О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія.

В. А. Стеклова.

I. Ортогональныя системы координатъ.

§ 1.

Относя тѣло къ какой-либо прямоугольной системѣ координатъ, оси которой назовемъ черезъ x, y и z, обозначимъ черезъ u, v и w проекціи на эти оси перемѣщеній точекъ упругаго твердаго тѣла, координаты которыхъ въ естественномъ состояніи суть x, y, z.

Положимъ затѣмъ (по Kirchhoff'у)

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \text{ [1]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Будемъ обозначать проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ различныхъ точкахъ тѣла на различныя площадки, черезъ X, Y, Z со значками x, y, z такъ, что первыя будутъ указывать на направленіе проектирующей линіи, а вторыя—на направленіе перпендикуляра къ площадкѣ, на которую дѣйствуетъ разсматриваемое напряженіе. Предполагая, что упругія силы имѣютъ потенціалъ, получаемъ

[1]) Величины x_x, y_y, z_z носятъ названія растяженій по осямъ координатъ, а $y_z = z_y$, $z_x = x_z$, $x_y = y_x$ — скольженій по тѣмъ же осямъ.

См. Kirchhoff, „Vorlesungen ü. Math. Physik". Leipzig, 1883, S. 388 etc.

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z = Z_y &= \frac{\partial f}{\partial y_z}, \\ Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x = X_z &= \frac{\partial f}{\partial z_x}, \\ Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y = Y_x &= \frac{\partial f}{\partial x_y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ f квадратичная однородная функція шести перемѣнныхъ, $x_x \ldots y_z \ldots x_y$, содержащая, вообще говоря, 21 коэффиціентъ, число которыхъ уменьшается при различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно внутренняго строенія тѣла.

Если черезъ μ обозначимъ плотность тѣла, а черезъ X, Y и Z проекціи на оси координатъ внѣшнихъ (заданныхъ) силъ, дѣйствующихъ на массы твердаго тѣла, то, какъ извѣстно, получимъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій для опредѣленія u, v и w

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \mu X, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= \mu Y, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= \mu Z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Рѣшеніе задачи о равновѣсіи упругаго тѣла приводится къ интегрированію этой системы дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ (второго порядка относительно u, v и w) при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

гдѣ X_n, Y_n, Z_n заданныя (произвольно) функціи координатъ, а n направленіе внѣшней нормали къ поверхности, ограничивающей данное тѣло.

Въ послѣдующихъ сужденіяхъ мы будемъ имѣть дѣло лишь съ изотропными тѣлами, для которыхъ

$$f = K\left[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k(x_x + y_y + z_z)^2\right], \quad (5)$$

гдѣ K и k постоянныя, зависящія отъ физическихъ свойствъ матеріи, а проекціи на оси координатъ напряженій выразятся черезъ производныя по координатамъ отъ u, v и w слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Z_y = Y_z = K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Y_y &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad X_z = Z_x = K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_z &= 2K\left(k\theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad X_y = Y_x = K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

гдѣ

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема.

Допустивъ, что на внутреннія массы тѣла не дѣйствуетъ силъ (т. е. $X = Y = Z = 0$), и обозначивъ черезъ Δ_2 операцію вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

приведемъ уравненія равновѣсія упругихъ изотропныхъ тѣлъ къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta_2 u = 0, \\ (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta_2 v = 0, \\ (2k+1)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta_2 w = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

§ 2.

Рѣшеніе вопросовъ о равновѣсіи различнаго рода тѣлъ значительно упрощается введеніемъ криволинейныхъ (и именно ортогональныхъ) координатъ. Такъ какъ въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется пользоваться исключительно послѣдними, то я изложу вкратцѣ преобразованіе уравненій (8) къ ортогональнымъ координатамъ, слѣдуя пріему Lamé [1]).

[1]) См. Lamé. „Leçons sur les coordonnées curvilignes“. Paris, 1859, p. 277 etc.

Возьмемъ три поверхности

$$f_1(x\,,\,y\,,\,z)=\alpha\,,\qquad f_2(x\,,\,y\,,\,z)=\beta\,,\qquad f_3(x\,,\,y\,,\,z)=\gamma\,.\quad .\ .\ (9)$$

Какъ данныя значенія x, y и z опредѣляютъ точку пространства, такъ данныя значенія α, β и γ опредѣляютъ три поверхности, пересѣченіемъ которыхъ опредѣлится также точка (или точки) пространства. Параметры α, β и γ можно разсматривать, слѣдовательно, какъ координаты, носящія названіе криволинейныхъ координатъ.

Выбравъ поверхности (9) такъ, чтобы

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z}=0\,,\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0\,,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

получимъ ортогональную криволинейную систему координатъ.

Проводя въ какой либо точкѣ пересѣченія поверхностей ортогональной системы по нормали къ каждой изъ нихъ (принимая за положительное направленіе внѣшней нормали), получаемъ прямоугольную систему съ началомъ въ этой точкѣ. Назовемъ оси системы черезъ x', y' и z', а проекціи перемѣщеній точки на эти оси соотвѣтственно черезъ U, V и W. Введемъ далѣе слѣдующія обозначенія: будемъ называть черезъ A, B и Γ со значками α, β и γ проекціи на эти оси напряженій, причемъ буквы A, B и Γ будутъ указывать на направленіе проектирующей линіи, а значки α, β и γ на поверхность, которой принадлежитъ площадка разсматриваемаго напряженія [1]).

Такимъ образомъ, A_α, B_β, Γ_γ суть, такъ называемыя, нормальныя напряженія, а $A_\beta=B_\alpha$, $A_\gamma=\Gamma_\alpha$, $B_\gamma=\Gamma_\beta$ — тангенціальныя.

Черезъ h_1, h_2, h_3 назовемъ первые дифференціальные параметры поверхностей (9), черезъ m, n и p со значками α, β и γ cosinus'ы угловъ, составляемыхъ осями x, y, z съ x', y' и z', такъ что

m_α есть cosinus угла между x и x'

m_β . . . . . . между x и y' и т. д.

---

[1]) „Площадка разсматриваемаго напряженія" сокращено изъ: „площадка, въ точкѣ которой дѣйствуетъ разсматриваемое напряженіе".

При этомъ

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{1}{h_1}, & m_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{1}{h_2}, & m_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{1}{h_3}, \\ n_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{1}{h_1}, & n_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{1}{h_2}, & n_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{1}{h_3}, \\ p_\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{1}{h_1}, & p_\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{1}{h_2}, & p_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{1}{h_3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U = um_\alpha + vn_\alpha + wp_\alpha, \qquad V = um_\beta + vn_\beta + wp_\beta, \\ W = um_\gamma + vn_\gamma + wp_\gamma, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

и, какъ извѣстно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \\ \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \beta}, \\ \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \gamma}, & \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial \gamma}, & \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \gamma}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Всякая функція $F(x, y, z)$ можетъ быть выражена какъ въ x', y', z', такъ и въ α, β, γ, причемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = h_1\frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = h_2\frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = h_3\frac{\partial F}{\partial \gamma}. \quad [1] \quad . \; . \; . \; (14)$$

§ 3.

Формулы (6) справедливы для какой угодно прямоугольной системы координатъ, а, слѣдовательно, и для системы съ осями x', y' и z'. Поэтому

---

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coord. curvil.“. P. 279.

$$\left.\begin{aligned}
A_\alpha = 2K\left[k\theta + \frac{\partial U}{\partial x'}\right], \quad B_\beta = 2K\left[k\theta + \frac{\partial V}{\partial y'}\right], \quad \Gamma_\gamma = 2K\left[k\theta + \frac{\partial W}{\partial z'}\right], \\
B_\gamma = \Gamma_\beta = K\left[\frac{\partial V}{\partial z'} + \frac{\partial W}{\partial y'}\right], \quad \Gamma_\alpha = A_\gamma = K\left[\frac{\partial W}{\partial x'} + \frac{\partial U}{\partial z'}\right], \\
A_\beta = B_\alpha = K\left[\frac{\partial U}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial x'}\right],
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial W}{\partial z'} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Дифференцируя равенства (12) послѣдовательно по x', y' и z', разсматривая $m_\alpha \ldots p_\gamma$ какъ постоянныя, и принимая во вниманіе равенства(11) и (13), находимъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x'} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \\
\frac{\partial V}{\partial y'} &= \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
\frac{\partial W}{\partial z'} &= \frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

Замѣнивъ u, v и w ихъ выраженіями, слѣдующими изъ уравненій (12), получимъ для перваго изъ (17)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right] + \\
+ \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] + \\
+ \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{U}{h_1}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{W}{h_3}\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

Не трудно убѣдиться, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right) = -\frac{h_2^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = -\frac{h_3^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}.$$

Вслѣдствіе этого

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x'}&=U\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}+h_1^2\frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial\alpha}-V\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}-W\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma},\\ &\text{и точно также}\\ \frac{\partial V}{\partial y'}&=V\frac{\partial h_2}{\partial \beta}+h_2^2\frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial\beta}-W\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma}-U\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha},\\ \frac{\partial W}{\partial z'}&=W\frac{\partial h_3}{\partial \gamma}+h_3^2\frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial\gamma}-U\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}-V\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\beta}.\end{aligned}\right\}\quad . . (18)$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\theta=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial\left(\frac{U}{h_2h_3}\right)}{\partial\alpha}+\frac{\partial\left(\frac{V}{h_3h_1}\right)}{\partial\beta}+\frac{\partial\left(\frac{W}{h_1h_2}\right)}{\partial\gamma}\right]. \quad . . . . . (19)$$

Воспользовавшись затѣмъ условіями ортогональности и формулами (11), (12), (13) и (14), получимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial z'}+\frac{\partial W}{\partial y'}&=\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\gamma}+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\beta},\\ \frac{\partial W}{\partial x'}+\frac{\partial U}{\partial z'}&=\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\alpha}+\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\gamma},\\ \frac{\partial U}{\partial y'}+\frac{\partial V}{\partial x'}&=\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\beta}+\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\alpha}.\end{aligned}\right\}\quad . . . . (20)$$

Слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}A_\alpha&=2K\left\{k\theta+\left[\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\alpha}-\frac{1}{h_1}\left(Uh_1\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}+Vh_2\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+Wh_3\frac{\partial h_1}{\partial\gamma}\right)\right]\right\},\\ B_\beta&=2K\left\{k\theta+\left[\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\beta}-\frac{1}{h_2}\left(Uh_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}+Vh_2\frac{\partial h_2}{\partial\beta}+Wh_3\frac{\partial h_2}{\partial\gamma}\right)\right]\right\},\\ \Gamma_\gamma&=2K\left\{k\theta+\left[\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\gamma}-\frac{1}{h_3}\left(Uh_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}+Vh_2\frac{\partial h_3}{\partial\beta}+Wh_3\frac{\partial h_3}{\partial\gamma}\right)\right]\right\},\\ B_\gamma=\Gamma_\beta&=K\left[\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\gamma}+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\beta}\right],\\ \Gamma_\alpha=A_\gamma&=K\left[\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\alpha}+\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\gamma}\right],\\ A_\beta=B_\alpha&=K\left[\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\beta}+\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\alpha}\right].\end{aligned}\right\}\quad (21)$$

§ 4.

Формулы (21) даютъ выраженія проекцій напряженій на координатныя оси ортогональной системы съ параметрами α, β и γ. Остается преобразовать самыя уравненія равновѣсія.

Уравненія (8) даютъ

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial x}&=\frac{\partial\omega_2}{\partial z}-\frac{\partial\omega_3}{\partial y},\\ 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial y}&=\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-\frac{\partial\omega_1}{\partial z},\\ 2(k+1)\frac{\partial\theta}{\partial z}&=\frac{\partial\omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(8_1)$$

гдѣ

$$\omega_1=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \omega_2=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \omega_3=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}.\;\ldots(22)$$

Обозначивъ черезъ a, b и c выраженія $\frac{U}{h_1}$, $\frac{V}{h_2}$ и $\frac{W}{h_3}$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} u&=a\frac{\partial\alpha}{\partial x}+b\frac{\partial\beta}{\partial x}+c\frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ v&=a\frac{\partial\alpha}{\partial y}+b\frac{\partial\beta}{\partial y}+c\frac{\partial\gamma}{\partial y},\\ w&=a\frac{\partial\alpha}{\partial z}+b\frac{\partial\beta}{\partial z}+c\frac{\partial\gamma}{\partial z},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$\omega_3=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial b}{\partial\gamma}-\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)K_1+\left[\frac{\partial c}{\partial\alpha}-\frac{\partial a}{\partial\gamma}\right]K_2+\left[\frac{\partial a}{\partial\beta}-\frac{\partial b}{\partial\alpha}\right]K_3,\;(24)$$

гдѣ для сокращенія введены слѣдующія обозначенія

$$K_1=\frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

$$K_2=\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

$$K_3=\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Замѣтивъ, что

$$\varepsilon p_\alpha = m_\beta n_\gamma - m_\gamma n_\beta\,, \quad \varepsilon p_\beta = m_\gamma n_\alpha - m_\alpha n_\gamma\,, \quad \varepsilon p_\gamma = m_\alpha n_\beta - m_\beta n_\alpha\,,$$

гдѣ $\varepsilon = \pm 1$, и замѣнивъ m_α, $m_\beta \ldots p_\gamma$ ихъ выраженіями (11), найдемъ

$$K_1 = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,, \quad K_2 = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial z}\,, \quad K_3 = \varepsilon \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Такимъ образомъ,

$$\omega_3 = A \frac{\partial \alpha}{\partial z} + B \frac{\partial \beta}{\partial z} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z}\,, \quad \ldots \ldots \ldots (25)$$

гдѣ

$$A = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1}\left[\frac{\partial b}{\partial \gamma} - \frac{\partial c}{\partial \beta}\right],\ B = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2}\left[\frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \gamma}\right],\ \Gamma = \varepsilon \frac{h_1 h_2}{h_3}\left[\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial b}{\partial \alpha}\right]. \ (26)$$

Точно также получимъ

$$\omega_1 = A \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B \frac{\partial \beta}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \omega_2 = A \frac{\partial \alpha}{\partial y} + B \frac{\partial \beta}{\partial y} + \Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y}. \quad (25_1)$$

Такъ какъ правыя части уравненій (8_1) составлены изъ $\omega_i\,(i = 1, 2, 3)$ такъ, какъ ω_i изъ u, v и w, а сами ω_i составляются изъ A, B и Γ, какъ u, v и w изъ a, b и c [рав. (23)], то

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial x} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial y} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = P_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \beta}{\partial z} + P_3 \frac{\partial \gamma}{\partial z}\,,$$

гдѣ

$$P_1 = \varepsilon \frac{h_2 h_3}{h_1}\left[\frac{\partial B}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}\right],\ P_2 = \varepsilon \frac{h_3 h_1}{h_2}\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \gamma}\right],\ P_3 = \varepsilon \frac{h_2 h_1}{h_3}\left[\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right]$$

Отсюда получаемъ слѣдующія уравненія равновѣсія въ ортогональныхъ координатахъ

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}\,, \\ 2(k+1)\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \gamma}\,, \\ 2(k+1)\frac{h_3}{h_2 h_1}\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} &= \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (27)$$

Въ выраженія P_1, P_2 и P_3 входитъ ε^2; можемъ положить $\varepsilon = 1$, причемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2 h_3} A = \frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial\gamma} - \frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial\beta}, \quad \frac{h_2}{h_1 h_3} B = \frac{\partial\left(\frac{W}{h_3}\right)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial\gamma}, \\ \frac{h_3}{h_1 h_2} \varGamma = \frac{\partial\left(\frac{U}{h_1}\right)}{\partial\beta} - \frac{\partial\left(\frac{V}{h_2}\right)}{\partial\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (28)$$

Изъ уравненій (27) непосредственно слѣдуетъ, что θ удовлетворяетъ такому уравненію въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

что представляетъ, какъ извѣстно, преобразованіе къ ортогональнымъ координатамъ уравненія $\varDelta_2\theta = 0$.

II. Ортогональныя системы для тѣлъ вращенія.

§ 5.

Положимъ, требуется рѣшить вопросъ о равновѣсіи какого-либо упругаго изотропнаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его поверхности, уравненіе которой

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

въ предположеніи, что на внутреннія его массы не дѣйствуетъ силъ. Строимъ такую ортогональную систему поверхностей параметровъ α, β и γ, чтобы къ семейству перваго изъ нихъ принадлежала и поверхность (30). Вопросъ о равновѣсіи тѣла приведется, такимъ образомъ, къ интегрированію уравненій (27) при условіи, что A_α, B_α и $\varGamma_\alpha$ имѣютъ заданныя значенія на поверхности (30).

При настоящихъ средствахъ анализа нѣтъ возможности проинтегрировать эти уравненія, не дѣлая никакихъ предположеній или относительно распредѣленія напряженій внутри даннаго тѣла (или даннаго класса тѣлъ), или относительно характера функцій, выражающихъ проекціи на координатныя оси перемѣщеній U, V и W. Дать соотвѣтствующую гипотезу относительно тѣхъ или другихъ столь же затруднительно, вообще говоря, какъ и проинтегрировать уравненія не зависимо отъ всякихъ гипотезъ; но для нѣкоторыхъ частныхъ видовъ тѣлъ возможно построить таковыя.

