \frac{1}{\Omega} \vec{g} \vec{E}_b(\vec{r}') \frac{e^{-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Здесь δ_{ik} — элементы матрицы, характеризующей геометрию элементарной ячейки; $\Omega = s^3$ — объем этой ячейки. Суммирование по всем элементарным ячейкам приводит к интегрированию по объему V , представляющему собой сумму всех элементарных ячеек, в центре которых расположены рассеивающие частицы. В дальнейшем этот объем будем называть объемом искусственного диэлектрика.

Если частицы образуют не правильную пространственную решетку, а распределены в пространстве совершенно случайно, то элементы матрицы δ_{ik} имеют то же значение, что и в случае кубической решетки:

$$\delta_{ik} = -\frac{4\pi}{3} \delta_{ik}^0, \quad \delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Предположим теперь, что рассеивающие частицы по какому-либо параметру различаются между собой. При вычислении рассеянных полей прибегают к статистическому усреднению по допустимому ансамблю частиц в каждой точке, где расположена рассеивающая частица. Естественно предположить, что электродинамическое

и статистическое усреднения независимы. Статистическое усреднение распространяется лишь на величины $\vec{g}\vec{E}_b$ и $\hat{p}\vec{H}_b$, через которые определяется макроскопическое поле в среде, и оно может быть осуществлено с помощью соотношений (4).

Положим, что $\vec{g} = \vec{g}^{(0)} + \vec{g}^{(1)}$, $\hat{p} = \hat{p}^{(0)} + \hat{p}^{(1)}$, где $g_{ik}^{(1)}$ и $p_{ik}^{(1)}$ — отклонения от средних значений элементов g_{ik} , p_{ik} матриц рассеяния $\vec{g}$ и $\hat{p}$. Эти отклонения могут быть вызваны разными причинами, однако будем считать их случайными, тогда

$$\begin{aligned}\overline{g_{ik}^{(1)}} &= 0; \quad \overline{p_{ik}^{(1)}} = 0; \\ \overline{g_{ik}^{(1)}g_{em}^{(1)}} &= \sigma_g^2 \delta_{im} \delta_{ke}, \quad \overline{p_{ik}^{(1)}p_{em}^{(1)}} = \sigma_p^2 \delta_{im} \delta_{ke},\end{aligned}\quad (8)$$

где σ_g^2 и σ_p^2 характеризуют дисперсию электрических и магнитных свойств рассеивателей.

При наличии случайной добавки у величин g_{ik} и p_{ik} появляются случайные добавки у величин $\vec{E}_b$ и $\vec{H}_b$. Вычислив их с точностью до величин второго порядка малости, имеем

$$\begin{aligned}\vec{E}_b^{(0)} &= \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \vec{E}; \\ \vec{E}_b^{(1)} &= \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \vec{E}; \\ \vec{E}_b^{(2)} &= \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \vec{E}.\end{aligned}\quad (9)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega} \vec{g} \vec{E}_b(\vec{r}) &= \left\{ \frac{1}{\Omega} \vec{g}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} + \left[1 - \frac{1}{\Omega} \vec{g}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1}\right] \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \frac{1}{\Omega} \vec{g}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1}\right] \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \delta \vec{g}^{(0)}\right)^{-1} \right\} \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}\quad (10)$$

и аналогичное выражение для $\frac{1}{\Omega} \hat{p} \vec{H}_b$.

Подставляя $\vec{g}\vec{E}_b$ из (10) и аналогичное выражение для $\hat{p}\vec{H}_b$ в (6), получим хорошо известные интегральные уравнения макроскопической электродинамики для поля внутри искусственного диэлектрика в стандартной форме

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \int_V \left(\frac{\vec{r}}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}' - \frac{ik\mu_1}{4\pi} \text{rot} \int \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}') \times \\ & \times \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, эффективные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей искусственного диэлектрика находятся из сравнения уравнений (11) с уравнениями (4), после подстановки $\frac{1}{\Omega} \hat{g} \vec{E}_b$ и $\frac{1}{\Omega} \hat{p} \vec{H}_b$, выраженных через средние поля $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$.

Соотношения (10) допускают переход к статистическому усреднению по явно выраженной случайной величине. Используя соотношения (8) и (10), окончательно находим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \hat{g}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g}^{(0)} \right)^{-1} - \frac{4\pi\sigma_q^2}{\Omega^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{1}{\Omega} \hat{g}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g}^{(0)} \right)^{-1} \hat{\delta} \right] \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g}^{(0)} \right)^{-1} \theta_q \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} = \mu_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \hat{p}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p}^{(0)} \right)^{-1} - \frac{4\pi\sigma_p^2}{\Omega^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{1}{\Omega} \hat{p}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p}^{(0)} \right)^{-1} \hat{\delta} \right] \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p}^{(0)} \right)^{-1} \theta_p \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\theta_q = \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g}^{(0)} \right)_{em}^{-1} \delta_{em}, \quad \theta_p = \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p}^{(0)} \right)_{em}^{-1} \delta_{em} -$$

скалярные параметры рассеяния. Соотношения (12), (13) и решают поставленную задачу.

Так, если искусственный диэлектрик образован сферическими частицами радиуса r с параметрами ϵ , ($\mu = 1$), а размеры частиц статистически распределены около среднего значения r_0 так, что $r = r_0 + \delta$, то

$$\hat{\delta} = -\frac{4\pi}{3} \hat{\delta}^{(0)}, \quad g_{ik}^{(0)} = r_0^3 \frac{\epsilon - \epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1} \hat{\delta}^{(0)}, \quad g_{ik}^{(1)} = \frac{3\delta}{r_0} g_{ik}^{(0)}, \quad p_{ik}^{(0)} = 0$$

и

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \left\{ 1 + \frac{3c}{\epsilon + 2\epsilon_1 - c} + \frac{27\bar{\delta}^2}{r_0^2} \frac{c^2}{\left(\frac{\epsilon + 2\epsilon_1}{\epsilon - \epsilon_1} - c \right)^3} \right\}, \quad (14)$$

где $c = \frac{4\pi r_0^3}{3\Omega}$ — объемная концентрация диэлектрика; $\bar{\delta}^2$ — дисперсия размеров частиц.

Поступила в редколлегию 27.01.84.

ТЕНЗОРЫ ГРИНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Пусть слоистая одноосная среда, характеризующаяся материальными параметрами $\epsilon(z)$, $\mu(z)$, $\alpha = \alpha_t \hat{I}_t + \alpha_z \hat{I}_z$, $\alpha = \mu$, ϵ , занимает область, безграничную по x , y и, быть может, ограниченную проводящей плоскостью при $z = \text{const}$. Уравнения Максвелла для монохроматического ($\sim e^{-i\omega t}$) электромагнитного поля в этом случае, как известно, сводятся к виду [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} &= ik_0 \mu_t \left(\hat{I} + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k_e^2} \right) \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_t + \frac{4\pi}{c} \vec{M}_e \times \vec{z}_0, \\ -\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} &= ik_0 \epsilon_t \left(\hat{I} + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k_\mu^2} \right) \cdot \vec{E}_t \times \vec{z}_0 + \frac{4\pi}{c} \vec{z}_0 \times \vec{J}_e, \\ \vec{M}_e &= \vec{M}_t + \nabla_t \times \vec{J}_z / ik_0 \epsilon_z, \\ \vec{J}_e &= \vec{J}_t - \nabla_t \times \vec{M}_z / ik_0 \mu_z, \quad k_0 = \omega/c, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_e^2 = k_0^2 \epsilon_z \mu_t$, $k_\mu^2 = k_0^2 \mu_z \epsilon_t$. Индексы t, z здесь и далее сопровождают соответственно поперечную и продольную относительно оси z составляющие вектора. Продольные компоненты выражаются через решения уравнений (1):

$$\vec{E}_z = -\frac{\nabla_t \times \vec{H}_t}{ik_0 \epsilon_z} + \frac{4\pi}{ik_0 c \epsilon_z} \vec{J}_z, \quad H_z = -\frac{\nabla_t \times \vec{E}_t}{ik_0 \mu_z} + \frac{4\pi}{ik_0 c \mu_z} \vec{M}_z. \quad (2)$$

Наша цель — построение тензоров Грина $G_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = e, m$ электромагнитного поля, с помощью которых решение уравнений Максвелла выражается непосредственно через плотности сторонних электрического $\vec{J}(\vec{R})$ и магнитного $\vec{M}(\vec{R})$ токов:

$$\begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{R}) \\ \vec{H}(\vec{R}) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} G_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') & G_{em}(\vec{R}, \vec{R}') \\ G_{me}(\vec{R}, \vec{R}') & G_{mm}(\vec{R}, \vec{R}') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{J}(\vec{R}') \\ \vec{M}(\vec{R}') \end{bmatrix} d\vec{R}'. \quad (3)$$

Построение тензорных функций Грина производится по следующей схеме (ср. с [1]). Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{1}{ik_0 \epsilon_t} \nabla_t \frac{\partial I}{\partial z} - \nabla_t \times \vec{z}_0 V + \frac{4\pi}{ik_0 c \epsilon_t} \vec{J}_t^I, \\ \vec{H}_t &= \nabla_t \times \vec{z}_0 I - \frac{1}{ik_0 \mu_t} \nabla_t \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{4\pi}{ik_0 c \mu_t} \vec{M}_t^I, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{J}_t^l(\vec{R})$, $\vec{M}_t^l(\vec{R})$ — потенциальные относительно поперечных координат x, y составляющие токов $\vec{J}_t$, $\vec{M}_t$ такие, что $\nabla_t \times \vec{J}_t^l = \nabla_t \times \vec{M}_t^l = 0$. Соотношения для потенциалов $V(\vec{R})$, $I(\vec{R})$, получающиеся подстановкой (4) в (1):

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 V(\vec{R}) &= \frac{4\pi}{c} \int \left[ik_0 \vec{J}(\vec{R}_0) \cdot \nabla_t \times \vec{z}_0 - \vec{M}(\vec{R}_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\nabla_t}{\mu_t(z_0)} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\vec{z}_0 \nabla_t^2}{\mu_z(z_0)} \right) \right] H_\mu d\vec{R}_0; \\ \nabla_t^2 I(\vec{R}) &= \frac{4\pi}{c} \int \left[ik_0 \vec{M}(\vec{R}_0) \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_t - \vec{J}(\vec{R}_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\nabla_t}{\varepsilon_t(z_0)} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\vec{z}_0 \nabla_t^2}{\varepsilon_z(z_0)} \right) \right] H_\varepsilon d\vec{R}_0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяют в конечном итоге представить электромагнитное поле через источники в явном виде. Здесь $H_\alpha \equiv H_\alpha(\vec{R}, \vec{R}_0)$, $\alpha = \mu, \varepsilon$, есть решения краевой задачи, состоящей из уравнения

$$\left[\alpha_z(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\alpha_t(z)} \frac{\partial}{\partial z} + k_\alpha^2(z) + \nabla_t^2 \right] H_\alpha = \alpha_z(z) \delta(\vec{R}, \vec{R}_0) \quad (6)$$

