$A=U\Lambda U^*$

С.Н. Зиненко

Линейная алгебра

Матрицы и определители

(сборник задач)

2014

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО, ПОДПРОСТРАНСТВО. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

№ 1.1. Выяснить, образуют ли линейное пространство множества элементов с “естественными” операциями сложения и умножения на вещественное число. Найти базис и размерность. Установить изоморфизм между пространствами $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{P}_n$

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\}$$ - множество столбцов “высоты” n из вещественных чисел $x_k \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \boldsymbol{p} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\}$$ - множество полиномов степени $< n$ с коэффициентами $a_k \in \mathbb{R}$

№ 1.2. Проверить, образуют ли базис системы векторов.
Найти координаты произвольного вектора в этом базисе.

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} *_{12} \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} *_{13} \\ *_{23} \\ \mathbf{1} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad , \quad \boldsymbol{f}_n = \begin{bmatrix} *_{1n} \\ *_{2n} \\ *_{3n} \\ \cdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_n$$

$$\boldsymbol{f}_0 = 1 = (x - x_0)^0, \quad \boldsymbol{f}_1 = (x - x_0)^1, \quad \boldsymbol{f}_2 = (x - x_0)^2, \quad \ldots \quad , \quad \boldsymbol{f}_{n-1} = (x - x_0)^{n-1} \in \mathbb{P}_n$$

№ 1.3. Выяснить, образуют ли подпространство подмножества векторов.
Найти базис и размерность.

a. плоскость $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$, проходящая (не проходящая) через начало координат

b. $$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\, x_{m+1} = \ldots = x_n = 0 \,) \right\} \subseteq \mathbb{R}_n$$

c. $$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{p} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \;\; (a_m = \ldots = a_{n-1} = 0) \right\}; \quad \mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{p} : \;\; p^{(m)}(x_0) = \ldots = p^{(n-1)}(x_0) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{P}_n$$

---

a. прямая $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{V}$, проходящая (не проходящая) через начало координат

b. $$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ x_{m+1} \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\, x_1 = \ldots = x_m = 0 \,) \right\} \subseteq \mathbb{R}_n$$

c. $$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{p} = \sum_{k=m}^{n-1} a_k x^k \;\; (a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0) \right\}; \quad \mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{p} : \;\; p^{(0)}(x_0) = \ldots = p^{(m-1)}(x_0) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{P}_n$$

№ 1.4. Даны два подпространства $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$. Найти базис и размерность суммы $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$ и пересечения $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathbb{L}_2 = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_5$$

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \boldsymbol{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \right\}, \qquad \mathbb{L}_2 = \left\{ \boldsymbol{q} = b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \right\} \subseteq \mathbb{P}_5$$

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ. РАНГ МАТРИЦЫ

№ 2.1. Является ли система векторов линейно зависимой, и найти эту зависимость

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

№ 2.2. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов

a. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$

b. .$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ -8 \\ -14 \end{bmatrix}$

a. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

№ 2.3. Найти базис и размерность суммы двух подпространств $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$

$$\mathbb{L}_1 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \ \mathbb{L}_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_5$$

$$\mathbb{L}_1 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \ \mathbb{L}_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_5$$

№ 2.4. Найти ранг матрицы. Указать базисные строки и столбцы

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 4 & -4 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

№ 3.1. Найти решение систем с $2^{\underline{\text{мя}}}$ неизвестными и дать геометрическую интерпретацию

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-3y=3 \end{array}\right. \qquad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right. \qquad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=0 \end{array}\right.$$

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x-3y=-2 \\ 2x-5y=-3 \end{array}\right. \qquad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x-3y=-2 \\ -2x+6y=4 \end{array}\right. \qquad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} x-3y=-2 \\ -2x+6y=1 \end{array}\right.$$

№ 3.2. Найти решение систем с $3^{\underline{\text{мя}}}$ неизвестными и дать геометрическую интерпретацию

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+4z=4 \\ -2x+y-7z=-11 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+4z=4 \\ x-y+z=2 \end{array}\right. \quad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} x-2y+3z=2 \\ 2x-4y+6z=4 \\ -3x+6y-9z=-6 \end{array}\right. \quad \textbf{d.}\left[\begin{array}{l} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+4z=4 \\ x-y+z=3 \end{array}\right.$$

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ -2x-5y=-11 \\ 2x+8y-5z=4 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ -2x-5y=-11 \\ x+2y+z=7 \end{array}\right. \quad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ -2x-6y+2z=-8 \\ 3x+9y-3z=12 \end{array}\right. \quad \textbf{d.}\left[\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ -2x-5y=-11 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