Примѣромъ могутъ служить гипотезы С. Венана и Клебша [1]) о напряженіяхъ внутри цилиндрическихъ тѣлъ.

Въ настоящей работѣ я обращаю вниманіе на другой обширный классъ тѣлъ, для которыхъ также не трудно дать гипотезу относительно перемѣщеній U, V и W; для нѣкоторыхъ изъ этихъ тѣлъ получимъ опредѣленное рѣшеніе задачи, оправдывающее сдѣланное предположеніе. Я разумѣю тѣла вращенія [2]).

Примемъ за ось z-овъ прямоугольной системы координатъ ось вращенія такого тѣла и пересѣчемъ его какой либо плоскостью, проходящею черезъ эту ось. Эта плоскость пересѣчетъ поверхность тѣла по нѣкоторой кривой, вращеніемъ которой вокругъ оси z-овъ и можетъ быть образовано данное тѣло. Проведемъ въ одной изъ этихъ плоскостей прямую, перпендикулярную къ оси z-овъ, принявъ ее за ось y'-овъ прямоугольной системы координатъ съ осями z и y'. Строимъ въ этой плоскости ортогональную систему координатъ съ параметрами α и β такъ, чтобы къ семейству одного изъ нихъ (положимъ α) принадлежала и образующая кривая поверхности тѣла. При этомъ

$$z = f_1(\alpha, \beta), \qquad y' = f_2(\alpha, \beta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Называя черезъ φ азимутальный уголъ, опредѣляющій положеніе меридіанальной плоскости по отношенію къ какой либо изъ нихъ, принятой за неподвижную, и принимая послѣднюю за плоскость zx-овъ прямоугольной системы координатъ, находимъ, что

$$x = f_2(\alpha, \beta)\cos\varphi, \quad y = f_2(\alpha, \beta)\sin\varphi, \quad z = f_1(\alpha, \beta) \; . \; . \; . \; (32)$$

Получается ортогональная система координатъ, состоящая изъ двухъ поверхностей вращенія параметровъ α и β и меридіанальныхъ плоскостей параметра φ.

Такъ какъ

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2\right] d\alpha^2 + \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2 + f_2{}^2 d\varphi^2,$$

то первые дифференціальные параметры системы будутъ

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2}}, \quad h_3 = \frac{1}{f_2}, \; (33)$$

и не зависятъ отъ φ.

---

[1]) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper". Leipzig, 1862.

[2]) Для нѣкоторыхъ тѣлъ вращенія можно проинтегрировать уравненія (27) независимо отъ какой бы то ни было гипотезы, но при этомъ встрѣчаются значительныя затрудненія въ опредѣленіи произвольныхъ постоянныхъ по предѣльнымъ условіямъ задачи, вслѣдствіе чего я и не разсматриваю пока общаго рѣшенія.

Предполагая, что въ общихъ уравненіяхъ равновѣсія (27) и (28) γ соотвѣтствуетъ φ, и допуская, что U, V и W не зависятъ отъ этой перемѣнной, получаемъ

$$\theta = h_1 h_2 h_3 \left(\frac{\partial \dfrac{U}{h_2 h_3}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dfrac{V}{h_1 h_3}}{\partial \beta} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Равенства (28) обратятся въ такія

$$\left. \begin{aligned} &\frac{h_1}{h_2 h_3} A = -\frac{\partial \left(\dfrac{W}{h_3} \right)}{\partial \beta}, \quad \frac{h_2}{h_1 h_3} B = \frac{\partial \left(\dfrac{W}{h_3} \right)}{\partial \alpha} \\ &\frac{h_3}{h_1 h_2} \Gamma = \frac{\partial \left(\dfrac{U}{h_1} \right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \left(\dfrac{V}{h_2} \right)}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

а самыя уравненія равновѣсія (27) дадутъ

$$\left. \begin{aligned} &2(k+1) \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}, \quad 2(k+1) \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha}, \\ &\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \right\} . \quad (36)$$

такъ какъ A, B, Γ и θ, очевидно, не зависятъ отъ φ.

Замѣтимъ, что A и B зависятъ только отъ W, а Γ только отъ U и V; первыя два изъ предыдущихъ уравненій и послужатъ для опредѣленія послѣднихъ.

Уравненіе (29) въ разсматриваемомъ случаѣ приведется къ такому

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_2}{h_1 h_2} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Найдя функцію θ, получимъ интеграціей двухъ первыхъ изъ уравненій (36) и функцію Γ, послѣ чего опредѣлимъ U и V при помощи уравненій

$$\frac{h_3}{h_1 h_2} \Gamma = \frac{\partial \left(\dfrac{U}{h_1} \right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \left(\dfrac{V}{h_2} \right)}{\partial \alpha}, \quad \theta = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial \left(\dfrac{U}{h_2 h_3} \right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \left(\dfrac{V}{h_1 h_3} \right)}{\partial \beta} \right]. \quad (38)$$

Функція W опредѣлится независимо отъ θ и Γ по третьему изъ уравненій (36). Произвольныя же постоянныя, которыя войдутъ при интегрированіи, найдутся по предѣльнымъ условіямъ задачи: по заданнымъ силамъ, дѣйствующимъ на поверхности, ограничивающей тѣло.

Проекціи напряженій при сдѣланной гипотезѣ будутъ

$$A_\alpha = 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\alpha} - \frac{1}{h_1}\left(Uh_1\frac{\partial h_1}{\partial\alpha} + Vh_2\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)\right]\right\},$$

$$B_\beta = 2K\left\{k\theta + \left[\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\beta} - \frac{1}{h_2}\left(Uh_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + Vh_3\frac{\partial h_2}{\partial\beta}\right)\right]\right\},$$

$$\Gamma_\gamma = 2K\left[k\theta - \frac{1}{h_3}\left(Uh_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha} + Vh_2\frac{\partial h_3}{\partial\beta}\right)\right],$$

$$B_\gamma = \Gamma_\beta = K\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\beta}, \quad \Gamma_\alpha = A_\gamma = K\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial(Wh_3)}{\partial\alpha},$$

$$A_\beta = B_\alpha = K\left[\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial(Uh_1)}{\partial\beta} + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial(Vh_2)}{\partial\alpha}\right].$$

III. О тѣлахъ, ограниченныхъ поверхностями вращенія второго порядка.

§ 6.

Задача прежде всего приводится къ интегрированію уравненія (37). Наиболѣе удобная для вопросовъ упругости форма интеграла этого уравненія представится въ случаяхъ, когда θ можетъ быть выражено въ видѣ ряда, каждый членъ котораго есть произведеніе двухъ функцій, одна изъ которыхъ зависитъ лишь отъ α, а другая—отъ β. Частное рѣшеніе такого типа получится, если

$$\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\alpha)F_1(\beta), \quad \frac{h_2}{h_1h_3} = \psi(\alpha)\psi_1(\beta),$$

или

$$\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\alpha), \quad \frac{h_2}{h_1h_3} = F_1(\beta)\ ^{1)}, \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

Очевидно, оба случая приводятся къ одному изъ нихъ и, чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, найдемъ координатныя системы, при которыхъ выполняются условія (39). Выразимъ z и y' (см. предыдущій §) въ функціи α и β такъ, чтобы

$$y' = \frac{1}{h_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} + \frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial y'}{\partial\beta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

при условіяхъ (39).

---

[1]) Или $\frac{h_1}{h_2h_3} = F(\beta)$, $\quad \frac{h_2}{h_1h_3} = F(\alpha)$.

Послѣднія даютъ

$$\frac{1}{h_3^2}=F(\alpha)F_1(\beta),\quad \frac{h_1}{h_2}=\frac{\sqrt{F(\alpha)}}{\sqrt{F_1(\beta)}},\quad h_2=f(\alpha,\,\beta)\,.\;.\;.\;.\;(42)$$

Назовемъ черезъ h'_1, $h_2{}'$ и $h_3{}'$ величины обратныя дифференціальнымъ параметрамъ h_1, h_2 и h_3 и, замѣнивъ $\sqrt{F_1(\beta)}$, $\sqrt{F(\alpha)}$, $\frac{1}{f(\alpha,\,\beta)}$ соотвѣтственно черезъ $\frac{1}{F_1(\beta)}$, $\frac{1}{F(\alpha)}$, $\sqrt{f(\alpha,\,\beta)}$, получимъ

$$h_1{}'=\sqrt{f(\alpha,\,\beta)}\,\frac{F(\alpha)}{F(\beta)},\quad h_2{}'=\sqrt{f(\alpha,\,\beta)},\quad h_3{}'=F(\alpha)F_1(\beta)\,.\;\;.\;(43)$$

Функціи $F(\alpha)$, $F_1(\beta)$ и $f(\alpha,\,\beta)$ пока неопредѣленны. Рѣшеніе вопроса приводится къ отысканію этихъ функцій. Въ дальнѣйшемъ для краткости будемъ обозначать $F(\alpha)$, $F_1(\beta)$ и $f(\alpha,\,\beta)$ просто черезъ F, F_1 и f.

На основаніи извѣстныхъ свойствъ ортогональныхъ системъ [рав. (13)]

$$(h_1{}')^2=\left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2,\quad (h_2{}')^2=\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2.\;.\;.\;(44)$$

Принимая во вниманіе равенство (40) и послѣднее изъ (43), находимъ

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}F_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2=f\frac{F^2}{F_1^2},\quad \left(\frac{dF_1}{d\beta}F\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2=f.\;.\;(45)$$

и сверхъ того [въ силу равенства (41)]

$$F_1F\frac{dF}{d\alpha}\frac{dF_1}{d\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(46)$$

Слѣдовательно [1],

$$f\frac{F^2}{F_1^2}=\frac{F^4}{F_1^2}\left(\frac{dF_1}{d\beta}\right)^2+F_1^2\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)^2.$$

Подставивъ опредѣленное отсюда выраженіе f въ (45), получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}=\pm\frac{F^2}{F_1}\frac{dF_1}{d\beta},\quad \frac{\partial z}{\partial\beta}=\pm\frac{F_1^2}{F}\frac{dF}{d\alpha}.\;.\;.\;.\;.\;.\;(47)$$

Одинъ изъ знаковъ можетъ выбрать произвольно. Чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, возьмемъ въ первомъ выраженіи $+$, во второмъ необходимо должно принять знакъ $-$.

---

[1]) По сокращеніи на f, которое отлично отъ нуля.

Представивъ равенства (47) въ видѣ

$$\frac{1}{F}\frac{\partial z}{\partial \alpha}=F\frac{1}{F_1}\frac{dF_1}{d\beta}, \quad \frac{1}{F_1}\frac{\partial z}{\partial \beta}=-F_1\frac{1}{F}\frac{dF}{d\alpha}, \quad \ldots \ldots (48)$$

и введя вмѣсто перемѣнныхъ α и β двѣ другія α' и β', связанныя съ первыми соотношеніями

$$F d\alpha = d\alpha', \quad F_1 d\beta = d\beta',$$

получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'}=F\frac{dF_1}{d\beta'}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta'}=-F_1\frac{dF}{d\alpha'}\ {}^{1)}. \quad \ldots \ldots (49)$$

Предполагая F и F_1 выраженными въ α' и β' и опуская для простоты значки, имѣемъ

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}\frac{1}{F}+\frac{d^2F_1}{d\beta^2}\frac{1}{F_1}=0, \quad \ldots \ldots (50)$$

т. е.

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}-m^2F=0, \quad \frac{d^2F_1}{d\beta^2}+m^2F_1=0, \quad \ldots \ldots (51)$$

гдѣ m произвольная постоянная.

Въ частности m можетъ быть равно нулю.

Въ первомъ случаѣ $(m=0)$ можемъ положить $F=a'\alpha$, $F_1=b'\beta$, такъ что

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}=a\alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta}=-a\beta,$$

гдѣ черезъ a обозначено произведеніе $a'b'$, и

$$z=\frac{a}{2}(\alpha^2-\beta^2). \quad \ldots \ldots (52)$$

Во второмъ случаѣ $(m \gtrless 0)$

$$F_1=A\cos m\beta + B\sin m\beta,$$

или

$$F_1=A_1\cos m(\beta-\beta_1) \quad \ldots \ldots (53)$$

и

$$F=A_2\left[e^{m(\alpha+\alpha_1)}+e^{-m(\alpha+\alpha_1)}\right]. \quad \ldots \ldots (54)$$

---

[1]) Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'}=\frac{\partial y'}{\partial \beta'}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta'}=-\frac{\partial y'}{\partial \alpha'},$$

т. е. искомыя координатныя системы изотермичны (или приводятся къ таковымъ).

Такимъ образомъ,

$$z = -A_1 A_2 [e^{m(\alpha+\alpha_1)} - e^{-m(\alpha+\alpha_1)}] \sin m(\beta - \beta_1) \; . \; . \; . \; . \; (55)$$

Положивъ

$$m(\alpha + \alpha_1) = \alpha', \quad m(\beta - \beta_1) = -\beta', \quad A_1 A_2 = \frac{c}{2},$$

находимъ, опуская значекъ 1 при α и β

$$z = c\varepsilon(\alpha) \sin\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

гдѣ $\varepsilon(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$.

Далѣе, для $m = 0$

$$y' = a\alpha\beta \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

а для m отличнаго отъ нуля

$$y' = cE(\alpha)\cos\beta \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (58)$$

гдѣ $E(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$.

Такимъ образомъ, условіямъ задачи удовлетворяютъ двѣ системы ортогональныхъ координатъ, для одной

$$x = a\,\alpha\beta\cos\varphi\,, \quad y = a\,\alpha\beta\sin\varphi\,, \quad z = \frac{a}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\,, \; . \; . \; (59)$$

для другой

$$x = cE(\alpha)\cos\beta\cos\varphi\,, \quad y = cE(\alpha)\cos\beta\sin\varphi\,, \quad z = c\varepsilon(\alpha)\sin\beta. \quad (60)$$

Обѣ представляютъ частные случаи эллиптической системы координатъ. Разсмотримъ сѣченіе первой какою-либо изъ меридіанальныхъ плоскостей.

По предыдущему

$$y' = a\alpha\beta\,, \quad z = \frac{a}{2}(\alpha^2 - \beta^2).$$

Исключая параметръ β, находимъ

$$(y')^2 = 2a\alpha^2\left(\frac{a\alpha^2}{2} - z\right).$$

Положивъ

$$2a\alpha^2 = 2p\,, \qquad \frac{a\alpha^2}{2} - z = z_1\,,$$

приведемъ предыдущее уравненіе къ виду

$$(y')^2 = 2pz_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (61)$$

Это уравненіе параболы, ось которой направлена по отрицательному направленію оси z-овъ, а вершина (при данномъ α) находится въ точкѣ

$$z_в = \frac{a\alpha^2}{2}.$$

При $\alpha = 0$ имѣемъ $y' = 0$, $z_в = 0$.

Кривая обращается въ прямую, совпадающую съ отрицательнымъ направленіемъ оси z-овъ.

При возрастаніи α получается рядъ параболъ возрастающаго параметра съ вершиной, удаляющейся въ безконечность по положительному направленію оси z-овъ.

Точно также, исключивъ α, найдемъ

$$(y')^2 = 2p_1 z_1\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

гдѣ

$$2p_1 = 2a\beta^2\,, \quad z_1 = z + \frac{a\beta^2}{2}.$$

Уравненіе (62) представляетъ также параболу, ось которой идетъ по положительному направленію оси z-овъ; при $\beta = 0$ эта кривая обращается въ прямую. Вершина ея всегда лежитъ на отрицательной части оси z-овъ; при $\beta = 0$ совпадаетъ съ началомъ прямоугольной системы zy', при возрастаніи β удаляется по отрицательному направленію оси z и достигаетъ $-\infty$ при $\beta = \infty$.

Для второй системы, въ сѣченіи ея какою-либо меридіанальной плоскостью, получаемъ

$$y' = cE(\alpha)\cos\beta\,, \qquad z = c\varepsilon(\alpha)\sin\beta\,,$$

откуда

$$\frac{(y')^2}{[E(\alpha)]^2} + \frac{z^2}{[\varepsilon(\alpha)]^2} = c^2 \qquad \frac{(y')^2}{\cos^2\beta} - \frac{z^2}{\sin^2\beta} = c^2\ ^{1)}. \quad \ldots \quad (63)$$

Уравненія (63) представляютъ, какъ извѣстно, систему софокусныхъ эллипсовъ и гиперболъ.

Параметры α, β и φ опредѣляютъ, слѣдовательно, въ равенствахъ (59) ортогональную систему координатъ, состоящую изъ двухъ однофокусныхъ параболоидовъ вращенія и меридіанальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую ихъ осей, а въ равенствахъ (60) систему изъ двухъ софокусныхъ эллипсоидовъ и гиперболоидовъ вращенія и также меридіанальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось z-овъ. Въ

---

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coordonées curvilignes“. P. 125.

этихъ случаяхъ (по предыдущему) возможно частное рѣшеніе уравненія (37) въ видѣ произведенія двухъ функцій, каждая изъ которыхъ зависитъ только отъ одного изъ параметровъ.

Понятно, что цилиндрическая и сферическая системы координатъ также удовлетворяютъ этому условію. Въ первомъ случаѣ функція $f(\alpha, \beta)$ въ выраженіяхъ (42) зависитъ отъ одного изъ параметровъ (α или β), во второмъ равна произведенію двухъ функцій $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$.