и граничных условий на концах интервала изменения z , например, $H_\mu = (\partial/\partial z) H_\varepsilon = 0$ на проводящей плоскости $z = \text{const}$. В результате мы приходим к искомому выражениям для тензоров Грина через скалярные потенциалы H_μ, ε . Так,

$$\begin{aligned} G_{ee}(\vec{R}, \vec{R}_0) &= \frac{4\pi}{ik_0 c} \left[\frac{\vec{z}_0 \vec{z}_0}{\varepsilon_z(z_0)} + \frac{1}{\varepsilon_t(z_0)} \frac{\nabla_t \nabla_t}{\nabla_t^2} \right] \delta(\vec{R}, \vec{R}_0) + \\ &+ \frac{4\pi}{ik_0 c} \left(\frac{\nabla_t}{\varepsilon_t(z)} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\vec{z}_0}{\varepsilon_z(z)} \nabla_t^2 \right) \left(\frac{\nabla_t}{\varepsilon_t(z_0)} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\vec{z}_0}{\varepsilon_z(z_0)} \nabla_t^2 \right) \frac{1}{\nabla_t^2} H_\varepsilon - \\ &- \frac{4\pi}{ik_0 c} \frac{\vec{z}_0 \times \nabla_t \vec{z}_0 \times \nabla_t}{\nabla_t^2} H_\mu, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G_{em}(\vec{R}, \vec{R}_0) &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\nabla_t}{\varepsilon_t(z)} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\vec{z}_0}{\varepsilon_z(z)} \nabla_t^2 \right) \frac{\nabla_t \times \vec{z}_0}{\nabla_t^2} H_\varepsilon + \\ &+ \frac{4\pi}{c} \frac{\nabla_t \times \vec{z}_0}{\nabla_t^2} \left(\frac{\nabla_t}{\mu_t(z_0)} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\vec{z}_0}{\mu_z(z_0)} \nabla_t^2 \right) H_\mu. \end{aligned}$$

Здесь все производные понимаются в духе теории обобщенных функций [2]; оператор $1/\nabla_t^2$ определен обычным образом: $\varphi \equiv (1/\nabla_t^2)u$ есть такая функция, что $\nabla_t^2 \varphi = u$. В отличие от соответствующих результатов работы [1], формулы (7) не наклады-

вают ограничений на взаимное расположение точки наблюдения $\vec{R}$ и точки источника $\vec{R}_0$. Выражения для тензорных функций G_{mt} , G_{te} получаются из (7) заменой: $G_{ee} \rightarrow G_{mt}$, $G_{et} \rightarrow -G_{te}$, $\mu \leftrightarrow \epsilon$. Полученные здесь результаты — соотношения (7) — могут найти применение в теории излучения и рассеяния волн в слоистых регулярных [3] и нерегулярных [4] средах.

Список литературы: 1. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. — Т. 1. 556 с. 2. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Наука, 1959. — 439 с. 3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 433 с. 4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику: Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.

Поступила в редколлегию 20.02.83.

УДК 621.372

Н. М. БОГОМОЛОВ, С. Б. ДАНИЛЕВИЧ, Н. П. ЖУК

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ШЕРОХОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Низкочастотную теорию рассеяния волн на включении, погруженном в некоторую среду, исключительно удобно строить на основе интегральной формулировки соответствующей краевой задачи. Основополагающие результаты [1] относятся к случаю, когда среда, окружающая включение, однородна и, быть может, ограничена идеально ровной и непроницаемой для поля поверхностью. Особенности технологии открытых волноводов, необходимость неразрушающего контроля, дистанционное зондирование приводят к более общим задачам, когда включение погружено в плоскостойкую среду, ограниченную шероховатой поверхностью. В связи с этим присутствуют возмущения регулярной среды двух типов: случайные граничные неровности и детерминированное объемное включение.

Нами предложена интегральная формулировка задачи о рассеянии скалярного волнового поля в такой ситуации. Кроме акустики, такие задачи возникают в случае, когда векторное поле описывается — точно или приближенно — в рамках скалярного волнового процесса. Основной результат здесь — интегродифференциальные уравнения (12), (13) для статистически среднего и флуктуационного полей и разложения (14), (18) по собственным функциям нелокальной краевой задачи для среды с шероховатой импедансной границей.

1. Регулярная плоскостойкая среда занимает область $\xi(\vec{r}) < z < +\infty$, $-\infty < x, y < +\infty$ и ограничена случайной поверхностью $\sum: z = \xi(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$ с постоянным импедансом η_0 .

Случайное поле $\xi(\vec{r})$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $B(\vec{r}, \vec{r}')$ описывает малые и пологие неровности (шероховатости) подстилающей поверхности $\Sigma: z = 0$. Пусть в такую среду погружено включение, занимающее область V_p с границей S , причем Σ и $\tilde{\Sigma}$ с S не пересекаются. Окружающая среда и включение характеризуются соответственно материальными параметрами $\mu(z)$, $\mu_p(\vec{R})$ и локальными волновыми числами $k(z)$, $k_p(\vec{R})$, $\vec{R} = (\vec{r}, z)$.

Случайное волновое поле $u(\vec{R})$ подчиняется уравнениям

$$(\mu \nabla \cdot \mu^{-1} \nabla + k^2) u = \mu f, \quad \vec{R} \in V_p; \quad (1)$$

$$(\mu_p \nabla \cdot \mu_p^{-1} \nabla + k_p^2) u = 0, \quad \vec{R} \in V_p; \quad (2)$$

$$u_e - u_i = 0; \quad \mu^{-1} \partial u_e / \partial N - \mu_p^{-1} \partial u_i / \partial N = 0, \quad \vec{R} \in S, \quad (3)$$

$$\partial u(\vec{R}) / \partial \tilde{n} + ik(z) \mu(z) \eta_0 u(\vec{R}) = 0, \quad \vec{R} \in \tilde{\Sigma} \quad (4)$$

и надлежащим условиям в бесконечности, которые далее особо не упоминаются. Здесь ∇ — градиент; $f(\vec{R})$ — заданные детерминированные источники; N — нормаль к S ; $u_{e,i} \equiv u(\vec{R})$ при $\vec{R} \in V_p$ и $\vec{R} \in V_p$, $\tilde{n}$ — нормаль к $\tilde{\Sigma}$, направленная внутрь среды.

Как следует из [2], случайное поле $u(\vec{R})$ удовлетворяет эквивалентным условиям на подстилающей поверхности Σ в виде

$$\partial u(\vec{R}) / \partial z + ik(z) \mu(z) (\eta_0 + \delta \hat{\eta}) u(\vec{R}) = \varphi(\vec{r}), \quad z = 0; \quad (5)$$

$$\varphi(\vec{r}) \equiv [\nabla_t \xi(\vec{r}) \nabla_t + k^2(z) \xi(\vec{r}) (1 - \eta_0^2 \mu^2(z))] \bar{u}(\vec{r}),$$

где $\delta \hat{\eta} \equiv \int d\vec{r}' \delta \eta(\vec{r}, \vec{r}') \dots$ — интегральный оператор, действующий по горизонтальным координатам и учитывающий наличие шероховатостей, ∇_t — касательная к Σ составляющая градиента, $\bar{u}(\vec{R}) \equiv \langle u(\vec{R}) \rangle$ — статистически среднее поле.

В приближении Бурре

$$\begin{aligned} \delta \hat{\eta}(\vec{r}, \vec{r}') &= \eta_0 [\nabla_i \cdot B \nabla_i + k^2 B (1 - \eta_0^2 \mu^2)] \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \\ &- (ik \mu^2)^{-1} [\nabla_i \cdot \tilde{\nabla}_i + k^2 (1 - \eta_0^2 \mu^2)] [\nabla_i \cdot B \nabla_i + k^2 B (1 - \eta_0^2 \mu^2)] H. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $B \equiv B(\vec{r}, \vec{r}')$, $H \equiv H(\vec{r}, \vec{r}')$; k, μ взяты при $z = +0$; δ — дельта-функция; оператор $\nabla_i (\nabla_i)$ действует на все функции $\vec{r}(\vec{r}')$, стоящие в (6) справа от него, а $\tilde{\nabla}_i$ — на переменную $\vec{r}'$ только в $B(\vec{r}, \vec{r}')$.

Функция Грина $\vec{H}(\vec{R}, \vec{R}')$ для задачи с объемным возмущением, но в отсутствие шероховатостей границы подчиняется уравнениям (1)–(3) с $f = \delta(\vec{R} - \vec{R}')$ и граничному условию на ровной поверхности Σ :

$$\partial \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') / \partial z + ik(z) \mu(z) \eta_0 \vec{H}(\vec{r}, \vec{R}') = 0, \quad z = 0, \quad z' > 0. \quad (7)$$

Ее можно построить, к примеру, методом [3]. Из выражения (6) видно, что оператор $\delta \hat{\eta}$ зависит как от граничных возмущений (через B), так и от свойств нерегулярной среды с объемным возмущением (посредством $\vec{H}$). Заметим, что для достаточно произвольных функций $v(\vec{r})$, $w(\vec{r})$ справедливо равенство

$$\int_{\Sigma} d\vec{r} v(\vec{r}) \delta \hat{\eta} w(\vec{r}) = \int_{\Sigma} d\vec{r} w(\vec{r}) \delta \hat{\eta} v(\vec{r}). \quad (8)$$

2. Введем в рассмотрение функцию Грина $\vec{H}(\vec{R}, \vec{R}')$ следующей детерминированной краевой задачи:

$$[\mu(r) \nabla \cdot \mu^{-1}(z) \nabla + k^2(z)] \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') = \mu(z) \delta(\vec{R} - \vec{R}'), \quad z > 0 \quad (9)$$

$$\partial \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') / \partial z + ik(z) \mu(z) (\eta_0 + \delta \hat{\eta}) \vec{H}(\vec{r}, \vec{R}') = 0, \quad z = 0, \quad z' > 0. \quad (10)$$

Действуя по стандартной схеме, из дифференциальной краевой задачи (1)–(3), (5) с учетом (8)–(10) для случайного волнового поля получаем интегральное соотношение

$$u(\vec{R}) = u_0(\vec{R}) + \int_{V_p} [\chi(\vec{R}') \nabla' \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') \nabla' u(\vec{R}') - \eta(\vec{R}') \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') u(\vec{R}')] d\vec{R}', \quad (11)$$

где $\chi(\vec{R}) = 1/\mu_p(\vec{R}) - 1/\mu(r)$, $\eta(\vec{R}) = k_p^2(\vec{R})/\mu_p(\vec{R}) - k^2(r)/\mu(r)$;

$$\bar{u}_0(\vec{R}) \equiv \int \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') f(\vec{R}') d\vec{R}', \quad \tilde{u}_0(\vec{R}) = \int_{\Sigma} \vec{H}(\vec{R}, \vec{r}') \varphi(\vec{r}') d\vec{r}' / \mu(0). \quad (12)$$

Функция $\vec{H}$ неявно — через $\delta \hat{\eta}$ — учитывает наличие в среде объемного возмущения. Поэтому свободный член u_0 не совпадает с первичным полем, которое создавалось бы источниками f в среде с шероховатой границей, но в отсутствие включения; равным образом интеграл в (11) не представляет собой рассеянное включением поле в такой среде. Присутствие двух типов возмущений усложняет физическое содержание (11) по сравнению с аналогичными соотношениями для более простых ситуаций [1, 3].

Из (11), (12) вытекают искомые интегральные соотношения для статистически среднего $\bar{u}$ и флуктуационного $\tilde{u} \equiv u - \bar{u}$ и волновых полей. Так, для среднего поля оно имеет следующий вид:

$$\bar{u}(\vec{R}) = \bar{u}_0(\vec{R}) + \int_{V_p} [\chi(\vec{R}') \nabla' \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') \nabla \vec{u}(\vec{R}') - \\ - \eta(\vec{R}) \vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') \bar{u}(\vec{R}')] d\vec{R}'. \quad (13)$$

Полагая здесь $\vec{R} \in V_p$, приходим к интегродифференциальному уравнению для среднего внутреннего поля включения; при $\vec{R} \notin V_p$ (13) представляет собой прямую квадратурную формулу для отыскания среднего поля в окружающей среде.

