

Математическая модель для расчета гофрированного волновода на базе сингулярных интегральных уравнений и метода дискретных особенностей

С. В. Духопельников

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The discrete mathematical model of axially symmetrical diffraction problem for a monochromatic wave in a round waveguide with a finite number of fill in dielectric extensions was constructed. The system of singular integral equations are derived. The numerical solution of these systems was performed by the method of discrete singularities.

1. Введение.

Построена дискретная математическая модель для расчета электромагнитного поля в круглом волноводе с конечной системой расширений. Настоящая работа является продолжением работы [1]. Рассматривается задача рассеяния первичного поля в случае, когда рабочая зона и расширения (рис.1) заполнены диэлектриками с различными диэлектрическими проницаемостями. В работе [1] уравнения Максвелла распадались на две системы соответствующие поперечной электрической волне и поперечной магнитной волне. Чего нельзя сказать о рассматриваемой в этой работе задаче. Построенная в работе математическая модель рассматриваемой краевой задачи Максвелла сводится к системе двух связанных между собой сингулярных интегральных уравнений.

2. Постановка задачи.

Геометрия задачи.

Введем следующие обозначения $L_q = (a_q, b_q)$, $l_q = b_q - a_q$, $R_q = R + h_q$, $L = \bigcup_{q=1}^m L_q$, $CL = (-\infty, \infty) \setminus L$. В этих обозначениях, «рабочая зона» – множество: $Pz = \{z \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, R), \phi \in [0, 2\pi)\}$, а «зона расширения» – множество: $3p = \{z \in L, \rho \in (R, R_q), \phi \in [0, 2\pi)\}$. При этом «внутренностью волновода» будем называть объединение рабочей зоны и зоны расширения $Pz \cup 3p \cup \{z \in L, \rho = R, \phi \in [0, 2\pi)\}$. Металлическая поверхность волновода – множество $\Gamma = \{z \in CL, \rho = R\} \cup \{z \in L, \rho = R_q\} \cup$

$$\bigcup_{q=1}^m \left(\{z = a_q, \rho \in [R, R_q]\} \cup \{z = b_q, \rho \in [R, R_q]\} \right).$$

Рассматривается аксиально-симметричная задача, поля не зависят от ϕ .

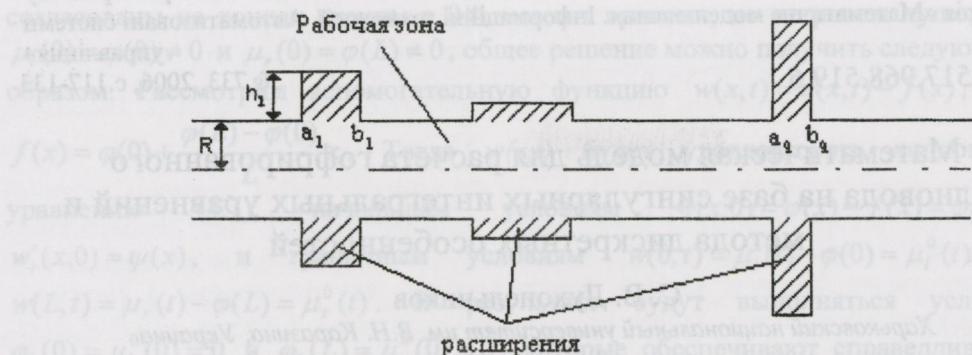


Рис.1. Осевое сечение волновода с расширениями.

Математическая модель.

Зависимость полей от времени гармоническая и задается множителем $e^{-i\omega t}$.

Запишем стационарные уравнения Максвелла, в дальнейшем – уравнения Максвелла, для комплексных амплитуд:

$$\text{rot} H = -i\omega \varepsilon E \quad (1)$$

$$\text{rot} E = i\omega \mu H \quad (2)$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость.

В силу отсутствия источников «внутри волновода» выполняются условия:

$$\text{div} E = 0 \quad \text{div} H = 0 \quad (3)$$

На поверхности цилиндра выполняется граничное условие (касательные компоненты электрического поля на границе волновода обращаются в ноль):

$$[E, n]_r = 0 \quad (4)$$

где n – единичная нормаль к поверхности волновода.

Волновод представим в виде объединения двух непересекающихся областей: «зоны расширений» и «рабочей зоны», и запишем уравнения Максвелла для каждой области отдельно.

Уравнения Максвелла для «зоны расширений»:

$$\text{rot} H^-(\rho, z) = -i\omega \varepsilon_q^- E^-(\rho, z), \quad q = 1, \dots, m, \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (5)$$

$$\text{rot} E^-(\rho, z) = i\omega \mu H^-(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (6)$$

здесь константа ε_q^- – диэлектрическая проницаемость среды в расширениях, при чем в каждом из расширений можно задать свое значение, и μ – магнитная проницаемость, которая во всех расширениях постоянна.

Граничное условие в «зоне расширений» принимает вид:

$$E_z^-(R_q, z) = E_\phi^-(R_q, z) = 0, \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$E_\phi^-(\rho, a_q) = E_\phi^-(\rho, b_q) = 0, \quad q = 1, \dots, m \quad (8)$$

в «рабочей зоне»:

$$\operatorname{rot} H^{\text{полн}}(\rho, z) = -i\omega \varepsilon^+ E^{\text{полн}}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} E^{\text{полн}}(\rho, z) = i\omega \mu H^{\text{полн}}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (10)$$

где константа ε^+ – диэлектрическая проницаемость среды в рабочей зоне. И μ – магнитная проницаемость, которая совпадает со значением в расширениях.

Граничное условие в «рабочей зоне» принимает вид:

$$E_z^{\text{полн}}(R, z) = E_\phi^{\text{полн}}(R, z) = 0, \quad z \in CL \quad (11)$$

На бесконечности выполнены условия излучения. «На ребрах» выполняются условия Майкснера.

Поскольку поля не зависят от координаты ϕ , в этом случае уравнения (1-2) принимают вид [2]:

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = i\omega \varepsilon E_\rho \quad (12)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) = -i\omega \varepsilon E_z \quad (13)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \varepsilon E_\phi \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -i\omega \mu H_\rho \quad (15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) = i\omega \mu H_z \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega \mu H_\phi \quad (17)$$

условия (3) принимают вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\rho) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\rho) = -\frac{\partial H_z}{\partial z}$$

Будем искать поле в «рабочей зоне» в виде:

$$H^{\text{полн}}(\rho, z) = H^+(\rho, z) + H_0(\rho, z)$$

$$E^{\text{полн}}(\rho, z) = E^+(\rho, z) + E_0(\rho, z)$$

где $H_0(\rho, z)$ и $E_0(\rho, z)$ – «первичное поле», представимое как суперпозиция конечного числа собственных волн круглого волновода радиуса R , распространяющихся в направлении возрастающих значений z .

Условия сопряжения выполняются на пересечении замыканий «рабочей зоны» и «зоны расширений» $\{\overline{Pz} \cap \overline{3p}\} = \{(\rho, z) : \rho = R, z \in L\}$, тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей «зоны расширений» и «рабочей зоны» совпадают:

$$H_{\phi}^{+}(R, z) + H_{0\phi}(R, z) = H_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (20)$$

$$H_z^{+}(R, z) + H_{0z}(R, z) = H_z^{-}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (21)$$

$$E_{\phi}^{+}(R, z) + E_{0\phi}(R, z) = E_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (22)$$

$$E_z^{+}(R, z) + E_{0z}(R, z) = E_z^{-}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (23)$$

Используя соотношения между компонентами электрического и магнитного полей, запишем условия сопряжения (20-23) в виде:

так равенство (23), с использованием (13), примет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^{+}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{+}) + E_{0z} = \frac{1}{\varepsilon^{-}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-}) \quad (24)$$

а равенство (21) запишем в виде:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{+}) + H_{0z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{-}) \quad (25)$$

Компоненты первичного поля удовлетворяют условиям:

$$E_{0\phi}|_{\rho=R} = 0 \quad E_{0z}|_{\rho=R} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{0\phi})|_{\rho=R} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{0z})|_{\rho=R} = 0$$

Условия сопряжения (20), (22), (24) и (25) с учетом условий на первичное поле имеют вид:

$$H_{\phi}^{+} + H_{0\phi} = H_{\phi}^{-} \quad (26)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{+}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{+}) = \frac{1}{\varepsilon^{-}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-}) \quad (27)$$

$$E_{\phi}^{+} = E_{\phi}^{-} \quad (28)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{+}) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{0\phi}) + H_{0z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{-}) \quad (29)$$

3. Математическая модель рассеяния.

Используя изложенные соображения и действуя так же как в [1], введем в рассмотрение новые неизвестные функции. В то время как в [1] достаточно ввести только одну неизвестную функцию, в работе вводится две неизвестные функции, которые необходимо найти для решения поставленной задачи:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_{\phi}^{+}(R, z) \quad (30)$$

$$h(z) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{+})(R, z) \quad (31)$$

В силу условия сопряжения (28) и граничного условия (11) функция $g(z)$ обладает следующими свойствами:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L_q \quad (32)$$

$$g(z) = 0, \quad z \in CL \quad (33)$$

$$\int_{L_q} g(\xi) d\xi = 0, \quad q = 1, \dots, m \quad (34)$$

и в силу условия сопряжения (27) и граничного условия (11) функция $h(z)$ обладает следующими свойствами:

$$h(z) = \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^- R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-})(R, z), \quad z \in L_q \quad (35)$$

$$h(z) = 0, \quad z \in CL \quad (36)$$

Из системы дифференциальных уравнений (12-17) следует, что компонент $E_{\phi}(\rho, z)$ и $H_{\phi}(\rho, z)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

В «рабочей зоне» имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{\phi}^+ + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^+) \right) + (k^+)^2 E_{\phi}^+ = 0, \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty), \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{\phi}^+ + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^+) \right) + (k^+)^2 H_{\phi}^+ = 0, \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (38)$$

где $k^+ = \varepsilon^+ \mu \omega^2$,

В «зоне расширений»:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{\phi}^- + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^-) \right) + (k_q^-)^2 E_{\phi}^- = 0, \quad \rho \in (R, R_q), \quad z \in (-\infty, \infty), \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{\phi}^- + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^-) \right) + (k_q^-)^2 H_{\phi}^- = 0, \quad \rho \in (R, R_q), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (40)$$

где $k_q^- = \varepsilon_q^- \mu \omega^2$

Предполагается, что среда имеет небольшие потери: проводимость среды $\sigma > 0$, k_{δ}^+ — соответствующее волновое число $k_{\delta}^+ = k^+ + i\delta$, $0 < \delta \ll k$.

Компоненту E_{ϕ}^+ электрического поля в «рабочей зоне» ищем в виде:

$$E_{\phi, \delta}^+(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\phi}^+(\lambda) \frac{(-i) I_1(\gamma_{\delta}^+ \rho)}{\lambda I_1(\gamma_{\delta}^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (41)$$

где $\gamma_{\delta}^+ = \sqrt{\lambda^2 - (k_{\delta}^+)^2}$

а $C_{\phi}^+(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(z)$:

$$C_{\phi}^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \quad (42)$$

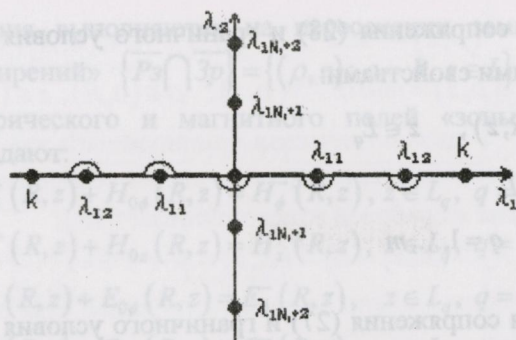


Рис. 2. Полюса подынтегральной функции в выражении (41) для $E_{\phi,\delta}^+$

Выражение (41) можно интерпретировать, как интеграл от функции комплексного переменного λ вдоль вещественной оси. Заметим, что при $\sigma = 0$ лишь конечная часть полюсов подынтегральной функции (41) расположена на вещественной оси (см. рис.2)

$$\lambda_{1,n} = \operatorname{sgn}(n) \sqrt{(k^+)^2 - \left(\frac{j_{1,n}}{R}\right)^2}, \quad 0 < |n| \leq N_1;$$

остальные полюса лежат на мнимой оси

$$\lambda_{1,n} = i \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\left(\frac{j_{1,n}}{R}\right)^2 - (k^+)^2}, \quad |n| > N_1$$

Здесь $j_{1,n}$ - нули функции Бесселя 1-го порядка $J_1(x)$, N_1 определяется из неравенств $j_{1,N_1} \leq k^+ R$, $j_{1,N_1+1} > k^+ R$.

Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы обойти точки $\lambda_{1,n}$, $0 < |n| \leq N_1$ и 0 по половинам окружностей малого радиуса δ и обозначим контур интегрирования $\Gamma_\delta^{(1)}$.

Значение интеграла (41) при этом не изменится, поскольку деформируем контур в области аналитичности интегрируемой функции.

$$E_\phi^+(\rho, z) = \lim_{\delta \downarrow 0} E_{\phi,\delta}^+(\rho, z) = -i \int_{\Gamma_\delta^{(1)}} C_\phi^+(\lambda) \frac{(-i) I_1(\gamma^+ \rho)}{\lambda I_1(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (43)$$

$$\text{где } \gamma^+ = \sqrt{\lambda^2 - (k^+)^2}$$

Убедимся, что так выбранный контур обеспечивает выполнение условий излучения. Применяя теорему о вычетах, для рассеянного поля в правом полубесконечном волноводе (при $b_m < z < \infty$) получим

$$E_\phi^+(\rho, z) = -\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}}{\lambda_{1,n}^2} \frac{J_1\left(j_{1,n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(j_{1,n})} e^{i\lambda_{1,n} z} \int_L g(\xi) e^{-i\lambda_{1,n} \xi} d\xi$$

Входящие в это выражения слагаемые при $n \leq N_1$ представляют волны, распространяющиеся вне «зоны расширений» ($z > b_m$) в направлении возрастающих значений z . Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \rightarrow \infty$. Аналогично, для рассеянного поля в левом полубесконечном волноводе, вне «зоны расширений» (при $-\infty < z < a_1$) получим

$$E_{\phi}^{+}(\rho, z) = -\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}}{\lambda_{1,n}^2} \frac{J_1\left(j_{1,n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(j_{1,n})} e^{-i\lambda_{1,n}z} \int_L g(\xi) e^{i\lambda_{1,n}\xi} d\xi$$

При $n \leq N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении убывающих значений z . Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \rightarrow -\infty$. Таким образом, условие излучения выполняется.

Из представления (43) следует, что

$$\frac{\partial E_{\phi}^{+}}{\partial \rho}(R, z) = -i \int_{\Gamma_{\delta}^{(1)}} C_{\phi}^{+}(\lambda) \frac{\gamma^{+} I_1'(\gamma^{+} R)}{\lambda I_1(\gamma^{+} R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (44)$$

Имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\frac{\gamma^{+} I_1'(\gamma^{+} R)}{\lambda I_1(\gamma^{+} R)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (45)$$

подставляя (45) в (44) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\phi}^{+}}{\partial \rho}(R, z) = & -i \int_{-\infty}^{\infty} C_{\phi}^{+}(\lambda) \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda z} d\lambda + \frac{i}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda z} d\lambda - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_L g(\xi) K_0^E(z - \xi) d\xi \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$K_0^E(y) = \int_0^{\infty} \left[\lambda - \frac{1}{2R} - \frac{\gamma^{+} I_1'(\gamma^{+} R)}{I_1(\gamma^{+} R)} \right] \frac{\sin \lambda y}{\lambda} d\lambda + \frac{\pi i}{R^3} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{j_{1n}^2}{\lambda_{1n}^2} \sin(\lambda_{1n} y) \quad (47)$$

Подынтегральная функция имеет особенности в точках $\lambda_{1,n}$, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Последнее слагаемое представляет собой результат интегрирования по дугам окружностей, обходящим точки $\lambda_{1,n}$.

