ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t)$ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ $t = \varphi(x)$

Л. П. Татарченко

(Харьков)

В настоящей работе рассмотрена следующая задача: указать условия, которые нужно наложить на начальные данные, заданные на произвольной кривой, для существования решения задачи Коши волнового уравнения. Подобные задачи ставились и раньше. Так, Пикар [1] и Гурса [2] рассмотрели несколько типов кривых, указав, как нужно задавать вдоль них начальные данные, чтобы решение задачи Коши существовало. Мы укажем условия, при которых существует решение задачи Коши, когда кривая, несущая начальные данные, произвольна.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -f(x, t) \tag{1}$$

в области $t \geqslant \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, *с начальными условиями, заданными на кривой* $t = \varphi(x)$:

$$U(x, t)\Big|_{t=\varphi(x)} = a(x); \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=\varphi(x)} = b(x). \tag{2}$$

Везде в дальнейшем функция $\varphi(x) \geqslant 0$ предполагается однозначной и дифференцируемой необходимое число раз. Будем предполагать, что любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую $t = \varphi(x)$ в конечном числе точек.

Если кривая $t = \varphi(x)$ пространственно ориентированная ($|\varphi'(x)| < 1$), то задача Коши имеет, как известно, единственное решение при любых достаточно гладких начальных данных.

При исследовании случая, когда начальные данные заданы на произвольной кривой, мы используем некоторые результаты, полученные недавно А. Я. Повзнером [3].

Пусть при $t \geqslant \varphi(x)$ функция $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению (I) и обращается в нуль вне некоторой конечной области (как мы увидим в дальнейшем, от последнего ограничения можно легко освободиться). Рассмотрим преобразование Лапласа функции $U(x, t)$ по переменной t:

$$\widetilde{U}(x, \lambda) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\infty} e^{i\lambda t}\, U(x, t)\, dt, \tag{3}$$

где $Im\lambda > 0$ для обеспечения сходимости интеграла. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $\widetilde{U}(x, \lambda)$.

Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{d^2\widetilde{U}}{dx^2}+\lambda^2\widetilde{U}=-e^{i\lambda\varphi(x)}\left\{\frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)\cdot U(x,\ \varphi(x))\right]+\varphi'(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{t=\varphi(x)}\right\}-$$
$$-i\lambda e^{i\lambda\varphi(x)}[\varphi'(x)]^2U(x,\ \varphi(x))+\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}e^{i\lambda t}\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\,dt+\lambda^2\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}e^{i\lambda t}U(x,\ t)\,dt.$$

Проинтегрировав дважды по частям $\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}e^{i\lambda t}U(x,t)\,dt$ и использовав уравнение (1), приведем $\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial x^2}+\lambda^2\widetilde{U}$ к виду

$$\frac{\partial^2\widetilde{U}}{dx^2}+\lambda^2\widetilde{U}=-e^{i\lambda\varphi(x)}\alpha(x)-i\lambda e^{i\lambda\varphi(x)}\beta(x)-\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}e^{i\lambda t}f(x,\ t)\,dt, \tag{4}$$

где введены такие обозначения:

$$\begin{cases}\alpha(x)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)U(x,\ \varphi(x)\right]+\varphi'(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{t=\varphi(x)}+\frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=\varphi(x)}\\ \beta(x)=\{[\varphi'(x)]^2-1\}U(x,\ \varphi(x)).\end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, преобразование Лапласа решения уравнения (I) удовлетворяет уравнению (4). Из формул (5) следует, что если вдоль кривой $t=\varphi(x)$ заданы начальные данные в виде

$$u(x,\ t)\bigg|_{t=\varphi(x)}=a(x);\ \frac{\partial u(x.\ t)}{\partial t}\bigg|_{t=\varphi(x)}=b(x),$$

то по ним функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определяются единственным образом. Наоборот, если решение задачи существует при начальных данных $a(x)$ и $b(x)$, то уравнения (5) могут быть разрешены относительно $U\Big|_{t=\varphi(x)}$ и $\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=\varphi(x)}$. Поэтому функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно считать начальными данными.

Функцией Грина для уравнения

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\lambda^2R=0, \tag{6}$$

заданного на всей оси, является функция

$$R(x,\ y;\ \lambda)=\frac{1}{2i\lambda}e^{i\lambda|x-y|}. \tag{7}$$

Следовательно, решение уравнения (4) с помощью функции Грина $R(x,y;\lambda)$ можно представить в виде

$$\widetilde{U}(x,\lambda)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x,\ y;\ \lambda)\left\{e^{i\lambda\varphi(y)}\alpha(y)+i\lambda e^{i\lambda\varphi(y)}\beta(y)+\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty}e^{i\lambda t}f(y,t)\,dt\right\}dy. \tag{8}$$

Приведем теперь правую часть этой формулы к более удобному для нас виду. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x,y;\lambda)e^{i\lambda\varphi(y)}\alpha(y)\,dy=\frac{1}{2i\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(|x-y|+\varphi(y))}\alpha(y)\,dy=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(y)\left[\int\limits_{|x-y|+\varphi(y)}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dt\right]dy=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\right.$$
$$\left.-\varphi(y))e^{i\lambda t}dt\right]\alpha(y)\,dy=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\lambda t}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\,\alpha(y)\,dy\right]dt,$$

где функция $\sigma(t)$ определена следующим образом:

$$\sigma(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0.\end{cases}$$

Преобразовав аналогичным образом второе и третье слагаемые из (8), получим для $\widetilde{U}(x,\lambda)$ представление

$$\widetilde{U}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\lambda t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\alpha(y)dy-\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\beta(y)dy+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(z-|x-y|-\varphi(y))f(y,t-|x-y|)\,dy\,dz\right\}dt. \tag{9}$$