Аналогичное соотношение для флуктуационного поля получается формально из (13) заменой $\bar{u} \rightarrow \tilde{u}$, $\bar{u}_0 \rightarrow \tilde{u}_0$, причем свободный член $\tilde{u}_0$ выражается, согласно (12), (5), через найденное на предшествующем этапе среднее поле.

3. Использование полученных интегральных соотношений связано с возможностью построения функции Грина $\vec{H}(\vec{R}, \vec{R}')$ из (9) — (10). Получим конструктивное представление для этой функции в одном частном случае.

Примем, что включение слабо влияет на формирование величин $\delta\eta$, так что в (6) можно заменить $H \rightarrow H_0$, где $H_0(\vec{R}, \vec{R}')$ — функция Грина невозмущенной задачи, в отсутствие шероховатостей и включения, которая подчиняется уравнениям (9) — (10) с $\delta\eta \equiv 0$. Далее, шероховатости статистически однородные: $B(\vec{r}, \vec{r}') \equiv B(\vec{r} - \vec{r}')$ — при этом ядро оператора $\delta\eta$ является разностным: $\delta\eta(\vec{r}, \vec{r}') = \delta\eta(\vec{r} - \vec{r}')$. Функция $H(\vec{R}, \vec{R}') \equiv H(\vec{r} - \vec{r}', z, z')$ для такого случая легко строится с помощью преобразования Фурье по горизонтальным координатам и последующего контурного интегрирования с учетом аналитических свойств $\delta\eta(\vec{x}) \equiv \int d\vec{r} e^{-i\vec{x}\vec{r}} d\eta(\vec{r})$ как функции переменной $\vec{x} = (x_x, x_y)$.

Так, для статистических изотропных шероховатостей $B(\vec{r}) \equiv B(r)$, при этом $\delta\eta(\vec{r}) \equiv \delta\eta(r)$, $\delta\eta(\vec{x}) \equiv \delta\eta(x)$ — соответствующее представление для $\vec{H}(\vec{R}, \vec{R}')$ имеет вид разложения:

$$\vec{H}(\vec{R}, \vec{R}') = \sum_{\lambda} H_0^{(1)}(x|\vec{r} - \vec{r}'|) \psi(z, \lambda) \psi(z', \lambda) / 4i\tilde{N}^2(\lambda) \quad (14)$$

по собственным функциям дискретного и непрерывного спектра задачи

$$[D_\mu + k^2(z) + \lambda] \psi(z, \lambda) = 0, \quad z > 0; \\ \psi(z, \lambda) + ik(z) \mu(z) [\eta_0 + \delta\eta(x)] \psi(z, \lambda) = 0, \quad z = +0; \quad (15) \\ |\psi(z, \lambda)| < \infty.$$

Здесь $D_\mu \equiv \mu(z) (\partial/\partial z) \mu^{-1}(z) (\partial/\partial z)$; точкой обозначено дифференцирование по z ; параметры λ и κ связаны соотношением $\kappa = \sqrt{-\lambda}$, $\text{Im } \kappa \geq +0$. Знак суммы в (14) означает обычное суммирование по точкам дискретного спектра и интеграл по непрерывному спектру, $\tilde{N}^2(\lambda)$ — нормировочный коэффициент. При выводе (14) учтено, что для достаточно быстро убывающих при $r \rightarrow +\infty$ функций $B(r) \delta\eta(\kappa)$ есть целая (и четная) функция комплексного переменного κ , однако это разложение и последующие результаты верны для более общей в математическом отношении ситуации, когда $\delta\eta(\kappa)$ — четная мероморфная функция κ .

Положим для простоты, что регулярная среда, простирающаяся вплоть до $z = +\infty$, при $z > b > 0$ является однородной: $k(z) \equiv k_e$, $\mu(z) \equiv \mu_e$, $z > b$. В этом случае непрерывный спектр совпадает с тем берегом разреза по линии $\text{Im } \gamma(\lambda) = 0$, $\gamma(\lambda) = \sqrt{k_e^2 + \lambda}$, где $\arg \gamma(\lambda) = 0$, а нормировочный коэффициент $\tilde{N}^2(\lambda)$ функции $\psi(z, \lambda)$ непрерывного спектра имеет вид

$$\tilde{N}^2(\lambda) = \pi [\psi^2(z, \lambda) + \gamma^2(\lambda) \psi^2(z, \lambda)] / \mu_e \gamma(\lambda), \quad (16)$$

где z — любое из интервала $b + 0 \leq z < +\infty$.

Продолжим собственную функцию непрерывного спектра $\psi(z, \lambda)$ и отвечающий ей нормировочный коэффициент $\tilde{N}^2(\lambda)$ из (16) в комплексную плоскость λ . Корни λ_k уравнения $\tilde{N}^2(\lambda) = 0$, лежащие на том листе римановой поверхности функции $\gamma(\lambda)$, где $0 < \arg \gamma(\lambda) < 2\pi$, образуют дискретный спектр задачи (15); им отвечают собственные функции дискретного спектра $\psi(z, \lambda_k) = \psi(z, \lambda)|_{\lambda \rightarrow \lambda_k}$ с нормировочными коэффициентами $\tilde{N}^2(\lambda_k)$, которые связаны с нормировочным коэффициентом из (16) соотношением $2\pi i \tilde{N}^2(\lambda_k) = -\partial \tilde{N}^2(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda = \lambda_k}$.

Воспользовавшись несколько иной схемой рассуждений [4], можно показать, что собственные функции $\psi(z, \lambda)$ дискретного или непрерывного спектра удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_0^{+\infty} \psi(z, \lambda) \psi(z, \lambda') dz / \mu(z) + \psi(0, \lambda) \psi(0, \lambda') i k(0) [\delta\eta(\kappa) - \delta\eta(\kappa')] / (\lambda - \lambda') = \tilde{N}^2(\lambda) \delta\lambda\lambda', \quad (17)$$

где $\delta_{\lambda\lambda'}$ — дельта-функция Кронеккера или Дирака, а произвольная функция $S(z)$ раскладывается по собственным функциям $\psi(z, \lambda)$ следующим образом:

$$S(z) = \sum_{\lambda} \frac{\psi(z, \lambda)}{\tilde{N}^2(\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{S(\xi) \psi(\xi, \lambda)}{\mu(\xi)} d\xi. \quad (18)$$

С помощью формулы (14) можно конструктивно представить функцию Грина вспомогательной задачей (9), (10) и построить ядра интегральных соотношений предыдущего пункта, а формулы (17), (18) позволяют отыскивать решения интегродифференциальных уравнений для среднего и флуктуационного полей в виде разложения по собственным волнам плоскослоистой среды, ограниченной шероховатой поверхностью.

Дальнейшее определение различных характеристик поля в среде, окружающей включение (корреляционных функций, диаграмм направленности, распределения переносимой энергии по модам) осуществляется обычным образом [2, 5].

Список литературы: 1. Хизняк Н. А. Функции Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред. — Журн. теорет. физики, 1958, 28, № 7, с. 1592—1609. 2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 276 с. 3. Виноградов А. Г., Муратов Р. З. Интегральные уравнения акустики неоднородной идеальной жидкости. — Докл. АН СССР, 1976, 226, № 2, с. 301—304. 4. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики. — В кн.: Вопросы математической физики. Л., 1976, с. 93—106. 5. Богомолов Н. М., Жук Н. П., Третьяков О. А. Интегральные уравнения электродинамики в плоскослоистой среде. — Х., 1983. — 41 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т радиоэлектроники; № 223).

Поступила в редколлегию 20.02.83.

УДК 621.385.6

Ю. А. ПРОКОПЧУК

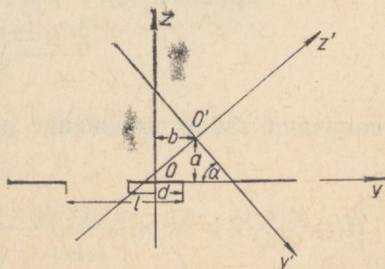
ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПУЧКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ДИФРАКЦИОННУЮ РЕШЕТКУ

Ранее описано решение задачи об излучении плоских модулированных пучков заряженных частиц, пересекающих под произвольным углом α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) бесконечно тонкую идеально проводящую ленточную решетку (рисунок), строгим методом Римана — Гильберта [1, 2].

Продолжая исследования, начатые в работе [1], рассмотрим движение потока заряженных частиц с переменной составляющей плотности

$$\rho = \rho_0 \delta(z') e^{i(ky' - \omega t)} \quad (1)$$

и постоянной скоростью $\vec{v} = \vec{e}_{y'} \beta c$, где ρ_0 — амплитуда; ω — частота модуляции; c — скорость света; $k = \frac{\omega}{v}$, $\vec{e}_{y'}$ — орт вдоль оси



$O'Y'$; $\delta(z')$ — дельта-функция. На рисунке показано сечение решетки в плоскости $x = \text{const}$, l — ее период, d — ширина ленты. При пересечении заряженными частицами плоскости решетки под углом α происходит излучение электромагнитных волн. В работе [1] дано строгое выражение для поля излучения, а также приближенное (для $\kappa = \frac{l}{\lambda} < 0,5$), которое имеет вид ($r \gg 1$)

$$H_x = \frac{z}{|z|} \sqrt{8\pi} \rho_0 \kappa^3 \beta^2 \sin \alpha |\sin \psi| \frac{\cos \psi}{g(\xi_0)} \times \\ \times \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{ka}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(j + \kappa \cos \psi - \kappa \beta \cos \alpha)}{(j + \kappa \cos \psi)} \times \\ \times \frac{(P_{\xi_0} P_j - P_{-\xi_0} P_{j-1} e^{-i j \bar{y}_0})}{[\kappa^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (j \beta + \kappa \beta \cos \psi - \kappa \cos \alpha)^2]}, \quad (2)$$

где

$$g(\xi_0) = \xi_0 (P_{\xi_0} + P_{-\xi_0}) + i \sqrt{\kappa^2 - \xi_0^2} (P_{\xi_0} - P_{-\xi_0}); \\ \bar{y}_0 = \frac{2\pi}{l} y_0 = \frac{2\pi}{l} (b + a \operatorname{ctg} \alpha); \quad \xi_0 = \kappa \cos \psi; \quad r \cos \psi = y - y_0; \\ r \sin \psi = z; \quad 0 \leq \psi < 2\pi;$$

λ — длина излученной волны; r, ψ — полярные координаты системы координат с центром в точке пересечения частицами оси OY ; P_j, P_{ξ_0} — соответственно полиномы и функции Лежандра первого рода от аргумента $u = \cos \theta = \cos \frac{\pi d}{l}$.