Используя параметрическое представление преобразования Гильберта [4] и свойство (33) функции $g(z)$ для первого интеграла в (46) имеем:

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda z} d\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (48)$$

Если $z \in L_q$, то для второго интеграла в (46) получаем:

$$\frac{i}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda z} d\lambda = -\frac{1}{2R} \int_{a_q}^z g(\xi) d\xi \quad (49)$$

Учитывая все преобразования приведенные выше, запишем (46) при $z \in L_q$ в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} E_{\phi}^+(R, z) = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2R} \int_{a_q}^z g(\xi) d\xi - \\ & - \int_L g(\xi) K_0^E(z - \xi) d\xi, \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (50)$$

Получим аналогичное представление для компоненты H_{ϕ}^+ магнитного поля в «рабочей зоне». Предположим, что среда имеет небольшие потери, т.е. проводимость среды $\sigma > 0$, k_{δ}^+ – соответствующее волновое число ($k_{\delta}^+ = k^+ + i\delta$, $0 < \delta \ll k$). Тогда:

$$H_{\phi, \delta}^+(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{\phi}^+(\lambda) I_1(\gamma_{\delta}^+ r)}{\gamma_{\delta}^+ I_0(\gamma_{\delta}^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (51)$$

где $B_{\phi}^+(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $h(z)$:

$$B_{\phi}^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L h(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \quad (52)$$

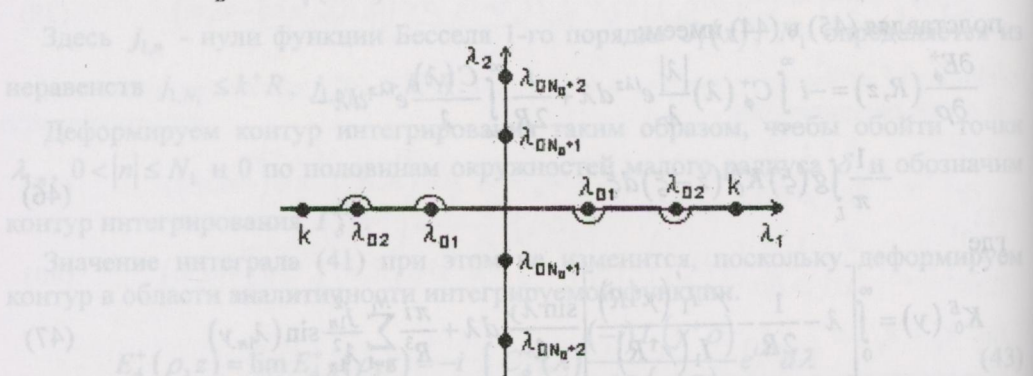


Рис.3 Полюса подынтегральной функции в выражении (51) для $H_{\phi, \delta}^+$.

Выражение (51) можно интерпретировать, как интеграл от функции комплексного переменного λ вдоль вещественной оси. Заметим, что при $\sigma = 0$ лишь конечная часть полюсов подынтегральной функции (51) расположена на вещественной оси (см. рис.3)

$$\lambda_{0,n} = \operatorname{sign}(n) \sqrt{(k^+)^2 - \left(\frac{j_{0,n}}{R}\right)^2}, \quad 0 < |n| \leq N_0;$$

остальные полюса лежат на мнимой оси

$$\lambda_{0,n} = i \operatorname{sign}(n) \sqrt{\left(\frac{j_{0,n}}{R}\right)^2 - (k^+)^2}, |n| > N_0$$

Здесь $j_{0,n}$ - нули функции Бесселя 0-го порядка $J_0(x)$, N_0 определяется из неравенств $j_{0,N_0} \leq k^+ R$, $j_{0,N_0+1} > k^+ R$.

Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы обойти точки $\lambda_{0,n}$, $0 < |n| \leq N_0$ и 0 по половинам окружностей малого радиуса δ и обозначим контур интегрирования $\Gamma_\delta^{(0)}$.

Значение интеграла (51) при этом не изменится, поскольку деформируем контур в области аналитичности интегрируемой функции.

$$H_\phi^+(\rho, z) = \lim_{\delta \downarrow 0} H_{\phi,\delta}^+(\rho, z) = \int_{\Gamma_\delta^{(0)}} \frac{B_\phi^+(\lambda) I_1(\gamma^+ r)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (53)$$

Убедимся, что так выбранный контур обеспечивает выполнение условий излучения. Применяя теорему о вычетах, для рассеянного поля в правом полубесконечном волноводе (при $b_m < z < \infty$) получим:

$$H_\phi^+(\rho, z) = \frac{i}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0,n}} \frac{J_1\left(j_{0,n} \frac{r}{R}\right)}{J_1(j_{0,n})} e^{i\lambda_{0,n} z} \int_L h(\xi) e^{-i\lambda_{0,n} \xi} d\xi$$

Входящие в это выражение слагаемые при $n \leq N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении возрастающих значений z . Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \rightarrow \infty$.

Аналогично для рассеянного поля в левом полубесконечном волноводе (при $-\infty < z < a_1$) получим

$$H_\phi^+(\rho, z) = \frac{i}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0,n}} \frac{J_1\left(j_{0,n} \frac{r}{R}\right)}{J_1(j_{0,n})} e^{-i\lambda_{0,n} z} \int_L h(\xi) e^{i\lambda_{0,n} \xi} d\xi$$

При $n \leq N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении убывающих значений z . Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \rightarrow -\infty$. Таким образом, условие излучения выполняется.

Из представления (53) следует, что

$$\frac{\partial H_\phi^+}{\partial \rho}(R, z) = i \int_{\Gamma_\delta^{(0)}} B_\phi^+(\lambda) \frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (54)$$

Имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R} \frac{1}{\gamma^+} \frac{|\lambda|}{\lambda} + O(\lambda^{-2}), \lambda \rightarrow \infty \quad (55)$$

И тогда (54) имеет вид:

$$\frac{\partial H_{\phi}^{+}}{\partial \rho}(R, z) = i \int_{-\infty}^{\infty} B_{\phi}^{+}(\lambda) \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda z} d\lambda - \frac{i}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{\phi}^{+}(\lambda) |\lambda|}{\gamma \lambda} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_L h(\xi) K_0^H(z - \xi) d\xi \quad (56)$$

где

$$K_0^H(y) = \int_0^{\infty} \left[\lambda - \frac{1}{2R\lambda} - \frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} \right] \sin \lambda y d\lambda + \frac{\pi i}{R} \sum_{n=1}^{N_0} \sin(\lambda_{0n} y) \quad (57)$$

Подынтегральная функция имеет особенности в точках λ_{0n} , и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Последнее слагаемое представляет собой результат интегрирования по дугам окружностей, обходящим точки λ_{0n} .

Используя параметрическое представление оператора Гильберта и свойство (36) функции $h(z)$ для первого интеграла в (56) имеем:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} B_{\phi}^{+}(\lambda) \frac{|\lambda|}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (58)$$

А для второго интеграла в (56) получим:

$$-\frac{i}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{\phi}^{+}(\lambda) |\lambda|}{\gamma \lambda} e^{i\lambda z} d\lambda = \frac{1}{4R} \int_L h(\xi) \frac{|z - \xi|}{z - \xi} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R} \int_L h(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\gamma} - 1 \right) \frac{\sin \lambda(z - \xi)}{\lambda} d\lambda \quad (59)$$

Поэтому, если $z \in L_q$, то (56) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{+}(R, z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2R} \int_{a_q}^z h(\xi) d\xi + \frac{1}{4R} \sum_{p=1}^{q-1} \int_{L_p} h(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{1}{4R} \sum_{p=q}^m \int_{L_p} h(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L h(\xi) K_0^H(z - \xi) d\xi, \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (60)$$

Переходим к представлению полей в «зонах расширений».

Компоненту $E_{\phi}^{-(q)}(\rho, z)$ электрического поля в расширениях ищем в виде:

$$E_{\phi}^{-(q)}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(q)E}(\rho) C_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) \quad (61)$$

$$\text{где } V_n^{(q)E}(\rho) = \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \frac{K_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} \rho) - I_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} \rho)}{K_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} R) - I_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} R)},$$

$$\gamma_n^{-(q)} = \gamma^{-} \left(\lambda_n^{(q)} \right) = \sqrt{\left(\lambda_n^{(q)} \right)^2 - \left(k_q^{-} \right)^2}$$

Используя асимптотическую оценку

$$\frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) = -1 - \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty \quad (62)$$

преобразуем (61) с учетом (62) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\phi^{-(q)}}{\partial \rho}(R, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) - \frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \left[\frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) \end{aligned} \quad (63)$$

Известно, что интегральный оператор

$$(H_q W)(z) = \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q}(z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{W(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q}(z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q}(\xi - a_q)} d\xi \quad (64)$$

действует на базисные элементы следующим образом [3]:

$$H_q : \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - a_q) \rightarrow -\sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q), \quad \xi, z \in L_q, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя свойство (33) функции $g(z)$, получаем выражение для первого ряда в (63)

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) &= \\ &= \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q}(z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{g(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q}(z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q}(\xi - a_q)} d\xi \end{aligned} \quad (65)$$

Так как $E_\phi^{-(q)}(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) = \int_{a_q}^z g(\xi) d\xi$, то для второго

интеграла в (63) получаем

$$-\frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q) = -\frac{1}{2R} \int_{a_q}^z g(\xi) d\xi \quad (66)$$

Для коэффициентов Фурье функции $\frac{\partial E_\phi^{-(q)}}{\partial z}(R, z)$ имеем:

$$C_{\phi, n}^{-(q)} = \frac{2}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} g(\xi) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - a_q) d\xi \quad (67)$$

Окончательно для (63) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} E_{\phi}^{-(q)}(R, z) = & -\frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{g(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - a_q)} d\xi - \\ & - \frac{1}{2R} \int_{a_q}^z g(\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} g(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)E}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - a_q) d\xi \quad (68) \end{aligned}$$

Компоненту $H_{\phi}^{-(q)}(\rho, z)$ магнитного поля в расширениях ищем в виде:

$$H_{\phi}^{-(q)}(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(q)H}(\rho) B_{\phi, n}^{-(q)} \cos \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \quad (69)$$

$$\text{где } V_n^{(q)H}(\rho) = \frac{1}{\gamma_n^{-(q)}} \frac{K_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} \rho) - I_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} \rho)}{K_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_0(\gamma_n^{-(q)} R) - I_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_0(\gamma_n^{-(q)} R)}$$

Используя асимптотическое выражение

$$-\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) = 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty \quad (70)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\phi}^{-(q)}}{\partial z}(R, z) = & - \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) = \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) + \frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \left[\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \quad (71) \end{aligned}$$

Используя свойства интегрального оператора $(H_q W)(z)$ (64) и свойство (36) функции $h(z)$ для первого ряда в (69) имеем

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) = \\ = \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{h(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - a_q)} d\xi \quad (72) \end{aligned}$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \text{sign}(\theta) \frac{1}{2} (\pi - |\theta|)$, $0 < |\theta| < 2\pi$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) = \frac{2}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - a_q) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \left(\sin \lambda_n^{(q)} (z - \xi) + \sin \lambda_n^{(q)} (z + \xi - 2a_q) \right) d\xi = \\
&= \frac{1}{2l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) \left[l_q - z - \xi + 2a_q + \operatorname{sign}(z - \xi)(l_q - |z - \xi|) \right] d\xi = \\
&= \int_{a_q}^z h(\xi) d\xi - \frac{z - a_q}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) d\xi \quad (73)
\end{aligned}$$

Используя выражения для коэффициентов Фурье функции $\frac{\partial H_{\phi}^{-(q)}}{\partial z}(R, z)$ и свойство (36) функции $h(\xi)$, окончательно, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{-(q)}(R, z) &= -\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+ l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{h(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - a_q)} d\xi + \\
&+ \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \frac{1}{2R} \int_{a_q}^z h(\xi) d\xi - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \frac{1}{2R} \frac{z - a_q}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) d\xi - \\
&- \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \frac{2}{l_q} \int_{a_q}^{b_q} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - a_q) d\xi \quad (74)
\end{aligned}$$

Перейдем к выводу сингулярных интегральных уравнений.

Условие сопряжения (19) эквивалентно выражениям:

$$\frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{+}(R, z) + \frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi}(R, z) = \frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m, \quad (75)$$

$$\int_{a_q}^{b_q} H_{\phi}^{+}(R, z) dz + \int_{a_q}^{b_q} H_{0\phi}(R, z) dz = \int_{a_q}^{b_q} H_{\phi}^{-}(R, z) dz, \quad q = 1, \dots, m. \quad (76)$$

Подставляя выражения для компонент магнитного поля (60), (74) в условие (75-76) и сделав представление неизвестной функции:

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \in CL \\ \frac{w_q(z)}{\sqrt{(z - a_q)(b_q - z)}}, & z \in L_q \end{cases}$$

где $w_q(z)$, $z \in L_q$ — гладкая функция.

имеем СИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{w_q(\xi) d\xi}{\xi - z \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+ l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{w_q(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - a_q)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} + \\
& + \left(1 - \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}\right) \frac{1}{2R} \int_{a_q}^z w(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} + \\
& + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_p}^{b_p} K_{qp}^H(z, \xi) w_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_p)(b_p - \xi)}} = \\
& = -\frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi}(R, z) \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m
\end{aligned} \quad (77)$$

где

$$K_{qp}^H(z, \xi) = \frac{1}{\xi - z} + K_0^H(z - \xi) + \frac{\pi}{4R}, \quad p < q$$

$$K_{qp}^H(z, \xi) = \frac{1}{\xi - z} + K_0^H(z - \xi) - \frac{\pi}{4R}, \quad p > q$$

$$K_{qq}^H(z, \xi) = K_0^H(z - \xi) + \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \frac{\pi}{2R} \frac{z - a_q}{l_q} - \frac{\pi}{4R} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \frac{2\pi}{l_q} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - a_q)$$

с дополнительным условием

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_p}^{b_p} F_q(\xi) w_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_p)(b_p - \xi)}} + \\
& + V_0^{(q)H}(R) \int_{a_q}^{b_q} w_q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} = \int_{a_q}^{b_q} H_{0\phi}(R, \xi) d\xi \quad q = 1, \dots, m
\end{aligned} \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned}
F_q^H(\xi) = & \int_0^{\infty} \frac{I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} \frac{\sin \lambda(a_q - \xi) - \sin \lambda(b_q - \xi)}{\lambda} d\lambda + \\
& + \frac{\pi i}{R} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\sin \lambda_{0n}^+(a_q - \xi) - \sin \lambda_{0n}^+(b_q - \xi)}{(\lambda_{0n}^+)^2}
\end{aligned} \quad (79)$$

N_0 определяется из неравенства $j_{0, N_0} \leq kR$, $j_{0, N_0+1} > kR$, $j_{0, n}$ - нули функции

Бесселя нулевого порядка, и $\lambda_{0n}^+ = \sqrt{(k^+)^2 - \left(\frac{j_{0n}}{R}\right)^2}$, $0 < n < N_0$.

Ищем функцию $g(z)$ в виде:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \in CL \\ \frac{v_q(z)}{\sqrt{(z-a_q)(b_q-z)}}, & z \in L_q \end{cases}$$

где $v_q(z)$, $z \in L_q$ — гладкая функция.

Подставляя в условие сопряжения (29) представления для функций компонент электрического поля (50), (68) окончательно получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{v_q(\xi) d\xi}{\xi - z \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} + \\ & + \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) \int_{a_q}^{b_q} \frac{v_q(\xi) d\xi}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - a_q) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} K_{qp}^E(z, \xi) v_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} = \\ & = E_{0\phi}(R, z) + H_{0\phi}(R, z) + \frac{\partial}{\partial \rho} E_{0\phi}(R, z) \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (80)$$

$$K_{qp}^E(z, \xi) = \frac{1}{\xi - z} + K_0^E(z - \xi), \quad q \neq p$$

$$K_{qq}^E(z, \xi) = K_0^E(z - \xi) +$$

$$+ \frac{2\pi}{l_q} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{dV_n^{(q)}}{d\rho}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - a_q) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - a_q)$$

и дополнительные условия

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{v_q(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}} = 0, \quad q = 1, \dots, m. \quad (81)$$

4. Дискретная математическая модель.