Сравнивая (9) и (3), получим

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\,\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\right.$$
$$\left.-\varphi(y))\,\beta(y)\,dy+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(z-|x-y|-\varphi(y))\,f(y,t-|x-y|)\,dy\,dz\right\} \tag{11}$$

для $t\geqslant\varphi(x)$ и

$$0=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\,\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\,\beta(y)dy+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(z-|x-y|-\varphi(y))\,f(y,t-|x-y|)\,dy\,dz\right\} \tag{10}$$

$$\text{для } 0\leqslant t<\varphi(x).$$

Лемма 1. Первые два интеграла в формуле (10) берутся по области, состоящей из тех интервалов оси y, на которые проектируются части кривой $\nu=\varphi(y)$, лежащие ниже обеих характеристик уравнения (I), проведенных через точку (x, t); область интегрирования по y в третьем слагаемом из формулы (10) состоит из тех интервалов оси y, на которые проектируются части кривой $\nu=\varphi(y)$, лежащие ниже обеих характеристик уравнения (I), проведенных через точку (x, z), где $0\leqslant z\leqslant t<\varphi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим первое слагаемое формулы (10).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-|x-y|-\varphi(y))\,\alpha(y)\,dy \quad (0\leqslant t<\varphi(x)). \tag{12}$$

Учитывая, что $\sigma(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$, видим, что область интегрирования в (12) определяется из условия: $|x-y|+\varphi(y)<t$ или $|x-y|<t-\varphi(y)$. Записав это неравенство в виде $-t+\varphi(y)<x-y<t-\varphi(y)$, замечаем, что интегрирование ведется по тем значениям y, для которых выполняются одновременно два неравенства: $x-y<t-\varphi(y)$ и $-t+\varphi(y)<x-y$, или

$$\begin{cases}\varphi(y)<y-x+t\\ \varphi(y)<-y+x+t\end{cases} \tag{13}$$

Так как $\nu=\varphi(y)$ — кривая с начальными данными, $\nu=y-x+t$ и $\nu=-y+x+t$ — характеристики уравнения (1) разных семейств с точкой пересечения $y=x$ и $\nu=t$, то справедливость утверждения леммы для первого слагаемого формулы (10) следует из неравенств (13). Доказательства для остальных слагаемых формулы (10) проводятся точно так же.

Число интервалов интегрирования по y в каждом из слагаемых конечно, так как мы предположили, что кривая $t=\varphi(x)$ пересекается любой характеристикой уравнения в конечном числе точек. Обозначим начала и концы интервалов интегрирования для первых двух слагаемых через $y_{i1}(x, t)$ и $y_{i2}(x, t)$. Они находятся из уравнений

$$\varphi(y)=y-x+t \tag{14}$$
$$\varphi(y)=-y+x+t\,. \tag{15}$$

Аналогичные обозначения для третьего слагаемого будут $z_{i1}(x, z)$ и $z_{i2}(x, z)$. Они находятся из уравнений

$$\varphi(y)=y-x+z; \tag{16}$$
$$\varphi(y)=-y+x+z. \tag{17}$$

Используя доказанную лемму, можно записать формулу (10) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha(y)dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta(y)\,dy\Big\}+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\Big\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big\}\,dz=0, \tag{18}$$

где n — число интервалов интегрирования.

Следствие. В общем случае часть интервалов интегрирования (k — интервалов) получается в результате пересечения характеристики $\nu=y-x+t$ (или $\nu=y-x+z$) с кривой $\nu=\varphi(y)$, а другая часть ($p=n-k$ интервалов) — в результате пересечения характеристики $\nu=-y+x+t$ (или $\nu=-y+x+z$) с кривой $\nu=\varphi(y)$. Так как координаты начала и конца первых k интервалов интегрирования зависят только от $-x+t$ (или от $-x+z$), а координаты начала и конца остальных p интервалов только от $x+t$ (или от $x+z$), то перепишем соотношение (18) в виде

$$\sum_{i=1}^{k}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\beta(y)dy\Big\}+\sum_{i=k+1}^{n}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\alpha(y)\,dy-$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\beta(y)\,dy\Big\}+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{0}^{t}\Big\{\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)}f(y,z-|x-y|)dy\Big\}\,dz+$$
$$+\sum_{i=k+1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\Big\{\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big\}\,dz=0. \tag{19}$$

Отсюда следует, что: первая сумма является функцией только от $-x+t$ и сохраняет свое значение, если точка (x,t) двигается по прямой $\nu=y-x+t$, не пересекая кривую $\nu=\varphi(y)$; вторая сумма является функцией только от $x+t$ и сохраняет свое значение, если точка (x,t) движется по прямой $\nu=-y+x+t$, не пересекая кривую $\nu=\varphi(y)$.

Лемма 2. Функция

$$\chi_1(x,t)=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{0}^{t}\Big\{\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big\}\,dz$$

сохраняет свое значение при движении точки (x,t) вдоль характеристики $\nu = y - x + t$, а функция

$$\chi_2(x,t) = \sum_{i=k+1}^{n} \int_0^t \left\{ \int_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy \right\} dz$$

сохраняет свое значение при движении точки (x,t) вдоль характеристики $\nu = -y + x + t$, если при этих движениях точка (x,t) не пересекает кривую $\nu = \varphi(y)$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение леммы, так как доказательство второго утверждения проводится аналогично.

