О ЗНАЧЕНІИ,

КАКОЕ МОЖНО ПРИДАТЬ ВЪ ДИНАМИКѢ ВТОРОЙ ВАРІАЦІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ГАМИЛЬТОНА И НАИМЕНЬШАГО ДѢЙСТВІЯ.

П. М. Новикова.

Пусть дана система n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p условіями; выразимъ $3n$ координатъ точекъ системы черезъ $3n - p = m$ количествъ, такъ чтобы связи были тождественно удовлетворены; тогда эти m количествъ, которыя мы обозначимъ черезъ $q_1, q_2, \ldots q_m$, будутъ представлять собою независимыя координаты системы, называемыя координатными параметрами или обобщенными координатами. Если система подвержена дѣйствію силъ, имѣющихъ потенціалъ, то, какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія движенія системы приводятъ къ нулю первую варіацію интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt\,, \tag{1}$$

гдѣ T — живая сила системы, U — потенціалъ силъ и интеграція берется между двумя моментами времени, въ которые положенія системы даны.

Обратно, условіе, что 1-я варіація интеграла (1) равна нулю

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0, \tag{2}$$

приводитъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, которыя, принимая для краткости

$$T+U=P,$$

въ вышеупомянутыхъ обобщенныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_1'}-\frac{\partial P}{\partial q_1}=0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_2'}-\frac{\partial P}{\partial q_2}=0,\ldots.$$

$$\ldots.\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_m}-\frac{\partial P}{\partial q_m}=0\,, \tag{3}$$

гдѣ $q'_1,\ q'_2\ldots.q'_m$, какъ вообще, обозначаютъ производныя координатъ.

Мы здѣсь постараемся показать, что и вторая варіація интеграла (1) имѣетъ важное значеніе въ динамикѣ, именно по отношенію къ такъ называемой устойчивости движенія.

Если скорости или координаты движущейся системы матеріальныхъ точекъ будутъ въ какое нибудь мгновеніе безконечно-мало измѣнены, то точки системы станутъ описывать другія траэкторіи, различныя отъ тѣхъ, которыя бы онѣ описали, если бы не было произведено этихъ безконечно-малыхъ измѣненій координатъ и скоростей. Совокупность измѣненныхъ траэкторій можетъ быть названа возмущеннымъ путемъ системы, совокупность же неизмѣнныхъ траэкторій точекъ системы назовемъ невозмущеннымъ путемъ. Если послѣ возмущенія положенія системы на возмущенномъ пути будутъ безконечно-мало разниться отъ положеній, которыя бы система имѣла въ то же время на невозмущенномъ пути, то движеніе системы на невозмущенномъ пути называется устойчивымъ; если же положенія точекъ на возмущенномъ пути системы съ теченіемъ времени будутъ удаляться все больше и больше до конечнаго или безконечно-большаго разстоянія отъ одновременныхъ положеній на невозмущенномъ пути, то движеніе системы называется неустойчивымъ[1].

Такъ какъ въ возмущенномъ пути координаты системы будутъ разниться отъ координатъ невозмущеннаго, то, обозначая ихъ черезъ $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2 \ldots\ldots q_n + \delta q_n$ и вставляя въ уравненія (3) вмѣсто $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$, получимъ уравненія движенія на возмущенномъ пути. Развернувъ правыя части такимъ образомъ полученныхъ уравненій по степенямъ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$ и изъ производныхъ, отбросивъ члены, содержащіе степени этихъ количествъ выше первой степени, такъ какъ мы, имѣя въ виду опредѣлить условія устойчивости, предполагаемъ, что эти количества сохраняютъ во время движенія безконечно-малыя значенія; вычитая наконецъ изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій почленно уравненія (3), получимъ уравненія линейныя по отношенію къ δq_1, $\delta q_2, \ldots \delta q_n$, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены какъ эти величины, такъ и условія, при которыхъ они сохраняютъ безконечно-малыя значенія. Полученныя въ концѣ линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$ дифференціальныя уравненія, оче-