Дискретизация проводится по методу дискретных особенностей [5]. Приближенные решения задачи ищем в виде интерполяционных полиномов Лагранжа степени $n_q - 1$ с узлами $t_k^{(1, n_q)}$, где $t_k^{(1, n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, \dots, n$.

Рассматривая сингулярные уравнения (77), (80) в точках $t_j^{(2, n_q)}$, $j = 1, \dots, n_q - 1$ и применяя к интегралам квадратурные формулы интерполяционного типа получаем систему из $n_1 + \dots + n_q$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с таким же числом неизвестных: $v_q^{(n_q)} \left(t_k^{(1, n_q)} \right)$, $k = 1, \dots, n_q$, $q = 1, \dots, m$.

В соответствии с выше сказанным, приближенные значения решений системы СИУ с дополнительными условиями (78), (81) $v_q^{(n_q)}(\xi)$ в точках

$$\xi_{q,k}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_k^{(1,n_q)} + \frac{b_q + a_q}{2}, \quad k=1, \dots, n_q, \quad q=1, \dots, m \text{ ищем из СЛАУ:}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[\frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} + \frac{\pi}{l_q} \frac{\sin \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - a_q)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi_{q,k}^{(n_q)} - a_q)} \right] w_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^{E1} \left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)} \right) w_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^E \left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{(n_p)} \right) w_p^{(n_p)}(\xi_{p,k}^{(n_p)}) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi} \left(R, z_{q,j}^{(n_q)} \right), \quad j=1, \dots, n_q, \quad q=1, \dots, m \end{aligned} \quad (81)$$

С дополнительным условием:

$$\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) = 0, \quad q=1, \dots, m \quad (82)$$

где $z_{q,j}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_j^{(2,n_q)} + \frac{b_q + a_q}{2}, \quad j=1, \dots, n_q - 1, \quad q=1, \dots, m$

И

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[\frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+ l_q} \frac{\pi \sin \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - a_q)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi_{q,k}^{(n_q)} - a_q)} \right] v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^H \left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)} \right) v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \left(1 - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \right) \frac{1}{2R} \frac{\pi}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[\pi - \arccos z_{q,j}^{(n_q)} - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{s=1}^{n_q-1} \frac{T_s(\xi_{q,k}^{(n_q)})}{s} U_{s-1} \left(z_{q,j}^{(n_q)} \right) \sqrt{1 - z_{q,j}^{(n_q)}} \right] v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^H \left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{(n_p)} \right) v_p^{(n_p)}(\xi_{p,k}^{(n_p)}) = \end{aligned}$$

$$= H_{0\phi} \left(R, z_{q,j}^{(n_q)} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} E_{0\phi} \left(R, z_{q,j}^{(n_q)} \right), j=1, \dots, n_q, q=1, \dots, m \quad (83)$$

С дополнительным условием:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[F_q^H \left(\xi_{q,k}^{(n_q)} \right) + \pi V_0^{(q)H} (R) \right] v_q^{(n_q)} \left(\xi_{q,k}^{(n_q)} \right) + \\ & + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_p} F_q^H \left(\xi_{p,k}^{(n_p)} \right) v_p^{(n_p)} \left(\xi_{p,k}^{(n_p)} \right) = \int_{a_q}^{b_q} H_{0\phi} (R, \xi) d\xi, q=1, \dots, m \end{aligned} \quad (84)$$

Наиболее трудоемкими являются вычисления интегралов входящих в ядра $K_0^E(y)$ (47) и $K_0^H(y)$ (57).

Легко видеть, что при $\varepsilon_q^- = \text{const} \rightarrow \varepsilon^+$, $q=1, \dots, m$ мы получаем в пределе из системы (83) соответствующую систему в статье [1] для Н-волны.

Результаты численного эксперимента на базе математической модели будут опубликованы.

Автор благодарит проф. Ганделя Ю. В. за постановку задачи и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Стешенко С.А Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции. Электромагнитные волны и электронные системы, №6, т.7, 2002 с.12-31.
2. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач: Пер. с англ./ Под ред. В.И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1981. –312 с.
3. Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. Электромагнитные явления, Том 1, №2, 1998.- С. 220-232.
4. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Уч. пособие, ч.1. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков-Херсон, 2000.–92 с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.–М., «Янус», 1995.–520 с.

Решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности в полубесконечной области с неоднородными свойствами среды

В. Д. Душкин

Военный институт внутренних войск МВД Украины, Украина

The method of heat conductivity equation solution is considered in the domain where the coefficient of heat diffusivity is non-constant. The solution of initial third boundary-value problem was reduced to the solution of the Volterra integral equation. This equation can be solved by the of consecutive iterations method.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Многие задачи современной техники приводят к необходимости исследования нестационарных температурных полей в неоднородных средах. Поэтому в настоящее время по-прежнему остаётся актуальным вопрос численного моделирования нестационарных температурных полей в таких средах.

2. Истоки исследования

В работах [3,4] был предложен способ сведения первой краевой задачи к решению интегральных уравнений типа Вольтера, для численного решения которых применим метод последовательных итераций. В данной работе предлагается метод решения краевой задачи с условиями третьего рода на границе исследуемой области.

3. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + h \cdot u(l, t) = 0 \quad (3)$$

где $\varphi(x) \in C^{1,\alpha}(-\infty, l]$, и $a(x) = a_i$, $x \in \Omega_i$, $\Omega_2 = (-\infty, 0)$, $\Omega_1 = (0, l)$.

На границах раздела областей выполняются условия сопряжения:

$$u(-0, t) = u(+0, t) \quad (4)$$

$$k_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(+0, t) = k_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(-0, t) \quad (5)$$

4. Сведение исходной задачи к интегральному уравнению типа Вольтерра.

Для удобства дальнейших преобразований введем функцию $v(t)$ следующим образом:

$$v(t) = k_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(-0, t) = k_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(+0, t). \quad (6)$$

Решение задачи в области $\Omega_2 = (-\infty, 0)$, удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-0, t) = \frac{v(t)}{k_2} \quad (9)$$

Где $v(t)$ - функция, которая подлежит определению.

Решение задачи в области Ω_2 ищем в виде:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi) G_2(x, \xi, t) d\xi + \frac{a_2}{k_2 \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_2^2(t-\tau)}} \frac{v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (10)$$

где

$$G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2 t}} \right\}, \quad (11)$$

функция, которая обладает свойством:

$$\frac{\partial G_2}{\partial \xi} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

Решение задачи в области $\Omega_1 = (0, l)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + h \cdot u(l, t) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+0, t) = \frac{v(t)}{k_1} \quad (16)$$

Где $v(t)$ - функция, которая подлежит определению.

Решение задачи в области Ω_1 представимо в виде:

$$u(x, t) = \int_0^l \varphi(\xi) G_1(x, \xi, t) d\xi - \frac{a_1^2}{k_1} \cdot \int_0^t G_1(x, 0, t-\tau) v(\tau) d\tau \quad (17)$$

где $G_1(x, \xi, t)$ - функция Грина в области Ω_1 , которая обладает свойствами:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + h G_1 \Big|_{\xi=l} = \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (18)$$

и имеет вид:

$$G_1(x, \xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-a_1^2 \cdot \lambda_n \cdot t) \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n} \cdot x) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} \cdot \xi)}{\|x_n\|^2}, \quad (19)$$

где $x_n = \cos(\sqrt{\lambda_n} \cdot x)$ решения задачи Штурма-Лиувилля:

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (20)$$

$$x'(0) = 0 \quad x'(l) + h \cdot x(l) = 0 \quad (21)$$

и

$$\|x_n\|^2 = \int_0^l \cos^2(\sqrt{\lambda_n} \cdot \xi) d\xi = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(\lambda + h^2)} = \frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (22)$$

Величины λ_n являются решениями уравнения:

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_n} \cdot l) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} \quad (23)$$

и имеют следующее асимптотическое представление:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} + \frac{h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (24)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{2h}{l} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из условий непрерывности поля при $x=0$, получаем интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi) G_2(0, \xi, t) d\xi + \frac{a_2}{k_2 \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^l \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \\ = \int_0^l \varphi(\xi) G_1(0, \xi, t) d\xi - \frac{a_1^2}{k_1} \cdot \int_0^l G_1(0, 0, t-\tau) \nu(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (26) представим в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a_2}{k_2} + \frac{a_1}{k_1} \right) \cdot \int_0^l \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \int_0^l \left[\frac{a_1^2 \cdot K_0(t-\tau)}{k_1} \right] \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \Phi(t), \quad (27)$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^l \varphi(\xi) \cdot G_1(0, \xi, t) d\xi - \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi) \cdot G_2(0, \xi, t) d\xi \quad (28)$$

$$\text{и } K_0(t-\tau) = G_1(0, 0, t-\tau) - \frac{1}{a_1 \sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad (29)$$

Введем в рассмотрение функцию $G(x, \xi, t)$, которая является функцией Грина задачи Неймана на отрезке $[0, l]$ и имеет представление:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-a_1^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot t\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot \xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2a_1 \sqrt{\pi \cdot t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi+2n \cdot l)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi-2n \cdot l)^2}{4a_1^2 t}} \right\} \quad (30)$$

И обладает свойством:

$$G(0, 0, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-a_1^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot t\right) = \frac{1}{a_1 \sqrt{\pi \cdot t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n \cdot l)^2}{a_1^2 t}} \right) \quad (31)$$

Используя представления (19) (30) и свойства (25) собственных значений λ_n получим следующее равенство:

$$G_1(0, 0, t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a_1^2 \cdot \lambda_n \cdot (t - \tau)}}{\|x_n\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-a_1^2 \cdot \lambda_n \cdot (t - \tau)}}{\|x_n\|^2} - \frac{2}{l} \cdot e^{-a_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{2h}{l}\right] \cdot (t - \tau)} \right] +$$

$$+ \left[\frac{e^{-a_1^2 \cdot \lambda_0 \cdot (t - \tau)}}{\|x_0\|^2} - \frac{e^{-a_1^2 \cdot \frac{2h}{l} \cdot (t - \tau)}}{l} \right] + \frac{e^{-a_1^2 \cdot \frac{2h}{l} \cdot (t - \tau)}}{a_1 \sqrt{\pi(t - \tau)}} \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n \cdot l)^2}{a_1^2 (t - \tau)}} \right] \quad (32)$$

Несложно показать, что:

$$\frac{e^{-a_1^2 \cdot \lambda_n \cdot (t - \tau)}}{\|x_n\|^2} - \frac{2}{l} \cdot e^{-a_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{2h}{l}\right] \cdot (t - \tau)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (33)$$

а из формулы (30) следует:

$$\frac{e^{-a_1^2 \cdot \frac{2h}{l} \cdot (t - \tau)}}{a_1 \sqrt{\pi(t - \tau)}} \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n \cdot l)^2}{a_1^2 (t - \tau)}} \right] = e^{-a_1^2 \cdot \frac{2h}{l} \cdot (t - \tau)} \cdot G(0, 0, t - \tau). \quad (34)$$

Из формул (32-34) следует ограниченность функции $K_0(t - \tau)$ при $t \in [0, \infty)$.

Умножим левую и правую часть уравнения (27) на $(z-t)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по t от 0 до z . После замены порядка интегрирования и несложных преобразований получаем:

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{a_2}{k_2} + \frac{a_1}{k_1} \right) \int_0^z \nu(\tau) d\tau + \int_0^z F(z-\tau) \nu(\tau) d\tau = \int_0^z \frac{\Phi(t)}{\sqrt{z-t}} dt \quad (35)$$

где

$$F(z-\tau) = \int_0^1 \frac{K_0[x \cdot (z-\tau)] \sqrt{z-\tau}}{\sqrt{(1-x)}} dx \quad F(0) = 0 \quad (36)$$

После дифференцирования интегрального уравнения (35) по переменной z получаем:

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{a_2}{k_2} + \frac{a_1}{k_1} \right) \cdot \nu(z) + \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} F(z-\tau) \nu(\tau) d\tau = \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\Phi(t)}{\sqrt{z-t}} dt \quad (37)$$

Где:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F(z-\tau) &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 \frac{K_0[x \cdot (z-\tau)] \sqrt{z-\tau}}{\sqrt{(1-x)}} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ \sqrt{z-\tau} \frac{\partial}{\partial z} G_1[0, 0, x \cdot (z-\tau)] + G_1[0, 0, x \cdot (z-\tau)] \frac{1}{2\sqrt{z-\tau}} \right\} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} \end{aligned} \quad (38)$$

Исследуем функцию $\sqrt{z-\tau} \frac{\partial}{\partial z} G_1[0, 0, x \cdot (z-\tau)]$, которая входит в ядро оператора (38):

$$\sqrt{z-\tau} \frac{\partial}{\partial z} G_1[0, 0, x \cdot (z-\tau)] = -x a_1^2 \sqrt{z-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\|x_n\|^2} e^{-\lambda a_1^2 x(z-\tau)} = \quad (39)$$

$$= K_1[x \cdot (z-\tau)] + \sqrt{z-\tau} \cdot e^{-a_1^2 \frac{2h}{l} x(z-\tau)} \cdot \frac{\partial G(0, 0, x \cdot (z-\tau))}{\partial z} \quad (40)$$

где:

$$K_1[x \cdot (z-\tau)] = -x a_1^2 \sqrt{z-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\|x_n\|^2} e^{-\lambda a_1^2 x(z-\tau)} - \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-a_1^2 \left[\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + \frac{2h}{l} \right] x(z-\tau)} \right) \quad (41)$$

Несложно показать что ряд, который стоит в правой части формулы (41) сходится абсолютно и следовательно функция $K_1[x \cdot (z - \tau)]$ является ограниченной.

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(0,0,x(z-\tau))}{\partial z} &= -\frac{2}{l} x a_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{l} \right)^2 e^{-a_1^2 \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + \frac{2h}{l} \right] x(z-\tau)} = \frac{-1}{2a_1 \sqrt{\pi x} \cdot [z-\tau]^{3/2}} \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2 x(z-\tau)}} \right] + \\ &+ \frac{1}{a_1 \sqrt{\pi x(z-\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(nl)^2}{a_1^2 x} \right) e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2 x(z-\tau)}} \cdot \left(-\frac{1}{(z-\tau)^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Для упрощения последующих записей введем обозначение:

$$K_2[x \cdot (z - \tau)] = \sqrt{z - \tau} \cdot e^{-a_1^2 \frac{2h}{l} x(z-\tau)} \cdot \frac{\partial G(0,0,x \cdot (z - \tau))}{\partial z} + e^{-a_1^2 \frac{2h}{l} x(z-\tau)} \frac{1}{2a_1 \sqrt{\pi x} \cdot [z - \tau]} \quad (43)$$

Из (43) следует, что:

$$K_2[x \cdot (z - \tau)] = \frac{e^{-a_1^2 \frac{2h}{l} x(z-\tau)}}{a_1 \sqrt{\pi x} \cdot [z - \tau]^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(z - \tau) + 2 \frac{(nl)^2}{a_1^2 x} \right] e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2 x(z-\tau)}}. \quad (44)$$

где функция, которая входит в правую часть равенства (45) является ограниченной функцией своих аргументов:

Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z - \tau) = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 \left\{ \frac{K_0[x \cdot (z - \tau)]}{2\sqrt{z - \tau}} + K_1[x \cdot (z - \tau)] + K_2[x \cdot (z - \tau)] + \frac{\left(1 - e^{-a_1^2 \frac{2h}{l} x(z-\tau)} \right)}{2a_1 \sqrt{\pi x} \cdot [z - \tau]} \right\} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} \quad (45)$$

Из ограниченности функций $K_i[t]$, $i = 0, 1, 2$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z - \tau) = \frac{Q(z - \tau)}{\sqrt{z - \tau}}, \quad (46)$$

где $Q(z - \tau)$ - ограниченная функция своих аргументов.