Рассмотрим один из членов суммы в $\chi_1(x,t)$. Определяя область интегрирования по y, мы брали некоторое фиксированное значение z больше нуля, но меньше t. Фактически же z меняется только в интервале $(h_i(x),t)$, где h_i ордината точки $(x,h_i(x))$, через которую проходит характеристика семейства $\nu = y + c$, касающаяся кривой $\nu = \varphi(y)$ между y_{i1} и y_{i2}. Действительно, если $z < h_i$, то область интегрирования по y в данном члене суммы $\chi_1(x,t)$ исчезает. Вычислим теперь значения $\chi_1(x,t)$ в точках (x_0, t_0) и (x_1, t_1) ($t_0 < \varphi(x_0)$; $t_1 < \varphi(x_1)$; прямая, проходящая через точки (x_0,t_0) и (x_1, t_1), не пересекает кривую $\nu = \varphi(y)$ на интервале (x_0, x_1)), учитывая приведенное выше замечание и связь между координатами рассматриваемых точек: $-x_0 + t_0 = -x_1 + t_1$.

$$\begin{aligned} \chi_1(x_0, t_0) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^0}^{t_0} \left\{ \int_{z_{i1}(-x_0+z)}^{z_{i2}(-x_0+z)} f(y, z - x_0 + y)\,dy \right\} dz \\ \chi_1(x_1, t_1) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^1}^{t_1} \left\{ \int_{z_{i1}(-x_1+z)}^{z_{i2}(-x_1+z)} f(y, z - x_1 + y)\,dy \right\} dz \end{aligned} \tag{20}$$

В силу своего определения h_i^0 и h_i^1 связаны соотношениями $-x_0 + h_i^0 = -x_1 + h_i^1$ $(i = 1,2 \ldots k)$. Знак модуля в соотношениях (20) опущен, так как рассматриваемые значения y меньше как x_0, так и x_1.

Обозначая $\int_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)} f(y, z - x + y)\,dy$ через $\Phi_i(z-x)$, перепишем (20) в виде

$$\begin{aligned} \chi_1(x_0, t_0) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^0}^{t_0} \Phi_i(z - x_0)\,dz \\ \chi_1(x_1, t_1) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^1}^{t_1} \Phi_i(z - x_1)\,dz. \end{aligned} \tag{21}$$

Сделав в первой из формул (21) замену $z - x_0 = \alpha$, а во второй $z - x_1 = \beta$, получим:

$$\begin{aligned} \chi_1(x_0, t_0) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^0 - x_0}^{t_0 - x_0} \Phi_i(\alpha)\,d\alpha \\ \chi_1(x_1, t_1) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{h_i^1 - x_1}^{t_1 - x_1} \Phi_i(\beta)\,d\beta. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как $-x_0 + t_0 = -x_1 + t_1$ и $-x_0 + h_i^0 = -x_1 + h_i^1$ $(i = 1,2 \ldots k,)$ то $\chi_1(x_0, t_0) = \chi_1(x_1, t_1)$ и лемма доказана.

Лемма 3. Формула (10) (или, что то же, формула (19) распадается на n независимых между собой формул вида

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)} f(y,z-|x-y|)\,dy\Biggr\}dz = 0. \quad (i=1,2\ldots n) \tag{10*}$$

Доказательство. Покажем сначала, что формула (19) распадается на две независимые формулы

$$\sum_{i=1}^{k}\Biggl\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl[\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)} f(y,z-|x-y|)\,dy\Biggr]dz\Biggr\} = 0; \tag{23}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n}\Biggl\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)} f(y,z-|x-y|)\,dy\Biggr]dz\Biggr\} = 0. \tag{24}$$

Для доказательства этого факта рассмотрим угол с вершиной в точке $(x,0)$ и сторонами, совпадающими с характеристиками уравнения (1). Раствор угла направлен вниз. Будем двигать вершину угла вверх вдоль прямой $y = x = \mathrm{cons}\,t$ до тех пор, пока одна из сторон не коснется кривой $\nu = \varphi(y)$. Пусть, для определенности, кривой коснулась сторона угла $\nu = -y + x + t$ ((x, t_1) — вершина угла). Будем двигать вершину угла выше до точки (x, t_2), пока и другая сторона не коснется кривой. Для точек (x, t) $(t_1 < t \leqslant t_2)$ формула (19) будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\Biggl\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)} f(y, z-|x-y|)\,dy\Biggr]dz\Biggr\} = 0. \tag{25}$$

При дальнейшем движении вершины угла к точке (x, t) возможны три случая. В первом случае, перемещая вершину угла от точки (x, t_2) вдоль характеристики $\nu = -y + x + t_2$, мы попадем на характеристику $\nu = y - x + t$ (в точке (x_1, t_3)), и двигаясь вдоль нее, достигнем точки (x, t), не пересекая кривую $\nu = \varphi(y)$. Для точек, лежащих на характеристике $\nu = -y + x + t_2$ в окрестности точки (x_1, t_3), соотношение (19) будет записываться так:

$$\sum_{i=1}^{k}\Biggl\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl[\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)} f(y,z-|x-y|)dy\Biggr]dz\Biggr\} + \sum_{i=1}^{m}\Biggl\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\Biggl[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)} f(y,z-|x-y|)\,dy\Biggr]dz\Biggr\} = 0. \tag{26}$$

Но вторая сумма в силу леммы 2 и следствия из леммы 1 совпадает с формулой (25) и равна нулю, значит и первая сумма в формуле (26) равна нулю. При движении вершины угла от точки (x_1,t_3) к точке (x,t) формула (26) перейдет в (19). Первая сумма в формуле (19), совпадая с первой суммой в формуле (26) в силу леммы 2 и следствия из леммы 1, равна нулю. Значит в точке (x,t) формула (19) распадается на две независимых формулы (23) и (24), и первая часть леммы доказана.