В работе [1] при выполнении условий

$$\kappa \beta |\cos \alpha| \ll |1 + \kappa \cos \psi|; \quad \kappa \left| \cos \psi - \frac{\cos \alpha}{\beta} \right| \ll 1; \\ \frac{\kappa^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha}{\beta^2} \ll 1 \quad (3)$$

получено такое выражение для поля излучения ($\kappa < 0,5$):

$$H_x = \frac{z}{|z|} 2 \sqrt{2\pi} \rho_0 \frac{\kappa \sin \alpha |\sin \psi|}{1 + i \kappa |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}} \cdot \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{ka}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \times \\ \times \left[\frac{\beta^2 (\cos \psi - \beta \cos \alpha) \ln \frac{1+u}{2}}{(1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (\beta \cos \psi - \cos \alpha)^2} - i \kappa T(u, \bar{y}_0) \right], \quad (4)$$

где

$$T(u, \bar{y}_0) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} (P_j - P_{j-1}) \sin j y_0 =$$

$$= \begin{cases} -2 \int_0^{\bar{y}_0} \frac{\varphi \sin(0,5\varphi) d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - u)}} - 2\bar{y}_0 \ln \left(\sqrt{\frac{\cos \bar{y}_0 - u}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \bar{y}_0}{2}} \right), & |\bar{y}_0| < \theta; \\ \operatorname{sign} \bar{y}_0 (\pi - |\bar{y}_0|) \ln \frac{1+u}{2}; & \theta \leq |\bar{y}_0| \leq \pi; \end{cases} \quad (5)$$

$\bar{y}_0$ — координата по оси OY линии пересечения пучком плоскости решетки, умноженная на $2\pi/l$.

Сумма в выражении (2) может быть точно выражена через функции Лежандра первого рода и интегралы. Используя формулу [3, с. 355]

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{-j}(u) e^{ij\varphi} = \begin{cases} \frac{2 \exp(i0,5\varphi)}{\sqrt{2(\cos \varphi - u)}}; & |\varphi| < \theta; \\ 0; & \theta < |\varphi| \leq \pi, \end{cases} \quad (6)$$

находим

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{P_j(u)}{j+s} e^{-ij\bar{y}_0} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \pi s} P_{-s}(u) e^{is(\pi + \bar{y}_0)} - 2ie^{is\bar{y}_0} \int_{-\theta}^{\bar{y}_0} \frac{e^{-i(s-0,5)\varphi}}{\sqrt{2(\cos \varphi - u)}} d\varphi, & |\bar{y}_0| < \theta; \\ \frac{\pi}{\sin \pi s} P_{-s}(u) e^{-i(\operatorname{sign} \bar{y}_0)s(\pi - |\bar{y}_0|)}; & \theta < |\bar{y}_0| \leq \pi. \end{cases} \quad (7)$$

Подобное выражение можно получить для суммы (7), у которой $P_j(u)$ заменено на $P_{j-1}(u)$. Используя эти формулы, записываем выражение для поля излучения в случае, когда поток частиц пересекает щель решетки ($\theta < |\bar{y}_0| \leq \pi$):

$$H_x = \frac{z}{|z|} \frac{\sqrt{2\pi^3} \rho_0 \kappa^2 \beta \cos |\psi \sin \psi|}{i \sqrt{1 - \beta^2} g(\xi_0)} e^{-i(\operatorname{sign} \bar{y}_0)\delta(\pi - |\bar{y}_0|)} \times$$

$$\times \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{ka}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \left[\frac{D}{\sin(\delta - i\gamma) \pi} e^{-(\operatorname{sign} \bar{y}_0)\gamma(\pi - |\bar{y}_0|)} (P_{\xi_0} P_{-\delta + i\gamma} - \right.$$

$$\left. - P_{-\xi_0} P_{\delta - i\gamma}) - \frac{F}{\sin(\delta + i\gamma) \pi} e^{(\operatorname{sign} \bar{y}_0)\gamma(\pi - |\bar{y}_0|)} (P_{\xi_0} P_{-\delta - i\gamma} - P_{-\xi_0} P_{\delta + i\gamma}) \right],$$

(8)

где

$$D = 1 - \frac{\beta^2 \cos \alpha}{\cos \alpha + i \sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha}; \quad F = 1 - \frac{\beta^2 \cos \alpha}{\cos \alpha - i \sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha};$$

$$\delta = \kappa \left(\cos \psi - \frac{\cos \alpha}{\beta} \right); \quad \gamma = \frac{\kappa}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha. \quad (9)$$

Поле при $|\bar{y}_0| < \theta$ мы не выписываем здесь в силу его громоздкости.

Подставив в (8) значения функций Лежандра, можно вычислить поле излучения с любой наперед заданной точностью. Имея в виду $P_s(u) = 1 + s \ln \frac{1+u}{2}$, получим

$$H_x = \frac{(\sin z) 4 \sqrt{2\pi^3} \rho_0 \kappa^2 |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}}{\left(1 + i\kappa |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}\right) (\operatorname{ch} 2\gamma\pi - \cos 2\delta\pi)} \times \\ \times \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{ka}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \left[\operatorname{ch} \gamma (\pi - |\bar{y}_0|) (\sqrt{1 - \beta^2} \cos \delta\pi \operatorname{sh} \gamma\pi \cos \alpha + \right. \\ \left. + \sin \delta\pi \operatorname{ch} \gamma\pi \sin \alpha) + i \frac{|\bar{y}_0|}{y_0} \operatorname{sh} \gamma (\pi - |\bar{y}_0|) (\sqrt{1 - \beta^2} \sin \delta\pi \operatorname{ch} \gamma\pi \times \right. \\ \left. \times \cos \alpha - \cos \delta\pi \operatorname{sh} \gamma\pi \sin \alpha) \right]. \quad (10)$$

Отметим, что в работе [2] для анализа выражения, аналогичного (2), используются аналитические выражения для сумм вида

$$\sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq j}}^{\infty} \frac{P_s(u)}{(s-j)^2} e^{-is\bar{y}_0} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Средний за период поток вектора Пойнтинга через элемент поверхности $rd\psi$ (единичный вдоль оси OX) в дальней зоне

$$S_r r d\psi = \frac{cr}{8\pi} |H_x|^2 d\psi. \quad (11)$$

Проанализируем полученные формулы. Ранее уравнения (4), (10) рассматривались в работе [1]. В выражениях (4) и (10) можно вынести за скобки множитель

$$\frac{i\kappa |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}}{1 + i\kappa |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}}, \quad (12)$$

который равен коэффициенту отражения плоской H -поляризованной волны, падающей под углом ψ к плоскости решетки [3]. Первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (4) без $\ln \frac{1+u}{2}$ представляет собой главную часть выражения для поля переходного излучения в дальней зоне, возникающего при пересечении потоком заряженных частиц идеально проводящего экрана, т. е. это слагаемое связано с параметрами потока зарядов и не содержит геометрических характеристик решетки. Второе же слагаемое $(-i\kappa T(u, \bar{y}_0))$,

определяется параметром заполнения решетки $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ и координатой линии пересечения частицами плоскости решетки. В частности, если частицы пересекают решетку в центре щели или ленты, то в силу (4) H_x равняется коэффициенту отражения (12), умноженному на выражение для поля переходного излучения в дальней зоне, возникающего при пересечении потоком зарядов сплошного металлического экрана. Проведенный анализ позволяет предсказывать свойства поля излучения, возбуждаемого заряженными частицами, пересекающими решетки других видов, если для них известен коэффициент отражения плоской H -поляризованной волны.

Рассмотрим случай, когда заряды пересекают ленту ($|\bar{y}_0| < \theta$). Поле излучения (2) определяется (4), функциями Лежандра и интегралами вида (7). Эти интегралы нельзя выразить через элементарные функции для произвольного $\bar{y}_0$, кроме $\bar{y}_0 = 0$. Согласно выражениям (4), (11) интенсивность излучения достигает минимума по параметру $\bar{y}_0$ при пролете частиц через середину ленты. Зависимость интенсивности излучения от $\bar{y}_0$ характеризуется величиной $T(u, \bar{y}_0)$, причем $T^2(u, -\bar{y}_0) = T^2(u, \bar{y}_0)$, поэтому будем рассматривать только положительные значения $\bar{y}_0$.

Нами рассчитано значение

$$T_1^2(u, \bar{y}_0) = T^2(u, \bar{y}_0) \left(1 + \kappa^2 \sin^2 \psi \ln^2 \frac{1+u}{2}\right)^{-1}$$

в зависимости от $\bar{y}_0$ для различных u , $\kappa \cos \psi = 0,1$, при этом $\bar{y}_0$ изменялось от нуля до θ . Согласно уравнению (5) $T_1^2(u, \bar{y}_0 = 0) = 0$. С увеличением $\bar{y}_0$ значение $T_1^2(u, \bar{y}_0)$ растет монотонно, достигает максимума при $\bar{y}_0 = \bar{y}_{0m}$, если $u < 0,7$, а затем убывает до значения $T_1^2(u, \bar{y}_0 = \theta)$. (При $\bar{y}_0 = \theta = \frac{\pi d}{l}$ частицы касаются края ленты). Значения $\bar{y}_{0m}$ определяются соотношением $\cos \bar{y}_{0m} = 0,125(u^2 + 6u + 1)$. Если $u \geq 0,7$, то максимальное значение $T_1^2(u, \bar{y}_0)$ достигает при $\bar{y}_0 = \theta$. Зависимость от $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ значений $T_1^2(u, \bar{y}_{0m})$, $T_1^2(u, \theta)$ (второе число) для $u < 0,7$ и $T_1^2(u, \theta)$ для $u \geq 0,7$ отражена в таблице. Напомним, что

u	T_1^2	u	T_1^2	u	T_1^2	u	T_1^2
—0,9	3,46 1,68	—0,4	2,20 1,92	0,1	1,03 0,99	0,6	0,246 0,244
—0,8	3,27 2,08	—0,3	1,94 1,75	0,2	0,84 0,82	0,7	0,150
—0,7	3,01 2,20	—0,2	1,70 1,56	0,3	0,67 0,65	0,8	0,059
—0,6	2,73 2,17	—0,1	1,46 1,37	0,4	0,51 0,50	0,9	0,019
—0,5	2,47 2,07	0	1,24 1,18	0,5	0,37 0,36		

$T_1^2(u, \bar{y}_0 = \theta)$ — наибольшее значение, которое может принимать $T_1^2(u, \bar{y}_0)$, когда поток заряженных частиц проходит через щель. Из таблицы видно, что для узких лент решетки ($u > 0$) максимум $T_1^2(u, \bar{y}_0)$ мало отличается от $T_1^2(u, \theta)$, однако с увеличением ширины лент это отличие заметно растет. Таким образом, интенсивность излучения достигает своего наибольшего значения в случае, когда заряды пересекают ленту, что соответствует нашим физическим представлениям.

Список литературы: 1. Прокопчук Ю. А. Излучение электромагнитных волн электронным пучком, пересекающим дифракционную решетку. — Радиотехника, 1971, вып. 19, с. 96—102. 2. Прокопчук Ю. А. Излучение, возникающее при пересечении металлической решетки пучками заряженных частиц. — Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 203. Радиофизика и электроника, вып. 9, с. 17—20. 3. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. — 400 с.