После преобразования правой части уравнения (37) и используя (47) получаем следующее представление этого интегрального уравнения типа Вольтера

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{a_2}{k_2} + \frac{a_1}{k_1} \right) \cdot \int_0^z \nu(\tau) d\tau + \int_0^z \frac{Q(z - \tau)}{\sqrt{z - \tau}} \nu(\tau) d\tau = 2 \int_0^z \Phi_i(t) \sqrt{z - t} dt, \quad (47)$$

6. Выводы и направления дальнейших исследований

Полученное интегральное уравнение типа Вольтерра может быть решено методом последовательных приближений. В качестве направления дальнейших исследований предполагается рассмотрение задачи, в которой коэффициент температуропроводности в области $\Omega_1 = (0, l)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1987.-328 с.
2. Лыков А.В. Теплообмен.- М.: Энергия, 1972.
3. В.Д. Душкин, А.П. Созник Нестационарная задача теплопередачи через толстую стенку.- Проблемы пожарной безопасности. Сб. науч. тр. АГЗ Украины. Спец. Вып.-Харьков: Фолио, 2004.- с.61-65.
4. В.Д. Душкин Решение уравнения теплопроводности в полубесконечной области с неоднородными свойствами среды// Праці XII Міжнародного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2005). Харків-Херсон. 2005. с.122-126.

Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи
управління»

УДК 004.652/.942

№ 733, 2006, с.141-148

Построение схемы реляционной базы данных по нерекурсивной полусхеме

А. Г. Житарюк, Т. В. Семенова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In the present paper the problem of the information system modeling and the approach to the data modeling using the scheme was considered. The algorithm of relational database structure building by non-recursive scheme was developed.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Характерный для современного общества процесс массового внедрения информационных технологий, базирующихся на обработке информации при помощи вычислительной техники, приводит к росту спроса на информационные системы различного назначения. Для повышения эффективности процесса разработки подобных систем используются CASE-средства различного типа [1].

Анализ широко используемых CASE-средств [2-3] показал, что существует разделение между средствами поддержки проектирования и разработки самих систем и средствами разработки хранилищ данных (в частности СУБД), которые будет использовать система. Подобное разделение не является естественным, поскольку именно структурно-логическая модель предметной области, полученная на этапе анализа, является основой при разработке концептуальной модели базы данных. Этот факт игнорируется большинством CASE-средств в силу того, что структурно-логическая модель предметной области не является формализованным понятием. Как следствие этого, CASE-средства не содержат алгоритмов проверки корректности и непротиворечивости структурно-логической модели, которая является отправной точкой для дальнейшего проектирования.

С целью формализации представления структурно-логической модели предметной области авторами в работах [4-5] была предложена теория полусхем.

2. Цели работы

Представление концептуальной модели предметной области в терминах теории полусхем позволяет разработать формальные методы построения схемы реляционной базы данных как хранилища данных для проектируемой информационной системы. Однако задача генерации схемы базы данных по произвольной полусхеме является достаточно трудной. Основная проблема состоит в неоднозначном представлении рекурсивно определяемых понятий средствами реляционной модели данных. Вследствие этого, область исследования была сужена до нерекурсивных полусхем [6] и подмножества произвольных полусхем, удовлетворяющих определенным свойствам. Целью

данной работы является описание алгоритмов генерации схемы реляционной базы данных по нерекурсивной полусхеме.

3. Краткий обзор теории полусхем

Пусть N – конечное множество, элементы которого соответствуют именам понятий предметной области, R – конечное множество, элементы которого соответствуют именам ролей, т.е. ссылкам внутри экземпляра понятия на его структурные части.

Используемые обозначения:

$M(R, N)$ – множество частичных отображений из R в N ;

$dom(f)$ – область определения отображений $f \in M(R, N)$;

ε – отображение с пустой областью определения;

R^* – множества всех слов над R ;

R^+ – множество непустых слов над R ;

e – пустое слово.

Полусхемой предметной области называется тройка $S = (N, R, D)$, для которой выполняются следующие условия:

- 1) для любого $n \in N$, если $(n, \varepsilon) \in D$, то $\{f \in M(R, N) \mid (n, f) \in D\} = \{\varepsilon\}$;
- 2) для любого $n \in N$ и для любых двух вариантов определения $f, g \in M(R, N)$ таких, что $(n, f) \in D$, $(n, g) \in D$ и $r \in dom(f) \cap dom(g)$, где $r \in R$, выполнено свойство $f(r) = g(r)$.

где

N – множество понятий предметной области,

R – множество ролей,

$D \subset N \times M(R, N)$ – отношение, задающее соответствие между понятиями и вариантами определения.

Задается частичное отображение $\tau: N \times R \rightarrow N$ следующим образом: $\tau(n, r)$ определено в том и только том случае, если существует $f \in M(R, N)$, для которого $(n, f) \in D$, $r \in dom(f)$ при этом $\tau(n, r) = f(r)$.

Именуемой нитью понятия n называется элемент (n, w) из множества $N \times R^*$, который удовлетворяет одному из следующих условий:

1. $w = e$ и $(n, \varepsilon) \in D$;

2. для $w = r_1 r_2 \dots r_k$ в последовательности $n_0 = n$, $n_i = \tau(n_{i-1}, r_i)$, где $i = 1, \dots, k$, все члены определены.

Для полусхемы $S = (N, R, D)$ понятие $n \in N$ называется **базовым**, если для всякого $f \in M_+(R, N)$ выполняется $(n, f) \in D$.

Функция $f \in M(R, N)$ называется **сигнатурой понятия** $n \in N$, если $(n, f) \in D$.

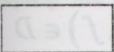
$F_n = \{f : M(R, N) \mid (n, f) \in D\}$ - множество сигнатур понятия n .

Понятие m **участвует в определении понятия** n , если существует $t \neq e$ -именующая нить, такая, что $\tau(n, t) = m$.

Понятие m **непосредственно участвует в определении понятия** n , если существует такая сигнатура $f \in F_n$ и существует $r \in \text{dom}(f)$ такие, что $f(r) = m$.

Понятие n называется **рекурсивно определяемым понятием**, если существует такая именующая нить $t \neq e$, что $\tau(n, t) = n$.

Полусхема называется **нерекурсивной**, если она не содержит рекурсивно определяемых понятий.

Для представления полусхем используется следующая графическая нотация.  понятие (сущность) предметной области,



вариант определения понятия

4. Генерация схемы базы данных по нерекурсивной полусхеме

Каждому понятию $n \in N$ ставится в соответствие отношение в базе данных или атрибут отношения. А агрегирующие связи между понятиями преобразуются в связи между отношениями, реализованные с помощью внешних ключей.

В множестве базовых понятий выделяется подмножество $\tilde{N}_0$ стандартно определяемых понятий, например String, Integer и др. Такие понятия скорее задают тип другого понятия нежели определяют качественно новые понятия. Поэтому стандартно определяемым понятиям ставится в соответствие атрибут в отношении.

Всем остальным базовым понятиям соответствуют отдельные отношения.

Небазовые понятия в свою очередь разбиваются на два подмножества в зависимости от количества вариантов определения, которые с ними ассоциированы. Такое разбиение обусловлено тем, что правила преобразования

таких понятий в набор отношений реляционной базы данных являются различными.

Ниже сформулированы правила построения схемы РБД.

1. Если понятие n является базовым, но не стандартно определяемым понятием, т.е. $n \in N_0 \setminus \tilde{N}_0$, то создается отношение базы данных

Rel_n(id_n : Integer, atr_n : String),

где id_n – искусственный ключ отношения Rel_n.

2. Если понятие $n \in N \setminus N_0$ имеет единственную сигнатуру f , то создается отношение с именем Rel_n, в котором количество атрибутов зависит от функции f . Для всех ролей $r \in \text{dom}(f)$ выполняется следующее:

- 1) Если $m = f(r) \in \tilde{N}_0$, то в отношение Rel_n добавляется атрибут с именем atr_r и типом m .

- 2) Если $m = f(r) \notin \tilde{N}_0$, то в отношение Rel_n добавляется атрибут с именем Ref_m, который является ссылкой на атрибут id_m отношения Rel_m.

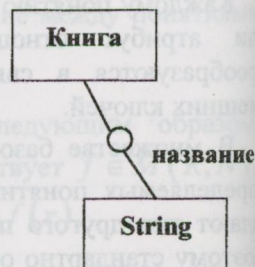
3. Если понятие $n \in N \setminus N_0$ ассоциировано с несколькими вариантами определения, то создается отношение с двумя атрибутами Rel_n(id_n, type_n), где атрибут с именем type_n имеет тип String, и содержит в качестве значений атрибутов имена вариантов определения понятия n . Для всех вариантов определения $f \in M(R, N)$ таких, что $(n, f) \in D$ выполняется следующее: Создается отношение с именем Rel_f, в котором принцип формирования атрибутов аналогичен пункту 2.

Пример 1.

Понятие **Книга** характеризуется строкой, которая выступает в роли названия книги.

Понятие String является базовым, стандартно определяемым понятием, т.е. $String \in \tilde{N}_0$, потому создается отношение с именем **Rel_Книга**, которое будет иметь следующий вид:

Rel_Книга (id_Книга : Integer, atr_название : String)



Пример 2.

Понятие **Книга** характеризуется понятием **Жанр**.

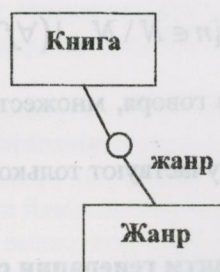
Понятие $Жанр \in N_0$ является базовым, но не является стандартно определяемым, потому предварительно требуется создать отношение базы данных, соответствующее понятию **Жанр**. Согласно правилу 1, оно будет иметь следующий вид:

Rel_Жанр (**id_Жанр** : Integer, **atr_Жанр** : String)

В свою очередь понятию **Книга** ставится в соответствие отношение **Rel_Книга**, содержащее ссылку на отношение **Rel_Жанр**. Таким образом, отношение **Rel_Книга** будет иметь следующий вид:

Rel_Книга (**id_Книга** : Integer, **ref_жанр** : Integer),

где **ref_жанр** – ссылка на атрибут **id_Жанр** отношения **Rel_Жанр**.

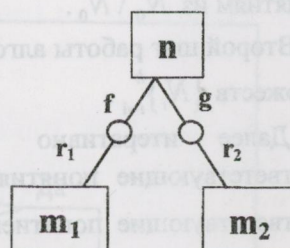


Пример 3.

Понятие n имеет два варианта определения, следовательно, построение схемы базы данных проходит согласно правилу 3.

На первом шаге создается отношение, которое имеет следующий вид:

Rel_n(**id_n** : Integer, **type_n** : String), где доменом атрибута **type_n** является множество имен вариантов определения понятия n . Отношение **Rel_n** сразу же может быть заполнено.



id_n	type_n
1	f
2	g

На следующем шаге создается два отношения **Rel_f** и **Rel_g** согласно правилу 2.

Описанный набор правил может применяться только в определенной последовательности. Это обусловлено тем, что к моменту построения отношения, соответствующего заданному понятию n , должны быть построены все отношения, соответствующие понятиям, которые участвуют в определении понятия n .

Иначе говоря, понятия должны рассматриваться по мере усложнения их структуры.

На первом шаге должны быть построены отношения, соответствующие базовым понятиям, которые не являются стандартно определенными.

На втором шаге должны быть рассмотрены понятия, в определении которых непосредственно участвуют только базовые понятия.

На третьем шаге строятся отношения для таких понятий, в определении которых участвуют базовые понятия, а также понятия, рассмотренные на втором шаге.

Таким образом, на каждом следующем шаге может быть рассмотрено вполне определенное множество понятий:

$$N_i = \{n \in N \setminus N_{i-1} \mid (\forall f \in F_n) \text{ im}(f) \subset \bigcup_{k=0}^{i-1} N_k\}.$$

Иначе говоря, множество N_i будет состоять из тех понятий, в определении которых участвуют только понятия из множества $\bigcup_{k=0}^{i-1} N_k$.

Алгоритм генерации схемы базы данных по нерекурсивной полусхеме

Пусть $S = (N, R, D)$ - нерекурсивная полусхема.

На первом шаге создаются отношения схемы базы данных, соответствующие понятиям из $N_0 \setminus \tilde{N}_0$.

Второй шаг работы алгоритма заключается в построении последовательности множеств $\{N_i\}_{i=1}^k$.

Далее итеративно строятся отношения схемы базы данных, соответствующие понятиям из множеств N_i . Сначала строятся отношения, соответствующие понятием из N_1 , далее из N_2 и так далее, пока не будут рассмотрены все N_i . При построении отношений, соответствующих понятиям из N_i , отдельно рассматриваются понятия с одним и несколькими вариантами определения, поскольку они требуют различных алгоритмов.

Структурная схема алгоритма приведена на рисунке 1.

Вход: полусхема $S = (N, R, D)$

Выход: схема реляционной базы данных

Используемые функции:

SignatureCount(n) – функция, вычисляющая количество вариантов определения, ассоциированных с понятием n ;

CreateSingleDefinedConcept(n) – функция, выполняющая построение отношений, соответствующих понятию n с одним вариантом определения;

CreateMultiDefinedConcept(n) – функция, выполняющая построение отношений, соответствующих понятию n с несколькими вариантами определения.

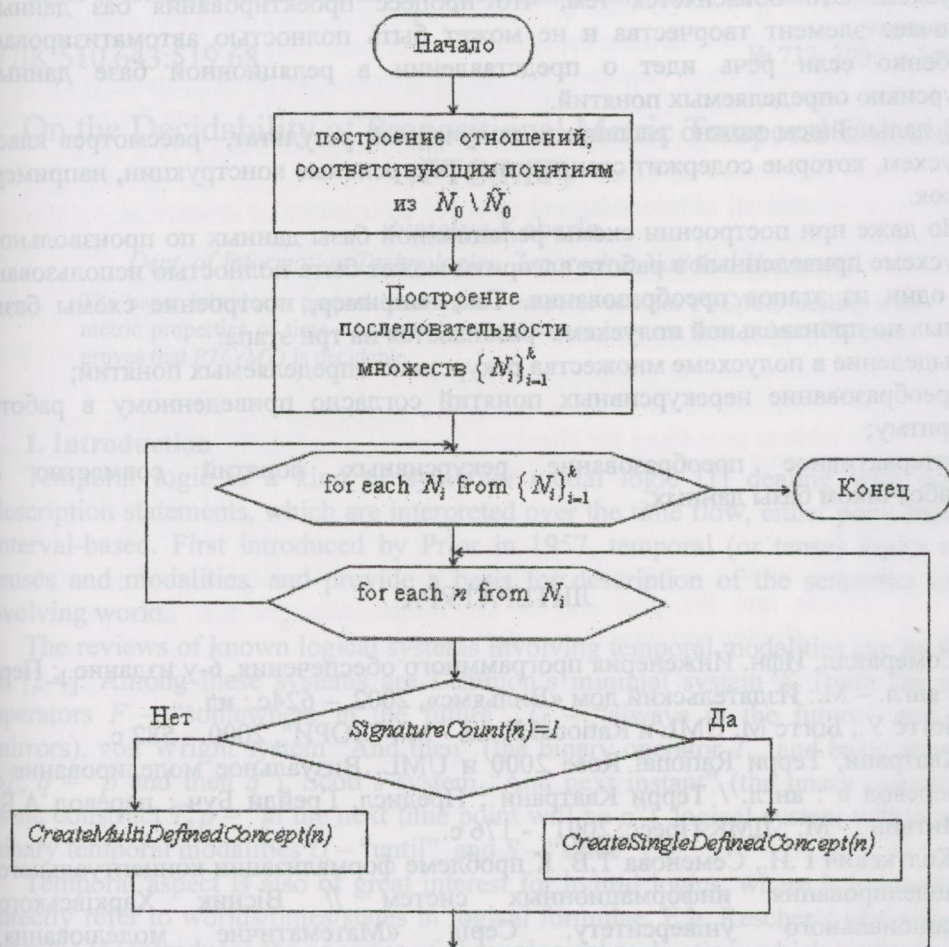


Рис. 1. Алгоритм построения схемы БД по нерекурсивной полусхеме

5. Нерешенные проблемы и цели работы

Следует отметить, что приведенные алгоритмы позволяют строить схему базы данных только по нерекурсивной полусхеме. Опыт разработки информационных систем [7] позволяет утверждать, что в большинстве случаев структурно-логические модели предметных областей содержат определенное количество рекурсивно определяемых понятий. Искусственное исключение таких понятий из рассмотрения, сделанное в данной работе, является лишь временным решением.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В работе рассмотрен алгоритм формирования схемы реляционной базы данных по структурно-логической модели предметной области информационно-поисковой системы, представленной в терминах теории полусхем.