Во втором случае, перемещая вершину угла от точки (x,t_2) вдоль характеристики $\nu = -y + x + t_2$, мы попадем или на характеристику $\nu = y - x + t$, но при движении вдоль этой характеристики к точке (x,t) должны будем пересечь кривую $\nu = \varphi(y)$; или на кривую $\nu = \varphi(y)$ в точке $y = x_0$, $\nu = \varphi(x_0)$ и снова при движении вдоль характеристики $\nu = y - x_0 + \varphi(x_0)$ должны будем пересечь кривую еще в некотором числе точек. В этом случае при движении от точки (x,t_2) вдоль характеристики $\nu = -y + x + t_2$ мы остановимся в точке (x_2,t_4), обладающей следующим свойством: через нее проходит характеристика $\nu = y - x_2 + t_4$, касающаяся кривой $\nu = \varphi(y)$ на интервале (x_2,x) и не пересекающая кривую на этом интервале. Для точек, лежащих на прямой $\nu = -y + x + t_2$ в окрестности точки (x_2,t_4), формула (19) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{r}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\beta(y)\,dy+$$
$$+\int\limits_{0}^{t}\Big[\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}+\sum_{i=1}^{m}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\alpha(y)\,dy- \qquad (27)$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\beta(y)\,dy+\int\limits_{0}^{t}\Big[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}=0.$$

Вторая сумма, как уже отмечалось, равна нулю, значит и первая сумма равна нулю. Переместим теперь вершину угла вдоль характеристики $\nu = y - x_2 + t_4$ от точки (x_2,t_4) к точке (x,t_5). В точках, лежащих на характеристике $\nu = y - x_2 + t_4$ в окрестности точки (x,t_5), формула (19) будет записываться

$$+\sum_{i=1}^{q}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)}\beta(y)\,dy+ \qquad (28)$$
$$\sum_{i=1}^{r}\Big\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)}\beta(y)\,dy+\int\limits_{0}^{t}\Big[\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)}f(y,z-|x-y|)dy\Big]dz\Big\}+$$
$$+\int\limits_{0}^{t}\Big[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}=0.$$

Но первая сумма в этой формуле совпадает с первой суммой в формуле (27) и равна нулю, значит и вторая сумма в формуле (28) равна нулю.

В третьем случае мы попадем на кривую $\nu = \varphi(y)$ в точке $y = x_4$, $\nu = \varphi(x_4)$, но при движении вдоль характеристики $\nu = y - x_4 + \varphi(x_4)$ кривую, несущую начальные данные, пересекать больше не будем. Рассуждая так же, как и во втором случае, но двигаясь уже от точки $(x_4,\varphi(x_4))$, мы попадем в некоторую точку (x, t_7), эквивалентную точке (x,t_5). Таким образом, третий случай практически не отличается от второго.

Относительно дальнейшего движения вершины угла от точки (x,t_5) к точке (x,t) мы будем рассуждать точно так, как мы рассуждали при движении вершины угла от точки (x, t_2). Снова будут возможны три случая. В первом случае мы придем сначала в точку (x_3, t_6) (эквивалентную точке (x_1, t_3)), в окрестности которой формула (19) распадается на две, а потом перейдем к точке (x, t), и первая часть леммы будет доказана. Во втором и третьем случаях мы перейдем к точке (x, t_8) (эквивалентной точкам (x, t_2), (x, t_5) и (x, t_7), в окрестности которой формула (19) снова будет распадаться на две. Так как каждая характеристика уравнения, проходящая через точку (x, t), пересекает кривую $\nu = \varphi(y)$ в конечном числе точек $y = y_{ik}\ (x, t)$; $\nu = h_{ik}\ (x, t)$ $(k = 1,2;\ i = 1,2 \dots p)$, то указанный процесс движения вершины угла к точке (x, t) конечен. Значит, через конечное число шагов мы придем к точке (x, t), и в ней формула (19) распадается на две независимых формулы (23) и (24).

Если при движении вершины угла от точки $(x, 0)$ мы придем к такой точке, что обе стороны угла одновременно коснутся кривой, то дальнейшее движение будем вести так, как и от точки (x, t_2).

Покажем теперь, что формула (23) распадается на k независимых формул. Для этого возьмем точку (x, t) на прямой $\nu = y - x + t$ так, чтобы сумма в (23) состояла из одного члена

$$\left\{\int\limits_{y_{11}(-x+t)}^{y_{12}(-x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{11}(-x+t)}^{y_{12}(-x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{11}(-x+z)}^{z_{12}(-x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\} = 0. \quad (29)$$

Передвинем точку (x, t) вдоль прямой $\nu = y - x + t$ так, чтобы сумма в формуле (23) состояла из двух членов. Первый член в силу леммы 2 и следствия из леммы I будет равен левой части формулы (29), равной нулю, значит и второй член в полученной формуле равен нулю.

$$\left\{\int\limits_{y_{21}(-x+t)}^{y_{22}(-x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{21}(-x+t)}^{y_{22}(-x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{21}(-x+z)}^{z_{22}(-x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\} = 0. \quad (30)$$

Продолжая этот процесс, получим, что формула (23) распадается на k независимых формул. Аналогичные рассуждения показывают, что и формула (24) распадается на $n-k$ независимых формул. Следовательно, лемма доказана.