№ 3.3. Найти
- общее решение $\boldsymbol{x}_{oo}$ однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными
- ранг $\operatorname{rang}\boldsymbol{A}$ матрицы системы
- базис и размерность подпространства решений $\mathbb{L}_0$
- проверить справедливость равенства $\dim\mathbb{L}_0 = n - \operatorname{rang}\boldsymbol{A}$

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1+2x_2+4x_3-5x_4=0 \\ -2x_1+4x_3-2x_4=0 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ -3x_1-2x_2-2x_3+6x_4=0 \\ -2x_1+2x_2-8x_3-6x_4-10x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-9x_4-3x_5=0 \end{array}\right.$$

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x_1-3x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+7x_3+8x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} x_1-2x_2+3x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 2x_1-3x_2+6x_3+4x_4+10x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \end{array}\right. \quad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} 2x_1-x_2-2x_3+2x_4-3x_5=0 \\ x_1-2x_2-4x_3+4x_4-3x_5=0 \\ -3x_1-3x_2-6x_3+6x_4=0 \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4-2x_5=0 \end{array}\right.$$

№ 3.4. Найти
- общее решение $\boldsymbol{x}_{он}$ неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными
- ранги $\operatorname{rang}\boldsymbol{A}$ и $\operatorname{rang}\bar{\boldsymbol{A}}$ матрицы и расширенной матрицы системы
- базис и размерность подпространства решений $\mathbb{L}_0$ соответствующей однородной системы
- общее решение $\boldsymbol{x}_{oo}$ соответствующей однородной системы линейных уравнений
- частное решение $\boldsymbol{x}_{чн}$ данной неоднородной системы линейных уравнений

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x_1-2x_2-4x_3+4x_4=3 \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-x_2-2x_3+2x_4=3 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} -x_1+x_2-3x_3-4x_4+4x_5=2 \\ -3x_1-2x_2+x_3+3x_4+2x_5=6 \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=-2 \end{array}\right. \quad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} 3x_1+7x_2+16x_3-9x_4=-6 \\ -2x_1-2x_2-8x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+x_2+7x_3+5x_4=7 \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4=-1 \\ -x_1+2x_2-x_3-10x_4=-11 \end{array}\right.$$

$$\textbf{a.}\left[\begin{array}{l} x_1-x_2+4x_3-4x_4=2 \\ 2x_1-x_2+6x_3-7x_4=4 \\ -x_1-2x_2+2x_3+x_4=-2 \end{array}\right. \quad \textbf{b.}\left[\begin{array}{l} -2x_1+3x_2+7x_3+3x_4-13x_5=-1 \\ x_1+2x_2+9x_4-4x_5=-3 \\ -x_1-x_2+x_3-6x_4+x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3+15x_4=-5 \end{array}\right. \quad \textbf{c.}\left[\begin{array}{l} x_1-3x_2+3x_3+8x_4=7 \\ x_1-2x_2+6x_3+9x_4=1 \\ -x_1+2x_2-5x_3-8x_4=-2 \\ 2x_1+2x_2+x_3-5x_4=-5 \end{array}\right.$$

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ

№ 4.1. Является ли система векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ линейно зависимой, и найти все эти зависимости (сравнить с **№ 2.1.**)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

№ 4.2. Выяснить, принадлежит ли вектор $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ линейной оболочке векторов, и найти все разложения вектора $\boldsymbol{b}$ по системе $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

№ 4.3. Показать, что система векторов $\{\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k, \dots, \boldsymbol{f}_n\}$ образует базис и найти разложение вектора $\boldsymbol{b}$ по этому базису

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

№ 4.4. Найти базис и размерность пересечения двух подпространств $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ Проверить справедливость формулы Грассмана (сравнить с **№ 2.3.**)

$$\mathbb{L}_1 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \ \mathbb{L}_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_5$$

$$\mathbb{L}_1 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \ \mathbb{L}_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_5$$

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

№ 5.1. Найти определитель матрицы, раскрывая по элементам строки (столбца)

a. $\begin{vmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ ***b.*** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ ***c.*** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ***d.*** $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}$, $\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = \quad cr\cos\theta \end{cases}$

---

a. $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{vmatrix}$ ***b.*** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ ***c.*** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ***d.*** $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}$, $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = \quad z \end{cases}$

№ 5.2. Найти определитель матрицы, применяя метод Гаусса

a. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & -11 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ***b.*** $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$ ***c.*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 9 & -11 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

---

a. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -8 & -13 \end{vmatrix}$ ***b.*** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -14 & -12 \\ 1 & -2 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

№ 5.3. Показать, что система векторов $\{\, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k, \ldots, \boldsymbol{f}_n \,\}$ образует базис и найти разложение вектора $\boldsymbol{b}$ по этому базису (сравнить с **№ 4.3.**)

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

№ 5.4. Найти ранг матрицы и указать базисный минор (сравнить с **№ 2.4.**)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 4 & -4 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$