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что вообще для тѣлъ вращенія, ограниченныхъ поверхностями вращенія второго порядка, частнымъ рѣшеніемъ уравненія (27) будетъ функція $\theta_\alpha \theta_\beta$, гдѣ θ_α обозначаетъ функцію одного α, а θ_β — функцію одного β. Такими тѣлами мы и займемся въ настоящемъ изслѣдованіи.

Начнемъ съ простѣйшаго — прямого кругового цилиндра.

IV. Основныя соотношенія между функціями Бесселя различныхъ порядковъ и квадратуры съ произведеніями этихъ функцій.

§ 7.

Такъ какъ при изслѣдованіи вопроса о равновѣсіи этого тѣла, а также и параболоида вращенія придется имѣть дѣло съ различными свойствами Бесселевыхъ функцій и квадратурами, содержащими произведеніе ихъ, то, во избѣжаніе повтореній, я выпишу основныя соотношенія между этими функціями и разсмотрю нѣкоторыя изъ упомянутыхъ квадратуръ.

Всякая функція Бесселя, обозначаемая черезъ J_j, гдѣ j какая угодно постоянная, и обращающаяся въ Y_j при j цѣломъ отрицательномъ (функція второго рода), удовлетворяетъ, какъ извѣстно, дифференціальному уравненію

$$z\frac{d^2J_j(z)}{dz^2}+\frac{dJ_j(z)}{dz}+z\left(1-\frac{j^2}{z^2}\right)J_j(z)=0\quad.\;.\;.\;.\;.\;(64)$$

и выражается абсолютно сходящимся рядомъ

$$J_j=\sum_0^\infty\frac{(-1)^\mu\left(\frac{z}{2}\right)^{j+2\mu}}{\Gamma(j+\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(65)$$

Если j цѣлое отрицательное число, то

$$\left.\begin{aligned}Y_j=&-\sum_0^\infty\frac{\Gamma(j-\mu)}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-j+2\mu}+\\&+\sum_0^\infty\frac{(-1)^\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{j+2\mu}}{\Gamma(j+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left[2\log\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\frac{\Gamma'(j+\mu+1)}{\Gamma(j+\mu+1)}\right].\;^{1)}\end{aligned}\right\}(66)$$

[1]) См. Jordan, „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique". T. III, p. 238 etc.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{2j}{z}J_j = J_{j-1} + J_{j+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

$$2\frac{dJ_j}{dz} = J_{j-1} - J_{j+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

$$\frac{dJ_j}{dz} = J_{j-1} - \frac{j}{z}J_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

и еще

$$\frac{dJ_j}{dz} = \frac{j}{z}J_j - J_{j+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Такой-же рядъ соотношеній получится и для функцій второго рода Y_j [1]). Уравненіе (64) и аналогичное ему для функціи Y_j даютъ

$$\frac{dJ_j}{dz}Y_j - \frac{dJ_j}{dz}J_j = -\frac{1}{z}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

или

$$J_jY_{j-1} - J_{j-1}Y_j = \frac{1}{z}\ ^{2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Какъ извѣстно,

$$z\frac{d^2J_j(kz)}{dz^2} + \frac{dJ_j(kz)}{dz} + z\left(k^2 - \frac{j^2}{z^2}\right)J_j(kz) = 0,$$

$$z\frac{d^2J_j(lz)}{dz^2} + \frac{dJ_j(lz)}{dz} + z\left(l^2 - \frac{j^2}{z^2}\right)J_j(lk) = 0,$$

гдѣ k и l нѣкоторыя постоянныя.

Отсюда получаемъ

$$(k^2 - l^2)zJ_j(kz)J_j(lz) = -\frac{d}{dz}\left[z\left(J_j(lz)\frac{dJ_j(kz)}{dz} - J_j(kz)\frac{dJ_j(lz)}{dz}\right)\right]$$

Интегрируя это выраженіе и опуская произвольную постоянную, находимъ

$$\int zJ_j(kz)J_j(lz)dz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left[kJ_{j+1}(kz)J_j(lz) - lJ_j(kz)J_{j+1}(lz)\right]. \qquad (73)$$

---

[1]) См. Lommel, „Zur Theorie d. Besselschen Functionen". Mathem. Annalen, Bd. IV, S. 108.

[2]) Если j не цѣлое число, то

$$J_j(z)J_{-j+1}(z) + J_{-j}(z)J_{j-1}(z) = \frac{2}{\pi z}\sin j\pi$$

и

$$\frac{dJ_j}{dz}J_{-j} - \frac{dJ_{-j}}{dz}J_j = \frac{2}{\pi z}\sin j\pi\,.$$

См. Forsyth, „A treatise on differential equations". London, 1888, p. 168.

При $k = l$ правая часть обращается въ неопредѣленность. Опредѣляя ее по извѣстнымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія, заключаемъ, что

$$\int zJ_j^2(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j^2(kz) - J_{j-1}(kz)J_{j+1}(kz)\right]. \quad . \quad . \quad (74)$$

Точно также

$$\int zJ_j(kz)Y_j(lz)dz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left[kJ_{j+1}(kz)Y_j(lz) - lJ_j(kz)Y_{j+1}(lz)\right], \qquad (75)$$

и при $k = l$

$$\int zJ_j(kz)Y_j(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j(kz)Y_j(kz) - J_{j+1}(kz)Y_{j-1}(kz)\right], \qquad (76)$$

или

$$\int zJ_j(kz)Y_j(kz)dz = \frac{z^2}{2}\left[J_j(kz)Y_j(kz) - J_{j-1}(kz)Y_{j+1}(kz)\right]. \qquad (77)$$

Аналогичныя формулы получатся и для двухъ функцій Бесселя второго рода.

Какъ извѣстно,

$$\frac{d}{dz}\left[z^m J_j(z)J_\mu(z)\right] = -z^m\left[J_j(z)J_{\mu+1}(z) + J_\mu(z)J_{j+1}(z)\right] +$$
$$+ (m + j + \mu)z^{m-1}J_jJ_\mu .$$

Замѣнивъ j и μ черезъ $j + 1$ и $\mu + 1$, найдемъ, на основаніи равенства (67),

$$\frac{d}{dz}\left[z^m J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right] = z^m\left(J_j(z)J_{\mu+1}(z) + J_\mu(z)J_{j+1}(z)\right) +$$
$$+ (m - j - \mu - 2)J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z),$$

откуда, полагая $m = j + \mu + 2$, получаемъ

$$\frac{d}{dz}\left[z^{j+\mu+2}\left(J_j(z)J_\mu(z) + J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right)\right] = 2(j+\mu+1)z^{j+\mu+1}J_j(z)J_\mu(z).$$

Слѣдовательно,

$$\int z^{j+\mu+1}J_j(z)J_\mu(z)dz = \frac{z^{j+\mu+2}}{2(j+\mu+1)}\left[J_j(z)J_\mu(z) + J_{j+1}(z)J_{\mu+1}(z)\right]. \; (78)$$

Полагая $j = \mu$, имѣемъ

$$\int z^{2\mu+1}\Big(J_\mu(z)\Big)^2 dz = \frac{z^{2\mu+2}}{2(2\mu+1)}\Big[J_\mu^2(z) + J_{\mu+1}^2(z)\Big] \;. \;. \;. \;. \;(79)$$

Подобныя же формулы будутъ имѣть мѣсто и для функцій второго рода Y_j и Y_μ; выписывать ихъ я не буду. Тоже должно сказать и о случаѣ, когда одна изъ функцій перваго, другая второго рода, такъ что

$$\int z^{j+\mu+1} J_j(z)\, Y_\mu(z)\, dz = \frac{z^{j+\mu+2}}{2(j+\mu+1)}\Big[J_j(z)\, Y_\mu(z) + J_{j+1}(z)\, Y_{\mu+1}(z)\Big] . (80)$$

Эти формулы и другія, подобныя имъ, получены Lommel'емъ въ его статьѣ: „Zur Theorie der Besselschen Functionen“, помѣщенной въ XIV томѣ Math. Annalen. Изъ самаго уравненія, опредѣляющаго функцію Бесселя, замѣчу кстати, можемъ получить рядъ другихъ квадратуръ болѣе общаго типа, не указанныхъ Lommel'емъ, но для нашей цѣли это не представляется необходимымъ.

Выраженія (78), (79), и (80) справедливы для всякихъ j и μ. Полагая $j = \mu = 0$, имѣемъ

$$\int z J_0^2(z)\, dz = \frac{z^2}{2}\Big[J_0^2(z) + J_1^2(z)\Big] \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(81)$$

$$\int z J_0(z) Y_0(z) dz = \frac{z^2}{2}\Big[J_0(z) Y_0(z) + J_1(z) Y_1(z)\Big] \;. \;. \;. \;. \;(82)$$

Формулами этого параграфа мы и воспользуемся впослѣдствіи.

V. О равновѣсіи кругового цилиндра подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности.

§ 8.

Обращаемся къ вопросу о равновѣсіи кругового цилиндра.

Принимая за координатныя оси α, β, γ направленіе r радіуса вектора цилиндрической системы координатъ, прямую параллельную оси z (оси цилиндра) и перпендикуляръ ψ къ меридіанальной плоскости въ разсматриваемой точкѣ (направленный въ сторону возрастающаго угла ψ), назовемъ черезъ U, V и W проекціи перемѣщеній точекъ тѣла на направленія r, z и ψ.

Такъ какъ

$$h_1 = 1\,, \quad h_2 = 1\,, \quad h_3 = \frac{1}{r}\,, \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(83)$$

то уравненія (36) представятся въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &2(k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial r} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial z}, \quad 2(k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\Gamma}{\partial r}, \\ &\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial r} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (84)$$

а уравненія (35) дадутъ

$$rA = -\frac{\partial(Wr)}{\partial z}, \quad rB = \frac{\partial(Wr)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\Gamma = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r}; \; . \; . \; (85)$$

кромѣ того

$$\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(Ur)}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (86)$$

При помощи равенствъ (85) и (86) легко привести первыя два изъ уравненій (84) къ такимъ

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(Ur)}{\partial r}\right) = 0, \\ &(2k+1)r\frac{\partial\theta}{\partial z} + r\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (87)$$

Уравненіе (37) даетъ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (88)$$

Проинтегрировавъ это уравненіе и принимая θ за извѣстную, опредѣлимъ по уравненіямъ (87) U и V. Полученныя выраженія, конечно, должны отождествлять равенство (86).

Послѣднее изъ уравненій (84) въ силу первыхъ двухъ изъ (85) приведется къ виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r}\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (89)$$

§ 9.

Опредѣлимъ состояніе равновѣсія сплошного цилиндра, находящагося подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности.

Частнымъ рѣшеніемъ уравненія (88) будетъ функція

$$\theta^k = \theta_r^k \theta_z,$$

гдѣ θ_r зависитъ только отъ r, а θ_z — только отъ z.

Подставивъ это выраженіе въ упомянутое уравненіе и раздѣливъ обѣ части на произведеніе $\theta_r\theta_z$, найдемъ

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\theta_r^k}{dr}\right]}{\theta_r^k}+\frac{\frac{d^2\theta_z^k}{dz^2}}{\theta_z^k}=0,$$

откуда необходимо

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\theta_r^k}{dr}\right]+m_k^2 r\theta_r^k=0,\\&\frac{d^2\theta_z^k}{dz^2}-m_k^2\theta_r^k=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(90)$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\theta_r^k}{dr}\right]-m_k^2 r\theta_r^k=0,\\&\frac{d^2\theta_z^k}{dz^2}+m_k^2\theta_z^k=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(91)$$

Остановимся на послѣднихъ уравненіяхъ, интеграція которыхъ даетъ

$$\theta_r^k=A_{\theta r}^k J_0(im_kr)+B_{\theta r}^k Y_0(im_kr),$$

$$\theta_z^k=A_{\theta z}^k\cos(m_kz)+B_{\theta z}^k\sin(m_kz),$$

гдѣ $A_{\theta r}^k$, $B_{\theta r}^k$, $A_{\theta z}^k$, $B_{\theta z}^k$ и m_k нѣкоторыя (пока произвольныя) постоянныя. Такъ какъ $Y_0(im_kr)$ при $r=0$ обращается въ безконечность, а θ предполагается непрерывной функціей для всѣхъ точекъ тѣла, то $B_{\theta r}^k=0$, и

$$\theta^k=\left[A_{\theta z}^k\cos m_kz+B_{\theta z}^k\sin m_kz\right]J_0(im_kr)\ldots\ldots(92)$$

гдѣ $A_{\theta z}^k$ и $B_{\theta z}^k$ обозначаютъ произведеніе прежнихъ постоянныхъ того же обозначенія на $A_{\theta r}^k$.

Общее рѣшеніе уравненія (88) будетъ

$$\theta=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[A_{\theta z}^k\cos m_kz+B_{\theta z}^k\sin m_kz\right]J_0(im_kr)\ldots\ldots(93)$$

§ 10.

Положивъ

$$U=\sum_0^\infty U_r^k U_z^k,\quad V=\sum_0^\infty V_r^k V_z^k$$

*

и принявъ во вниманіе выраженіе (93), получимъ изъ уравненій (87)

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}-\frac{1}{r^2}U_r^k\right]U_z^k+U_r^k\frac{d^2U_z^k}{dz^2}+(2k+1)\frac{d\theta_r}{dr}\theta_z=0\,,\\ \left[\frac{d^2V_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV_r^k}{dr}\right]V_z^k+V_r^k\frac{d^2V_z^k}{dz^2}+(2k+1)\theta_r\frac{d\theta_z}{dz}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

Первое изъ этихъ уравненій будетъ удовлетворено, если положимъ $U_z^k=\theta_z^k$ и опредѣлимъ U_r^k изъ уравненія

$$\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}-\left(m_k^2+\frac{1}{r^2}\right)U_r^k=-(2k+1)\frac{d\theta_r}{dr},\;.\;.\quad(95)$$

интеграломъ котораго будетъ выраженіе

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+B_{ur}^kY_1(im_kr)\,,$$

гдѣ

$$A_{ur}^k=(A_{ur}^k)+(2k+1)im_k\frac{m_k^2r^2}{2}\Big[J_1(im_kr)Y_1(im_kr)-J_0(im_kr)Y_2(im_kr)\Big]\,,$$

$$B_{ur}^k=(B_{ur}^k)-(2k+1)im_k\frac{m_k^2r^2}{2}\Big[J_1^2(im_kr)-J_0(im_kr)J_2(im_kr)\Big]\,.$$

(A_{ur}^k) и (B_{ur}^k) произвольныя постоянныя. Въ дальнѣйшемъ будемъ обозначать ихъ просто черезъ A_{ur}^k и B_{ur}^k.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на $J_1(im_kr)$, второе на $Y_1(im_kr)$ и сложивъ, получимъ

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+B_{ur}^kY_1(im_kr)+(2k+1)\frac{m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\,,$$

для чего стоитъ только воспользоваться равенствомъ (72) § 7.

Предполагая U непрерывной функціей координатъ, должны положить $B_{ur}^k=0$, такъ что

$$U_r^k=A_{ur}^kJ_1(im_kr)+(2k+1)\frac{m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(96)$$

§ 11.

Переходимъ къ опредѣленію функціи V.

Положивъ

$$V_z^k=\frac{d\theta_z^k}{dz}=m_k\Big[B_{\theta r}^k\cos m_kz-A_{\theta z}^k\sin m_kz\Big]\,,$$

имѣемъ

$$\frac{d^2 V_z^k}{dz^2} = -m_k^2 \frac{d\theta_z^k}{dz},$$

а для опредѣленія V_r^k получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2 V_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_r^k}{dr} - m_k^2 V_r = -(2k+1)\theta_r^k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

интегралъ котораго будетъ

$$V_r^k = K_1^k J_0(im_k r) + K_2^k Y_0(im_k r),$$

гдѣ

$$K_1^k = A_{vr}^k - \frac{2k+1}{m_k^2}\int J_0(z) Y_0(z) z dz,$$

$$K_2^k = B_{vr}^k + \frac{2k+1}{m_k^2}\int J_0^2(z) z dz,$$

$$z = im_k r,$$

или [на основаніи формулъ (82) и (83)]

$$K_1^k = A_{vr}^k + \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big[J_0(im_k r) Y_0(im_k r) + J_1(im_k r) Y_1(im_k r)\Big],$$

$$K_2^k = B_{vr}^k - \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big[J_0^2(im_k r) + J_1^2(im_k r)\Big].$$

A_{vr}^k и B_{vr}^k произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ,

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(im_k r) + B_{vr}^k Y_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r).$$

Функція V непрерывна, т. е. $B_{vr}^k = 0$, и

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

На основаніи этого равенства и (96) заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty \left(A_{\theta z}^k \cos m_k z + B_{\theta z}^k \sin m_k z\right)\left(A_{ur}^k J_1(im_k r) + \frac{(2k+1)m_k^2 r}{2} J_0(im_k r)\right), \\ V &= \sum_0^\infty m_k \left(B_{\theta z}^k \cos m_k z - A_{\theta z}^k \sin m_k z\right)\left(A_{vr}^k J_0(im_k r) + \frac{(2k+1)ri}{2m_k} J_1(im_k r)\right). \end{aligned}\right\} (99)$$

§ 12.