Рассмотренный алгоритм предполагает обработку лишь нерекурсивных полусхем. Это объясняется тем, что процесс проектирования баз данных включает элемент творчества и не может быть полностью автоматизирован. Особенно если речь идет о представлении в реляционной базе данных рекурсивно определяемых понятий.

В дальнейшем можно расширить полученный результат, рассмотрев класс полусхем, которые содержат стандартные рекурсивные конструкции, например, список.

Но даже при построении схемы реляционной базы данных по произвольной полусхеме приведенный в работе алгоритм может быть полностью использован, как один из этапов преобразования. Так, например, построение схемы базы данных по произвольной полусхеме разбивается на три этапа:

выделение в полусхеме множества рекурсивно определяемых понятий;

преобразование нерекурсивных понятий согласно приведенному в работе алгоритму;

интерактивное преобразование рекурсивных понятий совместно с разработчиком базы данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сомервилл, Ифн. Инженерия программного обеспечения, 6-е издание. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 624 с.: ил.
2. Боггс У., Боггс М. UML и Rational Rose. - М.: "ЛОРИ", 2000. - 582 с.
3. Кватрани, Терри Rational Rose 2000 и UML. Визуальное моделирование : перевод с : англ. / Терри Кватрани ; Предисл. Грейди Буч ; перевод А.Б. Литвин . - М. : ДМК Пресс, 2001 . - 176 с.
4. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В. К проблеме формализации концептуального моделирования информационных систем // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №605, 2003, с. 33-42.
5. Семенова Т.В. Морфизмы полусхем и их приложения. // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №703, 2005, с. 198-206.
6. Жолткевич Г.Н., Федорченко К.А. Об одном классе концептуальных моделей. // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. - №19. – с. 51-56.
7. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 1985. – 271 с., ил.

On the Decidability of Propositional Metric Temporal Calculus PTC(MT)

Natalya Keberle

Dept. of Information Technologies, Zaporozhye National University[†]

The paper introduces propositional metric temporal calculus *PTC(MT)* dealing with metric properties of time – transitivity and distance between time points. The paper proves that *PTC(MT)* is decidable.

1. Introduction

Temporal logic is a kind of symbolic modal logic [1] dealing with domain description statements, which are interpreted over the time flow, either point-based or interval-based. First introduced by Prior in 1957, temporal (or tense) logics relate tenses and modalities, and provide a basis for description of the semantics of the evolving world.

The reviews of known logical systems involving temporal modalities can be found in [2-4]. Among these systems are Lemmon's minimal system K_t (with the unary operators F – “somewhere in the future”, G – “always in the future” and their mirrors), von Wright system “And then” (the binary operator T_w , and basic construct $pT_w q$ – “ p and then q ”), Scott's system “And next instant” (the unary operator T_s , basic construct $T_s p$ – “in the next time point will be p ”), logical system with Kamp's binary temporal modalities U – “until” and S – “since” [5].

Temporal aspect is also of great interest for hybrid logics, where it is possible to directly refer to worlds/times/states in logical formulae. E.g. Rescher's chronological calculus [6] introduces the operator of chronological realization, which binds an event to the particular real date/time.

Temporal logics are widely accepted languages for specifying properties of reactive systems and their behaviour over time [7-8], and for the description of concurrent object-based systems: process controls, fault tolerant systems, distributed AI [9]. Its application to the description of evolving behaviour of dynamic domains is under detailed investigation, particularly for the purposes of knowledge representation on the Semantic Web (see e.g. [10-11]).

The examples of propositional temporal logics for linear time are *LTL* [12], *PTL* [13], *Timed PTL* [8], and the set of Propositional Linear Temporal Logics from [4].

Metric temporal logic with modalities F_n (“it will be the case after n time points”) and P_n (“it was the case n time points ago”) allows in addition to description of precedence of events to explicitly state distances (in time points) between the occurrences of events.

This logic is positioned between non-metrical temporal logics and hybrid logics.

[†] kenga@zsu.zp.ua

Indeed, from the one point, constructs like $Fnp \vee Fmq$ tell that p will be true in n time moments or q will be true in m time moments, thus one can use primitive arithmetic operations to calculate the difference between time moments when the p or q occur. At the same time, non-metrical modal operators of other systems (like F , G , T_s , U and S) can be easily presented via metric one (see e.g. [1]). From the other point, it is impossible to set or get absolute values of time moments when p or q occur.

However, the review of other researches in temporal logics has showed that the complete propositional metric temporal calculus with temporal modalities Fn and Pn , as they were introduced in [5], was not investigated with respect to the logical properties of an arbitrary formal system: completeness, soundness and decidability.

The aim of the paper is to introduce propositional metric temporal calculus $PTC(MT)$, and to prove decidability of $PTC(MT)$. The work on $PTC(MT)$, particularly soundness and completeness analysis, was presented in [15].

The paper is structured as follows: Section 2 introduces the $PTC(MT)$; Section 3 describes the tableau procedure for checking formula satisfiability; Section 4 analyses decidability of $PTC(MT)$; Section 5 concludes the paper.

2 $PTC(MT)$

Propositional metric temporal calculus considers time having linear discrete structure, infinite into the past and to the future, assumes that time points are organized with reflexive and transitive ordering relation.

Such structure of time is isomorphic to the structure $\langle Z, < \rangle$, where Z - is a set of integers, and $<$ - is a strict ordering relation.

Formal system is defined if defined are alphabet, rules of formulae construction, the set of axioms, and the set of the deduction rules.

2.1 Alphabet and formulae construction rules

The alphabet of $PTC(MT)$ consists of:

- (a) Propositional variables $p, q, r, s, \dots$;
- (b) Primitive propositional connectives $\neg, \supset$, and additional connectives $\wedge, \vee, \equiv$, defined over primitive ones in the usual way;
- (c) Temporal operators Fn, Pn (Fn - «it will be the case after n time points», Pn - «it was the case n time points ago»);

$PTC(MT)$ terms are:

- (a) $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots$ are natural numbers and «0»;
- (b) $i, i_1, \dots, j, j_1, \dots$ are numerical variables;
- (c) if $n_1, \dots, n_m$ are natural numbers and «0» or numerical variables, and θ - m -ary operator, then $\theta(n_1, \dots, n_m)$ - is a term.

Formulae are constructed following the rules:

- (a) Every propositional variable is a formula;
- (b) If φ and ψ are formulae, then $\neg\varphi$, $\varphi \supset \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \equiv \psi$ are also formulae;
- (c) If Pr^m is a predicate letter denoting m -ary predicate, defined over integers (e.g., «=», «>», ...), and $n_1, \dots, n_m$ - are terms, then $\text{Pr}^m(n_1, \dots, n_m)$ - is a formula;

(d) If φ – is a formula, then $Fn\varphi, Pn\varphi, \exists i\varphi, \forall i\varphi$ – are also formulae.

Alphabet of $PTC(MT)$ is defined.

Definition 1.

Numerical variable i occurs free in a formula φ , if it is not within the scope of any quantifier in φ .

Definition 2.

Term n is free in a formula φ for a numerical variable j , if there are no free occurrences of j in φ , such that j is within the scope of any quantifier $\forall i_m$, where i_m is a numerical variable in the term n .

2.2 Axioms and deduction rules

$PTC(MT)$ axioms set consists of all axioms of the propositional calculus and some axioms of temporal logic, taken from [1-3].

Following formulae are axioms (propositional axioms are correspondent to L4 system, see [14, p.49]):

- (A1) $p \supset (q \supset p)$;
- (A2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;
- (A3) $p \wedge q \supset p$
- (A4) $p \wedge q \supset q$
- (A5) $p \supset (p \vee q)$
- (A6) $q \supset (p \vee q)$
- (A7) $p \supset (q \supset (p \wedge q))$
- (A8) $(p \supset q) \supset ((r \supset q) \supset ((p \vee r) \supset q))$
- (A9) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$
- (A10) $\neg \neg p \supset p$

(AMT1) $(\neg Fn\neg(p \supset q)) \supset (Fnp \supset Fnq)$ – logical homogeneity in the future

(AMT1.1) $(\neg Pn\neg(p \supset q)) \supset (Pnp \supset Pnq)$ – logical homogeneity in the past

(AMT2) $Fn\neg Pn\neg p \supset p$

(AMT2.1) $Pn\neg Fn\neg p \supset p$

(AMT3) $Fm\exists iFip \supset \exists iFmFip$

(AMT3.1) $Pm\exists iPip \supset \exists iPmPip$

(AMT4) $Fm\exists iFip \supset \exists iFmFip$

(AMT4.1) $Pm\exists iFip \supset \exists iPmFip$

(AMT5) $F(m+n)p \supset FmFnp$

(AMT5.1) $P(m+n)p \supset PmPnp$

(AMT6) $\neg Fnp \supset Fn\neg p$ – infinity into the future

(AMT6.1) $\neg Pnp \supset Pn\neg p$ – infinity into the past

(AMT7) $Fn\neg p \supset \neg Fnp$ – nonbranching in the future

(AMT7.1) $Pn\neg p \supset \neg Pnp$ – nonbranching in the past

(AMT8) $FmFnp \supset F(m+n)p$ – transitivity in the future

(AMT8.1) $PmPnp \supset P(m+n)p$ – transitivity in the past

(AMT9) $(m = n+k) \supset (FmPnp \supset Fkp)$ – iteration of temporal modalities

Propositional axioms are independent with respect to $PTC(MT)$, the same applies for temporal axioms.

Deduction rules for calculus $PTC(MT)$ are:

(R1) $\frac{\varphi, \varphi \supset \psi}{\psi}$ – Modus Ponens

(R2) $\frac{\varphi(p)}{\psi(p/\gamma)}$ – substitution rule (ψ is obtained after replacing in φ all

occurrences of a propositional variable p with formula γ)

(R3) $\frac{\varphi}{\neg Fn\neg\varphi}$ – the rule of deriving “always in the future”

(R4) $\frac{\varphi}{\neg Pn\neg\varphi}$ – the rule of deriving “always in the past”

Let φ be a $PTC(MT)$ formula that does not contain numerical variable i , $\varphi[j/i]$ be a $PTC(MT)$ formula with all free occurrences of a numerical variable j replaced with i . Then the following deduction rule may be applied:

(R5) $\frac{\varphi[j/i]}{\forall i\varphi}$ – the generalization rule

If φ is a $PTC(MT)$ formula which contains numerical variable i , and $\varphi[i/n]$ be a $PTC(MT)$ formula with all occurrences of a numerical variable i replaced with term n , which is free for i in φ , then the following deduction rule may be applied:

(R6) $\frac{\forall i\varphi}{\varphi[i/n]}$

Calculus is constructed.

Throughout this paper we restrict the discussion with binary operations “+”, “-” for $PTC(MT)$ terms construction and use the only binary predicate “=” (“equality”).

Definition 3.

Formula φ is called **atomic**, if φ is either a propositional variable or its negation, or a formula of the view $\text{Pr}^m(n_1, \dots, n_m)$ or its negation.

Definition 4.

Formula φ is in **negation normal form** (n.n.f.), if for every subformula $\neg\psi$ formula ψ is atomic, and the whole formula φ is constructed without binary propositional connectives $\supset, \equiv$.

Theorem 1.

Let φ be a formula from $PTC(MT)$.

Then $\vdash \varphi \equiv \psi$, where ψ - is a formula in negation normal form (n.n.f.).

The proof of this fact is shown in the [15].

Definition 5.

Formula φ is in **$FnPn$ -normal form** ($FnPn$ -n.f.), if it can be presented as:

$$\begin{aligned}
\varphi \equiv & \bigvee_{k=1}^N \left(\bigwedge_{r^1=0}^{N_k^1} F v_{kr^1} \varphi_{kr^1} \wedge \bigwedge_{r^2=0}^{N_k^2} P v_{kr^2} \varphi_{kr^2} \wedge \right. \\
& \bigwedge_{r^3=0}^{N_k^3} \exists i_{kr^3} \text{Pr}^{s+1}(i_{kr^3}, v_1, \dots, v_s) \wedge \bigwedge_{r^4=0}^{N_k^4} \forall i_{kr^4} \text{Pr}^{s+1}(i_{kr^4}, v_1, \dots, v_s) \wedge \\
& \bigwedge_{\substack{\alpha, \beta \\ r^j=0, N_k^j \\ d=0, D_k^j}} \alpha v_{kr^j} \beta i_{kr^j 1} \alpha i_{kr^j 1} \dots \beta i_{kr^j d} \alpha i_{kr^j d} \varphi_{kr^j} \bigg)
\end{aligned}$$

where

- N - is a number of disjuncts in a formula,
- k - is an internal index for referencing disjuncts within the formula,
- $N_k^j \geq 0$ - is a number of conjuncts of a particular conjunct form within k -th disjunct
- $j = 1, \dots, 2^{2 \cdot D_k}$ - is an index of a particular conjunct form within k -th disjunct,
- $\alpha \in \{F, P\}$ - is a symbol, partially denoting one of temporal modalities,
- $\beta \in \{\exists, \forall\}$ - is a symbol denoting one of quantifiers,
- $r^j = 0, \dots, N_k^j$ - is an internal index for referencing formulae of a particular conjunct form within k -th disjunct,
- $d = 1, \dots, D_k^j$ - is an internal index for referencing elements of the form $\beta_{kr^j} i_{kr^j} \alpha_{kr^j} i_{kr^j}$ within a formula in the r^j -th conjunct of the particular conjunct form within k -th disjunct,
- $D_k^j \leq D_k$ - is the number of quantifiers in the particular conjunct form within k -th disjunct,
- D_k - is the maximal number of quantifiers among all particular conjunct forms within k -th disjunct,
- φ_{kr^j} - are atomic formulae.

$FnPn$ -n.f. of a $PTC(MT)$ formula is a list of alternative histories of states of some object from a domain.

Theorem 2.

Let φ be a formula of $PTC(MT)$ in n.n.f. Then $\vdash \varphi \equiv \psi$, where ψ is a formula in $FnPn$ -normal form. The proof of this fact is shown in the [15].

3 Tableau procedure for checking $PTC(MT)$ formula satisfiability

Construct a model of an arbitrary $PTC(MT)$ formula. It is a widely accepted technique [7-8, 10-11, 16] to use tableau rules to construct a model for a modal system.

Definition 6.

Let φ be a formula in $FnPn$ -n.f., and ψ be a subformula of φ . A sequence of formulae lists $\langle \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_m, \zeta_{-1}, \dots, \zeta_{-s} \rangle$, linearly ordered with a binary relation R

(reflexive and transitive), forms a **chain** Z_φ for the formula φ , if this sequence is constructed following the set of rules, presented in the Table 1.

Table 1. Rules for construction of a semantic tableau for checking PTC(MT) formula satisfiability.