---

[1] Существуютъ еще другія опредѣленія устойчивости, разнящіяся отъ вышеприведеннаго. Такъ, устойчивымъ называется такое движеніе, въ которомъ возмущенный путь всегда остается безконечно близкимъ къ невозмущенному, хотя бы при этомъ одновременныя положенія системы на невозмущенномъ и возмущенномъ путяхъ и расходились въ теченіи времени на конечное или безконечное разстояніе. Такую устойчивость можно назвать устойчивостью по отношенію къ пространству. Частный случай ея представляетъ консервативная устойчивость, разсматриваемая въ «Natural Philosophy» Томсона и Тэта. Въ моемъ сообщеніи на съѣздѣ естеств. и врач. въ Одессѣ я, имѣя въ виду показать связь между свойствами движенія и свойствами интеграла наименьшаго дѣйствія, назвалъ устойчивымъ такое движеніе, въ которомъ невозмущенный путь имѣетъ общія положенія съ возмущеннымъ. Подробный разборъ различныхъ видовъ устойчивости будетъ представленъ въ имѣющей скоро появиться моей работѣ объ этомъ предметѣ.

видно, представляютъ собою не что иное какъ первыя варіаціи уравненій (3) по координатамъ и могутъ быть изображены такимъ образомъ:

$$\delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_1'}-\frac{\partial P}{\partial q_1}\right)=0,\ \delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_2'}-\frac{\partial P}{\partial q_2}\right)=0,\ldots$$

$$\ldots\delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}-\frac{\partial P}{\partial q_n}\right)=0. \qquad (4)$$

Варьируя на самомъ дѣлѣ, мы получимъ дифференціальныя линейныя уравненія, изъ которыхъ опредѣлятся условія устойчивости и безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго. Эти уравненія можно, въ виду ихъ свойствъ, назвать дифференціальными уравненіями устойчивости движенія.

Принимая во вниманіе, что первая варіація опредѣленнаго интеграла (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\delta\int P\,dt=\int\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_1}\right)\delta q_1+\left(\frac{\partial P}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_2}\right)\delta q_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{\partial P}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}\right)\delta q_n\right\}dt,$$

можемъ, какъ извѣстно, вторую варіацію выразить такъ:

$$\delta^2\int P dt=\int\left\{\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_1}\right)\delta q_1+\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_2}\right)\delta q_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}\right)\delta q_n\right\}dt, \qquad (5)$$

гдѣ, какъ и въ предыдущемъ, интеграція берется между начальнымъ и конечнымъ моментомъ и положенія системы для этихъ моментовъ считаются данными; знаки же предѣловъ опущены для краткости.

Изъ сопоставленія выраженія (5) съ уравненіями устойчивости (4) мы можемъ вывести слѣдующую теорему. Безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, если они удовлетворяютъ предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую варіацію Гамильтонова интеграла къ нулю. Можно эту теорему представить въ нѣсколько другой формѣ. Вторая варіація опредѣленнаго интеграла $\int_{t_0}^{t_1} Pdt$, какъ извѣстно, можетъ быть приведена къ формѣ

$$\delta^2 \int Pdt = \int \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_2'} \omega_1 \omega_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2} \omega_2^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2' \partial q_3'} \omega_2 \omega_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3'^2} \omega_3^2 + \ldots \right\} dt, \quad (6)$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \ldots \nu_n$ извѣстныя линейныя функціи варіацій координатъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Принимая во вниманіе, что $P = T + U$, гдѣ U не содержитъ производныхъ координатъ, имѣемъ

$$\delta^2 \int Pdt = \int \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' dq_2'} \omega_1 \omega_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} \omega_2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + \ldots \right\} dt.$$

Здѣсь подъ знакомъ интеграла находится не что иное какъ значеніе T, которое оно получитъ, когда мы замѣнимъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ черезъ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$; но T, какъ живая сила системы матеріальныхъ точекъ, при всѣхъ значеніяхъ производныхъ координатъ $q_1, q_2 \ldots q_n$, не можетъ сдѣлаться отрицательною величиной и наименьшее ея значеніе будетъ нуль; поэтому нулевое значеніе второй варіаціи Гамильтонова интеграла будетъ наименьшимъ значеніемъ этой варіаціи. Отсюда предыдущая теорема можетъ быть высказана такъ: Безконечно малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, удовлетворяющія предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую варіацію Гамильтонова интеграла къ минимуму (I).