Подставивъ эти выраженія U, V и θ (рав. 93) въ (86), получимъ, по сокращеніи на θ_r,

$$J_0(im_kr)=\left[A^k_{ur}\frac{dJ_1(im_kr)}{dr}+\frac{(2k+1)m_k^2}{2}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)m_k^2r}{2}\frac{dJ_0(im_kr)}{dr}\right]+$$

$$+\left[A^k_{ur}\frac{J_1(im_kr)}{r}+\frac{(2k+1)m_k^2}{2}J_0(im_kr)\right]-m_k^2\left[A^k_{vr}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)ri}{m_k}J_1(im_kr)\right],$$

или

$$J_0(im_kr)=\frac{A^k_{ur}}{r}\left[r\frac{dJ_1(im_kr)}{dr}+J_1(im_kr)\right]-m_k^2A^k_{vr}J_0(im_kr)+$$

$$+\frac{2k+1}{2i}m_kr\left[im_k\frac{dJ_0(im_kr)}{dr}+J_1(im_kr)\right].$$

Отсюда

$$J_0(im_kr)\left[1-A^k_{ur}im_k+m_k^2A^k_{vr}\right]=0,$$

т. е.

$$A^k_{ur}=-\frac{i(1+m_k^2A^k_{vr})}{m_k}.$$

U и V вещественныя функціи r, $J_0(im_kr)$ также вещественная функція этой перемѣнной, а $J_1(im_kr)=i\psi(r)$, гдѣ $\psi(r)$ вещественная функція r. Отсюда слѣдуетъ, что A^k_{vr} вещественная постоянная, а A^k_{ur} мнимая, вслѣдствіе чего первый членъ выраженія $U^k=U^k_rU^k_z$ будетъ вещественной функціей перемѣнныхъ.

И такъ, окончательно,

$$\left.\begin{aligned}U&=\sum_0^\infty\left[A^k_{\theta z}\cos m_kz+B^k_{\theta z}\sin m_kz\right]\left[-\frac{1+m_k^2A^k_{vr}}{m_k}iJ_1(im_kr)+\right.\\&\qquad\left.+\frac{(2k+1)m_k^2r}{2}J_0(im_kr)\right],\\V&=\sum_0^\infty\left[B^k_{\theta z}\cos m_kz-A^k_{\theta z}\sin m_kz\right]\left[m_kA^k_{vr}J_0(im_kr)+\frac{(2k+1)ri}{2}J_1(im_kr)\right].\end{aligned}\right\}\quad(100)$$

§ 13.

Представивъ уравненіе (89) въ видѣ

$$\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{1}{r^2}W+\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=0$$

и положивъ

$$W = \sum_0^\infty W_r^k W_z^k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

получимъ для опредѣленія W_r^k и W_z^k уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 W_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_r^k}{dr} - \left(n_k^2 + \frac{1}{r^2}\right) W_r^k = 0, \\ \frac{d^2 W_z^k}{dz^2} + n_k^2 W_z^k = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 W_r^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_r^k}{dr} + \left(n_k^2 - \frac{1}{r^2}\right) W_r^k = 0, \\ \frac{d^2 W_z^k}{dz^2} - n_k^2 W_z^k = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Послѣдними воспользуемся впослѣдствіи, а теперь остановимся на первыхъ. Интеграція перваго изъ нихъ даетъ

$$W_r^k = A_{wr}^k J_1(in_k r) + B_{wr}^k Y_1(in_k r).$$

При условіи непрерывности функціи W имѣемъ $B_{wr}^k = 0$, такъ что

$$W_r^k = A_{wr}^k J_1(in_k r), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

гдѣ A_{wr}^k произвольная постоянная. Изъ второго же слѣдуетъ, что

$$W_z^k = A_{wz}^k \cos n_k z + B_{wz}^k \sin n_k z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Такимъ образомъ,

$$W = \sum_0^\infty \left[A_{wz}^k \cos n_k z + B_{wz}^k \sin n_k z \right] J_1(in_k r), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

гдѣ подъ A_{wz}^k и B_{wz}^k разумѣются произведенія постоянныхъ равенства (105) на A_{wr}^k.

§ 14.

Остается опредѣлить постоянныя по предѣльнымъ условіямъ задачи. Принимая во вниманіе послѣднія формулы § 3, имѣемъ для даннаго случая

$$\left.\begin{aligned}
&R_r = 2K\left[k\theta + \frac{\partial U}{\partial r}\right], \quad Z_z = 2K\left[k\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\right],\\
&\Psi_\psi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r}\right],\\
&Z_\psi = \Psi_z = K\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \Psi_r = R_\psi = Kr\frac{\partial\left(\dfrac{W}{r}\right)}{\partial r},\\
&R_z = Z_r = K\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r}\right).
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (107)$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}
&R_r = 2K\sum_0^\infty\left[\varphi_{1k}(\xi) + A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi)\right]\left[A^k{}_z\cos m_kz + B^k_{\theta z}\sin m_kz\right],\\
&Z_z = K\sum_0^\infty\left[\varphi_{1k}(\xi) + A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi)\right]\left[B^k_{\theta z}\cos m_kz - A^k_{\theta z}\sin m_kz\right],\\
&\Psi_r = K\sum_0^\infty J_2(\xi)\left[A^{1k}_{wz}\cos n_kz + B^{1k}_{wz}\sin n_kz\right],
\end{aligned}\right\} (108)$$

гдѣ

$$\xi = im_kr, \quad \zeta = in_kr$$

$$\psi_{1k}(\xi) = kJ_0(\xi) + \frac{d}{dr}\left[\frac{(2k+1)m_k^2r}{2}J_0(\xi) - \frac{iJ_1(\xi)}{m_k}\right],$$

$$\psi_{2k}(\xi) = -m_ki\frac{dJ_1(\xi)}{dr},$$

$$\varphi_{1k}(\xi) = \frac{(2k+1)m_k^3r}{2}J_0(\xi) - iJ_1(\xi) + \frac{2k+1}{2}i\frac{d}{dr}\left[rJ_1(\xi)\right],$$

$$\varphi_{2k}(\xi) = m_k\left[\frac{dJ_0(\xi)}{dr} - m_kiJ_1(\xi)\right] = -2im_k^2J_1(\xi),$$

$$A^{1k}_{wz} = \frac{A^k_{zw}n_k}{i}, \quad B^{1k}_{wr} = \frac{B^k_{zw}n_k}{i}.$$

ψ_{ik}, $\varphi_{ik}(i = 1, 2)$ суть вещественныя функціи r.

Назовемъ черезъ a радіусъ основанія цилиндра, а черезъ $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ три пока произвольныхъ функціи перемѣнной z. Пусть на поверхности

$$(R_r)_{r=a} = f_1(z), \quad (Z_r)_{r=a} = f_2(z), \quad (\Psi_r)_{r=a} = f_3(z),$$

или

$$\left.\begin{array}{r}2K\sum_0^\infty\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\psi_{2k}(\xi_0)\right]\left[A_{\theta z}^k\cos m_k z+B_{\theta z}^k\sin m_k z\right]=f_1(z),\\ K\sum_0^\infty\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\varphi_{2k}(\xi_0)\right]\left[B_{\theta z}^k\cos m_k z-A_{\theta z}^k\sin m_k z\right]=f_2(z),\\ K\sum_0^\infty J_2(\xi_0)\left[A_{wz}^{1k}\cos n_k z+B_{wz}^{1k}\sin n_k z\right]=f_3(z),\end{array}\right\}\quad(109)$$

гдѣ $\xi_0=im_k a$, $\zeta_0=in_k a$.

Постоянныя m_k и $n_k(k=0,1,2\ldots\infty)$ произвольны, также какъ и $A_{\theta z}^k$, $B_{\theta z}^k$ и A_{vr}^k.

Назовемъ высоту цилиндра черезъ l. Положимъ

$$z=\frac{l}{2\pi}z_1.$$

При измѣненіи z отъ 0 до l, z_1 измѣняется отъ 0 до 2π.

Первыя два изъ равенствъ (109) даютъ

$$\left.\begin{array}{r}\sum_0^\infty\left[M_k'\cos\frac{m_k l z_1}{2\pi}+M_k''\sin\frac{m_k l z_1}{2\pi}\right]=\frac{1}{2K}f_1\left(\frac{lz_1}{2\pi}\right),\\ \sum_0^\infty\left[N_k'\cos\frac{m_k l z_1}{2\pi}-N_k''\sin\frac{m_k l z_1}{2\pi}\right]=\frac{1}{K}f_2\left(\frac{lz_1}{2\pi}\right),\end{array}\right\}\quad\ldots(110)$$

гдѣ

$$M_k'=A_{\theta z}^k\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\psi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$M_k''=B_{\theta z}^k\left[\psi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\psi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$N_k'=B_{\theta z}^k\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\varphi_{2k}(\xi_0)\right],$$

$$N_k''=A_{\theta z}^k\left[\varphi_{1k}(\xi_0)+A_{vr}^k\varphi_{2k}(\xi_0)\right].$$

Выберемъ постоянныя m_k такъ, чтобы

$$\frac{m_k l}{2\pi}=k,\quad\text{т. е.}\quad m_k=\frac{2\pi k}{l}.$$

Обозначивъ $\frac{1}{2K\pi}f_1\left(\frac{l}{2\pi}z_1\right)$, $\frac{1}{K\pi}f_2\left(\frac{l}{2\pi}z_1\right)$ просто черезъ f_1 и f_2, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\sum_0^\infty\left[M'_k\cos kz_1+M''_k\sin kz_1\right]&=\pi f_1\,,\\ \sum_0^\infty\left[N'_k\cos kz_1-N''_k\sin kz_1\right]&=\pi f_2.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(110_1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$M'_k=\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1\qquad M''_k=\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1\,,$$

$$N'_k=\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1\,,\quad N''_k=-\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1\,,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}A^k_{\theta z}\psi_{1k}(\xi_0)+A^k_{\theta z}A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1\,,\\ A^k_{\theta z}\varphi_{1k}(\xi_0)+A^k_{\theta z}A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi_0)&=-\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1\,,\\ B^k_{\theta z}\psi_{1k}(\xi_0)+B^k_{\theta z}A^k_{vr}\psi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1\,,\\ B^k_{\theta z}\varphi_{1k}(\xi_0)+B^k_{\theta z}A^k_{vr}\varphi_{2k}(\xi_0)&=\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1.\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(111)$$

Функціи f_1 и f_2, какъ показываютъ эти равенства, не вполнѣ произвольны, ибо, по исключеніи произвольныхъ постоянныхъ, получается соотношеніе

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f_1\cos kz_1dz_1.\int_0^{2\pi}f_2\cos kz_1dz_1+\int_0^{2\pi}f_1\sin kz_1dz_1.\int_0^{2\pi}f_2\sin kz_1dz_1=0\\ (k=1,\,2\ldots\infty).\end{aligned}\right\}(112)$$

Сверхъ того онѣ должны разлагаться въ сходящіеся ряды Фурье, т. е. должны быть функціями ограниченной варіаціи (fonctions à variation limitée) [1]. Условіе (112) будетъ выполнено, если положимъ, напримѣръ, $f_2=0$, или $f_1=0$, т. е. допустимъ, что на поверхность цилиндра дѣйствуютъ силы, лежащія въ плоскостяхъ нормальныхъ сѣченій, или въ плоскостяхъ, касательныхъ къ его поверхности.

---

[1]) См. Jordan. „Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique". T. II, p. 216.

Замѣтимъ еще, что f_2 при разложеніи въ рядъ Фурье не должна содержать члена, независящаго отъ z_1.

Рѣшая уравненія (111), получаемъ

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{\theta z}^{k} &= \frac{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1 + \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1}{\Delta_k}, \\
B_{\theta z}^{k} &= \frac{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1 - \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \cos kz_1 dz_1}{\Delta_k}, \\
A_{vr}^{k} &= \frac{-\psi_{1k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1 + \varphi_{1k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_1 \cos kz_1 dz_1}{\varphi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2} f_1 \cos kz_1 dz_1 + \psi_{2k}(\xi_0)\int_0^{2\pi} f_2 \sin kz_1 dz_1},
\end{aligned}
\right\} \quad (113)
$$

гдѣ

$$\Delta_k = \psi_{1k}(\xi_0)\varphi_{2k}(\xi_0) - \varphi_{1k}(\xi_0)\psi_{2k}(\xi_0)$$

постоянной, не равной нулю.

Если $f_2 = 0$, то

$$A_{\theta z}^{k} = P\int_0^{2\pi} f_1 \cos kz_1 dz_1, \quad B_{\theta z}^{k} = P\int_0^{2\pi} f_1 \sin kz_1 dz_1$$

$$A_{vr}^{k} = \frac{\varphi_{1k}(\xi_0)}{\varphi_{2k}(\xi_0)}.$$

Послѣдняя постоянная, какъ видимъ, не зависитъ отъ произвольной функціи $f_1(z)$. Тотъ-же результатъ получимъ, положивъ $f_1 = 0$.

Формулы (113) справедливы для всякаго k, начиная отъ 1. При $k = 0$ имѣемъ

$$A_{\theta z}^{0} = \frac{1}{4\pi Kk}\int_0^{\frac{1}{2\pi}} f_1\left(\frac{l}{2\pi} z_1\right) dz_1,$$

а постоянная A_{vr}^{0} выключается сама собою, такъ какъ входитъ въ выраженія U, V и въ проекціи напряженій или съ множителемъ m_k, или съ коэффиціентомъ при функціи, обращающейся въ нуль при $m_k = 0$.

Вводя, подобно предыдущему, перемѣнную z_1 въ послѣднее изъ равенствъ (109) и полагая

$$n_k = \frac{2\pi k}{l} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

находимъ

$$A_{wz}^{1k} = \frac{1}{D_k}\int_0^{2\pi} f_3 \cos kz_1 dz_1, \quad B_{wz}^{1k} = \frac{1}{D_k}\int_0^{2\pi} f_3 \sin kz_1 dz_1, \quad . \ . \ (114)$$

гдѣ

$$D_k = KJ_2(\xi_0)\,, \quad f_3 = \frac{1}{\pi} f_3\left(\frac{l}{2\pi} z_1\right)$$

$$k = (1, 2 \ldots \infty).$$

Всѣ постоянныя опредѣлены.

§ 15.

Второе, третье и четвертое изъ равенствъ (107) даютъ

$$\left.\begin{aligned} Z_z &= 2K\sum_0^\infty \left(X_{1k} + A_{vr}^k X_{2k}\right)\left[A_{\theta z}^k \cos kz_1 + B_{\theta z}^k \sin kz_1\right], \\ \Psi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty \left(Y_{1k} + A_{vr}^k Y_{2k}\right)\left[A_{\theta z}^k \cos kz_1 + B_{\theta z}^k \sin kz_1\right], \\ Z_\varphi &= \Psi_z = K\sum_0^\infty \left[B_{wz}^{1k} \cos kz_1 - A_{wz}^{1k} \sin kz_1\right] Z_k, \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

гдѣ

$$X_{1k} = kJ_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right) - \frac{2\pi k(2k+1)}{2l} irJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right),$$

$$X_{2k} = -\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 J_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right),$$

$$Y_{1k} = \left[k + \frac{2k+1}{r}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2\right] J_0\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right) - \frac{l}{2\pi k}\,\frac{iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} ir\right)}{r},$$

$$Y_{2k} = -\frac{2\pi k}{l}\,\frac{iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} r\right)}{r}, \quad Z_k = \frac{2\pi k}{l} iJ_1\left(\frac{2\pi k}{l} r\right),$$

а $A_{\theta z}^k \ldots A_{wz}^{1k}$ постоянныя, опредѣленныя равенствами (113) и (114).

Если $f_3(z) = 0$, т. е. силы, приложенныя къ поверхности цилиндра, лежатъ въ меридiанальныхъ плоскостяхъ, то $A_{wz}^{1k} = B_{wz}^{1k} = 0$ и, на основанiи послѣднихъ изъ равенствъ (106) и (115), $\Psi_r = Z_\varphi = \Psi_z = 0$ для всѣхъ точекъ тѣла.

Если $f_2(z)$ разлагается въ рядъ, содержащiй только sinus'ы кратныхъ дугъ, то $B_{\theta z}^k = 0$ и $Z_r = 0$ на основанiяхъ цилиндра (т. е. при $z_1 = 0$ и 2π); въ этомъ случаѣ $f_1(z)$ должно разлагаться въ рядъ по cosinus'амъ кратныхъ дугъ. Если послѣднему условiю удовлетворяетъ $f_2(z)$, то $A_{\theta z}^k = 0$ и на основанiяхъ цилиндра $Z_z = 0$, f_1 при этомъ должно разлагаться въ рядъ по sinus'амъ кратныхъ дугъ. Функцiя Ψ_φ убываетъ по мѣрѣ приближенія точекъ къ основаніямъ цилиндра и для точекъ безконечно близкимъ къ нимъ обращается въ нуль.

Ряды (100_1) и (106), сходящіеся для $r=a$ (рад. основ. цилиндра), будутъ сходиться и для всѣхъ вещественныхъ значеній $r<a$, ибо mod. U_r^k, V_r^k и W_r^k суть возрастающія функціи r [1]).

VI. О равновѣсіи полаго цилиндра подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его основаніямъ.

§ 16.

Рѣшимъ теперь вопросъ о равновѣсіи полаго кругового цилиндра подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ, приложенныхъ къ его основаніямъ, предполагая, что на его боковую поверхность не дѣйствуетъ силъ.