(0-rule)	Condition: $\psi = \varphi$
	Action: $\zeta_0 = \psi$
($\wedge$ -rule)	Condition: 1. $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ 2. $\{\psi_1, \psi_2\} \cap \zeta = \emptyset$
	Action: $\zeta = \zeta \cup \{\psi_1, \psi_2\}$
($\vee$ -rule)	Condition: 1. $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ 2. $\{\psi_1, \psi_2\} \cap \zeta = \emptyset$
	Action: Either $\zeta = \zeta \cup \{\psi_1\}$ or $\zeta = \zeta \cup \{\psi_2\}$
(Fv-rule)	Condition: 1. $\psi = Fv\psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k$ 3. $v \geq 1$
	Action: 1. If there is no $\zeta_{k+1} : \zeta_{k+1} \in Z_\varphi$, then such list is created and new formula $\psi' = F(v-1)\psi_1$ is added to the ζ_{k+1} , $\psi' \in \zeta_{k+1}$ 2. If exists $\zeta_{k+1} : \zeta_{k+1} \in Z_\varphi$, then $\psi' = F(v-1)\psi_1$ is added to the ζ_{k+1} , $\psi' \in \zeta_{k+1}$ 3. Between ζ_k and ζ_{k+1} relation $R(\zeta_k, \zeta_{k+1})$ is set.
(Pv-rule)	Condition: 1. $\psi = Pv\psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k$ 3. $v \geq 1$
	Action: 1. If there is no $\zeta_{k-1} : \zeta_{k-1} \in Z_\varphi$, then such list is created and new formula $\psi' = P(v-1)\psi_1$ is added to the ζ_{k-1} , $\psi' \in \zeta_{k-1}$ 2. If exists $\zeta_{k-1} : \zeta_{k-1} \in Z_\varphi$, then $\psi' = P(v-1)\psi_1$ is added to the ζ_{k-1} , $\psi' \in \zeta_{k-1}$ 3. Between ζ_k and ζ_{k-1} relation $R(\zeta_k, \zeta_{k-1})$ is set.
$\exists iFi$ -rule	Condition 1. $\psi = \exists iFi\psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k, \psi_1 \notin \zeta_k$

	Action	Either $\psi_1 \in \zeta_k$ or new formula $\psi' = F1 \exists i Fi \psi_1$ belongs to ζ_k , $\psi' \in \zeta_k$
$\exists i Pi$ -rule	Condition	1. $\psi = \exists i Pi \psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k, \psi_1 \notin \zeta_k$
	Action	Either $\psi_1 \in \zeta_k$ or new formula $\psi' = P1 \exists i Pi \psi_1$ belongs to ζ_k , $\psi' \in \zeta_k$
$\forall i Fi$ -rule	Condition	1. $\psi = \forall i Fi \psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k, \psi_1 \notin \zeta_k$
	Action	1. $\psi_1 \in \zeta_k$ 2. For each $\zeta_j : \zeta_j \in Z_\varphi, j > k$, such that the relation $R(\zeta_k, \zeta_j)$ is set, $\psi \in \zeta_j$
$\forall i Pi$ -rule	Condition	1. $\psi = \forall i Pi \psi_1$ 2. $\psi \in \zeta_k, \psi_1 \notin \zeta_k$
	Action	1. $\psi_1 \in \zeta_k$ 2. For each $\zeta_j : \zeta_j \in Z_\varphi, j < k$, such that the relation $R(\zeta_k, \zeta_j)$ is set, $\psi \in \zeta_j$
$\exists i Pr^2(i, \theta(v_1, v_2))$ -rule (for predicate letter "=")	Condition	1. $\psi = \exists i Pr^2(i, \theta(v_1, v_2))$ 2. $\psi \in \zeta_k$
	Action	If there is no $\zeta_i \in Z_\varphi$, such that $i = \theta(v_1, v_2)$, then such list is created.
$\forall i Pr^2(i, \theta(v_1, v_2))$ -rule (for predicate letter "=")	Condition	1. $\psi = \forall i Pr^2(i, \theta(v_1, v_2))$ 2. $\psi \in \zeta_k$
	Action	If there is no $\zeta_i \in Z_\varphi$, such that $i = \theta(v_1, v_2)$, then such list is created.

Table 1 does not contain rules for resolving formulae like $\psi = Fi \psi_1$, where i is a numerical variable, or like $\psi = \forall i \psi_1$. Such formulae can be presented in the form $\forall j Fj \psi_1$ with application of the deduction rules R5, R6.

It also should be pointed out that the $\forall i Fi$ - and $\forall i Pi$ -rules reflect the transitivity and reflexivity of the relation R between possible worlds at different time points. According to the definition of a model for a modal system (see [16]) the model of the propositional metric temporal calculus $PTC(MT)$, constructed according to the rules from Table 1, is S4-model.

Definition 7.

A set $\{Z_\varphi^1, \dots, Z_\varphi^k\}$ of chains constructed according to the rules enlisted in the Table 1, is called a **construction** C_φ .

Definition 8.

Chain Z_φ is **closed**, if it contains a formulae list ζ such that for some propositional variable p both p and $\neg p$ are in ζ . Construction C_φ is **closed** if all chains in it are closed.

Given a *PTC(MT)* formula φ , its construction creation procedure can be described as follows. Construction creation starts from applying 0-rule, then apply $\vee$ -rule until there will not be any unresolved subformulae ψ having disjunction, then apply $\wedge$ -rule until there will not be any unresolved subformulae ψ having conjunction. After that apply $\exists i \text{Pr}^2(i, \theta(\nu_1, \nu_2))$ - and $\forall i \text{Pr}^2(i, \theta(\nu_1, \nu_2))$ -rules, which will introduce new (though empty) formulae lists, then apply $F\nu$ - and $P\nu$ -rules until there will not be any unresolved subformulae of that form. Finally, apply $\exists iFi$ -, $\exists iPi$ -rule and then $\forall iFi$ - and $\forall iPi$ -rules. This process will be continued until for each chain there will be a formulae list, which fulfills one of the following two conditions: either this chain is closed, or this chain with the same set of formulae is already in the construction.

Definition 9.

Construction C_φ is **complete** if no tableau rule is applicable to it.

Definition 10.

Let φ be a formula of *PTC(MT)*. A **model** for φ will be any chain Z_φ , which is not closed.

Definition 11.

Formula φ is **satisfiable** if and only if φ has a model defined over the construction C_φ .

Definition 12.

Formula φ is **logically valid** (denoted as $\models$) if and only if $\neg\varphi$ does not have a model defined over the construction $C_{\neg\varphi}$ (in other words, $\neg\varphi$ is **unsatisfiable**).

Metatheorem 1.

PTC(MT) is sound.

The proof of this fact is shown in the [15].

Metatheorem 2.

$\vdash\varphi$ iff $\models\varphi$ (completeness of *PTC(MT)*)

The proof of this fact is also shown in the [15].

4 *PTC(MT)* decidability

A formal theory is decidable if there is an effective decision procedure of checking whether a given formula is satisfiable.

Let $|C_\varphi|$ be cardinality of a construction C_φ of a formula φ – the number of chains Z_φ for the formula φ . Let $|Z_\varphi|$ be cardinality of a chain Z_φ – the number of formulae lists ζ_i in the chain. Finally, let $|\zeta|$ be cardinality of a formulae list ζ from the chain Z_φ of the construction C_φ of formula φ – the number of formulae in the formulae list ζ .

Lemma 1.

For arbitrary *PTC(MT)* formula φ the process of completing a construction C_φ always terminates after finitely many steps.

Proof: according to the Theorem 2 without loss of generality let φ be in *FnPn-n.f.* Construction C_φ is finite if and only if it consists of finite set of chains Z_φ , each chain Z_φ is also finite, i.e. consists of finite set of formulae lists ζ_i , and each formulae list ζ_i also consists of finite set of subformulae of the formula φ .

The analysis of the rules from Table 1 shows that

$$\forall Z_\varphi \in C_\varphi \quad |Z_\varphi| := |Z_\varphi| + 1 \text{ in case of application of } F\vee-, P\vee-, \exists iFi-, \exists iPi-,$$

$$\exists iPr^2(i, \theta(\nu_1, \nu_2))-, \forall iPr^2(i, \theta(\nu_1, \nu_2))-, \text{ and remains the same otherwise.}$$

Consider a chain Z_φ and evaluate the number of formulae in a given formulae list:

$$\forall \zeta_i \in Z_\varphi \quad |\zeta_i| := |\zeta_i| + 1 \text{ in case of application of } F\vee-, P\vee-, \exists iFi-, \exists iPi-, \forall iFi-, \forall iPi-, \vee- \text{ rules,}$$

$$\forall \zeta_i \in Z_\varphi \quad |\zeta_i| := |\zeta_i| + 2 \text{ in case of application of } \wedge- \text{ rule, and remains the same otherwise.}$$

Recall that there are no more than $2^{2 \cdot D_k}$ different conjunct forms in the k -th disjunct in φ , and no more than N_k^j conjuncts within each conjunct form. The cardinality of the initial formulae list, ζ_0 , for the formula φ is bounded:

$$|\zeta_0| \leq 2^{N_k^1 + N_k^2 + \dots + N_k^{2 \cdot D_k}} - 1$$

It is obvious, that $|\zeta_i| \leq |\zeta_0|$ for any $\zeta_i \in Z_\varphi$, as far as only in ζ_0 will be conjuncts of the forms $\exists i_{kr^3} Pr^{s+1}(i_{kr^3}, \nu_1, \dots, \nu_s)$, $\forall i_{kr^3} Pr^{s+1}(i_{kr^3}, \nu_1, \dots, \nu_s)$.

The cardinality of the chain, corresponding to the whole formula φ is also bounded:

$$|Z_\varphi| \leq \max\{\nu : F\nu\varphi_{kr^j} \in \text{Sub}(\varphi), F\nu\beta i_{kr^j_1} \alpha i_{kr^j_1} \dots \beta i_{kr^j_d} \alpha i_{kr^j_d} \varphi_{kr^j} \in \text{Sub}(\varphi)\} + \\ + \max\{\nu : P\nu\varphi_{kr^j} \in \text{Sub}(\varphi), P\nu\beta i_{kr^j_1} \alpha i_{kr^j_1} \dots \beta i_{kr^j_d} \alpha i_{kr^j_d} \varphi_{kr^j} \in \text{Sub}(\varphi)\}$$

where:

- φ_{kr^j} - are atomic formulae within φ ,
- $\text{Sub}(\varphi)$ - is the set of all subformulae of φ .

According to the definition of a chain and a construction, one may observe that one chain corresponds to one subformula φ .

Denote $A_k^j = 1 + N\beta_k^j + N\alpha_k^j$ - the number of subformulae, constructed for j -th particular conjunct form in k -th disjunct of φ . Here $N\beta_k^j = D_k^j$ - is the number of quantifiers within the particular conjunct form (generally, $N\beta_k^j$ can also be equal to 0, for example for the 1-th and the 2-nd conjunct forms of $FnPn$ -n.f.), $N\alpha_k^j$ - is the number of temporal modalities within the particular conjunct form in k -th disjunct of φ ($N\alpha_k^j$ can be equal to zero, e.g. for the 3-rd and the 4-th conjunct forms of $FnPn$ -n.f.).

Now it is possible to evaluate $M_k = \sum_{j=1}^{2^{2 \cdot D_k}} A_k^j \cdot N_k^j$ - the general quantity of subformulae across all conjuncts in k -th disjunct of φ (again, φ is assumed to be in $FnPn$ -n.f.).

Then the cardinality of the set $\text{Sub}(\varphi)$, and, consequently, of the construction C_φ

for the formula φ can be restricted as $|C_\varphi| \leq 2^{\sum_{k=1}^N M_k} - 1$, i.e. it is finite. End of proof.

Metatheorem 3.

$PTC(MT)$ is decidable.

The proof of this fact is based on Lemma 1.

5 Conclusions

The paper introduces propositional metric temporal calculus $PTC(MT)$. The work on $PTC(MT)$ logical analysis, particularly on soundness and completeness, was presented in [15]. The paper proves that $PTC(MT)$ with temporal modalities Fn and Pn is decidable.

The work will be continued in the following direction: all results obtained for the propositional metric temporal system $PTC(MT)$ will be considered for the Description Logics family, which are de facto standard for presentation of ontologies on the Semantic Web.

REFERENCES

1. Clifford J.E. Tense and Tense Logic. Mouton Publishers, The Hague, The Netherlands, – 1975. – 173 pp.
2. Ishmuratov A.T. Logical theories of temporal contexts (temporal logic). Kyiv: Naukova dumka, – 1981. – 150 pp. (in Russian)
3. Karavaev E.F. Foundations of temporal logic. Leningrad: Leningrad University, – 1983. – 177 pp. (in Russian)
4. Sistla A.P., Clarke E.M. The Complexity of Propositional Linear Temporal Logics. J.ACM, Vol.32, No.3, July 1985, pp.733-749.
5. Prior A. Past, Present and Future. Oxford: Oxford University Press, – 1967.
6. Rescher N., Urquhart A. Temporal Logic. New York: Springer-Verlag, – 1971.
7. Manna Z., Pnueli A. The temporal logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification. Springer-Verlag, New York, 1992.
8. Alur R., Henzinger T.A. A Really Temporal Logic. J. ACM, Vol. 41, No.1, January, 1994, pp.181-204.
9. Fisher M. A Survey of Concurrent METATEM – the Language and its Applications. In: Proc. 1st Intl. Conf. on Temporal Logics, 1994.
10. Artale A., Franconi E. A Survey of Temporal Extensions of Description Logics. In: Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Vol.30, No.1-4, pp.171-210.
11. Baader F., Calvanese D., McGuinness D., Nardi D., Patel-Schneider P. The Description Logic Handbook. Theory, Implementation and Applications. Cambridge Univ. Press, 2003. – 555 pp.
12. Pnueli A. The temporal logic of programs. In: Proc. 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Providence, R.I.), IEEE, New York, 1977, pp.46-57.
13. Gabbay D., Pnueli A., Shelah S., Stavi J. On the temporal analysis of fairness. In: Proc. 7th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. ACM, New York, pp.163-173.
14. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. M.: Nauka, 1971. – 320 pp. (in Russian)
15. Keberle N.G. Properties of Propositional Metric Temporal Calculus For Description Of Evolving Conceptualization. In: Bulletin of the Dniepropetrovsk National University, – 2006, to appear.
16. Feys R. Modal Logic. M.: Nauka, – 1974. – 520 pp. (in Russian).

Об одной вероятностной модели тепловых режимов радиоаппаратуры

Л. В. Климова, А. Ю. Петрова, М. А. Проценко, Н. В. Черемская

ГП Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, Украина

Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Украина

ГП Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, Украина

Харьковский национальный технический университет «ХПИ», Украина

The representation for correlation function of the solution of a thermal conduction equation describing thermal mode in a final length rod which is under effect of exterior statistically non-stationary sources is obtained. The numerical analysis of a dispersion depending on spatial coordinate and time is given. The obtained results can be used at calculation of thermal modes of radio equipment which is under effect of exterior non-stationary fluctuations.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При работе радиоаппаратуры, входящей в системы космических аппаратов (КА), в космическом пространстве часто возникают температурные флуктуации, из-за нагрева поверхности КА и солнечных батарей за счет взаимодействия с космической средой, нагрева от излучения Солнца, планет и работающих двигателей [1]. При отсутствии солнечных лучей температура КА резко понижается. Смена процесса переохлаждения процессом нагрева от солнечного излучения приводит к тому, что конструкции и аппаратура, размещаемые на внешней поверхности КА, подвергаются циклическому воздействию температур, что представляет опасность для материалов и изделий, входящих в состав аппаратуры и солнечных батарей. Повышение температуры вызывает ухудшение изоляционных свойств материалов, изменение плотности и подвижности носителей заряда в полупроводниках, снижение индуктивности насыщения в сердечниках, общее увеличение интенсивности старения материалов и т. п. Все эти факторы могут привести к искажению сигналов на выходе аппарата или даже к выходу изделия из строя.