Поступила в редколлегию 07.01.84

УДК 621.385.6

С. Г. КУРБАРОВ, А. А. ШМАТЬКО, канд. физ.-мат. наук

К УЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ГДИ

Исследование влияния низкочастотных составляющих естественных и технических шумов электронного потока на амплитуду и частоту генерируемого колебания проведено на основе самосогласованной системы уравнений, описывающих нелинейное электронно-волновое взаимодействие в резонансной распределенной системе [1] и общей флуктуационной теории автогенераторов [2]. В приближении малых случайных возмущений тока $\tilde{I}_0$ и скорости $\tilde{v}_0$ электронного пучка исходные уравнения путем линеаризации разделяются на регулярные и флуктуационные. Однако при линеаризации уравнения движения по малым случайным возмущениям возникает особенность, связанная с наличием разрывных функций в выражении для поля пространственного заряда, представленного бесконечными рядами Фурье. Эту особенность можно исключить путем замены бесконечных пределов суммирования на конечные, что соответствует переходу от последовательности движущихся бесконечно тонких заряженных дисков к дискам конечной толщины в модели электронного пучка [3]. Тогда уравнение движения сводится к системе уравнений — нелинейного относительно фазы электрона θ , описывающей его детерминированное движение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \gamma^3 \Phi_0 \left[\frac{F_0}{4} f(\xi) \cos(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) - \Phi_0 p_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(u' - u) \varphi' \right], \quad (1)$$

$\left(\theta(\xi, \varphi) = \frac{\partial \theta(\xi, \varphi)}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0\right)$ и линейных относительно функций $\theta_i(\xi, \varphi)$, определяющих случайное смещение ВЧ фазы электрона $\tilde{\theta} = \Phi_0(\tilde{I}_0/I_0\theta_1(\xi, \varphi) - \tilde{v}_0/v_0\theta_2(\xi, \varphi))$

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \xi^2} + A_1(\xi, \varphi) \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} + A_2(\xi, \varphi) \theta_i = A_3(\xi, \varphi) + A_{4i}(\xi, \varphi), \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

$$\left(\theta_1(\xi, \varphi) = \frac{\partial \theta_1(\xi, \varphi)}{\partial \xi} = 0, \quad \theta_2(\xi, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \theta_2(\xi, \varphi)}{\partial \xi} = 1 \text{ при } \xi = 0\right).$$

Коэффициенты уравнений (2) имеют вид

$$A_1(\xi, \varphi) = -\frac{3}{4} \gamma^2 \left[F_0 f(\xi) \cos(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) - 4\Phi_0 p_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(u' - u) d\varphi' \right];$$

$$A_2(\xi, \varphi) = \frac{\Phi_0}{4} \gamma^3 \left[F_0 f(\xi) \sin(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) - 4\Phi_0 p_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_1(u' - u) d\varphi' \right];$$

$$A_3(\xi, \varphi) = -\Phi_0 \gamma^3 p_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(u' - u) d\varphi';$$

$$A_{4i}(\xi, \varphi) = -\Phi_0^2 \gamma^3 p_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_1(u' - u) \theta_i(\xi, \varphi') d\varphi'.$$

В этих выражениях F_0 — безразмерная амплитуда стационарных колебаний в отсутствие шума, $\gamma = 1 + (\partial \theta / \partial \xi) / \Phi_0$, $p_1 = (\omega_p / \omega_r)^2$,

$$u = \varphi + \theta(\xi, \varphi), \quad u' = \varphi' + \theta(\xi, \varphi'), \quad D(x) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n / n \cdot \sin nx,$$

$D_1(x) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \cos nx$. Другие обозначения в системе аналогичны сделанным в работе [1].

Линеаризуя уравнения возбуждения [1] относительно малых случайных величин, для флуктуаций амплитуды $\alpha(t)$ и частоты $\nu(t)$ получим

$$\frac{d\alpha}{dt} + p\alpha = \frac{\omega_r}{F_0} E_1(t), \quad \nu(t) + q\alpha = \frac{\omega_r}{F_0} E_2(t), \quad (3)$$

где p, q — прочность предельного цикла и неизохронность колебаний генератора. Случайные функции

$$E_1(t) = \frac{G}{2Q} \left[\left(\frac{F_0}{G} - S_1 \right) \frac{\tilde{I}_0}{I_0} + \Phi_0 S_2 \frac{\tilde{v}_0}{v_0} \right],$$

$$E_2(t) = \frac{G}{2Q} \left[\left(\frac{F_0}{G} \delta(F_0) + C_1 \right) \frac{\tilde{I}_0}{I_0} + \Phi_0 C_2 \frac{\tilde{v}_0}{v_0} \right],$$

отражающие вклад различных компонент флуктуаций электронного пучка в общий модуляционный шум, определяются через интегральные параметры

$$S_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \theta_i(\xi, \varphi) \sin(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) d\xi d\varphi;$$

$$C_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \theta_i(\xi, \varphi) \cos(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) d\xi d\varphi;$$

$$\eta(F_0) = \frac{F_0}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) d\xi d\varphi, \quad F_0 = \sqrt{G\eta(F_0)};$$

$$\delta(F_0) = -\frac{G}{4\pi F_0} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \Phi_s \xi + \theta) d\xi d\varphi.$$

Применение спектрально-корреляционной теории к флуктуационным уравнениям (3) позволяет получить все интересные спектральные амплитудно-частотные характеристики колебания с учетом коллективного взаимодействия электронов и поля.

Список литературы: 1. Вавриб Д. М., Третьяков О. А., Шматько А. А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием. — Х. 1978. — 60 с. — (Препринт / АН УССР, Физ.-техн. ин-т). 2. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968. — 660 с. 3. Солнцев В. А. Метод крупных частиц и математические модели электронных приборов типа О. — Лекции по электронике СВЧ (4-я зимняя школа-семинар инж.). Кн. 1. — Саратов, 1978, с. 7—65.

Поступила в редколлегию 27.12.83.

УДК 621.385

Д. М. ВАВРИБ, канд. физ.-мат. наук,
Ю. А. РОМАНЦОВ, О. А. ТРЕТЬЯКОВ, д-р физ.-мат. наук

АНАЛИЗ МОДУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ГДИ

При переходе в диапазон миллиметровых длин волн классические клистронные модуляторы и приборы аналогичного назначения на основе ЛБВ малоэффективны. Установлено, что более перспективны модуляторы, работающие по принципу распределенного взаимодействия электронного пучка с полем резонансных систем, содержащих периодическую структуру. Анализ модуляторов на основе объемных резонаторов описан в работе [1]. В рассматриваемом диапазоне длин волн представляется целесообразным для модуляции электронного пучка применять системы на основе откры-

тых резонаторов, используемых в ГДИ, высокая эффективность которых подтверждена при разработке автогенераторов. Нами рассчитаны такие модуляторы и определены их основные характеристики.

Задача решается в приближении заданного поля, что обосновано: рассматриваемые резонаторы обладают высокой добротностью. Модуляция электронов осуществляется синхронной с пучком волной, которая возбуждается вблизи дифракционной решетки. Ее поле, усредненное по поперечному сечению пучка, можно записать в виде [2].

$$E_y = \frac{A}{2} f(y) \exp[i(ky - \omega t - \gamma)], \quad (1)$$

где $A/2$ — амплитуда поля в резонаторе, возбуждаемая внешним сигналом; γ — фаза поля; k — продольное волновое число синхронной с пучком волны; ω — частота внешнего сигнала; $f(y)$ — распределение собственного типа колебаний в резонаторе. Для основного типа колебаний открытого резонатора функция $f(y)$ определяется выражением [2]:

$$f(y) = C \exp[-(y/L - 0,5)^2/\omega^2], \quad (2)$$

где $C = [2\omega \int_0^{1/2\omega} \exp(-2x^2) dx]^{-1/2}$; ω — радиус пятна поля в резонаторе; L — длина пространства взаимодействия.

Рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения случай слабого внешнего сигнала. Также полагаем, что токи пучка значительно меньше пускового. В такой постановке определение характеристик модулятора сводится к решению следующего уравнения движения электронов:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{F\Phi_0}{4} f(\xi) \cos(\Phi_s \xi + \varphi) - \frac{p^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta \cos(\varphi' - \varphi) d\varphi' \quad (3)$$

с начальными условиями $\theta = \frac{d\theta}{d\xi} = 0$ при $\xi = 0$. Здесь $\theta(\varphi, \xi)$ — смещение электронов по фазе за счет взаимодействия с полем; $\xi = y/L$; $\Phi_0 = \omega_r L/v_0$; ω_r — собственная частота резонатора; v_0 — средняя скорость электронов; $\Phi_s = \Phi_0(1 - v_0 k/\omega)$; $p = \Gamma \frac{\omega_r}{\omega}$ — параметр пространственного заряда; Γ — коэффициент редукции; ω_p — плазменная частота. В общем случае решение уравнения (3) находится в квадратурах. Для $\xi = 1$, что соответствует выходу частиц из пространства взаимодействия, оно может быть представлено в виде

$$\frac{d\theta}{d\xi} = (F\Phi_0/4) \sqrt{G_1^2 + G_2^2} \cos(\varphi + \varphi_1); \quad (4)$$

$$\theta = (F\Phi_0/4) \sqrt{G_3^2 + G_4^2} \cos(\varphi + \varphi_2). \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \operatorname{arctg} G_1/G_2; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} G_3/G_4; \\ G_1 &= \int_0^1 f(\xi) \cos p(1-\xi) \sin \Phi_s \xi d\xi; \\ G_2 &= \int_0^1 f(\xi) \cos p(1-\xi) \cos \Phi_s \xi d\xi; \\ G_3 &= \frac{1}{p} \int_0^1 f(\xi) \sin p(1-\xi) \sin \Phi_s \xi d\xi; \\ G_4 &= \frac{1}{p} \int_0^1 f(\xi) \sin p(1-\xi) \cos \Phi_s \xi d\xi.\end{aligned}$$

Скорость частиц связана с $\frac{d\theta}{d\xi}$ соотношением

$$v_e = v_0 \left/ \left(1 + \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right.,$$

откуда скорость частиц на выходе

$$v_e \simeq v_0 \left[1 - \frac{F}{4} \sqrt{G_1^2 + G_2^2} \cos(\varphi + \varphi_1) \right]. \quad (6)$$

Полученные выражения позволяют полностью рассчитать характеристики модулятора — коэффициенты модуляции пучка по плотности и скорости. По аналогии с клистронными модуляторами введем коэффициент эффективности модуляции частиц по скорости β и параметр группировки X , которые, согласно уравнениям (6) и (5), можно представить так:

$$\beta = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}; \quad (7)$$

$$X = \frac{F\Phi_0}{4} \sqrt{G_3^2 + G_4^2}. \quad (8)$$

Легко показать, что в предельном случае $f(\xi) = 1$; $\Phi_s \equiv \Phi_0$ из выражений (7), (8) следуют известные соотношения для клистронных модуляторов [3].

В рассматриваемом нами случае открытого резонатора с периодической структурой для β и X имеют место аналитические выражения:

$$\begin{aligned}\beta &= (2\pi\omega^2)^{1/4} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\omega^2 p}{2} \Phi_s \right) + \cos^2 \frac{p}{2} \right]^{1/2} e^{-\frac{\omega^2(\Phi_s^2 + p^2)}{4}}; \\ X &= \frac{F\Phi_0}{8} (2\pi\omega^2)^{1/4} \left[\frac{\operatorname{sh}^2(\omega^2 p \Phi_s / 2) + \sin^2(p/2)}{(p/2)^2} \right]^{1/2} \exp(-\omega^2(\Phi_s^2 + p^2)/4).\end{aligned}$$

Для малого поля пространственного заряда эти выражения имеют наиболее простой вид:

$$\beta = (2\pi\omega^2)^{1/4} e^{-(\Phi_s \omega/2)^2}; \quad (9)$$

$$X = \frac{F\Phi_0}{8} (2\pi\omega^2)^{1/4} (1 + \omega^4 \Phi_s^2)^{1/2} e^{-(\Phi_s \omega/2)^2}. \quad (10)$$

Из полученных выражений следует, что в распределенном резонаторе одновременно происходит эффективная модуляция частиц по скорости и по плотности. Специфика гауссового распределения поля в резонаторе проявляется в том, что коэффициент модуляции по скорости β является монотонной функцией рассинхронизма Φ_s и никогда не обращается в нуль. Согласно (9) оптимальные значения параметра Φ_s определяются радиусом пятна поля в резонаторе $\Phi_{\text{сопт}}^2 = 1/\omega^2$. Напомним, что в приборах с однородным распределением поля $f(\xi) = 1$ существуют дискретные значения рассинхронизма Φ_s , когда β обращается в нуль.