Полагая, по прежнему,

$$\theta=\sum_0^\infty \theta^k, \quad \theta^k=\theta_z^k\theta_z^k,$$

получаемъ для опредѣленія θ_r^k и θ_z^k уравненія (91), интеграція которыхъ даетъ

$$\left.\begin{aligned}\theta_r^k&=A_{\theta r}^k J_0(m_k r)+B_{\theta r}^k Y_0(m_k r),\\ \theta_z^k&=A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (116)$$

Слѣдовательно,

$$\theta=\sum_0^\infty\left[A_{\theta r}^k J_0(m_k r)+B_{\theta z}^k Y_0(m_k r)\right]\left[A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right], \ldots (117)$$

гдѣ $A_{\theta r}^k$, $B_{\theta r}^k$, $A_{\theta z}^k$, $B_{\theta z}^k$ постоянныя, не равныя нулю.

Положивъ, какъ и прежде,

$$U=\sum_0^\infty U_r^k U_z^k, \quad V=\sum_0^\infty V_r^k V_z^k,$$

получимъ

$$U_z^k=A_{\theta z}^k e^{m_k z}+B_{\theta z}^k e^{-m_k z}=\theta_z^k, \ldots\ldots (118)$$

$$\frac{d^2U_r^k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_r^k}{dr}+\left(m_k^2-\frac{1}{r}\right)U_r^k=-(2k+1)\frac{d\theta_r^k}{dr}, \ldots (119)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$U_r^k=K_{1k}J_1(m_k r)+K_{2k}Y_1(m_k r), \ldots\ldots (120)$$

гдѣ

[1]) По крайней мѣрѣ для значеній r, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла.

$$K_{1k} = A^k_{ur} - (2k+1)m_k A^k_{\theta r}\frac{r^2}{2}\Big[J_1(m_kr)Y_1(m_kr) - J_0(m_kr)Y_2(m_kr)\Big] -$$

$$- (2k+1)m_k B^k_{\theta r}\frac{r^2}{2}\Big[Y_1^2(m_kr) - Y_0(m_kr)Y_2(m_kr)\Big],$$

$$K_{2k} = B^k_{ur} + (2k+1)m_k A^k_{\theta r}\frac{r^2}{2}\Big[J_1^2(m_kr) - J(m_kr)J_2(m_kr)\Big] +$$

$$+ (2k+1)m_k B^k_{\theta r}\frac{r^2}{2}\Big[J_1(m_kr)Y_1(m_kr) - J_2(m_kr)Y_0(m_kr)\Big],$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} U^k_r = A^k_{ur}J_1(m_kr) + B^k_{ur}Y_1(m_kr) - (2k+1)\frac{r}{2}\Big[A^k_{\theta r}J_0(m_kr) + \\ + B^k_{\theta r}Y_0(m_kr)\Big], \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

въ чемъ легко убѣдиться при помощи фурмулъ § 7.

A^k_{ur} и B^k_{ur} новыя произвольныя постоянныя.

Далѣе,

$$V^k_z = m_k\Big[A^k_{\theta z}e^{m_kz} - B^k_{\theta z}e^{-m_kz}\Big] = \frac{d\theta^k_z}{dz} \quad \ldots\ldots (122)$$

и

$$\frac{d^2V^k_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV^k_r}{dr} + m_k^2V^k_r = -(2k+1)\theta^k_r. \quad \ldots\ldots (123)$$

Отсюда

$$V^k_r = M_{1k}J_0(m_kr) + M_{2k}Y_0(m_kr), \quad \ldots\ldots (124)$$

гдѣ

$$M_{1k} = A^k_{vr} + \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big\{A^k_{\theta r}\Big[J_0(m_kr)Y_0(m_kr) + J_1(m_kr)Y_1(m_kr)\Big] +$$

$$+ B^k_{\theta r}\Big[Y_0^2(m_kr) + Y_1^2(m_kr)\Big]\Big\},$$

$$M_{2k} = B^k_{vr} - \frac{(2k+1)r^2}{2}\Big\{A^k_{\theta r}\Big[J_0^2(m_kr) + J_1^2(m_kr)\Big] +$$

$$+ B^k_{\theta r}\Big[J_0(m_kr)Y_0(m_kr) + J_1(m_kr)Y_1(m_kr)\Big]\Big\}.$$

A^k_{vr} и B^k_{vr} произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно,

$$V_r^k = A_{vr}^k J_0(m_k r) + B_{vr}^k Y_0(m_k r) - \frac{(2k+1)r}{2m_k}\left[A_{\theta r}^k J_1(m_k r) + B_{\theta r}^k Y_1(m_k r)\right]. \quad (125)$$

Равенства (118), (121), (122) и (125) даютъ слѣдующія выраженія для U и V

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty \left[A_{\theta z}^k e^{m_k z} + B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right]\left[\varepsilon_{m_k u} - \frac{(2k+1)r}{2}\varrho_{m_k \theta}\right], \\ V &= \sum_0^\infty \left[A_{\theta z}^k e^{m_k z} - B_{\theta z}^k e^{-m_k z}\right]\left[m_k \varrho_{m_k v} - \frac{(2k+1)r}{2}\varepsilon_{m_k \theta}\right], \end{aligned}\right\} \quad (126)$$

гдѣ ε_{m_k} и ϱ_{m_k} суть интегралы уравненій

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left(m_k^2 - \frac{1}{r^2}\right)F = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + m_k^2 F = 0.$$

Значки u, v и θ указываютъ на постоянныя, отъ которыхъ зависятъ эти интегралы.

Изъ уравненій (103) § 13 получаемъ

$$\left.\begin{aligned} W_z^k &= A_{wr}^k e^{n_k z} + B_{wz}^k e^{-n_k z}, \\ W_r^k &= A_{wr}^k J_1(n_k r) + B_{wr}^k Y_1(n_k r), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (127)$$

гдѣ A_{wz}^k, B_{wz}^k, A_{wr}^k и B_{wr}^k произвольныя постоянныя, и

$$W = \sum_0^\infty \left[A_{wz}^k e^{n_k z} + B_{wz}^k e^{-n_k z}\right]\varepsilon_{n_k w} \ldots\ldots \quad (128)$$

Подставивъ найденныя выраженія U, V и θ въ равенство (85), получимъ (по сокращеніи на θ_z)

$$\begin{aligned} A_{\theta r}^k J_0 + B_{\theta r}^k Y_0 &= A_{ur}^k\left[\frac{dJ_1}{dr} + \frac{J_1}{r}\right] + B_{ur}^k\left[\frac{dY_1}{dr} + \frac{Y_1}{r}\right] - \\ &- (2k+1)\left[A_{\theta r}^k J_0 + B_{\theta r}^k Y_0\right] + m_k^2\left[A_{vr}^k J_0 + B_{vr}^k Y_0\right] - \\ &- \frac{2k+1}{2}r\left[A_{\theta r}^k\left(\frac{dJ_0}{dr} + m_k J_1\right) + B_{\theta r}^k\left(\frac{dY_0}{dr} + m_k Y_1\right)\right]^{1)}. \end{aligned}$$

[1]) Въ дальнѣйшемъ будемъ вмѣсто $J_0(m_k r)$ и т. д. писать просто J_0 и т. д.

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\,A^k_{\theta r} &= m_k A^k_{ur} + m_k^2 A^k_{vr}\,, \\ 2(k+1)\,B^k_{\theta r} &= m_k B^k_{ur} + m_k^2 B^k_{vr}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (129)$$

Такимъ образомъ, каждый членъ рядовъ, выражающихъ U и V, содержитъ только по четыре произвольныхъ постоянныхъ.

§ 17.

Положимъ

$$\varepsilon_{m_k} = \left(2A^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m} A^k_{\theta r}\right) J_0 + \left(2B^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k} B^k_{\theta r}\right) Y_0 +$$

$$+ (2k+1)\, r \left(A^k_{\theta r} J_1 + B^k_{\theta r} Y_1\right).$$

Функція ε_{m_k} удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d^2\varepsilon_{m_k}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varepsilon_{m_k}}{dr} + m_k^2 \varepsilon_{m_k} = 2(2k+1) m_k \varrho_{m_k\theta}. \quad \ldots (130)$$

Легко видѣть, что

$$U_r = -\frac{1}{2m_k}\left(\varepsilon_{m_k}\right)' - \frac{k+1}{m_k^2}\left(\varrho_{m_k\theta}\right)',$$

и

$$V_r = \frac{1}{2m_k}\left[\frac{2(k+1)}{m_k}\varrho_{m_k\theta} - \varepsilon_{m_k}\right].$$

Такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty -\theta^k_z \left[\frac{1}{2m_k}\left(\varepsilon_{m_k}\right)' + \frac{k+1}{m_k^2}\left(\varrho_{m_k\theta}\right)'\right], \\ V &= \sum_0^\infty \frac{d\theta^k_z}{dz}\frac{1}{2m_k}\left[\frac{2(k+1)}{m_k}\varrho_{m_k\theta} - \varepsilon_{m_k}\right], \\ W &= \sum_0^\infty -W^k_z \frac{1}{n_k}\left(\varrho_{n_k w}\right)', \\ \theta &= \sum_0^\infty \theta^k_z \varrho_{m_k\theta}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (131)$$

Составляя выраженія проекцій на координатныя оси напряженій [равенства (107)], получаемъ

$$k\theta^k + \frac{\partial U^k}{\partial r} = \left[k\varrho_{m_k\theta} - \frac{1}{2m_k}(\varepsilon_{m_k})'' - \frac{k+1}{m_k^2}(\varrho_{m_k\theta})''\right]\theta_z,$$

или, на основаніи уравненій (130) и перваго изъ (91),

$$k\theta^k + \frac{\partial U^k}{\partial r} = \left[\frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})' + \frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right]\theta_z.$$

Далѣе,

$$k\theta^k + \frac{\partial V^k}{\partial z} = k\varrho_{m_k\theta} + \frac{m_k^2}{2}\left[\frac{2(k+1)}{m_k^2}\varrho_{m_k\theta} - \frac{\varepsilon_{m_k}}{m_k}\right] =$$

$$= \left[(2k+1)\varrho_{m_k\theta} - \frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}\right]\theta_z,$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial r} = \frac{W_z^k}{r^2 n_k}\left[2(\varrho_{n_k w})' + rn_k^2\varrho_{n_k w}\right],$$

$$\frac{\partial U^k}{\partial z} + \frac{\partial V^k}{\partial r} = -(\varepsilon_{m_k})'\frac{d\theta_z^k}{dz}\frac{1}{m_k}.$$

Такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty \theta_z\left[\frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})' + \frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right],\\
Z_z &= 2K\sum_0^\infty \theta_z\left[(2k+1)\varrho_{m_k\theta} - \frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k}\right],\\
\Psi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty \theta_z\left[k\varrho_{m_k\theta} - \frac{1}{2m_k r}(\varepsilon_{m_k})' - \frac{k+1}{m_k^2 r}(\varrho_{m_k\theta})'\right],
\end{aligned}\right\} . \quad (132)$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_\varphi &= \Psi_z = K\sum_0^\infty -\frac{dW_z^k}{dz}\frac{1}{n_k}(\varrho_{n_k w})',\\
\Psi_r &= R_\varphi = K\sum_0^\infty \frac{W_z^k}{rn_k}\left[2(\varrho_{n_k w})' + rn_k^2\varrho_{n_k w}\right],\\
R_z &= Z_r = K\sum_0^\infty -\frac{1}{m_k}\frac{d\theta_z^k}{dz_k}(\varepsilon_{m_k})'.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (133)$$

§ 18.

Переходимъ къ опредѣленію произвольныхъ постоянныхъ. Пусть R_1 и R_2 радіусы внутренней и внѣшней поверхностей. По условіямъ задачи

$$R_r = 0\,, \qquad Z_r = 0\,, \qquad \Psi_r = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (134)$$

при $r = R_1$ и R_2. Первыя два изъ этихъ равенствъ даютъ

$$\left[\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right]_{r=R_1} = 0\,,$$

$$\left[\frac{m_k}{2}\varepsilon_{m_k} + \frac{k+1}{m_k^2}\frac{1}{r}(\varrho_{m_k\theta})'\right]_{r=R_2} = 0\,,$$

$$\left[\varepsilon'_{m_k}\right]_{r=R_1} = 0\,, \quad \left[\varepsilon'_{m_k}\right]_{r=R_2} = 0\,.$$

Положивъ

$$A^k_{\theta r} = \frac{m_k K^k}{k+1}\,, \quad B^k_{\theta r} = \frac{m_k L^k}{k+1}\,,$$

$$2A^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k}A^k_{\theta r} = 2M^k\,,$$

$$2B^k_{ur} - \frac{2(k+1)}{m_k}B^k_{\theta r} = 2N^k\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{m_k} &= M^k J_0 + N^k Y_0 + \frac{2k+1}{2(k+1)}m_k(K^k J_1 + L^k Y_1)r = \varepsilon_k\,, \\ \frac{k+1}{m_k}(\varrho_{m_k\theta})' &= \varrho'_k = K^k(J_0)' + L^k(Y_0)'\,, \end{aligned}\right.$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} [m_k^2 r\varepsilon_k + \varrho'_k]_{r=R_1} = 0\,, \quad [m_k^2 r\varepsilon_k + \varrho'_k]_{r=R_2} = 0\,, \\ [\varepsilon'_k]_{r=R_1} = 0\,, \quad [\varepsilon'_k]_{r=R_2} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (135)$$

или

$$\left.\begin{aligned} M^k(m_k^2 rJ_0)_{R_1} + N^k(m_k^2 rY_0)_{R_1} + K^k(\psi_{k1})_{R_1} + L^k(\psi_{k2})_{R_1} = 0\,, \\ M^k(m_k^2 rJ_0)_{R_2} + N^k(m_k^2 rY_0)_{R_2} + K^k(\psi_{k1})_{R_2} + L^k(\psi_{k2})_{R_2} = 0\,, \\ M^k(J'_0)_{R_1} + N^k(Y'_0)_{R_1} + K^k(\varphi_{k1})_{R_1} + L^k(\varphi_{k2})_{R_1} = 0\,, \\ M^k(J'_0)_{R_2} + N^k(Y'_0)_{R_2} + K^k(\varphi_{k1})_{R_2} + L^k(\varphi_{k2})_{R_2} = 0\,, \end{aligned}\right\} \; . \quad (136)$$

гдѣ

$$\psi_{k1} = J_0' + m_k^3 \frac{2k+1}{2(k+1)} r^2 J_1 , \quad \psi_{k2} = Y_0' + m_k^3 \frac{2k+1}{2(k+1)} r^2 Y_1 ,$$

$$\varphi_{k1} = \frac{2k+1}{2(k+1)} m_k J_1 r , \quad \varphi_{k2} = \frac{2k+1}{2(k+1)} m_k Y_1 r .$$

Такъ какъ M^k, N^k, K^k и L^k не всѣ нули, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_k^2 r J_0)_{R_1} , & (m_k^2 r Y_0)_{R_1} , & (\psi_{k1})_{R_1} , & (\psi_{k2})_{R_1} , \\ (m_k^2 r J_0)_{R_2} , & (m_k^2 r Y_0)_{R_2} , & (\psi_{k1})_{R_2} , & (\psi_{k2})_{R_2} , \\ (J_0')_{R_1} , & (Y_0')_{R_1} , & (\varphi_{k1})_{R_1} , & (\varphi_{k2})_{R_1} , \\ (J_0')_{R_2} , & (Y_0')_{R_2} , & (\varphi_{k1})_{R_2} , & (\varphi_{k2})_{R_2} , \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; (137)$$

Это трансцендентное уравненіе, опредѣляющее m_k; оно имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней.

Предполагая m_k извѣстнымъ, найдемъ по уравненіямъ (136) и отношенія $\frac{M^k}{L^k}$, $\frac{N^k}{L^k}$, $\frac{K^k}{L^k}$. Постоянная L^k останется неопредѣленной.

Послѣднее изъ уравненій (134) даетъ

$$[2(\varrho_{n_k w})' + r n_k^2 \varrho_{n_k w}]_{r=R_1} = 0 , \quad [2(\varrho_{n_k w})' + r n_k^2 \varrho_{n_k w}]_{r=R_2} = 0 ,$$

или

$$A_{wr}^k U_1 + B_{wr}^k V_1 = 0 , \quad A_{wr}^k U_2 + B_{wr}^k V_2 = 0 \text{ [1]} , \; . \; . \; (138)$$

гдѣ

$$U = 2 \frac{dJ_0(\xi)}{d\xi} + \xi J_0 , \quad V = 2 \frac{dY_0(\xi)}{d\xi} + \xi Y_0 ,$$

$$\xi = n_k r .$$

Постоянная n_k будетъ корнемъ уравненія

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} U_1 , & V_1 \\ U_2 , & V_2 \end{vmatrix} = 0 . \; . \; . \; . \; . \; . \; (139)$$

Одно изъ уравненій (138) опредѣлитъ отношеніе $\frac{A_{wr}^k}{B_{wr}^k}$, а постоянная B_{wr}^k останется неопредѣленной.

---

[1]) U и V со значками 1 и 2 суть значенія этихъ функцій при $r = R_1$ и $r = R_2$.

§ 19.

Уравненіе (139), какъ и (137), имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней.

Всѣ корни уравненій

$$J_0=0\,,\quad \frac{dJ_0}{d\xi}=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(140)$$

вещественны, положительны и раздѣляютъ другъ друга.