Функция $U(x, t)$, представленная формулой (11), может быть записана в виде

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int\limits_{y_{i1}}^{y_{i2}} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}}^{y_{i2}} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{i1}}^{z_{i2}} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\}, \quad (31)$$

где y_{ik} и z_{ik} определяются точно так, как и в соотношении (19). Перепишем формулу (31), разбив сумму на три части.

$$\begin{aligned} U(x, t) = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\left\{\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(-x+t)}^{y_{i2}(-x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{i1}(-x+z)}^{z_{i2}(-x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\} + \\ & + \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{y_{j1}(-x+t)}^{y_{j2}(x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j1}(-x+t)}^{y_{j2}(x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{j1}(-x+z)}^{z_{j2}(x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\} + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{n}\left\{\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x+t)}^{y_{i2}(x+t)} \beta(y)\,dy + \int\limits_0^t\left[\int\limits_{z_{i1}(x+z)}^{z_{i2}(x+z)} f(y, z - |x-y|)\,dy\right]dz\right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

В первой части — $y_{ik}, z_{ik} < x$ $(k = 1,2;\ i = 1,2 \dots j-1)$;
во второй части — $y_{j1} < x < y_{j2}$;
в третьей части — $x > y_{ik}, z_{ik}$ $(k = 1,2;\ i = j+1, j+2 \dots n)$.

Первая и последняя суммы равны нулю в силу формулы (10), которая сводится к совокупности формул (10*) вследствие леммы 3. Таким образом, $U(x, t)$ фактически имеет такой вид:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\Bigg\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Bigg]dz\Bigg\}. \tag{11*}$$

Теорема 1. Начальные данные $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ любого решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-f(x,t)$$

удовлетворяют условию (10) а само решение дается формулой (11*).*

Доказательство. Как видно из предыдущего, эти утверждения заведомо справедливы, если функция $U(x,t)$ равна нулю вне некоторой конечной области. Предположим теперь, что $u(x,t)$ — произвольное решение уравнения (1). Рассмотрим функцию $\nu(x,t)=U(x,t)\mu(t)$, где $\mu(t)=1$ для $0<t\leqslant N$ и при $N\leqslant t\leqslant N+1$ гладко сходит к нулю. Функция $V(x,t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-f_1(x,t)$$

в области $t\geqslant\varphi(x)$, причем

$$f_1(x,t)=\begin{cases} f(x,t) & t\leqslant N\\ f(x,t)\mu(t)-2U_t^1\mu'(t)-U\mu''(t) & N\leqslant t\leqslant N+1\\ 0 & t\geqslant N+1\end{cases}$$

и начальные данные $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ функции $V(x,t)$ совпадают с начальными данными $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ функции $U(x,t)$ при x, удовлетворяющем неравенству $\varphi(x)\leqslant N$. Очевидно, что $V(x,t)$ равно нулю вне некоторой конечной области.

Следовательно,

$$V(x,t)=\frac{1}{2}\Bigg\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha_1(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta_1(y)\,dy+\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)}f_1(y,z-|x-y|)\,dy\Bigg]dz\Bigg\}$$

для $\varphi(x)<t<\infty$, и

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha_1(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta_1(y)\,dy+\int\limits_0^t\Bigg\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f_1(y,z-|x-y|)\,dy\Bigg\}dz=0$$

$$(i=1,2\ \dots\ n)$$

для $0<t<\varphi(x)$, причем эти формулы при $t\leqslant N$ и $\varphi(x)\leqslant N$ принимают такой вид:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\Bigg\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta(y)\,dy+\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Bigg]dz\Bigg\}$$

при $\varphi(x)<t\leqslant N$, и

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta(y)\,dy+\int\limits_0^t\Bigg\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Bigg\}dz=0$$

$$(i=1,2\ \dots\ n)$$

при $0<t<\varphi(x)<N$.

Отсюда, в силу произвольности N, следует, что любое решение уравнения (I) представимо в виде (11*) и его начальные данные удовлетворяют условию (10*). Теорема доказана.

Теорема II. *Если произвольно взять достаточно гладкие функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющие условию (10*), то функция $U(x,t)$, определяемая формулой (II*), будет решением задачи Коши уравнения (I) в области $t \geqslant \varphi(x)$ с начальными данными $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.*

Доказательство. Проверим сначала, что функция $U(x,t)$, определяемая формулой (11*), является решением уравнения (1).

Первые два члена, стоящие в фигурных скобках формулы (11*), являются гладкими функциями от $x+t$ и $-x+t$ и, следовательно, удовлетворяют однородному уравнению (1). Покажем теперь, что $U_1(x,t) =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)} f(y, z - |x-y|)\, dy \right\} dz$$

удовлетворяет неоднородному уравнению (1) с правой частью, равной $-f(x,t)$.

Как уже отмечалось раньше (во второй лемме), нижний предел интегрирования по z равен фактически $h(x)$, где $h(x)$ ордината точки $(x, h(x))$, через которую проходит характеристика уравнения (1), касающаяся кривой $t = \varphi(x)$ между y_{j1} и y_{j2}. Если такой характеристики нет, то есть если точка $(x, \varphi(x))$ лежит на пространственно ориентированном элементе кривой $(|\varphi'(x)| < 1)$, то $h(x) = \varphi(x)$.