Следовательно, для обеспечения нормального теплового режима аппаратуры и определения характеристик системы терморегулирования необходимо проводить тепловое проектирование приборов.

При работе радиоаппаратуры систем КА в космическом пространстве также возникают и неконтролируемые температурные флуктуации, связанные, в частности, с нестационарными неконтролируемыми процессами, происходящими на Солнце, попаданием космических объектов в облака космических частиц плазмы солнечного ветра и т. д., которые чаще всего происходят на конечном интервале времени и локализованы в пространстве, и поэтому, в принципе не могут быть смоделированы стационарными случайными процессами или однородными случайными полями.

Поэтому возникает необходимость в расчетах тепловых режимов, которые несут статистически нестационарный или неоднородный характер.

2. Постановки задачи

Интерес представляет следующий случай: температура среды, окружающей или протекающей через аппарат, изменяется во времени; необходимо определить нестационарное температурное поле аппарата.

Рассмотрим следующую стохастическую задачу распространения тепла в конечном тонком стержне:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \\ U|_{t=0} = f_0(x), \\ U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где U — преобразованная температура; t — время, a — коэффициент температуропроводности; $f(x)$ — плотность тепловых источников.

3. Решение

Пусть $f(x, t)$ имеет вид $f(x, t) = f_0(x)\xi(t)$, где $\xi(t)$ — случайный процесс, $M\xi(t) = 0$ и корреляционная функция (КФ) $\xi(t)$ задана. Тогда, представляя решение (1) в виде $U = U_1 + U_2$, где U_1 — решение задачи с $f(x, t) \equiv 0$, а U_2 соответственно с $f_0(x) \equiv 0$, и, используя разложение решения задачи (1) по соответствующим собственным функциям, для КФ U_2 имеем (2):

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^t \int_0^s G(x, x_1, t - \tau_1) G(y, y_1, s - \tau_2) K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2) f_0(x_1) \overline{f_0(y_1)} dx_1 dy_1 d\tau_1 d\tau_2,$$

где функция Грина $G(x, y, t - \tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{\ell}$, $\omega_n^2 = a \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2$.

В случае, когда температурные неоднородности, описываемые $f(x, t)$, локализованы в пространстве, то есть $f_0(x) = f_0 \cdot \delta(x - x_0)$, $0 \leq x_0 \leq \ell$, для КФ U_2 получаем представление:

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = f_0^2 \int_0^t \int_0^s G(x, x_0, t - \tau_1) G(y, x_0, s - \tau_2) K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3)$$

Отметим, что температурные флуктуации большей частью несут статистически нестационарный характер, поэтому для $K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2)$ можно использовать те представления, которые получены в [2]. В частности, в случае когда временной дискретный спектр случайного возмущения расположен в верхней комплексной полуплоскости, что соответствует асимптотическому затуханию случайных возмущений, выражение для КФ (3) принимает вид:

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = f_0 \int_0^\infty \Phi(x, t, \tau) \overline{\Phi(y, s, \tau)} d\tau, \quad (4)$$

где $\Phi(x, t, \tau) = \int_0^t G(x, x_0, t - \tau_1) \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1$, а $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \Lambda_k(t)$,

$$\Lambda_k(t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \quad \text{в случае, когда } \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j.$$

Представление (4) является исходным для конкретных расчетов. В случае, когда все λ_j различны, то для $K_{U_2}(x, y, t, s)$ имеем

$$\begin{aligned} K_{U_2}(x, y, t, s) &= f_0 \frac{4}{\ell} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{i\lambda_j t} - e^{-\omega_n^2 t}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^\infty \sin \frac{n\pi y}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{-i\bar{\lambda}_j s} - e^{-\omega_n^2 s}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \right] \cdot e^{i\lambda_j \tau - i\bar{\lambda}_j \tau} d\tau = \\ &= f_0 \frac{4}{\ell} \cdot \sum_{n=1}^\infty \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{i\lambda_j t} - e^{-\omega_n^2 t}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \times \\ &\times \sum_{n=1}^\infty \sin \frac{n\pi y}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{-i\bar{\lambda}_j s} - e^{-\omega_n^2 s}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \cdot \frac{1}{\beta_j^2}. \end{aligned}$$

Если $n=1, N=1, j=1$, то

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot (e^{i\lambda_1 t} - e^{-\omega_1^2 t}) \cdot \frac{e^{-i\bar{\lambda}_1 s} - e^{-\omega_1^2 s}}{\beta_1^2}.$$

Отсюда могут быть получены представления для КФ вида: $K_{U_2}(x, y, t, t)$, $K_{U_2}(x, x, t, s)$ и $K_{U_2}(x, x, t, t)$. Выпишем $\text{Re } K_{U_2}$ в каждом случае:

$$\text{Re } K_{U_2}(x, y, t, t) =$$

$$= \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Re } K_{U_2}(x, x, t, s) &= \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{1}{\beta_1^2} \left(e^{-\beta_1^2 \frac{t+s}{2}} \cos \alpha_1(t-s) - \right. \\ &\left. - e^{-\beta_1^2 \frac{t}{2} - \omega_1^2 s} \cos \alpha_1 t - e^{-\beta_1^2 \frac{s}{2} - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 s + e^{-\omega_1^2(t+s)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Re } K_{U_2}(x, x, t, t) = \frac{4f_0 d_1^2 c_{11}^2}{\ell^2 |\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}.$$

Рассмотрим кратко «сильную» нестационарность у $\xi(t)$, когда спектр состоит из одной точки $\lambda = 0$, однако бесконечной кратности.

В этом случае $\varphi(t) = \int_0^p q_0(v) J_0(\sqrt{2tv}) dv$, где $J_0(x)$ – соответствующая функция Бесселя [3]. Если $q_0(v) = q_0 \delta(v - v_0)$, $0 \leq v_0 \leq p$, $\varphi(t)$ принимает вид $\varphi(t) = \int_0^p q_0(v) J_0(\sqrt{2tv}) dv$, и для $\Phi(x, t, \tau)$ из (4) имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \tau) &= \int_0^t G(x, x_0, t - \tau_1) \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1 = \\ &= \frac{2q_0}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau_1)} J_0(\sqrt{2v_0(\tau_1 + \tau)}) d\tau_1. \end{aligned}$$

Дальнейшее изучение этого случая связано с численным интегрированием интеграла $\int_0^t e^{-\omega_n^2 \tau_1} J_0(\sqrt{2v_0(\tau_1 + \tau)}) d\tau_1$.

Аналогично можно исследовать случайный тепловой режим прямоугольной пластины и области в виде круга (меняется выражение для функции Грина).

Рассмотрим теперь кратко случай, когда свойства среды меняются случайным образом с течением времени. При этом флуктуации коэффициента температуропроводности представляют собой случайный процесс. В результате приходим к следующей начальной краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \xi(t) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \\ \begin{cases} U|_{t=0} = U_0(x), \\ U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что если краевые условия неоднородные, то заменой $U(x, t)$ они сводятся к однородным.

Пусть $\xi(t)$ – случайный марковский дихотомический процесс, принимающий два значения $\xi(t) = \begin{cases} k_1, \\ k_2. \end{cases}$ Введем марковский дихотомический процесс

$\alpha(t) = \begin{cases} 1, \\ -1. \end{cases}$ Следовательно, $\xi(t) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \alpha(t)$. Тогда (5) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \alpha(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Отметим, что задача нахождения дисперсии решения уравнения (6) сводится к аналогичной задаче, если уравнение (6) переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \xi(t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = V(x,t), \end{cases} \quad (7)$$

и, используя тот факт, что $V(x,t)$ удовлетворяет снова уравнению (6), можно получить для $V_1 = U^2$, $V_2 = UV$, $V_3 = V^2$ систему

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = 2\xi(t) \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - V_3 \right), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} = \xi(t) \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} = 2V_2. \end{cases}$$

4. Вычислительный эксперимент

На рис.1 дан график функции $\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}$ при условиях $\{\ell = 6 \div 15, \beta_1 = 1, \alpha_1 = 1, a = 0,41 \cdot 10^{-6}, x = x_0 = 5\}$ [5].

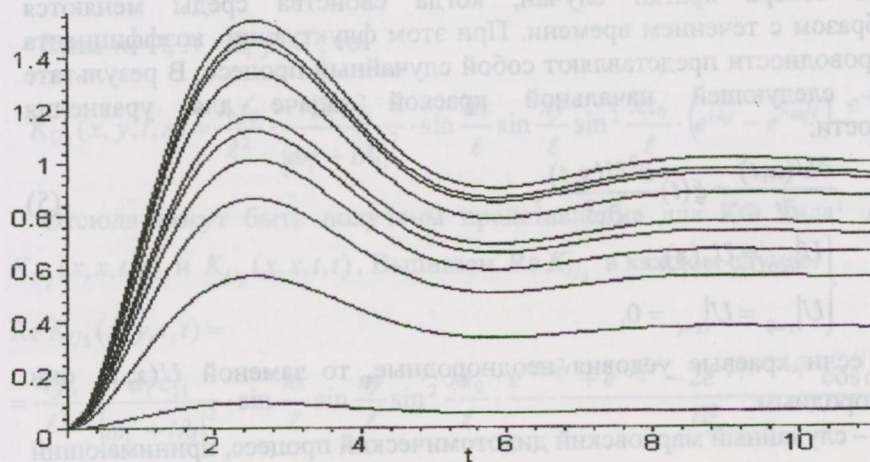


Рис. 1

На рис.2 дан график функции $\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}$, при условиях $\{\ell = 3 \div 10, \beta_1 = 1, \alpha_1 = 1, a = 97,5 \cdot 10^{-6}, x = x_0 = 2\}$ [5].

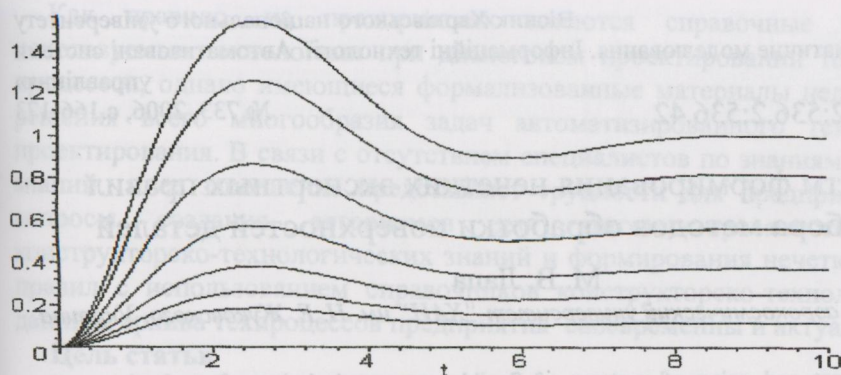


Рис. 2

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Исследованы тепловые режимы с целью определения общих закономерностей управления пространственно-временным изменением температурного поля в сложной системе при учете влияния различных конструктивных и физических параметров.

Получено представление для корреляционной функции решения нестационарных уравнения теплопроводности для стержня конечной длины, находящегося под воздействием внешних статистически нестационарных источников.

Аналогичное представление для корреляционной функции можно получить для элементов радиоаппаратуры, имеющей форму прямоугольника или шайбы, и используя спектральные разложения нестационарных случайных процессов, получить спектральное представление решения, соответствующее начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности.

Анализ тепловых режимов различных радиоэлектронных аппаратов будет использован в процессе проектирования для выбора оптимальной системы их охлаждения и размещения определенным образом отдельных частей аппарата относительно друг друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинский В. Д. Испытания аппаратуры и средств измерений на воздействие внешних факторов: Справочник / В. Д. Малинский, В. Х. Бергларян, Л. Г. Дубицкий // Под ред. В. Д. Малинского – М.: Машиностроение, 1993. – 576 с.
2. Петрова А. Ю. Корреляционные функции и квазидетерминированные сигналы / А. Ю. Петрова, В. А. Фадеев, Н. В. Черемская // Вестник ХНУ. – Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – № 703, 2005. – С. 172–177.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовом пространстве. – Харьков, 1971. – 160 с.
4. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. Простые средства анализа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 160 с.
5. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи / Пер с англ. Н. А. Анфимова. – М.: Мир, 1983. – 512 с.

Алгоритм формирования нечетких экспертных правил для выбора методов обработки поверхностей деталей

М. В. Лапа

Национальный аэрокосмический университет "ХАИ" им. Н. Е. Жуковского, Украина

Development and using of systems of flexible automated design of production processes with elements of an artificial intellect assumes creation of technological base of knowledge of the enterprise with use of fuzzy expert rules. In article the algorithm is considered, allowing forming fuzzy expert rules for a choice of surfaces processing methods with use of reference database of the enterprise.

Разработка и использование систем гибкого автоматизированного проектирования технологических процессов с элементами искусственного интеллекта предполагает создание конструкторско-технологической базы знаний предприятия с использованием нечетких экспертных правил. В предыдущих работах описан метод гибкого проектирования технологических процессов (ТП) изготовления деталей приборов, позволяющий производить многовариантное проектирование ТП с учетом особенностей мелкосерийного производства [1,2,3,4], способы представления конструкторско-технологических знаний с использованием нечетких множеств [4,5], методы оптимизации и принятия решений при гибком проектировании технологических процессов [6]. База знаний предприятия представляет собой набор модулей знаний, который пополняется в процессе эксплуатации системы. Одной из проблем является сложность использования баз конструкторско-технологических данных, хранилищ данных, накопленных на предприятии в результате использования различных диалоговых подсистем проектирования ТП при создании базы знаний. Решение этой проблемы возможно следующим образом: 1- использование различных справочников, хранящихся в базах данных предприятия, 2- использование архива техпроцессов для извлечения знаний. В [7] рассмотрен алгоритм формирования нечетких экспертных правил для выбора методов обработки поверхностей деталей с использованием имеющейся на предприятии справочной базы данных. Предложенный в [7] метод формирования исходного множества технологических альтернатив (ИМТА) для выбора методов обработки поверхностей позволяет использовать имеющуюся на предприятии справочную базу данных для генерирования нечетких экспертных правил базы знаний предприятия. Недостатком известных в data-mining методов является то, что при их использовании генерируется большое количество правил, предоставляемых эксперту в проблемной области для оценки их «интересности» с дальнейшим использованием алгоритмов фильтрации [8]. Сложность представляет также формулировка посылок правил ЕСЛИ-ТО с привлечением экспертов проблемной области.

Как правило, на предприятиях имеются справочные базы данных, используемые технологами при диалоговом проектировании технологических процессов, однако имеющиеся формализованные материалы недостаточны для решения всего многообразия задач автоматизированного технологического проектирования. В связи с отсутствием специалистов по знаниям создание базы знаний и ее заполнение представляет трудности для предприятия. Поэтому вопросы создания алгоритмов для автоматизированного извлечения конструкторско-технологических знаний и формирования нечетких экспертных правил с использованием справочников конструкторско-технологических баз данных, архива техпроцессов предприятия своевременны и актуальны.

Цель статьи

В данной статье рассматривается алгоритм Reference-Knowledge_module_discovery (RKMD), разработанный автором, позволяющий автоматизировать процесс генерации нечетких экспертных правил для выбора методов обработки поверхностей деталей базы конструкторско-технологических знаний с использованием справочной базы конструкторско-технологических данных предприятия.