При значеніяхъ ξ, равныхъ корнямъ одного изъ этихъ уравненій, получимъ одинъ изъ слѣдующихъ двухъ рядовъ значеній U

$$\left.\begin{matrix}(\xi J_0)_k, \\ 2\left(\dfrac{dJ_0}{d\xi}\right)_k,\end{matrix}\right\}(k=1\,,\,2,\,3\ldots\infty),$$

гдѣ $(\xi J_0)_k$ и $2\left(\dfrac{dJ_0}{d\xi}\right)_k$ представляютъ значенія заключенныхъ въ скобкахъ функцій при разсматриваемыхъ значеніяхъ ξ.

Слѣдовательно, корни уравненія

$$U=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(141)$$

вещественны, положительны и раздѣляютъ корни каждаго изъ уравненій (140).

Уравненія

$$U_1=0\,,\qquad U_2=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(141_1)$$

даютъ два ряда положительныхъ, пропорціональныхъ между собою, значеній n_k, обращающихъ въ нуль функціи U_1 и U_2.

По предыдущему (см. § 7)

$$\frac{dJ_0}{d\xi}Y_0-\frac{dY_0}{d\xi}J_0=-\frac{1}{\xi}.$$

При ξ равномъ одному изъ корней уравненія (131) имѣемъ

$$\left(\xi Y_0+2\frac{dY_0}{d\xi}\right)=(V)=\left(\frac{2}{\xi J_0}\right).\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(142)$$

При n_k равномъ корню перваго изъ уравненій (141_1) знакъ Δ_1 одинаковъ со знакомъ произведенія $(J_0)_{R_1}U_2$, при n_k равномъ корню второго изъ этихъ уравненій знакъ Δ_1 одинаковъ со знакомъ произведенія $[J_0]_{R_2}U_1$.

Въ ряду значеній n_k, обращающихъ въ нуль U_1 и U_2, найдется безчисленное множество такихъ смежныхъ значеній этой перемѣнной, что, если для одного изъ нихъ $(J_0)_{R_1}$ и U_2 имѣютъ одинаковые знаки, то для другаго $(J_0)_{R_2}$ и U_1 имѣютъ знаки противоположные, или наоборотъ.

Иначе говоря, существуетъ безчисленное множество такихъ вещественныхъ положительныхъ значенiй n_k, что знаки Δ_1 для какихъ либо двухъ смежныхъ изъ этихъ значенiй n_k противоположны. Слѣдовательно, уравненiе (139) имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней. Что и требовалось доказать. Тоже самое можно сказать и объ уравненiи (137).

§ 20.

Назовемъ черезъ $2l$ высоту цилиндра. Допустимъ, что за плоскость xy принята плоскость его средняго сѣченiя. Проекцiи на координатныя оси напряженiй, дѣйствующихъ на основанiя цилиндра, будутъ

$$(R_z)_{z=l},\ (R_z)_{z=-l},\ (Z_z)_{z=l},\ (Z_z)_{z=-l},\ (\Psi_z)_{z=l},\ (\Psi_z)_{z=-l}.$$

Обозначимъ черезъ f_1, f_2; φ_1, φ_2; ψ_1, ψ_2 шесть заданныхъ функцiй r, черезъ A^k, B^k произведенiя $A^k_{0z}L^k$, $B^k_{0z}L^k$ и положимъ

$$[R_z]_{z=l} = -2f_1,\ [R_z]_{z=-l} = -2f_2,$$

$$\left[\int_0^z \frac{\partial Z_z}{\partial r}\,dz\right]_{z=l} = \varphi_1,\ \left[\int_0^z \frac{\partial Z_z}{\partial r}\,dz\right]_{z=-l} = \varphi_2,$$

или

$$\left.\begin{aligned}
K\sum_0^\infty \left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varepsilon'_k &= f_1,\\
K\sum_0^\infty \left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varepsilon'_k &= f_2,\\
2K\sum_0^\infty \left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\left[\frac{2k+1}{k+1}\varrho'_k - \varepsilon'_k\right] &= \varphi_1,\\
2K\sum_0^\infty \left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\left[\frac{2k+1}{k+1}\varrho'_k - \varepsilon'_k\right] &= \varphi_2,
\end{aligned}\right\}\ldots (143)$$

гдѣ ϱ_k и ε_k зависятъ отъ извѣстныхъ отношенiй $\dfrac{M^k}{L^k}$, $\dfrac{N^k}{L^k}$, $\dfrac{K^k}{L^k}$ и постоянной m_k. Эти равенства приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned}
\sum_0^\infty \left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varepsilon'_k &= F_1,\\
\sum_0^\infty \left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varepsilon'_k &= F_2,\\
\sum_0^\infty \left[A^k e^{m_k l} - B^k e^{-m_k l}\right]\varrho'_k &= \Phi_1,\\
\sum_0^\infty \left[A^k e^{-m_k l} - B^k e^{m_k l}\right]\varrho'_k &= \Phi_2,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (144)$$

гдѣ

$$F_1 = \frac{f_1}{K}, \quad F_2 = \frac{f_2}{K}, \quad \Phi_1 = \varphi_1 + 2f_1, \quad \Phi_2 = \varphi_2 + 2f_2,$$

и послужатъ для опредѣленія постоянныхъ A^k и B^k.

Положимъ далѣе

$$[\Psi_z]_{z=l} = \psi_1 K, \quad [\Psi_z]_{z=-l} = -\psi_2 K.$$

Обозначивъ черезъ C^k и D^k произведенія $A^k_{wz}\, B^k_{wr}$, $B^k_{wz}\, B^k_{wr}$, получимъ равенства

$$\left.\begin{aligned} &\sum_0^\infty \left[C^k e^{n_k l} - D^k e^{-n_k l} \right] (\varrho_{n_k w}) = \psi_1, \\ &\sum_0^\infty \left[C^k e^{-n_k l} - D^k e^{n_k l} \right] (\varrho_{n_k w})' = \psi_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (145)$$

которыми воспользуемся для опредѣленія постоянныхъ C^k и D^k.

§ 21.

Покажемъ, что при данныхъ условіяхъ задачи

$$\int_{R_1}^{R_2} r\left(\varrho_k' \varepsilon_i' + \varrho_i' \varepsilon_k'\right) dr = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_{n_k w})' (\varrho_{n_i w})' \, dr = 0. \text{ [1]}). \quad . (146)$$

Легко убѣдиться, что

$$\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i \varrho_k' dr = \varepsilon_i r \varrho_k' \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_i (r\varrho_k')' dr = \varepsilon_i r \varrho_k' \Big|_{R_1}^{R_2} + m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i \varrho_k \, dr,$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k' \varrho_i' dr = \varepsilon_k r \varrho_i' \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_k (r\varrho_i')' dr = \varepsilon_k r \varrho_i' \Big|_{R_1}^{R_2} + m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k \varrho_i \, dr,$$

откуда

$$m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_i' \varrho_k' - m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k' \varrho_i' dr = m_i^2 m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r(\varepsilon_i \varrho_k - \varepsilon_k \varrho_i) dr. \text{ [2]}) \quad . (147)$$

Точно также

$$\left.\begin{aligned} &\int_{R_1}^{R_2} r\varepsilon_k' \varepsilon_i' dr = \varepsilon_i' r \varrho_k \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \varrho_k (r\varepsilon_i')' dr = m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_i \varrho_k r dr - \frac{2k+1}{k+1} m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} \varrho_k \varrho_i r dr, \\ &\int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i' \varepsilon_k' dr = \varepsilon_k' r \varrho_i \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \varrho_i (r\varepsilon_k')' dr = m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_k \varrho_i r dr - \frac{2k+1}{k+1} m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} \varrho_k \varrho_i r dr, \end{aligned}\right\} (148)$$

---

[1]) См. о томъ же Schiff, „Sur l'equilibre d'un cylindre élastique“. Journal de Liouville. T. IX, 1883.

[2]) Выраженіе

$$r(\varepsilon_i \varrho_k' m_i^2 - \varepsilon_k \varrho_i' m_k^2) = 0$$

въ силу первыхъ двухъ изъ равенствъ (135).

такъ какъ

$$(r\varepsilon_i')' = -m_i^2\varepsilon_i r + \frac{2k+1}{k+1} m_i^2 \varrho_i r \text{ (для всякаго } i).$$

Изъ равенствъ (148) получаемъ

$$m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_k' \varepsilon_i' dr - m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i' \varepsilon_k' dr = m_i^2 m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r(\varepsilon_i \varrho_k - \varepsilon_k \varrho_i) dr. \quad . (149)$$

Вычитая это равенство изъ (147), находимъ

$$(m_i^2 - m_k^2) \int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_k' \varepsilon_i' - \varrho_i' \varepsilon_k') dr = 0 .$$

Такимъ образомъ, при всякомъ i не равномъ k

$$\int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_k' \varepsilon_i' + \varrho_i' \varepsilon_k') dr = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Для $i = k$ этого заключенія сдѣлать нельзя.

Обозначивъ $\varrho_{n_k w}$ и $\varrho_{n_i w}$ соотвѣтственно черезъ ξ_k и ξ_i, находимъ

$$\int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = r\xi_k' \xi_i \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} (r\xi_k')' \xi_i dr = r\xi_k' \xi_i \Big|_{R_1}^{R_2} + m_k^2 \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k \xi_i dr ,$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = r\xi_i' \xi_k \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} (r\xi_i')' \xi_k dr = r\xi_i' \xi_k \Big|_{R_1}^{R_2} + m_i^2 \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k \xi_i dr .$$

Отсюда

$$(m_i^2 - m_k^2) \int_{R_1}^{R_2} r\xi_k' \xi_i' dr = \Big[r(\xi_k' \xi_i m_i^2 - \xi_i' \xi_k m_k^2) \Big]_{R_1}^{R_2} = 0 .$$

Итакъ, при всякомъ i не равномъ k

$$\int_{R_1}^{R_2} r(\varrho_{n_k w})' (\varrho_{n_i w})' dr = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Что и требовалось доказать.

§ 22.

Положимъ

$$\gamma_i = 2 \int_{R_1}^{R_2} r\varrho_i' \varepsilon_i' dr , \quad \delta_i = \int_{R_1}^{R_2} r[(\varrho_{n_i w})']^2 dr .$$

Изъ равенствъ (144), при помощи (150), получаемъ

$$A^i e^{m_i l} - B^i e^{-m_i l} = \frac{\lambda_i}{\gamma_i}, \quad A^i e^{-m_i l} - B^i e^{m_i l} = \frac{\mu_i}{\gamma_i},$$

гдѣ

$$\lambda_i = \int_{R_1}^{R_2} r[F_1 \varrho_i' + \Phi_1 \varepsilon_i']\, dr, \quad \mu_i = \int_{R_1}^{R_2} r[F_2 \varrho_i' + \Phi_2 \varepsilon_i']\, dr.$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{array}{c} A^i = \dfrac{\lambda_i e^{m_i l} - \mu_i e^{-m_i l}}{\gamma_i \Delta_i}, \quad B^i = \dfrac{\lambda_i e^{-m_i l} - \mu_i e^{m_i l}}{\gamma_i \Delta_i}, \\ \Delta_i = e^{2m_i l} - e^{-2m_i l}. \\ (i = 1, 2, \ldots. \infty) \end{array}\right\} \ldots (152)$$

Постоянныя A^i и B^i опредѣлены.

Подобнымъ же образомъ найдемъ [рав. (145) и (151)], что

$$C^i e^{n_i l} - D^i e^{-n_i l} = \frac{\lambda_i'}{\delta_i}, \quad C^i e^{-n_i l} - D^i e^{n_i l} = \frac{\mu_i'}{\delta_i},$$

и

$$C^i = \frac{\lambda_i' e^{n_i l} - \mu_i' e^{-n_i l}}{\delta_i \Delta_i'}, \quad D^i = \frac{\lambda_i' e^{-n_i l} - \mu_i' e^{n_i l}}{\delta_i \Delta_i'}, \ldots . (153)$$

гдѣ

$$\lambda_i' = \int_{R_1}^{R_2} r\psi_1 (\varrho_{n_i w})' dr, \quad \mu_i' = \int_{R_1}^{R_2} r\psi_2 (\varrho_{n_i w})' dr,$$

$$\Delta_i' = e^{2n_i l} - e^{-2n_i l}.$$

Формулы (131), (132), (136), (138), (152) и (153) и рѣшаютъ разсматриваемый вопросъ. Не трудно убѣдиться, что ряды, опредѣляющіе u, v, w и θ, сходящіеся для $z = l$ и $z = -l$, будутъ сходиться и для всѣхъ значеній z, численное значеніе которыхъ заключается между 0 и l.

VII. О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія, ограниченныхъ сферами и коническими поверхностями.

§ 23.

Разсмотримъ теперь сферическую систему координатъ. Положеніе точки въ пространствѣ опредѣлится: радіусомъ векторомъ r, угломъ φ, составляемымъ этимъ радіусомъ съ плоскостью xy и угломъ ψ, отсчитываемымъ отъ неподвижной плоскости, проходящей черезъ ось z,—плоскости zx. Направленія радіуса r и перпендикуляровъ къ этому радіусу и къ меридіанальной плоскости (отсчитываемыхъ въ сторону возрастающихъ r, φ и ψ) примемъ за координатныя оси.

Въ такомъ случаѣ

$$x = rcc', \quad y = rcs', \quad z = rs$$

и

$$h_1 = 1\,, \quad h_2 = \frac{1}{r}\,, \quad h_3 = \frac{1}{rc}\,, \quad \ldots \ldots \quad (154)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$c = \cos\varphi\,, \quad s = \sin\varphi\,, \quad c' = \cos\psi\,, \quad s' = \sin\psi\,.$$

При помощи сферическихъ координатъ можно рѣшить различныя задачи о равновѣсіи упругихъ тѣлъ, ограниченныхъ сферами и коническими поверхностями. Къ числу такихъ принадлежитъ сферическая оболочка. Вопросъ о равновѣсіи этого тѣла рѣшенъ Lamé въ общемъ видѣ [1]) (независимо отъ какихъ бы то ни было гипотезъ) и не можетъ представить интереса для нашихъ изслѣдованій [2]). Я разсмотрю тѣла, ограниченныя двумя концентрическими сферами данныхъ радіусовъ и двумя конусами широтъ данныхъ угловъ раствореція. Если конусы, ограничивающіе тѣло, лежатъ по одну сторону плоскости xy, то получится особаго рода полый конусъ, усѣченный двумя концентрическими сферами, который условимся называть полымъ сферически-усѣченнымъ конусомъ; если одинъ изъ конусовъ находится по одну сторону упомянутой плоскости другой по другую, получится тѣло, которое будемъ называть поясомъ сферической оболочки. Мы разберемъ подобно тому, какъ въ вопросѣ о равновѣсіи кругового цилиндра, два случая: 1) когда задаются силы, дѣйствующія на сферическія поверхности тѣла, и 2) когда задаются силы, приложенныя къ коническимъ поверхностямъ тѣла. Начнемъ съ послѣдняго.

Примѣняя общія формулы § 5 къ данной системѣ координатъ, получаемъ уравненія равновѣсія

$$\left.\begin{aligned} &2(k+1)cr^2\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} = 0\,, \\ &2(k+1)c\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Gamma}{\partial r} = 0\,, \\ &\frac{\partial A}{\partial\varphi} - \frac{\partial B}{\partial r} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (155)$$

гдѣ

[1]) См. Lamé, „Leçons sur les coordonnées curvilignes". Paris, 1859.

[2]) Спустя почти десять лѣтъ W. Thomson далъ новое рѣшеніе той же задачи въ phylosophical Transactions. of the R. S. of Edinb.

$$\left.\begin{aligned}
A&=-\frac{1}{r^2c}\frac{\partial(rcW)}{\partial\varphi}\,,\quad B=\frac{\partial(rW)}{\partial r}\,,\\
\Gamma&=c\left[\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rV)}{\partial r}\right],\\
\theta&=\frac{1}{r^2c}\left[\frac{\partial(r^2cU)}{\partial r}+\frac{\partial(rcV)}{\partial\varphi}\right],
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(156)$$

а проекціи напряженій на координатныя оси выразятся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}
R_r&=2K\left[k\theta+\frac{\partial U}{\partial r}\right],\\
\Phi_\varphi&=2K\left[k\theta+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right],\\
\Psi_\psi&=2K\left[k\theta+\frac{U}{r}+\frac{s}{c}\frac{V}{r}\right],\\
\Phi_\psi&=\Psi_\varphi=K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{s}{c}\frac{W}{r}\right],\\
\Psi_r&=R_\psi=K\left[\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right],\\
R_\varphi&=\Phi_r=K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right].
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(157)$$

Функція θ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(c\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi}=0.\quad\ldots\ldots(158)$$

§ 24.

Пусть

$$\theta=\sum_0^\infty\theta^k\,,\quad \theta^k=\theta_r^k\theta_\varphi^k\,,$$

гдѣ θ_r^k и θ_φ^k соотвѣтственно суть функціи r и φ. Предыдущее уравненіе принимаетъ слѣдующій видъ

$$\frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta_r^k}{dr}\right)}{dr}\theta_\varphi^k+\frac{1}{c}\frac{d\left(c\dfrac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi}\theta_r^k=0\,,$$

откуда получаемъ такія уравненія для опредѣленія θ_r^k и θ_φ^k

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr} - m_k^2\theta_r = 0\ ^{1)}, \\ &\frac{d\left(c\dfrac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi} + m_k^2 c\theta_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (159)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr} + m_k^2\theta_r = 0, \\ &\frac{d\left(c\dfrac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi} - m_k^2 c\theta_\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (160)$$

Остановимся на послѣднихъ.