Возможность реализации конечных значений параметра непосредственно в пространстве взаимодействия указывает на то, что в приборах, использующих такой тип модуляторов, в общем нет необходимости применения трубок дрейфа для группировки частиц по плотности. Рассмотренные модуляторы могут найти широкое применение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн, поскольку здесь не накладываются жесткие ограничения на геометрические размеры колебательной системы, что позволяет достаточно легко реализовать их на практике.

Список литературы: 1. Бороденко В. Г., Малькова Н. Я., Победоносцев А. С. Нелинейный анализ гибридных приборов типа О: Энергетические характеристики твистрона.— Электрон. техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1966, вып. 10, с. 36—54. 2. Ваврин Д. М., Третьяков О. А., Шматько А. А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием.— Х., 1978.— 60 с.— (Препринт / АН УССР, Физ.-техн. ин-т). 3. Гайдук В. И., Палатов К. И., Петров Д. М. Физические основы электроники СВЧ.— М.: Сов. радио, 1971.— 600 с.

Поступила в редколлегию 27.12.83

УДК 621.385.6

М. М. ТАРАСОВ

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАССИНХРОНИЗМЕ СВЧ АВТОГЕНЕРАТОРА

Для приборов с распределенным взаимодействием О-типа, согласно [1], выражения для электронного к. п. д. η и фазы электрона на траектории Θ_i имеют вид

$$\eta = \frac{F}{4\pi} \Delta\varphi \int_0^1 f(\xi) \sum_{i=1}^N \cos(z + \theta_i + \varphi_i) d\xi; \quad (1)$$

$$\frac{d^2\theta_i}{d\xi^2} = \frac{F\Phi_0}{4} f(\xi) \left(1 + \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial\theta_i}{\partial\xi}\right)^3 \cos(z + \theta_i + \varphi_i); \quad \frac{dz}{d\xi} = b(\xi) \quad (2)$$

$$\theta_i(0) = \frac{d\theta_i(0)}{d\xi} = z(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь N — число электронов на высокочастотном периоде. В отличие от [1], рассинхронизм b не постоянен, а является функцией от координаты ξ .

Задача состоит в отыскании такой зависимости $b_{\text{опт}}(\xi)$, при которой значение к. п. д. η максимально в классе ограниченных функций $|b(\xi)| \leq c$.

Эта задача решалась методами теории оптимального управления, где под управлением понималась функция рассинхронизма $b(\xi)$. При разработке алгоритма решения сформулированной задачи использовались необходимые условия экстремума функционала (1) с дифференциальными связями (2) и условиями (3) в форме принципа максимума Понтрягина [2].

Действие алгоритма основано на модифицированном методе И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько [2].

Расчеты проводили для однородного $f(\xi) = 1$ и гауссового $f(\xi) = \pi^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1} \exp\left[-\left(\frac{\xi - 0,5}{\omega}\right)^2\right]$ распределений амплитуды поля и следующих параметров: $F = 1, 3, 5$; $\Phi_0 = 100$; $\omega = 0,25$; $N = 72$. Результаты сравнивали с максимальным к. п. д., найденным при постоянном рассинхронизме $b = -\pi$ в зоне генерации для $\Phi_0 = 100$, $F = 1$ и $f(\xi) = 1$.

Полученные значения к. п. д. (в процентах) приведены в таблице.

F	$f(\xi) = 1$		$f(\xi) = 4/\pi \exp[-16(\xi - 0,5)^2]$	
	$b_{\text{опт}}(\xi)$	$b(\xi) = -\pi$	$b_{\text{опт}}(\xi)$	$b(\xi) = -\pi$
1	17,86	5,34	15,57	6,7
3	32,7	3,03	37,6	1,14
5	45,86	-0,09	34,3	2,65

Для $f(\xi) = 1$ решалась также задача об отыскании зависимости $b_{\text{мон}}(\xi)$, при которой к. п. д. η достигает наибольшего значения в классе невозрастающих (монотонных) рассинхронизмов.

Приведем результаты расчетов при $\Phi_0 = 100$; $F = 1$, $\eta = 15,8\%$; $F = 3$, $\eta = 23,14\%$; $F = 5$, $\eta = 42,8\%$.

Список литературы: 1. Ваврич Д. М., Третьяков О. А., Шматько А. А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием.— Х., 1978.— 61 с.— (Препринт / АН УССР, Физ.-техн. ин-т). 2. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1971.— 424 с.

Поступила в редколлегия 27.12.83.

УДК 621.385.6

М. М. ТАРАСОВ

ПРЯМОЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СВЧ АВТОГЕНЕРАТОРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ О-ТИПА

В предыдущей работе автора (см. настоящий сборник) сформулирована задача о нахождении оптимального рассинхронизма и предложена методика ее решения на основе принципа максимума Понтрягина.

Другой подход к ее решению — прямой метод — заключался в следующем. По значениям в равноотстоящих узлах функция рассинхронизма $b(\xi)$ интерполировалась на весь интервал взаимодействия $0 \leq \xi \leq 1$. Далее комбинацией двух численных методов — градиентного и метода Гольдфарба [1] определялись такие значения функции рассинхронизма в узловых точках, при которых к. п. д. достигал наибольшего значения.

При расчетах выявилась сильная зависимость результатов от выбора начальных значений. Как и раньше, обозначим через $b_{\text{опт}}(\xi)$, $b_{\text{мон}}(\xi)$ решения задачи об оптимальном рассинхронизме по Понтрягину соответственно в классе ограниченных и в классе невозрастающих (монотонных) рассинхронизмов. Выберем для сравнения линейно убывающий от $-\pi$ до -4π рассинхронизм $b_{\text{лин}}(\xi)$.

В результате вычислений при начальных данных, взятых из $b_{\text{опт}}(\xi)$, $b_{\text{мон}}(\xi)$, $b_{\text{лин}}(\xi)$, были получены соответственно зависимости $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$, $b_3(\xi)$.

Расчеты проводили для объемного резонатора с $f(\xi) = 1$ при трех значениях амплитуд высокочастотного колебания $F = 1, 3, 5$ и семи узлах интерполяции. Безразмерный угол пролета Φ_0 [2] полагали равным 100. При решении задачи прямым методом ограничение $b(\xi) \leq c$ снималось. Полученные значения к. п. д. (в процентах) приведены ниже.

F	$b_1(\xi)$	$b_{\text{опт}}(\xi)$	$b_2(\xi)$	$b_{\text{мон}}(\xi)$	$b_4(\xi)$	$b_{\text{лин}}(\xi)$
1	16,1	17,86	15,6	15,8	13,7	8,42
3	35,3	32,7	24,8	23,14	15,7	11,58
5	37	45,86	21,4	42,8	20,1	7,58

Исследование полученных функций $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ показало, что рас-синхронизм $b_1(\xi)$ в известной мере «отрабатывает» исходную зависи-мость $b_{\text{опт}}(\xi)$. Это справедливо также для зависимостей $b_2(\xi)$ и $b_{\text{мон}}(\xi)$.

Список литературы: 1. Кураев А. А., Ковалев И. С., Колосов С. В. Числен-ные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ.— Минск : Наука и техника, 1974.— 294 с. 2. Ваврич Д. М., Третьяков О. А., Шматько А. А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием.— Х., 1978.— 61 с.— (Препринт / АН УССР, Физ.-техн. ин-т).

Поступила в редколлегию 27.12.83.

УДК 621.385.632

К. П. ЯЦУК, канд. физ.-мат. наук,
Ю. И. ГРЕБЕНЮК

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ ПЛОСКОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ

В работе [1] получено дисперсионное уравнение для несиммет-ричных поверхностных волн в приближении анизотропно проводя-щей плоскости и больших замедлений ($\gamma r \gg 3$). Показано, что дис-персионные уравнения для несимметричных и симметричных волн одинаковы. При решении задачи о возбуждении спирали [2] выясни-лось, что в области излучения фазовые скорости несимметричных и симметричных волн не равны друг другу. Нами проведено экспе-риментальное исследование дисперсии плоской спирали вблизи из-лучающей области.

Были изготовлены две спирали с $\text{ctg } \psi = 50$ на подложках из стеклотекстолита, с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,7$ и толщиной $a = 1,8$ мм, прилегающих к металлическому экрану: однозаходная с начальным радиусом 5 мм, конечным — 23 мм, двух-заходная — с радиусами 7 и 29 мм. Диаметры экранов равнялись диаметрам спиралей. Обе спирали возбуждались на начальном ради-усе: однозаходная — компланарной линией, двухзаходная — син-фазно разветвленной полосковой. Возбуждающие линии располага-лись параллельно плоскостям спиралей под экранами. Спирали со-единялись с возбуждающими линиями при помощи коротких стер-жней, расположенных нормально к плоскостям спиралей и возбуж-дающих линий.

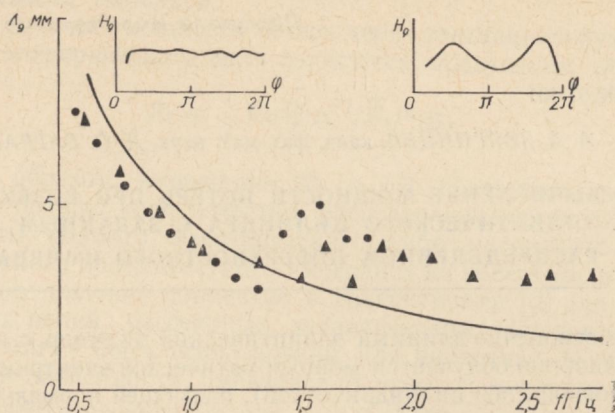
Для учета влияния диэлектрика и экрана было получено диспер-сионное уравнение для несимметричных волн ($\sim e^{i n \varphi}$) в тех же при-ближениях, что и в работе [1], т. е. для больших замедлений

$$k^2 \text{ctg}^2 \psi [1 + \epsilon - e^{-2\gamma a} (1 - \epsilon)] = 2\gamma^2, \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ — радиальное волновое число; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число в свободном пространстве. Как и для свободной спирали, дисперсионное уравнение (1) не зависит от степени несимметрии по азимуту, т. е. n .

Экспериментально исследовали распределения полей в радиальном и азимутальном направлениях над поверхностью спирали, мощности на внешних концах спиралей и полей в дальней зоне.

На рисунке приведена рассчитанная по формуле (1) длина замедленной волны λ_g от частоты f для описанных спиралей, результаты экспериментальных исследований (кружки — для однозаходной, треугольники — для двухзаходной), азимутальные зондограммы поля (левая для $f = 0,8$ ГГц, правая — для 1,4 ГГц).



Исследования показали, что в области частот, меньших 1 ГГц существует симметричная волна. В этой области экспериментально измеренные λ_g хорошо совпадают с расчетными. С ростом частоты $f > 1$ ГГц для обеих спиралей экспериментально обнаружены небольшие области с аномальным ходом дисперсии для волн, несимметричных по азимуту ($n = 1$). С дальнейшим ростом частоты получились разные результаты для одно- и двухзаходных спиралей.

У однозаходной спирали зондограммы представляли собой 1—2 вариации поля по радиусу, что не дало возможности определить λ_g . У двухзаходной фиксировали 5—6 полуволн и по ним определяли λ_g . Из рисунка видно, что после загиба дисперсия опять стала нормальной, как у расчетной кривой, но измеренные значения λ_g оказались больше расчетных. В области $f \geq 1,6$ ГГц мощность, измеренная на конце однозаходной спирали, меньше, чем у двухзаходной, а излученная мощность у однозаходной больше, чем у двухзаходной (при равных входных мощностях и КСВН в линии).