Учитывая это замечание, получим

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -f(x,t) + \frac{1}{2}\Big\{ f(y_{j1}, t - x + y_{j1})\, y'_{j1} + f(y_{j2}, t - y_{j2} + x)\, y'_{j2} + $$
$$+ \int\limits_{y_{j_1}}^{y_{j_2}} \dot{f}(y, t_1 - |x-y|)\, dy \Big\}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\Big\{ -f(y_{j1}, t - x + y_{j1})\, \dot{y}_{j1} + f(y_{j2}, t - y_{j2} + x)\, \dot{y}_{j2} + $$
$$+ \int\limits_{y_{j_1}}^{y_{j_2}} \dot{f}(y, t - |x-y|)\, dy \Big\}.$$

Здесь и в дальнейшем штрих над функцией двух переменных означает дифференцирование по первому аргументу, а точка — дифференцирование по второму аргументу.

Вычитая из первого соотношения второе, получим

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = -f(x,t) + \frac{1}{2}\Big\{ f(y_{j1}, t - x + y_{j1}) \cdot (y'_{j1} + \dot{y}_{j1}) + $$
$$+ f(y_{j2}, t - y_{j2} + x)(y^1_{j2} - \dot{y}_{j2}) \Big\}$$

Так как y_{j1} и y_{j2} определяются соответственно из уравнений (14) и (15), то легко можно получить, что $y'_{j1} = -\dot{y}_{j1}$ и $y'_{j2} = \dot{y}_{j2}$.

Но тогда

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = -f(x,t).$$

Покажем теперь, что построенные по $U(x,t)$ начальные данные $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ совпадают с заданными функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Рассмотрим снова функцию $V(x,t) = U(x,t)\,\mu(t)$. Эта ограниченная функция является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -f_1(x,t) \quad (\text{в области } t \geqslant \varphi(x)),$$

где

$$\cdot\ f_1(x,t)=\begin{cases} f(x,\,t) & t\leqslant N\\ f(x,\,t)\,\mu(t)-2U'_t\,\mu'(t)-U\mu''(t) & N\leqslant t\leqslant N+1\\ 0 & t>N+1\end{cases}$$

Обозначим начальные данные этой функции через $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$, которые при x, удовлетворяющем неравенству $\varphi(x)\leqslant N$, совпадают с начальными данными функции $U(x,\,t)$. Тогда, согласно теореме I:

$$V(x,\,t)=\frac{1}{2}\Big\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha_1(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta_1(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t\Big[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)}f_1(y,\,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}$$

при $\varphi(x)<t<\infty$, и

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha_1(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta_1(y)\,dy+\int\limits_0^t\Big\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f_1(y,z-|x-y|)\,dy\Big\}dz=0$$

$$(i=1,2\ldots\ n)$$

при $0<t<\varphi(x)$. При $t\leqslant N$, $V(x,\,t)=U(x,\,t)$, следовательно,

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\Big\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha_1(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta_1(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t\Big[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}\qquad(33)$$

при $\varphi(x)<t\leqslant N$ и

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta(y)\,dy+\int\limits_0^t\Big\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big\}dz=0\quad(34)$$

$$(i=1,\,2\ \ldots\ n)$$

при $0<t<\varphi(x)\leqslant N$.

Но из условия теоремы нам известно, что

$$U(x,\,t)=\frac{1}{2}\Big\{\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)}\beta(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t\Big[\int\limits_{z_{j_1}(-x+z)}^{z_{j_2}(x+z)}f(y,z-|x-y|)\,dy\Big]dz\Big\}\qquad(35)$$

при $\varphi(x)<t<\infty$, и

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\alpha(y)\,dy-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)}\beta(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t\Big\{\int\limits_{z_{i1}(x,z)}^{z_{i2}(x,z)}f(y,\,z-|x-y|)\,dy\Big\}dz=0\qquad(36)$$

$$(i=1,\,2\ \ldots\ n)$$

при $0<t<\varphi(x)$.

Сравнивая формулы (33) и (34), соответственно с формулами (35) и (36), получим

$$\int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)} \Big[\alpha(y) - \alpha_1(y)\Big]\, dy - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{y_{j_1}(-x+t)}^{y_{j_2}(x+t)} \Big[\beta(y) - \beta_1(y)\Big]\, dy = 0 \tag{37}$$

при $\varphi(x) < t \leqslant N$, и

$$\int\limits_{y_{i_1}(x,t)}^{y_{i_2}(x,t)} \Big[\alpha(y) - \alpha_1(y)\Big]\, dy - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{y_{i_1}(x,t)}^{y_{i_2}(x,t)} \Big[\beta(y) - \beta_1(y)\Big]\, dy = 0 \tag{38}$$

$$(i = 1,2 \ldots n)$$

при $0 < t < \varphi(x) \leqslant N$

Покажем, что из этих равенств следуют равенства $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ и $\beta_1(x) = \beta(x)$. Для этого рассмотрим отдельно три случая.

I случай. Точка $(x, \varphi(x))$ лежит на пространственно ориентированном элементе кривой $t = \varphi(x)$ $(|\varphi'(x)| < 1)$. Переходя к пределу при $t \to \varphi(x)$ в формуле (37), получим $\frac{\beta(x) - \beta_1(x)}{[\varphi^1(x)]^2 - 1} = 0$ или $\beta(x) = \beta_1(x)$. Но тогда формула (37), если точка (x, t) лежит в малой окрестности точки $(x, \varphi(x))$, принимает вид

$$\int\limits_{y_{j_1}}^{y_{j_2}} [\alpha(y) - \alpha_1(y_j)]\, dy = 0.$$

Продифференцировав это тождество по t, получим, переходя к пределу при $t \to \varphi(x)$,

$$\lim_{t \to \varphi(x)} \{[\alpha(y_{j_2}) - \alpha_1(y_{j_2})]\, \dot{y}_{j_2} - [\alpha(y_{j_1}) - \alpha_1(y_{j_1})]\, \dot{y}_{j_1}\} =$$

$$= -\frac{\alpha(x) - \alpha_1(x)}{[\varphi^1(x)]^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, $\alpha(x) = \alpha_1(x)$.