Положивъ $r = e^t$, получимъ

$$\frac{d^2\theta_t}{dt^2} + \frac{d\theta_t}{dt} + m_k^2\theta_t = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

Корни характеристическаго уравненія

$$s^2 + s + m_k^2 = 0$$

суть

$$h_k = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - m_k^2}, \quad g_k = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - m_k^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\theta_t^k = A_{t\theta}^k e^{h_k t} + B_{t\theta}^k e^{g_k t}, \ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

гдѣ $A_{t\theta}$, $B_{t\theta}$ произвольныя постоянныя.

Полагая $x = \sin\varphi$, приводимъ второе изъ уравненій (160) къ виду

$$(1 - x^2)\frac{d^2\theta_x}{dx^2} - 2x\frac{d\theta_x}{dx} - m_k^2\theta_x = 0. \quad \ldots\ldots \quad (163)$$

Это уравненіе аналогично Лежандрову.

Пусть

$$\theta_x = a_0 x^\alpha + a_2 x^{\alpha+2} + a_4 x^{\alpha+4} \ldots a_{2\mu} x^{\alpha+2\mu}.$$

---

[1]) Для простоты опускаемъ значекъ k.

Коэффиціенты $a_{2\mu}$ опредѣлятся формулой

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{(\alpha + 2\mu)(\alpha + 2\mu + 1) + m_k^2}{(\alpha + 2\mu + 1)(\alpha + 2\mu + 2)},$$

гдѣ α одинъ изъ корней характеристическаго уравненія

$$\alpha(\alpha - 1) = 0.$$

При $\alpha = 0$

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{2\mu(2\mu + 1) + m_k^2}{(2\mu + 2)(2\mu + 1)},$$

такъ что

$$a_{2\mu+2} = \frac{m_k^2[2.3 + m_k^2][4.5 + m_k^2]\ldots[2\mu(2\mu + 1) + m_k^2]}{1.2\ldots(2\mu + 1)(2\mu + 2)}.$$

При $\alpha = 1$

$$a_{2\mu+2} = a_{2\mu} \frac{(2\mu + 1)(2\mu + 2) + m_k^2}{(2\mu + 2)(2\mu + 3)},$$

или

$$a_{2\mu+2} = \frac{[1.2 + m_k^2][3.4 + m_k^2]\ldots[(2\mu + 1)(2\mu + 2) + m_k^2]}{1.2.3\ldots(2\mu + 2)(2\mu + 3)}$$ [1]).

Обозначивъ частныя рѣшенія уравненія (163) соотвѣтственно черезъ S_k и T_k, имѣемъ

$$S_k = 1 + \frac{m_k^2}{2!}x^2 + \frac{m_k^2(2.3 + m_k^2)}{4!}x^4 + \ldots,$$

$$T_k = x\left(1 + \frac{1.2 + m_k^2}{3!}x^2 + \frac{(1.2 + m_k^2)(3.4 + m_k^2)}{5!}x^4 + \ldots\right.$$

Такъ какъ въ обоихъ случаяхъ $\lim \left.\frac{a_{2\mu+2}}{a_{2\mu}}\right|_{\mu=\infty} = 1$, а отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему равно $\frac{a_{2\mu+2}}{a_{2\mu}}x^2$, то оба ряда сходятся для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между -1 и $+1$, что и имѣетъ мѣсто въ разсматриваемомъ случаѣ.

Такимъ образомъ,

$$\theta_x^k = A_{x\theta}^k S_k + B_{x\theta}^k T_k \quad \ldots\ldots\ldots (164)$$

и

$$\theta = \sum_0^\infty [A_{t\theta}^k e^{h_k t} + B_{t\theta}^k e^{g_k t}][A_{x\theta}^k S_k + B_{x\theta}^k T_k]. \quad \ldots (165)$$

$A_{x\theta}^k$ и $B_{x\theta}^k$ произвольныя постоянныя.

---

[1]) Полагаемъ $a_0 = 1$.

§ 25.

Первыя два изъ уравненій (155) даютъ

$$\Gamma = -\sum_0^\infty \frac{2(k+1)}{m_k^2} r^2 \frac{d\theta_r^k}{dr} c \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}.$$

Функціи U и V удовлетворяютъ, слѣдовательно, уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^\infty \theta_r^k \theta_\varphi^k &= \frac{1}{r^2 c}\left[\frac{\partial(Ur^2c)}{\partial r} + \frac{\partial(Vrc)}{\partial\varphi}\right], \\ \frac{2(k+1)}{m_k^2} r^2 \frac{d\theta_r^k}{dr} c \frac{\partial\theta_\varphi^k}{d\varphi} &= c\left[\frac{\partial(rV)}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (166)$$

Положимъ

$$U = \sum_0^\infty U^k, \quad V = \sum_0^\infty V^k,$$

$$U^k = U_r^k U_\varphi^k, \quad V^k = V_r^k V_\varphi^k,$$

гдѣ U и V со значками r и φ обозначаютъ функціи отъ одной изъ перемѣнныхъ, соотвѣтствующей значку. Исключая изъ уравненій (166) путемъ дифференцированія послѣдовательно V и U, получаемъ

$$\sum_0^\infty \left[\frac{d(r^2\theta_r^k)}{dr} - 2(k+1)r^2\frac{d\theta_r^k}{dr}\right] c\theta_\varphi^k = \frac{\partial^2(Ur^2c)}{\partial r^2} + \frac{\partial\left(c\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi},$$

$$\sum_0^\infty \left[r^2\theta_r^k + \frac{2(k+1)}{m_k^2}\frac{d\left(r^4\dfrac{d\theta_r^k}{dr}\right)}{dr}\right]\frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi} = \frac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial(V_r)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(Vrc)}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi},$$

откуда

$$\psi_1^k c\theta_\varphi^k = \frac{d^2(U_r^k r^2)}{dr^2} cU_\varphi^k + U_r^k \frac{d\left(c\dfrac{dU_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi},$$

$$\psi_2^k \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi} = \frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d(V_r^k r)}{dr}\right]V_\varphi^k + rV_r^k\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{c}\frac{d(V_\varphi^k c)}{d\varphi}\right].$$

$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots \infty).$

Пусть

$$U_\varphi^k = \theta_\varphi^k, \quad V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}.$$

На основаніи второго изъ уравненій (160) получимъ

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{d^2(U_r^k r^2)}{dr^2} + m_k^2 U_r^k, \\ \psi_2 &= \frac{d\left(r^2 \dfrac{dV_{r_1}^k}{dr}\right)}{dr} + m_k^2 V_{r_1}^k, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (167)$$

гдѣ $V_{r_1} = rV_r$. Вводя перемѣнную t, находимъ

$$\left.\begin{aligned} (\psi_1)_t &= \frac{d^2 U_t^k}{dt^2} + 3\frac{dU_t^k}{dt} + n_k^2 U_t^k, \\ (\psi_2)_t &= \frac{d^2 V_{t_1}^k}{dt^2} + \frac{\partial V_{t_1}^k}{dt} + m_k^2 V_{t_1}^k,) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (167_1)$$

гдѣ

$$n_k^2 = m_k^2 + 2$$

$$(\psi_1)_t = e^t\left[2\theta_t^k - (2k+1)\frac{d\theta_t}{dt}\right],$$

$$(\psi_2)_t = e^{2t}\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}\frac{d\theta_t^k}{dt} - (2k+1)\theta_t^k\right],$$

или

$$(\psi_1)_t = A^k e^{\alpha_k t} + B^k e^{\beta_k t},$$

$$(\psi_2)_t = C^k e^{(\alpha_k+1)t} + D^k e^{(\beta_k+1)t},$$

гдѣ

$$A^k = A_{t0}^k[2 - (2k+1)h_k], \qquad B^k = B_{t0}^k[2 - (2k+1)g_k],$$

$$C^k = A_{t0}^k\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}h_k - (2k+1)\right],$$

$$D^k = B_{t0}^k\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}g_k - (2k+1)\right],$$

$$\alpha_k = h_k + 1, \quad \beta_k = g_k + 1.$$

Уравненія (167_1) примутъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 U_t^k}{dt^2} + 3\frac{dU_t^k}{dt} + n_k^2 U_t^k &= A^k e^{\alpha_k t} + B^k e^{\beta_k t}, \\ \frac{d^2 V_{t_1}^k}{dt^2} + \frac{dV_{t_1}^k}{dt} + m_k^2 V_{t_1}^k &= C^k e^{(\alpha_k+1)t} + D^k e^{(\beta_k+1)t}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (167_2)$$

---

[1]) Обозначенія ψ_j^k, ψ_j, $(j = 1, 2)$ понятны безъ объясненій.

Положимъ

$$U_t^k = L^k e^{\lambda_k t} + M^k c^{\mu_k t}, \quad V_t^k = P^k e^{\sigma_k t} + Q^k e^{\tau_k t},$$

гдѣ L^k, M^k, P^k, Q^k, λ_k, μ_k, σ_k, τ_k постоянныя, которыя опредѣляются при помощи уравненій

$$L^k = \frac{A^k}{\lambda_k^2 + 3\lambda_k + n_k^2}, \quad M^k = \frac{B^k}{\mu_k^2 + 3\mu_k + n_k^2},$$

$$\lambda_k = \alpha_k, \quad \mu_k = \beta_k,$$

$$P^k = \frac{C^k}{\sigma_k^2 + \sigma_k + m_k^2}, \quad Q^k = \frac{D^k}{\tau_k^2 + \tau_k + m_k^2},$$

$$\sigma_k = \alpha_k + 1, \quad \tau_k = \beta_k + 1.$$

При этомъ

$$U_t^k = A_{tu}^k e^{\gamma_k t} + B_{tu}^k e^{\sigma_k t} + L^k e^{\lambda_k t} + M^k e^{\mu_k t},$$

$$V_{t_1}^k = A_{tv}^k e^{h_k t} + B_{tv}^k e^{g_k t} + P^k e^{\sigma_k t} + Q^k e^{\tau_k t},$$

гдѣ γ_k и δ_k корни уравненія

$$s^2 + 3s + n_k^2 = 0,$$

такъ что

$$\gamma_k = \alpha_k - 2, \quad \delta_k = \beta_k - 2.$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U_t^k &= A_{tu}^k e^{(\alpha_k - 2)t} + B_{tu}^k e^{(\beta_k - 2)t} + L^k e^{\alpha_k t} + M^k e^{\beta_k t}, \\ V_t^k &= A_{tv}^k e^{(\alpha_k - 2)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k - 2)t} + P^k e^{\alpha_k t} + Q^k e^{\beta_k t}. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (168)$$

A_{tu}^k, B_{tu}^k, A_{tv}^k, B_{tv}^k постоянныя, изъ которыхъ двѣ произвольны.

§ 26.

Подставивъ полученныя выраженія θ_t^k, U_t^k и V_l^k въ равенство (87), найдемъ

$$\left.\begin{aligned} A_{t\theta}^k e^{h_k t} + B_{t\theta}^k e^{g_k t} &= [L^k(\alpha_k + 2) + m_k^2 P^k] e^{(\alpha_k - 1)t} + \\ &+ [M^k(\beta_k + 2) + m_k^2 Q^k] e^{(\beta_k - 1)t} + \\ + [A_{tv}^k \alpha_k + m_k^2 A_{tv}^k] e^{(\alpha_k - 3)t} &+ [B_{tu}^k \beta_k + m_k^2 B_{tv}^k] e^{(\beta_k - 3)t}, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (169)$$

гдѣ

$$L^k(\alpha_k+2)+m_k^2P^k=A_{t\theta}^k\left\{\frac{[2-(2k+1)h_k](\alpha_k+2)}{\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_k^2\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}h_k-(2k+1)\right]}{\sigma_k^2+\sigma_k+m_k^2}\right\},$$

$$M^k(\beta_k+2)+m_k^2Q^k=B_{t\theta}^k\left\{\frac{[2-(2k+1)g_k](\beta_k+2)}{\mu_k^2+3\mu_k+n_k^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_k^2\left[\frac{4(k+1)}{m_k^2}g_k-(2k+1)\right]}{\tau_k^2+\tau_k+m_k^2}\right\}.$$

Такъ какъ

$$\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2=\sigma_k^2+\sigma_k+m_k^2,$$

$$\mu_k^2+3\mu_k+n_k^2=\tau_k^2+\tau_k+m_k^2,$$

$$4h_k-2h_k(\alpha_k+2)-2m_k^2=-\alpha_k^2+\alpha_k-m_k^2=0,$$

$$4g_k-2g_k(\beta_k+2)-2m_k^2=-\beta_k^2+\beta_k-m_k^2=0,$$

$$2(\alpha_k+2)+4h_k-m_k^2-h_k(\alpha_k+2)=2(\beta_k+2)+$$

$$+4g_k-m_k^2-g_k(\beta_k+2)=\lambda_k^2+3\lambda_k+n_k^2,$$

то равенство (169) удовлетворится тождественно при

$$A_{tu}^k\alpha_k+m_k^2A_{tv}^k=0,\quad B_{tu}^k\beta_k+m_k^2B_{tv}^k=0.\quad\ldots\quad(170)$$

На основаніи всего сказаннаго заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}U&=\sum_0^\infty[A_{x\theta}^kS_k+B_{x\theta}^kT_k][L^ke^{\alpha_kt}+M^ke^{\beta_kt}-\\&\quad-\frac{m_k^2}{\alpha_k}A_{tv}^ke^{(\alpha_k-2)t}-\frac{m_k^2}{\beta_k}B_{tv}^ke^{(\beta_k-2)t}],\\V&=\sum_0^\infty\sqrt{1-x^2}[A_{x\theta}^k\frac{dS_k}{dx}+B_{x\theta}^k\frac{dT_k}{dx}][P^ke^{\alpha_kt}+Q^ke^{\beta_kt}+\\&\quad+A_t^ke^{(\alpha_k-2)t}+B_{tv}^ke^{(\beta_k-2)t}].\end{aligned}\right\}.\quad(171)$$

§ 27.

Опредѣлимъ теперь функцію W, удовлетворяющую уравненію

$$r^2 \frac{\partial^2 (r W)}{\partial r^2} + \frac{\partial \left(\frac{1}{c} \frac{\partial (cr W)}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} = 0 \quad \ldots \ldots (172)$$

Положивъ

$$r W = W_1 \quad \text{и} \quad W_1 = \sum_0^\infty W_{1r}^k W_\varphi^k ,$$

получимъ

$$\left. \begin{aligned} & r^2 \frac{d^2 (W_{1r}^k)}{dr^2} + l_k^2 W_{1r}^k = 0 , \\ & \frac{d \left(\frac{1}{c} \frac{d(c W_\varphi^k)}{d\varphi} \right)}{d\varphi} - l_k^2 W_\varphi^k = 0 , \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots (173)$$

или

$$\left. \begin{aligned} & r^2 \frac{d^2 (W_{1r}^k)}{dr^2} - l_k^2 W_{1r}^k = 0 , \\ & \frac{d \left(\frac{1}{c} \frac{d(c W_\varphi^k)}{d\varphi} \right)}{d\varphi} + l_k^2 W_\varphi^k = 0 . \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots (174)$$

Воспользуемся первыми изъ этихъ уравненій.

Вводя перемѣнную t, находимъ

$$\frac{d^2 W_{t_1}^k}{dt^2} - \frac{d W_{t_1}^k}{dt} + l_k^2 W_{t_1}^k = 0 ,$$

откуда

$$W_{t_1}^k = A_{tw}^k e^{p'_k t} + B_{tw}^k e^{q'_k t} ,$$

гдѣ p'_k и q'_k корни уравненія

$$s^2 - s + l_k^2 = 0 ,$$

а A_{tw}^k и B_{tw}^k произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно,

$$W_t^k = A_{tw}^k e^{p_k t} + B_{tw}^k e^{q_k t} ,$$

гдѣ p_k и q_k корни уравненія

$$s^2 + s + l_k^2 = 0 .$$

Представимъ второе изъ уравненій (174) въ видѣ

$$\frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{dW_{\varphi 1}}{d\varphi}\right)}{d\varphi} - l_k^2 W_{\varphi 1} = 0 \text{ [1]},$$

гдѣ

$$W_{\varphi 1} = c\, W_\varphi .$$

Преобразуя послѣднее введеніемъ перемѣнной $x = \sin\varphi$, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2 W_x}{dx^2} - l_k^2 W_x = 0\,,$$

откуда

$$(1-x^2)\frac{d^2 W'_x}{dx^2} - 2x\frac{dW'_x}{dx} - l_k^2 W'_x = 0 .$$

Слѣдовательно,

$$W'_x = A_{xw} S_k + B_{xw} T_k\,,$$

гдѣ S_k и T_k функціи x, выражающіяся такими же рядами, какъ и въ § 24; только вмѣсто m_k^2 въ выраженія коэффиціентовъ входитъ постоянная l_k. Интегрируя это равенство, заключаемъ, что

$$W_x = \frac{A_{xw}}{l_k^2}(1-x^2)\frac{dS_k}{dx} + \frac{B_{xw}}{l_k^2}(1-x^2)\frac{dT_k}{dx},$$

и, наконецъ,

$$W_x^k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, W_x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{l_k^2}\left[A_{xw}^k \frac{dS_k}{dx} + B_{xw}^k \frac{dT_k}{dx}\right].$$

A_{xw}^k и B_{xw}^k произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ

$$W = \sum_0^\infty \frac{1}{l_k^2}\sqrt{1-x^2}\left[A_{xw}^k\frac{dS_k}{dx} + B_{xw}^k\frac{dT_k}{dx}\right][A_{tw}^k e^{p_k t} + B_{tw}^k e^{q_k t}]. \quad (175)$$

§ 28.