Полученные результаты можно объяснить одновременным существованием у спирали поверхностных и излученных несимметричных

волн с соотношением мощностей, определяемым условиями возбуждения.

Таким образом, экспериментально обнаружены несимметричные поверхностные волны в плоской логарифмической спирали; выявлен участок с аномальной дисперсией, связанный с возникновением излучения; экспериментальные значения замедлений для несимметричных волн оказались меньше, чем рассчитанные по формуле (1).

Список литературы: 1. Лисенков М. А., Кишкунев В. Н. К вопросу о распространении электромагнитных волн в плоских спиральных линиях. — Тр. Моск. высш. инж.-радиотехн. училища, 1961, № 23, с. 89—102. 2. Горохеня А. В., Горбунов В. И. Теория частотно-независимых антенн. — Омск: Зап.-Сиб. кн. изд-во. Омск. отд-ние, 1979. — 78 с.

Поступила в редколлегию 28.11.83

УДК 621.396.67.001

А. А. ЗВЯГИНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, Д. О. БАТРАКОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ПОТЕРЬ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА

Пусть бесконечно длинный эллиптический цилиндр с импедансной поверхностью облучается монохроматической электромагнитной волной (плоской либо цилиндрической), падающей нормально к образующим цилиндра. Относительный поверхностный импеданс не зависит от продольной координаты Z . Ставится задача об определении мощности потерь, обусловленных неидеальностью поверхности цилиндра.

Поскольку рассматривается двумерная задача, уравнение баланса мощности можно записать так:

$$\operatorname{Re} \oint_C [\vec{E}, \vec{H}^*] \vec{n}_0 ds = P_{\text{ист}} + \oint_S [\vec{E}_1, \vec{H}_1^*] \vec{n}_1 ds, \quad (1)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — амплитуды полного электрического и магнитного поля на поверхности цилиндра C ; $\vec{n}_0$ — направление внешней нормали к поверхности цилиндра; $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ — амплитуды полного электрического и магнитного поля на некоторой поверхности S , окружающей цилиндр и включающей источники поля; $\vec{n}_1$ — внутренняя нормаль к этой поверхности; $P_{\text{ист}}$ — мощность источника поля.

Если поверхность S не содержит источника поля, то в (1) следует положить $P_{\text{ист}} = 0$.

Используя импедансное граничное условие Леонтовича [1], левую часть (1) можно преобразовать

$$\operatorname{Re} \oint_C [\vec{E}, \vec{H}^*] \vec{n}_0 dS = \operatorname{Re} z_s \oint_S [\vec{H}^*, [\vec{n}_1, \vec{H}]] \vec{n}_1 ds.$$

Далее, учитывая, что зависимость полей от времени гармоническая $e^{-i\omega t}$, и произведя усреднение по времени периода колебаний, придем к формуле для определения мощности потерь:

$$P_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_C z_s / \vec{H}_\tau /^2 ds, \quad (2)$$

где $\vec{H}_\tau$ — тангенциальная составляющая вектора магнитного поля на поверхности цилиндра.

Выражение для мощности потерь через тангенциальную составляющую электрического поля запишется следующим образом:

$$P_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_C z_s^{-1} / \vec{E}_\tau /^2 ds. \quad (3)$$

Таким образом, выражения (2) и (3) позволяют вычислить мощность потерь, если известно распределение тангенциальной компоненты полного электрического либо магнитного поля и эквивалентного поверхностного импеданса на поверхности цилиндра. Эти соотношения совместно с выражениями [2] для электромагнитных полей, рассеянных эллиптическим импедансным цилиндром, могут быть использованы для численных расчетов на ЭВМ, если зависимость импеданса от угловой координаты имеет вид для электрического поля $z_s = A \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$ и для магнитного поля $z_s = B / \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$.

Список литературы: 1. Ильинский А. С., Слепая Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 231 с. 2. Батраков Д. О., Ющенко А. Г., Звягинцев А. А. Возбуждение эллиптического цилиндра нитью с током. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 112. Радиотехника и радиоэлектроника, вып. 8, с. 12—18.

Поступила в редколлегию 05.01.84.

УДК 537.877

Н. А. ЧУМАЧЕНКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ В Н-ОБРАЗНОМ ВОЛНОВОДЕ

Известно, что закрытые волноводы H -образного поперечного сечения используются в технике СВЧ как малогабаритные линии передачи. Исследованию распространения электромагнитных волн в та-

ких волноводах посвящено значительное число работ. Прикладной и методический интерес представляет рассмотрение распространения электромагнитных импульсов в волноводах H -образного поперечного сечения.

Рассмотрим отрезок H -образного волновода длиной l как четырехполюсник, который характеризуется передаточной функцией

$$A(\omega) = \exp\left(-i \frac{b}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}\right), \quad (1)$$

где c — скорость света; ω — частота электромагнитного поля; ω_c — критическая частота H -образного волновода.

Пусть на вход этого волновода подается импульс

$$u_1(t) = g(t) \cos \omega_0 t. \quad (2)$$

В (2) приняты обозначения:

$g(t)$ — огибающая импульса; ω_0 — несущая частота импульса. Введем в рассмотрение спектр огибающей импульса, вычисляемый по формуле

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

Тогда комплексная огибающая импульса на выходе четырехполюсника имеет вид

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) A(\omega + \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

Отсюда с учетом выражения (3) запишем

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(i\varphi(\omega)) d\omega, \quad (5)$$

$$\text{где } \varphi(\omega) = \omega t - t_0 \sqrt{(\omega + \omega_0)^2 - \omega_c^2}; \quad t_0 = \frac{l}{c}.$$

В общем случае интеграл в правой части (5) вычисляют асимптотическим методом или численно с применением ЭВМ.

Для практически интересного случая, когда ширина зазора между гребнями мала по сравнению с размерами боковой стенки волновода ($\theta = d/b \ll 1$), критическая частота согласно [1] определяется по формуле

$$\omega_c = \frac{2\pi c}{\lambda_c} \quad (6)$$

для симметричных H -волн

$$\lambda_c = 2\pi a \left\{ \delta(1 - \delta) \left[\frac{\theta}{3} + \frac{\delta}{3}(1 - \theta) - \frac{2\rho\theta}{\pi} \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} \right] (1 - \delta(1 - \theta))^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

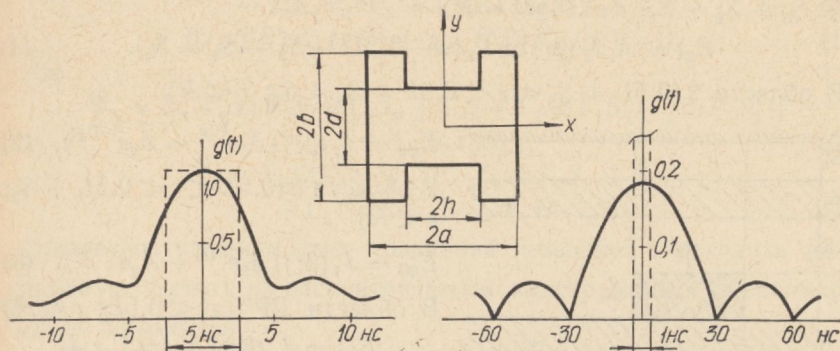
для несимметричных волн

$$\lambda_c = 2\pi a \left\{ \frac{1}{3} + (1 - \delta) \left[\delta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{2}{3} \right) - \frac{2\rho}{\pi} \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где

$$\delta = \frac{h}{a}; \quad \frac{a-h}{b} \geq \frac{1}{2}; \quad \theta = \frac{d}{b}; \quad \kappa < \frac{1}{2}; \quad \rho = \frac{b}{a}.$$

Для некоторых импульсов огибающие, рассчитанные на ЭВМ, приведены на рисунке.



Список литературы: 1. Снурникова Г. К. Распространение электромагнитных волн в гребневых волноводах.— Радиотехника, 1970, вып. 15, с. 115—122. 2. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1962.— 247 с.

Поступила в редколлегию 06.01.84.

УДК 621.372.413

В. А. БОРОДАЕВ, канд. физ.-мат. наук, Ю. А. ПРОКОПЧУК

ВЛИЯНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ЧАСТОТУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Один из принципов механической перестройки резонансной частоты миниатюрных диэлектрических резонаторов (ДР) основан на возмущении поля ДР перемещаемым в его окрестности диэлектрическим слоем. Исследование диэлектрического слоя вблизи ДР необходимо, в частности, для определения влияния диэлектрической подложки полосковой линии на ДР.

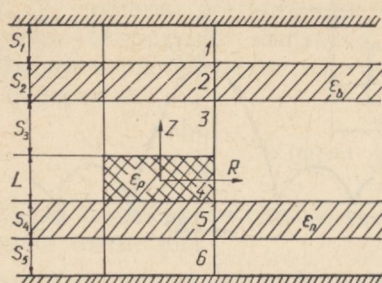
Рассмотрим цилиндрический ДР высотой L и диаметром $D = 2R$ из материала с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_p , расположенный на диэлектрической подложке с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_n (рисунок). На рас-

стоянии S_3 над ДР находится диэлектрический слой с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_p . Эта система сверху и снизу ограничена металлическими поверхностями, расположенными на расстояниях S_1 и S_5 от диэлектрических слоев и препятствующими излучению из ДР. Верхний диэлектрический слой служит для регулировки резонансной частоты рассматриваемой конструкции.

Исследуем основной $H_{01\delta}$ тип колебаний ДР, который имеет три составляющие электромагнитного поля: H_z , H_r и E_ϕ . Разделим исследуемую систему на 7 областей и запишем выражения для E_ϕ в этих областях. В области 1 ($0,5L + S_3 + S_2 < z < 0,5L + S_3 + S_2 + S_1$, $r < 0,5D = R$)

$$E_{\phi 1} = A_1 J_1(\beta r) \operatorname{Sh} \Gamma_1(z - 0,5L - S_3 - S_2 - S_1). \quad (1)$$

В области 2 ($0,5L + S_3 < z < 0,5L + S_3 + S_2$; $r < R$)



$$E_{\phi 2} = J_1(\beta r) (A_2 e^{\Gamma_2 z} + \bar{A}_2 e^{-\Gamma_2 z}). \quad (2)$$

В области 3 ($0,5L < z < 0,5L + S_3$; $r < R$)

$$E_{\phi 3} = J_1(\beta r) (A_3 e^{\Gamma_3 z} + \bar{A}_3 e^{-\Gamma_3 z}). \quad (3)$$

В области ДР ($|z| < 0,5L$; $r < R$)

$$E_{\phi 4} = J_1(\beta r) (A_4 \cos \Gamma_3 z + \bar{A}_4 \sin \Gamma_3 z). \quad (4)$$

В области 5 ($-S_4 - 0,5L < z < -0,5L$; $r < R$)

$$E_{\phi 5} = J_1(\beta r) (A_5 e^{\Gamma_4 z} + \bar{A}_5 e^{-\Gamma_4 z}). \quad (5)$$

В области 6 ($-S_5 - S_4 - 0,5L < z < -0,5L - S_4$; $r < R$)

$$E_{\phi 6} = A_6 J_1(\beta r) \operatorname{sh} \Gamma_1(z + 0,5L + S_4 + S_5). \quad (6)$$

В области 7 ($|z| < 0,5L$; $r < R$)

$$E_{\phi 7} = K_1(gr) (A_7 \cos \Gamma_3 z + \bar{A}_7 \sin \Gamma_3 z), \quad (7)$$

где

$$\Gamma_1 = \sqrt{\beta^2 - k^2}; \quad \Gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - k^2 \epsilon_b}; \quad \Gamma_3 = \sqrt{k^2 \epsilon_p - \beta^2}; \quad (8)$$

$$\Gamma_4 = \sqrt{\beta^2 - k^2 \epsilon_n}; \quad g = \sqrt{k^2 (\epsilon_p - 1) - \beta^2}; \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}; \quad (9)$$

Γ_i — продольные волновые числа; β — поперечное волновое число; $J_1(\beta r)$ — функция Бесселя первого рода; $k_1(gr)$ — функция Макдональда; ϵ_0 , μ_0 — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства; A_7 , $\bar{A}_7$ — амплитуды полей; $\omega = 2\pi f$, f — резонансная частота рассматриваемой системы.