II случай. Пусть теперь точка $(x, \varphi(x))$ лежит на не пространственно ориентированном элементе кривой $t = \varphi(x)$ $(|\varphi'(x)| > 1)$. Для определенности будем считать, что $\varphi'(x) < -1$. В этом случае $y_{j_1} \to x$, а $y_{j_2} \to y_j \neq x$ при $t \to \varphi(x)$. Формулы (37) и (38) в пределе при $t \to \varphi(x)$ дают

$$\int\limits_{x}^{y_j} [\alpha(y) - \alpha_1(y)]\, dy - \frac{\beta(y_j) - \beta_1(y_j)}{\varphi'(y_j) + 1} + \frac{\beta(x) - \beta_1(x)}{\varphi'(x) - 1} = 0;$$

$$\int\limits_{x}^{y_j} [\alpha(y) - \alpha_1(y)]\, dy - \frac{\beta(y_j) - \beta_1(y_j)}{\varphi'(y_j) + 1} + \frac{\beta(x) - \beta_1(x)}{\varphi'(x) + 1} = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\frac{\beta(x) - \beta_1(x)}{[\varphi^1(x)]^2 - 1} = 0.$$

т. е. и в этом случае $\beta(x) = \beta_1(x)$.

Положив теперь $\beta(x) = \beta_1(x)$ в формулах (37) и (38) и продифференцировав их по t, перейдем к пределу при $t \to \varphi(x)$. Сравнение предельных значений дает $\alpha(x) = \alpha_1(x)$.

III случай. Нам осталось рассмотреть третий случай, когда точка кривой $(x, \varphi(x))$ такова, что $|\varphi'(x)| = 1$. Так как по предположению любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую $t = \varphi(x)$ в конечном числе точек, то условие $|\varphi'(x)| = 1$ определяет дискретный набор точек. Учитывая это замечание, а также непрерывность рассматриваемых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, видим, что $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ и $\beta_1(x) = \beta(x)$ в рассматриваемой точке.

Совпадение начальных данных с заданными функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ доказано для значений x, удовлетворяющих неравенству $\varphi(x) \leq N$, но так как N произвольно, то это совпадение справедливо для всех x. Следовательно, теорема доказана.

Из теорем I и II следует, что условие (10) необходимо и достаточно для существования решения задачи Коши уравнения (1), если начальные данные заданы на произвольной кривой $t = \varphi(x)$. При этом само решение дается формулой (11*).*

Для пространственно ориентированных кривых формула (10) выполняется для произвольных гладких функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Действительно, для $0 < t < \varphi(x)$ $t - |x-y| - \varphi(y) < \varphi(x) - |x-y| - \varphi(y)$. Применение теоремы о конечном приращении дает: $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y)$, где ξ — некоторая точка, лежащая между точками x и y. Но тогда $t - |x-y| - \varphi(y) < \varphi'(\xi)(x-y) - |x-y|$. Так как $|\varphi'(\xi)(x-y)| = |\varphi'(\xi)|\ |x-y| < |x-y|$ (в силу условия $|\varphi'(x)| < 1$), то $t - |x-y| - \varphi(y) < \varphi'(\xi)(x-y) - |x-y| < 0$. Так как $t - |x-y| - \varphi|y|$ стоит под знаком аргумента единичной функции, входящей в (10) и, в силу сказанного, отрицательно для $0 < t < \varphi(x)$, то формула (10) действительно выполняется для пространственно ориентированных кривых и не накладывает никаких ограничений на $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

В дальнейшем рассмотрим отдельно две задачи.

Первая задача. Указать условия, которым должны удовлетворять начальные данные для существования решения однородного уравнения.

Вторая задача. Указать условия, которым должна удовлетворять функция $f(x, t)$ для существования решения неоднородного уравнения (1) при нулевых начальных данных.

Для рассмотрения этих задач введем понятие эквивалентных точек на кривой $t = \varphi(x)$.

Возьмем на кривой $t = \varphi(x)$ какую-либо точку A и проведем через нее характеристики до пересечения с кривой (части характеристик между точками пересечения должны лежать в области $t \geqslant \varphi(x)$). Через полученные точки B и C вновь проведем характеристики и т. д. Точки $A, B, C, Д$ ... будем называть эквивалентными. I-эквивалентными будем называть точки пересечения характеристики из семейства $t = x + c$ с кривой $t = \varphi(x)$, а II-эквивалентными будем называть точки пересечения характеристики из семейства $t = -x + c$ с кривой $t = \varphi(x)$.

Используя введенное понятие докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Для существования решения задачи Коши однородного уравнения (1) начальные условия на кривой $t = \varphi(x)$ должны быть заданы так, чтобы функция*

$$\psi(x) = \int_a^x \alpha(y)\,dy - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) - 1} \tag{39}$$

принимала равные значения в I-эквивалентных точках кривой $t = \varphi(x)$, а функция

$$\Phi(x) = \int_a^x \alpha(y)\,dy - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) + 1} \tag{40}$$

принимала равные значения в II-эквивалентных точках кривой $t = \varphi(x)$.