Съ другой стороны, беря вторую варіацію Гамильтонова интеграла въ простѣйшей формѣ, которая не подверглась еще никакимъ преобразованіямъ, имѣемъ:

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \delta q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} \delta q_2^2 + \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_3} \delta q_1 \delta q_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \delta q_2 \delta q_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3^2} \delta q_3^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_1} \delta q_1 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_2} \delta q_1 \delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n +$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_1} \delta q_2 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_2} \delta q_2 \delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n +$$

$$\ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial {q'_1}^2} \delta {q'_1}^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_2} \delta q'_1 \delta q'_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial {q'_2}^2} \delta {q'_2}^2 +$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_3} \delta q'_1 \delta q'_3 + \ldots \right\} dt. \qquad (7)$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ вторая варіація интеграла $\int P dt$, представленная въ формѣ (7), получаетъ значеніе минимумъ по отношенію къ произвольнымъ варіаціямъ координатъ; иначе говоря, предполагая въ (7) всѣ вторыя производныя P выраженными во времени съ помощью рѣшеній дифференціальныхъ уравненій движенія (3), опредѣлимъ—при какихъ функціональныхъ значеніяхъ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$, разсматриваемыхъ какъ произвольныя функціи t, $\delta^2 \int P dt$, получитъ наименьшее значеніе. Поступая по общимъ правиламъ варіаціоннаго исчисленія, получимъ n дифференціальныхъ уравненій, которыя можно представить въ слѣдующей типической формѣ:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_i}\delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_i}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q_i}\delta q_n +$$

$$+\frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q_i}\delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q_i}\delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q_i}\delta q'_n -$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_i}\delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_i}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q'_i}\delta q_n +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_i}\delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q'_i}\delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q'_i}\delta q'_n\right\} = 0, \quad (8)$$

полагая здѣсь $i=1, 2, \ldots n$, получимъ всѣ n дифференціальныхъ уравненій задачи варіаціоннаго исчисленія въ ея приложеніи къ данному случаю. Уравненія (8) можно представить, очевидно, въ весьма сжатомъ видѣ, именно

$$\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_i}\right) = 0 \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \ldots n;$$

но эти послѣднія суть не что иное, какъ уравненія устойчивости движенія. Такимъ образомъ мы пришли къ теоремѣ: Условія, которыя должны быть выполнены для того, чтобы вторая варіація Гамильтонова интеграла получила значеніе minimum, представляютъ собою уравненія устойчивости, т. е. уравненія, изъ которыхъ опредѣляются безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго (II).

Такъ какъ наименьшее значеніе второй варіаціи есть нуль, то эту теорему можно перефразировать подобно предыдущей, замѣнивъ только слова «значеніе minimum» словами «нулевое значеніе».

Эти двѣ теоремы (I) и (II) вмѣстѣ представляютъ новый второстепенный принципъ динамики, который можно назвать принципомъ второй варіаціи Гамильтонова интеграла. Принципъ второй варіаціи имѣетъ то же значеніе для устойчивости движенія, какое принципъ самого Гамильтонова интеграла имѣетъ для самого движенія. Аналогія между этими двумя принципами до-того велика, что выраженіе принципа Гамильтона переходитъ въ выраженіе принципа второй варіаціи; стоитъ только въ первомъ подставить вмѣсто интеграла его вторую варіацію и вмѣсто координатъ ихъ варіаціи. Тѣ-же самыя разсужденія и выводы, очевидно, приложимы и къ интегралу наименьшаго дѣйствія, который для большей наглядности можно представлять себѣ въ формѣ данной Якоби, т. е. исключить изъ интеграла время посредствомъ уравненія сохраненія энергіи. Но такъ какъ начало наименьшаго дѣйствія требуетъ сохраненія постоянной полной энергіи, то возмущенія движенія должны неизмѣнять живой силы системы; такія возмущенія называются консервативными; если кромѣ возмущеній будутъ еще и смѣщенія, то совокупность смѣщеній и возмущеній не должна мѣнять полной энергіи системы. Сверхъ того, такъ какъ, представивъ интегралъ наименьшаго дѣйствія въ формѣ Якоби, мы исключаемъ время, то изслѣдуемая устойчивость будетъ относиться только къ пространству. Обѣ предыдущія теоремы сохраняютъ свою форму за исключеніемъ замѣны Гамильтонова интеграла интеграломъ наименьшаго дѣйствія.