Компоненты поля H_{zi} и H_{ri} находят согласно (1)–(9) из уравнений Максвелла. Выражения (1)–(9) точно удовлетворяют вол-

новому уравнению. Будем считать, что $\varepsilon_p \gg 1$. В этом случае поле в основном сосредоточено в ДР и полями в угловых областях $|z| < 0,5L$, $r > R$ в первом приближении можно пренебречь.

Из условий непрерывности касательных составляющих электромагнитного поля на границах раздела сред ($z = 0,5L + S_3 + S_2$; $0,5L + S_3$; $\pm 0,5L$; $-0,5L - S_4$; $r = R$) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & [\Gamma_1 \Gamma_4 \Psi_1 (\Gamma_1 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4) - \Gamma_3^2 \Psi_2 (\Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4 + \\ & + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5)] \operatorname{tg} \Gamma_3 L = -\Gamma_1 \Gamma_3 \Psi_1 (\Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5 - \\ & - \Gamma_3 \Gamma_4 \Psi_2 (\Gamma_1 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\beta J_0(\beta R) K_1(gR) + g J_1(\beta R) K_0(gr) = 0, \quad (11)$$

где

$$\Psi_1 = \Gamma_2 (\Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_1 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2 + \Gamma_1) + \Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 (\Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_1 + \Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2); \quad (12)$$

$$\Psi_2 = \Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 (\Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_1 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2 + \Gamma_1) + \Gamma_1 (\Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_1 + \Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2). \quad (13)$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить резонансную частоту $\frac{\omega}{2\pi}$ рассматриваемой конструкции в зависимости от ее параметров.

Уравнения (10)–(13) допускают предельные переходы к равенствам, соответствующим более простым, но важным конструкциям.

1. $S_1 = 0$. Равенства (10), (11) остаются без изменений, а (12), (13) принимают такой вид:

$$\Psi_1 = \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2); \quad (14)$$

$$\Psi_2 = \Gamma_1 (\Gamma_2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 + \Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_2 S_2). \quad (15)$$

Равенства (10), (11), (14) и (15) соответствуют конструкции, у которой экранированный сверху диэлектрический слой находится над ДР на расстоянии l . При этом ДР помещен на линию с подвешенной подложкой.

2. $S_1 = S_2 = 0$. Это случай экранированной полосковой линии с подвешенной подложкой, на которой находится ДР. Подставив выражения (12), (13) в (10) при $S_1 = S_2 = 0$, получим такое уравнение:

$$\begin{aligned} & [\Gamma_1 \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4) - \Gamma_3^2 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 (\Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4 + \\ & + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5)] \operatorname{tg} \Gamma_3 L = -\Gamma_1 \Gamma_3 (\Gamma_1 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5) - \\ & - \Gamma_3 \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_3 (\Gamma_1 + \Gamma_4 \operatorname{th} \Gamma_1 S_5 \operatorname{th} \Gamma_4 S_4). \end{aligned}$$

После соответствующих переобозначений оно полностью совпадает с выведенным ранее уравнением*. Уравнение (11) в этом случае и далее остается без изменений.

* Бородаев В. А., Носич С. И., Прокопчук Ю. А. Расчет частоты диэлектрического резонатора при наличии металлических и диэлектрических тел. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 248. Физика и техника сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн, с. 31–34.

3. Симметричная конструкция: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$. ДР находится между прилегающими к нему металлическими поверхностями. Равенства (10), (12) и (13) сводятся к простым уравнениям

$$\operatorname{tg} \Gamma_3 L = 0 \quad \text{или} \quad \sin \Gamma_3 L = 0.$$

Нами проведено численное исследование уравнений (10)—(13) на ЭВМ. Для системы с параметрами $\varepsilon_p = 80$, $\varepsilon_n = \varepsilon_b = 9,6$, $L = 1,76$ мм, $D = 4,14$ мм, $S_1 = S_3 = S_5 = 0$, $S_4 = 1,0$ мм различие между теоретическими и экспериментальными результатами составляет 2,5—6,0 % при изменении толщины верхнего диэлектрического слоя S_2 от 0,5 до 3,0 мм.

Таким образом, уравнения (10)—(13) применимы для анализа большого количества физических систем и обеспечивают хорошую точность.

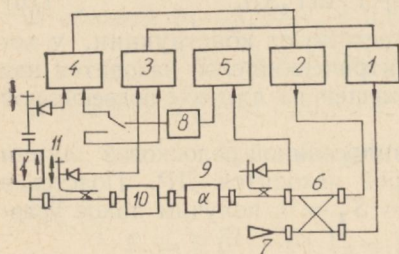
Поступила в редколлегию 21.12.83.

УДК 621.372.852.1

В. Н. ВЕЛИКОЦКИЙ, В. Я. ДВАДНЕНКО, канд. техн. наук,
С. В. ЕКИМОВ, И. Н. ЯРМАК

СТЕНД ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЫСОКОДОБОРНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Чтобы измерить электрические параметры высокودобротных резонаторов, имеющих сравнительно густой спектр, вблизи резонанса и в широком диапазоне частот, необходима специальная аппаратура.



С помощью предлагаемого стенда можно оперативно и с высокой точностью исследовать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) устройств на основе высокودобротных резонаторов в широком диапазоне частот, измерять нагруженные и собственные добротности резонаторов методом передачи [1].

Особенность стенда — возможность исследовать АЧХ в узкой и в широкой полосе частот. При измерении АЧХ в узкой полосе частот стенд позволяет оперативно совмещать полосу качания высокостабильного генератора с полосой пропускания устройства.

Источниками СВЧ сигнала являются генераторный блок 1 панорамного измерителя КСВН и затуханий типа Р2-61 и высокостабильный клистронный генератор 2 типа Г4-56, подключенные к тракту посредством волноводно-щелевого моста 6 (рисунок). Нагрузка 7 служит для согласования моста. Частота измеряется пу-

тем визуального совмещения частотной метки с характерными точками исследуемой АЧХ. Особенность стенда — способ образования частотной метки. Последняя формируется из нулевых биений сигнала в тракте с гармониками гетеродина блока преобразования частоты частотомера 5 типа ЧЗ-54 посредством фильтра нижних частот 8. Этот способ позволяет реализовать точность гетеродинного измерения частоты совместно с преимуществами динамических методов измерения.

В качестве индикатора применен индикаторный блок измерителя КСВН и затуханий 3, осциллограф 4 типа С1-70. На блок-схеме показано включение исследуемого устройства 10 в волноводный тракт стенда. Вносимые затухания определяют методом замещения [1] с помощью прецизионного аттенюатора 9 типа ДЗ-33А.

Измерение АЧХ в широком диапазоне частот производится с использованием панорамного измерителя КСВН 1,3, частотомера 5 и прецизионного аттенюатора 9. Система АРМ панорамного измерителя обеспечивает равномерность выходной мощности в широком диапазоне частот. Частотная метка подается на вход «метка» индикаторного блока через разъем для подключения цифрового блока. В этом режиме точность измерения частоты достигает $\pm 1,5 \cdot 10^{-3} \%$, затуханий $\pm 0,05$ дБ.

При измерении АЧХ узкополосных устройств с применением панорамных измерителей КСВН и затуханий точность измерения ограничивается паразитной частотной модуляцией СВЧ-сигнала [2].

В случае устройств с шириной полосы менее 1 МГц точность измерения на панорамном измерителе КСВН и затуханий существенно падает, так как спектр сигнала соизмерим с шириной полосы частот измеряемых устройств.

Клистронный генератор существенно снижает уровень паразитной частотной модуляции. В узкой полосе частот выходная мощность клистронного генератора равномерна, следовательно, применение системы АРМ не требуется. СВЧ сигнал клистронного генератора с целью сужения спектра не модулируется, поэтому индикаторный блок панорамного измерителя КСВН и затуханий заменяется осциллографом С1-70 с блоком дифференциального усилителя Я40-1102. При включении детекторной секции непосредственно на выход тракта через вентиль 11 существенно повышается уровень сигнала на входе осциллографа. Сигнал частотной метки и протектированный СВЧ сигнал подаются на вход дифференциального усилителя осциллографа. При одновременной работе обоих генераторов на экране осциллографа наблюдается метка, образованная их биениями, на фоне АЧХ устройств. Это значительно облегчает и ускоряет настройку клистронного генератора на требуемую частоту. В узкополосном режиме стенд обеспечивает точность измерения частоты $\pm 1,5 \cdot 10^{-4} \%$ и затуханий $\pm 0,05$ дБ, собственная добротность резонаторов, равная 25000—50000, может быть изменена с погрешностью 4—5 %.

Стенд, аналогичный описанному, может быть собран и для других участков СВЧ диапазона.

Список литературы: 1. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах / Пер. с англ. под ред. Г. А. Ремеза— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 620 с. 2. Измерители амплитудно-частотных характеристик и их применение / П. Адоменас, Я. Аронсон, Е. Бирманас и др.— М.: Связь, 1968.— 163 с.

Поступила в редколлегию 26.01.84.

УДК 621.372.852.1

Н. И. ЛЕСИК, канд. физ.-мат. наук, Б. В. КОНДРАТЬЕВ,
канд. физ.-мат. наук, Л. В. ДМИТРИЕВА

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ, СВЯЗАННЫЕ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ В ОБЩЕЙ ЗАЗЕМЛЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

При конструировании направленных ответвителей и фильтров на основе микрополосковых линий, чтобы устранить взаимосвязь и помехи между линиями передачи до и после этих устройств, прибегают к различным способам. Перспективны многослойные системы различного вида [1]: на основе их возможно создание направленных ответвителей и фильтров, предложенных еще Дьюком [2], где взаимные наводки сведены до нуля.

Нами получены формулы для расчета емкости и волнового сопротивления связанной несимметричной линии, поперечное сечение которой изображено на рис. 1, а. Расчеты проведены методом конформных отображений в предположении, что линия заполнена однородным диэлектриком (его проницаемость ϵ) и все проводники бесконечно тонкие.

В рассматриваемой линии возможно существование нечетного и четного типов колебаний. Геометрия системы, соответствующая этим типам, изображена на рис. 1, б, в. Все характеристики нечетного типа колебаний (емкость, волновое сопротивление, структура поля) совпадают с характеристиками обычной несимметричной полосковой линии. Для расчета характеристик четного типа колебаний нужно сделать конформное отображение поперечного сечения линии (рис. 1, в) на каноническую область — прямоугольник (рис. 1, г).

Если принять их (рис. 1, в) за плоскости комплексного переменного Z и U соответственно, то обратное отображение (соответствия точек указаны буквами на рисунках) выполняется функцией

$$\frac{\pi}{2h} Z(U) = -K(a') \cdot \frac{H'_1(iU, q')}{H_1(iU, q')}, \quad (1)$$