Как было сказано выше, недостатком известных в data-mining методов является то, что при их использовании генерируется большое количество правил, предоставляемых эксперту в проблемной области для оценки их «интересности» с дальнейшим использованием алгоритмов фильтрации. Такие алгоритмы генерируют порядка 5 000 -250 000 правил при различных заданных пороговых значениях степени доверия при использовании базы данных, состоящей из 300-400 тысяч записей, 30-40 атрибутов. Большая часть из этих правил признается «неинтересными» экспертом и не используется. Сложность представляет также формулировка посылок правил ЕСЛИ-ТО с привлечением экспертов проблемной области. Такой подход требует значительных финансовых затрат (оплата труда высокооплачиваемых экспертов проблемной области). Существует два подхода при построении алгоритмов, генерирующих правила – использование логических и вероятностных методов [9]. Разработанный автором алгоритм Reference-Knowledge_module_discovery построен на основе логических методов. Преимуществами его является:

1. Возможность генерации предпосылок нечетких экспертных правил для модуля выбора методов обработки поверхностей без участия эксперта благодаря использованию справочной информации базы конструкторско-технологических данных.
2. Алгоритм Reference-Knowledge_module_discovery генерирует минимальное множество правил, предоставляемых эксперту в проблемной области (эксперту-технологу) благодаря использованию справочников базы данных предприятия.

Данный алгоритм позволяет генерировать минимальное множество нечетких экспертных правил (для выбора методов обработки поверхности) структуры, представленной в [7]. Предпосылка правила содержит два атомарных условия вида $value1 \leq attribute \leq value2$ (в данном случае для атрибутов - качества ИТ и шероховатости R_a поверхности). Однако возможна его доработка и использование для других конструкций правил.

Определение. Пусть U – конечное множество экспертных правил конструкторско-технологической базы знаний. Под модулем конструкторско-технологических знаний будем понимать подмножество $M \subset U$ экспертных правил базы знаний, используемых на определенном этапе проектирования технологического процесса.

Алгоритм `Reference-Knowledge_module_discovery` использует метод формирования нечеткого ИМТА, подробно описанный в [7]. На рис. 1 представлена схема алгоритма.

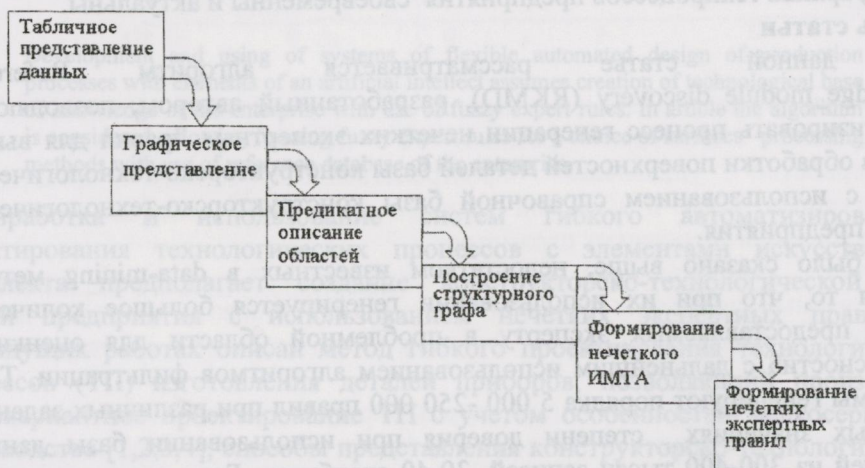


Рис. 1. Формирование нечётких экспертных правил с использованием справочной базы предприятия

На рис. 2 представлен фрагмент программной реализации алгоритма `Reference-Knowledge_module_discovery`.

```

111 P2BM2.PAS 1-111
program Reference_Knowledge_module_discovery;
uses crt, graph;
type method=record
  number: integer;
  name: string;
  IT1, IT2: byte;
  Ra1, Ra2: real;
  bkcolor, sh_color, sh_tip: integer;
end;

obl=record
  name: string[31];
  dvo14n: string[9];
  rang: byte;
end;
mas20_20b=array [1..20, 1..20] of byte;
mas40r=array [1..40] of real;
mas20r=array [1..20] of real;
mas_rapis=array [1..20] of method;

var TQ:mas_rapis;
1:1
  
```

Рис. 2. Фрагмент программной реализации алгоритма `Reference_Knowledge_mobule_discovery`

Исходными данными для работы программы является справочная таблица о применяемых методах обработки для достижения определенных значений

калитета и шероховатости наружных цилиндрических поверхностей, представленная в таблице 1.

Таблица 1. Точность и качество поверхности при обработке наружных цилиндрических поверхностей.

№	Обработка	IT	IT	Ra	Ra
R ₁	обтачивание черновое	14	12	50	6,3
R ₂	обтачивание полуст., однократ.	13	11	25	1,6
R ₃	обтачивание чистовое	10	8	6,3	0,4
R ₄	обтачивание тонкое	9	6	1,6	0,2
R ₅	шлифование предварительное	9	8	6,3	0,4
R ₆	шлифование чистовое	7	6	3,2	0,2
R ₇	шлифование тонкое	6	5	1,6	0,1
R ₈	притирка, суперфиниширование	5	4	0,8	0,1
R ₉	алмазное выглаживание	10	5	0,8	0,05

Каждый блок алгоритма, представленного на рис.1, реализуется отдельной процедурой. Проблема выбора альтернативных методов обработки сводится к задаче состояний и поиску на графе (рис.3). Вершины графа R₁ - R₉ соответствуют методам обработки из таблицы 1.

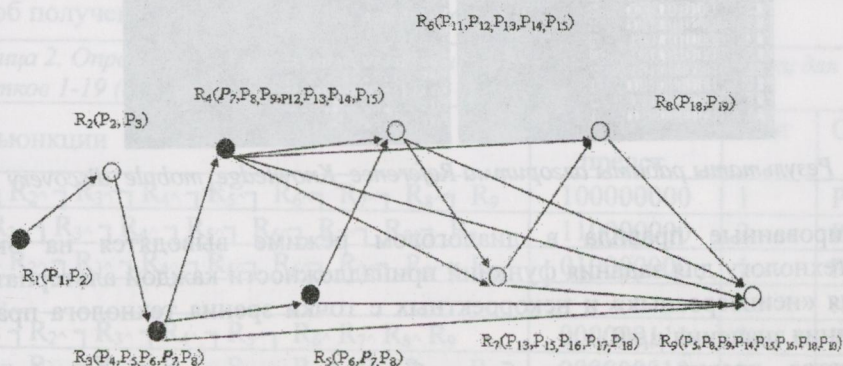


Рис.3. Структурный граф методов обработки наружных цилиндрических поверхностей

Для каждой пары значений исходных атрибутов (калитета и шероховатости) для заготовки (NZ) и детали (ND) производится поиск всех альтернативных методов обработки поверхности. Например, если значения калитета IT и шероховатости R_a заготовки (13, 6.3), что соответствует области P₁, требуемые значения IT, R_a детали (9, 1.6) – область P₇, то существует три пути на графе G(R, E) (рис.3):

$$\Omega_1: R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$$

$$\Omega_2: R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_5$$

$$\Omega_3: R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4$$

Им соответствует три альтернативных метода обработки такой поверхности. Исходное множество технологических альтернатив Ω состоит из трех элементов. Генерируется нечеткое экспертное правило вида

ЕСЛИ поверхность = (основная, наружная, круглая в поперечном сечении, цилиндрическая)

И заготовка $(IT, R_a) \in P_1$

И требуемые $(IT, R_a) \in P_7$

ТО методы обработки = $\{(\Omega_1, \mu_1), (\Omega_2, \mu_2), \dots, (\Omega_n, \mu_n)\}$,

содержащее некоторое количество альтернативных методов обработки поверхности (количество методов обработки Ω_i вычисляется путем перемножения матрицы смежности графа и хранится в переменной PUT). Промежуточные результаты работы алгоритма представлены на рис.4.

Множество альтернативных методов обработки:			Построение структурного графа методов обработки:	
P1	10000000	1	R1(P1, P2)	
P2	11000000	2	R2(P2, P3)	
P3	01000000	1	R3(P4, P5, P6, P7, P8)	
P4	00100000	1	R4(P7, P8, P9, P12, P13, P14, P15)	
P5	00100000	1	R5(P6, P7, P8)	
P6	00100001	2	R6(P11, P12, P13, P14, P15)	
P7	00101000	2	R7(P13, P15, P16, P17, P18)	
P8	00111000	3	R8(P18, P19)	
P9	00111001	4	R9(P5, P6, P7, P10, P14, P15, P16, P18)	
P10	00010000	2		
P11	00000001	1	Подобласть заготовки:	1
P12	00001000	2	Подобласть детали:	6
P13	00001100	3		
P14	00001100	2		
P15	00001101	4	Количество путей:	1
P16	00000001	1	Путь 1: 2, 3.	
P17	00000010	1	Количество путей:	2
P18	00000011	3	Путь 1: 2, 3, 4, 5.	
P19	00000010	1	Путь 1: 2, 3, 5.	

Рис.4. Результаты работы алгоритма *Reference_Knowledge_mobile_discovery*

Сгенерированные правила в диалоговом режиме выводятся на экран эксперту-технологу для задания функций принадлежности каждой альтернативе и удаления «неинтересных» и некорректных с точки зрения технолога правил путем задания значения $\mu_i=0$.

Количество правил, которые были бы сгенерированы путем полного перебора вариантов, вычисляется как $2^{nr}=2^9=512$, (nr – количество методов обработки в таблице 1), причем большинство из них окажется отвергнутым при дальнейшем анализе экспертом-технологом. Данный алгоритм позволяет генерировать минимальное количество правил N , которое вычисляется по формуле 1:

$$N = \sum_{i=1}^{mz} (np - i) \quad (1)$$

где $np=19$ – количество подобластей P_i (рис.5), mz – количество подобластей P_i значений IT, R_a для заготовки детали (указывает эксперт-технолог). Рис. 5 иллюстрирует результаты графического представления справочных данных о методах обработки наружных цилиндрических поверхностей с учетом точности и качества поверхности, хранящиеся в базе данных предприятия (этап 2 алгоритма, представленного на рис.1).

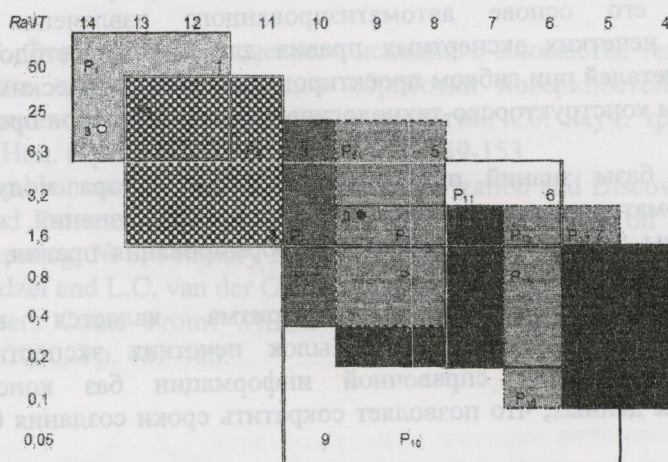


Рис. 5. Графическое представление данных о методах обработки для наружных цилиндрических поверхностей с учетом точности и качества поверхности.

В таблице 2 приведен фрагмент предикатного описания областей пересечения P_i ($i=1,19$) – этап 3 алгоритма, представленного на рис.1. Подробно способ получения такого представления описан в [7].

Таблица 2. Определение количества альтернативных методов обработки для участков 1-19 (фрагмент)

Конъюнкции	Двоичное предст.	Ранг	Область
$R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5 \wedge R_6 \wedge R_7 \wedge R_8 \wedge R_9$	100000000	1	P_1 3 [○]
$R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5 \wedge R_6 \wedge R_7 \wedge R_8 \wedge R_9$	110000000	2	P_2
$\neg R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5 \wedge R_6 \wedge R_7 \wedge R_8 \wedge R_9$	010000000	1	P_3
.....		...	...
$\neg R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg R_3 \wedge \neg R_4 \wedge \neg R_5 \wedge R_6 \wedge R_7 \wedge R_8 \wedge R_9$	000000111	3	P_{18}
$\neg R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg R_3 \wedge \neg R_4 \wedge \neg R_5 \wedge R_6 \wedge R_7 \wedge R_8 \wedge R_9$	000000010	1	P_{19}

Таким образом, программа сама генерирует конечное множество предпосылок ЕСЛИ без участия эксперта путем использования табличных справочных данных базы конструкторско-технологических данных (табл.1), причем их количество минимально, формирует нечеткие экспертные правила, предоставляет возможность их анализа и задания значений функции принадлежности экспертом-технологом в диалоговом режиме. Такой подход позволяет сократить затраты на создание базы знаний предприятия.

Данный алгоритм был апробирован на примере справочной информации о методах обработки наружных цилиндрических поверхностей. Программа сгенерировала 51 нечеткое экспертное правило для эксперта-технолога. В дальнейшем с помощью данного алгоритма можно сгенерировать модули знаний для выбора методов обработки других типов поверхностей из классификатора поверхностей предприятия.

Таким образом, научную новизну представляет разработанный метод и алгоритм на его основе автоматизированного извлечения знаний и формирования нечетких экспертных правил для выбора методов обработки поверхностей деталей при гибком проектировании технологических процессов с использованием конструкторско-технологических справочников предприятия.

Выводы:

Построение базы знаний предприятия в виде набора модулей знаний позволяет автоматизировать процесс заполнения базы знаний, использовать справочные базы данных предприятия для формирования правил, наращивать базу знаний в процессе ее эксплуатации.

Преимуществом предложенного алгоритма является возможность автоматизировать генерацию предпосылок нечетких экспертных правил благодаря использованию справочной информации баз конструкторско-технологических данных, что позволяет сократить сроки создания базы знаний предприятия.

Разработанный алгоритм *Reference-Knowledge_module_discovery* генерирует минимальное множество правил, предоставляемых эксперту в проблемной области (эксперту-технологу) благодаря использованию справочников базы данных предприятия, что позволяет сократить затраты на создание базы знаний.

В дальнейшем будут рассмотрены алгоритмы для извлечения конструкторско-технологических знаний с использованием архива техпроцессов предприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапа М.В. Интеллектуальный метод гибкого проектирования технологических процессов деталей приборов // Дис.канд.т.н. - Київ: НТУУ"КП", 2004.-198с.
2. Глоба Л.С., Лапа М.В., Попова І. Гнучке проектування технологічних процесів виготовлення деталей приладів// Наукові вісті НТУУ «КП», 2005. – № 6. С.93-100.
3. Лапа М.В., Глоба Л.С. Автоматизация гибкого проектирования технологических процессов изготовления деталей приборов на основе нечеткой логики // Тези доповідей наук.- техн. конф. „Приладобудування 2006: стан і перспективи”.- Київ: НТУУ"КП", 2006.-№32-С.95-96.
4. Лапа М.В. Использование аппарата нечеткой логики при проектировании объекта "технологический процесс" // Открытые информационные и компьютерные технологии: Сб. науч. тр. Вып. №11. - Харьков: Нац. аэрокосмич. ун-т, 2002. - С.49-53.
5. Лапа М.В. Методы формального представления технологических знаний с использованием нечетких множеств //Сборник научных трудов СНИЯЭиП. - Севастополь: СНИЯЭиП, 2003. - №7. – С.231-236.
6. Лапа М.В. Оптимизация и принятие решений при гибком проектировании технологических процессов. // 36. науч. пр. наук.-техн. конф.

- „Приладобудування 2004: стан і перспективи”.- Київ: НТУУ”КПІ”, 2004.- С.76.
7. Лапа М.В. Формирование нечеткого исходного множества технологических альтернатив для выбора методов обработки поверхностей // Открытые информационные и компьютерные технологии: Сб. науч. тр. Вып. №31. - Харьков: Нац. аэрокосмич. ун-т, 2006. - С.149-153.
 8. B. Padmanabhan and A. Tuzhilin. On Characterization and Discovery of Minimal Unexpected Patterns in Rule Discovery//IEEE Transactions on knowledge and data engineering, № 2, February 2006.-Pp. 202-216.
 9. M.J. Druzdzel and L.C. van der Gaag. Building Probabilistic Networks: Where Do the Numbers Come From? //IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., № 4, July/Aug. 2000.-Pp. 481-486.