Доказательство. Формула (10*) является необходимым и достаточным условием, которому должны удовлетворять начальные данные для существования решения задачи Коши уравнения (1), если кривая, несущая начальные данные, произвольна.

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)} \alpha(y)\,dy - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)} \beta(y)\,dy = 0 \quad (i = 1,2 \ldots n). \tag{41}$$

Положив $\int\limits_a^x \alpha(y)\,dy = F(x)$, перепишем (41) в виде

$$F(y_{i2}) - F(y_{i1}) - \beta(y_{i2})\,\dot{y}_{i2} + \beta(y_{i1})\,\dot{y}_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2 \ \ldots \ n)$$

или в виде

$$F(y_{i2}) - \beta(y_{i2})\,\dot{y}_{i2} = F(y_{i1}) - \beta(y_{i1})\,\dot{y}_{i1}. \quad (i = 1, 2 \ \ldots \ n) \tag{42}$$

Точки y_{i1} и y_{i2} эквивалентны в силу своего определения.
Если y_{i1} и y_{i2} I-эквивалентны, то из уравнения (14) получим

$$\dot{y}_{ij} = \frac{1}{\varphi'(y_{ij}) - 1} \quad (i = 1, 2 \ \ldots \ n; \ j = 1, 2), \tag{43}$$

а если они II-эквивалентны, то уравнение (15) дает

$$\dot{y}_{ij} = \frac{1}{\varphi'(y_{ij}) + 1} \quad (i = 1, 2 \ \ldots \ n; \quad j = 1, 2). \tag{44}$$

Обозначив через $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ функции

$$\psi(x) = F(x) - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) - 1} = \int\limits_a^x \alpha(y)\,dy - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) - 1}$$

и

$$\Phi(x) = F(x) - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) + 1} = \int\limits_a^x \alpha(y)\,dy - \frac{\beta(x)}{\varphi'(x) - 1},$$

мы сможем записать формулу (42) в следующем виде:

I случай (точки y_{i1} и y_{i2} — I-эквивалентны)

$$\psi(y_{i1}) = \psi(y_{i2}); \tag{45}$$

II случай (точки y_{i1} и y_{i2} — II-эквивалентны)

$$\Phi(y_{i1}) = \Phi(y_{i2}), \tag{46}$$

а справедливость этих соотношений нам и надо было доказать.

Наоборот, пусть выполняются условия (45) и (46), где функции $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ определены формулами (39) и (40). Расписав формулы (45) и (46) в явном виде, мы получим формулу (42). На формулу (42) можно записать в виде (41), и таким образом условия (45) и (46) действительно необходимы и достаточны для существования решения первой задачи.

Теорема 4. *Для существования решения задачи Коши неоднородного уравнения (1) при нулевых начальных условиях функция $f(x, t)$ должна удовлетворять условию*

$$\int\limits_{y_{i1}(x,t)}^{y_{i2}(x,t)} f(y, t - |x - y|)\,dy = 0, \quad (i = 1, 2 \ \ldots \ n), \tag{47}$$

где y_{i1} и y_{i2} — абсциссы эквивалентных точек.

Доказательство. Формула (10), распадающаяся на совокупность формул (10*), в данном случае имеет вид

$$\int_0^t \left\{ \int_{z i_1(x,z)}^{z i_2(x,z)} f(y, z - |x - y|)\, dy \right\} dz = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{48}$$

Продифференцировав это тождество по t, получим

$$\int_{y_{i_1}(x,t)}^{y_{i_2}(x,t)} f(y, t - |x-y|)\, dy = 0 \quad (i = 1,2 \ldots n).$$

Таким образом, из формулы (48) следует формула (47). Наоборот, если выполняется формула (47) для всевозможных эквивалентных точек, то интеграл по y в формуле (48) равен нулю, и следовательно, формула (48) также выполняется. Теорема доказана.

Пример. Покажем как можно задать начальные данные, используя вышеприведенные результаты. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

в области $t \geqslant x^2$, $-\infty < x < \infty$. Положим $\alpha(x) \equiv 0$ для $-\infty < x < \infty$. Тогда функции $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ будут иметь вид

$$\psi(x) = -\frac{\beta(x)}{2x - 1}; \tag{49}$$

$$\Phi(x) = -\frac{\beta(x)}{2x + 1}. \tag{50}$$

Если точка на кривой $t = x^2$ имеет ординату x, то I-эквивалентная ей точка имеет ординату $1 - x$, а II-эквивалентная $-1 - x$. Формулы (45) и (46) принимают вид

$$\beta(x) = -\beta(1 - x); \tag{51}$$

$$\beta(x) = -\beta(-1 - x). \tag{52}$$

Положив $\beta\left(x + \frac{1}{2}\right) = \gamma(x)$, получим из формул (51) и (52)

$$\gamma(x) = -\gamma(-x) \text{ и } \gamma(x) = \gamma(x + 2)$$

Итак, если рассматривается задача Коши для уравнения (1) в области $t \geqslant x^2$ с начальным условием $\alpha(x) \equiv 0$, то для существования ее решения необходимо и достаточно, чтобы $\beta\left(x + \frac{1}{2}\right)$ была произвольной дважды дифференцируемой нечетной периодической функцией с периодом, равным двум.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Picard. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partilles avec des applications a la physique mathematique. Paris, 1927.

2. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 3, ч. I. М., 1933.

3. А. Я. Повзнер. О задаче Коши, Успехи математ. наук, т. VII, вып. 5 (51), 1952, 229—233.

4. J. Hadamard. Équations aux dérivées partielles. «L'Enseignement mathematique», 1936, № 1—2.