Составивъ выраженія (157), получимъ

[1]) Опускаемъ пока значекъ k.

$$
\left.
\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k \Big[A_r^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_r^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2(\alpha_k-2)}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-2)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2(\beta_k-2)}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-2)t}\Big], \\
\Phi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k \Big[A_\varphi^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_\varphi^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}\Big] + \frac{d^2\theta_\varphi^k}{d\varphi^2}\Big[P^k e^{(\alpha_k-1)t} + Q^k e^{(\beta_k-1)t} + \\
&\qquad + A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}\Big], \\
\Psi_\psi &= 2K\sum_0^\infty \theta_\varphi^k \Big[A_\varphi^k e^{(\alpha_k-1)t} + B_\varphi^k e^{(\beta_k-1)t} - \frac{m_k^2}{\alpha_k} A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} - \\
&\qquad - \frac{m_k^2}{\beta_k} B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}\Big] - \frac{s}{c}\frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}\Big[P^k e^{(\alpha_k-1)t} + Q^k e^{(\beta_k-1)t} + \\
&\qquad + A_{tv}^k e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k e^{(\beta_k-3)t}\Big], \\
\Phi_\psi &= \Psi_\varphi = K\sum_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{c}W_\varphi^k\right)}{d\varphi}\Big[A_{tw}^k e^{(p_k-1)t} + B_{tw}^k e^{(q_k-1)t}\Big], \\
\Psi_r &= R_\psi = K\sum_0^\infty \frac{dW_\varphi^k}{d\varphi}\Big[A_{tw}^k (p_k-1) e^{(p_k-1)t} + B_{tw}^k (q_k-1) e^{(q_k-1)t}\Big], \\
R_\varphi &= \Phi_r = K\sum_0^\infty \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi}\Big[C_r^k e^{(\alpha_k-1)t} + D_r^k e^{(\beta_k-1)t}\Big] + \\
&\qquad + 2\Big[A_{tv}^k(\alpha_k-2)e^{(\alpha_k-3)t} + B_{tv}^k(\beta_k-2)e^{(\beta_k-3)t}\Big],
\end{aligned}
\right\} \quad (176)
$$

гдѣ θ_φ и W_φ линейныя однородныя функціи постоянныхъ $A_{x\theta}^k$, $B_{x\theta}^k$, и A_{xw}^k, B_{xw}^k, а

$$
A_r^k = kA_{t\theta}^k + L^k\alpha_k, \qquad B_r^k = kB_{t\theta}^k + M_{\beta_k}^k,
$$

$$
A_\varphi^k = kA_{t\theta}^k + L^k, \qquad B_\varphi = kB_{t\theta}^k + M^k,
$$

$$
C_r^k = L^k + (\alpha_k - 1)P^k, \quad D_r^k = M^k + (\beta_k - 1)Q^k.
$$

Вынося за скобки въ каждомъ членѣ выраженій (176), зависящемъ отъ θ_φ, постоянную $B_{t\theta}^k$, а въ членахъ выраженій (76), зависящихъ отъ W_φ, постоянную B_{xw}^k, будемъ разумѣть подъ $A_{x\theta}^k$ и A_{xw}^k отношенія прежнихъ постоянныхъ того же обозначенія къ $B_{x\theta}^k$ и B_{xw}^k, а подъ $A_{t\theta}^k$, $B_{t\theta}^k$, A_{tv}^k, B_{tv}^k, A_{tw}^k и B_{tw}^k произведенія прежнихъ на $B_{x\theta}^k$ и B_{xw}^k.

Въ восьми постоянныхъ $A^k_{x\theta}$, A^k_{xw}, $A^k_{t\theta} \dots A^k_{tw}$ выразятся всѣ искомыя величины. Нужно опредѣлить эти постоянныя по предѣльнымъ условіямъ задачи.

§ 29.

Пусть при измѣненіи r отъ r_0 до r_1 (радіусы концентрическихъ сферъ, ограничивающихъ данное тѣло) t измѣняется отъ t_0 до t_1.

Положимъ

$$\xi = 2\pi \frac{t_0 - t}{t_0 - t_1}.$$

ξ измѣняется отъ 0 до 2π. Пусть далѣе

$$m_k^2 = \frac{4\pi^2 k^2}{(t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{4},$$

гдѣ k цѣлое число ($k = 0, 1, 2, \dots \infty$).

Въ такомъ случаѣ

$$A^k_{t\theta} e^{h_k t} + B^k_{t\theta} e^{g_k t} = e^{-\frac{t_1 - t_0}{4\pi}\xi} [A^k_{t\theta} e^{h_k t_0} e^{ik\xi} + B^k_{t\theta} e^{g_k t_0} e^{-ik\xi}] =$$
$$= e^{\alpha\xi} [A^k \cos k\xi + B^k \sin k\xi],$$

гдѣ α нѣкоторая опредѣленная постоянная и

$$\theta = e^{\alpha\xi} \sum_0^\infty [A^k_{x\theta} S_k + T_k][A^k \cos k\xi + B^k \sin k\xi]. \quad \dots \quad (177)$$

Обозначимъ черезъ $f_1(\xi)e^{\alpha\xi}$ и $f_2(\xi)e^{\alpha\xi}$ двѣ заданныя функціи ξ (или r) и допустимъ, что на коническихъ поверхностяхъ тѣла, т. е. для двухъ значеній $\varphi = \varphi_0$ и φ_1

$$(\theta)_{x=x_0} = f_1(\xi) e^{\alpha\xi}, \qquad (\theta)_{x=x_1} = f_2(\xi) e^{\alpha\xi},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^\infty \{[H^k (S_k)_0 + A^k (T^k)_0] \cos k\xi + [G^k (S_k)_0 + B^k (T_k)_0] \sin k\xi\} = f_1(\xi), \\ \sum_0^\infty \{[H^k (S_k)_1 + A^k (T_k)_1] \cos k\xi + [G^k (S_k)_1 + B^k (T_k)_1] \sin k\xi\} = f_2(\xi), \end{aligned}\right\} (178)$$

гдѣ

$$H^k = A^k_{x\theta} A^k, \quad G^k = A^k_{x\theta} B^k.$$

Изъ равенствъ (178) слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned}
H^k(S_k)_0 + A^k(T_k)_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\cos k\xi\, d\xi\,,\\
G^k(S_k)_0 + B^k(T_k)_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi\,,\\
H^k(S_k)_1 + A^k(T_k)_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\cos k\xi\, d\xi\,,\\
G^k(S_k)_1 + B^k(T_k)_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\sin k\xi\, d\xi\,.
\end{aligned}\right\} \quad (178_1)$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}
H^k &= \frac{1}{\pi}\,\frac{(T_k)_1\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\cos k\xi\, d\xi - (T_k)_0\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\cos k\xi\, d\xi}{\varDelta}\,,\\
A^k &= \frac{1}{\pi}\,\frac{(S_k)_1\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\cos k\xi\, d\xi - (S_k)_0\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\cos k\xi\, d\xi}{\varDelta}\,,\\
G^k &= \frac{1}{\pi}\,\frac{(T_k)_1\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi - (T_k)_0\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\sin k\xi\, d\xi}{\varDelta}\,,\\
B^k &= \frac{1}{\pi}\,\frac{(S_k)_1\int_0^{2\pi} f_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi - (S_k)_0\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\sin k\xi\, d\xi}{\varDelta}\,,
\end{aligned}\right\} \quad (179)$$

гдѣ

$$\varDelta = (S_k)_0(T_k)_1 - (S_k)_1(T_k)_0\,.$$

Постоянныя $A^k_{i\vartheta}$, $B^k_{i\vartheta}$ и $A^k_{x\vartheta}$, такимъ образомъ, опредѣлены по заданному на коническихъ поверхностяхъ коэффиціенту кубическаго измѣненія объема въ функціи ξ (или r).

Функціи f_1 и f_2 не вполнѣ произвольны; между ними существуетъ соотношеніе

$$\int_0^{2\pi} f_2(\xi)\cos k\xi\, d\xi \cdot \int_0^{2\pi} f_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi = \int_0^{2\pi} f_2(\xi)\sin k\xi\, d\xi \cdot \int_0^{2\pi} f_1(\xi)\cos k\xi\, d\xi\,, \quad (180)$$

такое же, какъ и между функціями $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ въ § 14 при рѣшеніи вопроса о равновѣсіи кругового цилиндра, Равенство (180) удовлетворится само собою при $f_1 = 0$, или $f_2 = 0$, т. е. когда предполагается, что на одной изъ ограничивающихъ тѣло коническихъ поверхностей коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема равенъ нулю. Всѣ заключенія, сдѣланныя относительно $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ въ § 14, имѣютъ мѣсто и въ данномъ случаѣ.

Остаются неопредѣленными еще пять постоянныхъ A^k_{tv}, B^k_{tv}, A^k_{xw}, A^k_{tw} и B^k_{tw}. Обозначивъ черезъ $f_3(\xi)$ [или $f_4(\xi)$] новую произвольную функцію, положимъ

$$(\Phi_r)_{\varphi=\varphi_0} = f_3(\xi)\,,\ \text{или}\ (\Phi_r)_{\varphi=\varphi_1} = f_4(\xi) \cdot \,.\,.\,.\,.\,.\,(181)$$

Такъ какъ $\Phi_r = \Phi_{r1} + \Phi_{r2}$, гдѣ Φ_{r1} уже вполнѣ опредѣленная функція ξ (ибо постоянныя $A^k_{\theta t}$, $B^k_{t\theta}$, $A^k_{x\theta}$ опредѣлены), то равенства (181) равносильны такимъ

$$(\Phi_{r2})_{\varphi=\varphi_0} = f^{(1)}_3(\xi)\,,\ \text{или}\ (\Phi_{r2})_{\varphi=\varphi_1} = f^{(1)}_4(\xi)\,,$$

гдѣ $f^{(1)}_3$ и $f^{(1)}_4$ по прежнему произвольно заданныя функціи ξ. Вводя въ выраженіе Φ_{r2} перемѣнную ξ, имѣемъ

$$\Phi_{r2} = 2K\sum_0^{\infty}[L^k_1 e^{ik\xi} + M^k_1 e^{-ik\xi}]e^{\beta\xi}\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\,,$$

гдѣ L^k_1, M^k_1 и β постоянныя. Отсюда

$$\Phi_{r2} = \sum_0^{\infty}[L^k\cos k\xi + M^k\sin k\xi]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = F_0(\xi)\,,$$

или

$$\Phi_{r2} = \sum_0^{\infty}[L^k\cos k\xi + M^k\sin k\xi]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_1} = F_1(\xi)\,.$$

$F_0(\xi)$ и $F_1(\xi)$ извѣстныя функціи ξ.

Слѣдовательно,

$$L^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\xi)\cos k\xi\, d\xi\,,\quad M^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi\,.\,.\,(182)$$

Всѣ постоянныя, входящія въ выраженія U, V и θ, найдены.

Можно задать только на одной изъ коническихъ поверхностей функцію θ. Два первыя или два послѣднія изъ равенствъ (178_1) опредѣлятъ отношеніе $\dfrac{A^k}{B^k}$ и дадутъ выраженіе постоянныхъ $A^k_{x\theta}$ черезъ $\dfrac{1}{B^k}$. Затѣмъ задать значеніе (Φ_r) для двухъ значеній $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ въ функціяхъ ξ. Совокупность равенствъ (181) опредѣлитъ отношенія $\dfrac{A^k_{tv}}{B^k}$, $\dfrac{B^k_{tv}}{B^k}$ и $\dfrac{1}{B^k}$.

Между упомянутыми функціями также получится соотношеніе, подобное (180).

Для U, V и θ получаемъ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_0^\infty [A^k_{x\theta} S_k + T_k] e^{-\frac{t}{2}} \{[L^k_u + P^k_u e^{-2t}] \cos\gamma_k t + \\ &\qquad + [M^k_u + Q^k_u e^{-2t}] \sin\gamma_k t\}, \\ V &= \sum_0^\infty \sqrt{1-x^2} \left[A^k_{x\theta} \frac{dS_k}{dx} + \frac{dT_k}{dx} \right] e^{-\frac{t}{2}} \{[L^k_v + P^k_v e^{-2t}] \cos\gamma_k t + \\ &\qquad + [M^k_v + Q^k_v e^{-2t}] \sin\gamma_k t\}, \\ \theta &= \sum_0^\infty [A^k_{k\theta} S_k + T_k] e^{-\frac{t}{2}} [L^k_\theta \cos\gamma_k t + M^k_\theta \sin\gamma_k t], \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

гдѣ L^k, M^k со значками u, v, θ; P^k, Q^k со значками u, v и $A^k_{x\theta}$ опредѣленныя постоянныя, а

$$\gamma_k = \frac{2\pi k}{t_1 - t_0}, \quad t = \log r, \quad x = \sin\varphi .$$

§ 30.

Остается опредѣлить постоянныя A^k_{xw}, A^k_{tw} и B^k_{tw}, входящія въ выраженіе W.

Положивъ, подобно предыдущему,

$$l_k^2 = \frac{1}{4} + \frac{2\pi k}{t_1 - t_0}$$

и введя перемѣнную ξ, получимъ

$$\Psi_\varphi = \sum_0^\infty \sqrt{1-x^2} \left[A^k_{xw} \frac{d^2 S_k}{dx^2} + \frac{d^2 T_k}{dx^2} \right] e^{\alpha\xi} [A^k_w \cos k\xi + B^k_w \sin k\xi],$$

гдѣ A^k_w и B^k_w постоянныя, выражающіяся линейно однородно черезъ A^k_{tw} и B^k_{tw}.

Пусть для двухъ значеній φ_0 и φ_1 перемѣнной φ

$$(\Psi_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} = f_1(\xi), \quad (\Psi_\varphi)_{\varphi=\varphi_1} = f_2(\xi),$$

гдѣ $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ заданныя функціи ξ, или

$$\sum_0^\infty (H)_0 [A^k_w \cos k\xi + B^k_w \sin k\xi] = \psi_1(\xi),$$

$$\sum_0^\infty (H)_1 [A^k_w \cos k\xi + B^k_w \sin k\xi] = \psi_2(\xi),$$

гдѣ ψ_1 и ψ_2 также опредѣленныя функціи ξ, и

$$H=\sqrt{1-x^2}\left[A^k_{xw}\frac{d^2 S_k}{dx^2}+\frac{d^2 T_k}{dx^2}\right].$$

Изъ предыдущихъ равенствъ получаемъ

$$\left.\begin{aligned}(H)_0 A^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_1(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\ (H)_0 B^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,,\\ (H)_1 A^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_2(\xi)\cos k\xi\,d\xi\,,\ (H)_1 B^k_w=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_2(\xi)\sin k\xi\,d\xi\,.\end{aligned}\right\}\quad(184)$$

Эти уравненія опредѣлятъ A^k_{xw}, A^k_w и B^k_w. Функціи ψ_1 и ψ_2 не вполнѣ произвольны: между ними должно существовать соотношеніе вида (180), которое будетъ само собою удовлетворено при всякомъ k, если одна изъ этихъ функцій равна нулю.

Для W получится слѣдующее выраженіе

$$W=K\sum_0^\infty\frac{1}{l_k^2}\sqrt{1-x^2}\left[A^k_{xw}\frac{dS_k}{dx}+\frac{dT_k}{dx}\right)e^{\alpha_1 t}[A^k_w\cos\gamma_k t+B^k_w\sin\gamma_k t]\,,\quad(185)$$

гдѣ $\gamma_k=\dfrac{2\pi k}{t_1-t_0}$, α_1 нѣкоторая постоянная.

Подобнымъ же образомъ можетъ быть рѣшена задача другого рода: опредѣлить условія равновѣсія даннаго тѣла при заданныхъ на коническихъ поверхностяхъ деформаціяхъ U, V, W и θ въ функціяхъ r.

Характеръ рѣшенія въ существѣ дѣла не измѣнится.

VIII. О равновѣсіи тѣлъ, ограниченныхъ коническими поверхностями и сферами, подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ послѣднимъ.

§ 31.

Переходимъ къ вопросу о равновѣсіи даннаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ сферическимъ поверхностямъ, его ограничивающимъ. Не опредѣляя пока характера этихъ силъ, разсмотримъ второе рѣшеніе уравненія (158), когда θ^k_r и θ^k_φ опредѣляются уравненіями (159). Частнымъ рѣшеніемъ перваго изъ нихъ будетъ

$$\theta^k_r=r^n,$$

гдѣ n корень уравненія

$$n^2+n-m_k^2=0\,.$$

Полагая $m_k^2=p_k(p_k+1)$, находимъ

$$\theta^k_r=A^k_{r\theta}r^{p_k}+\frac{B^k_{r\theta}}{r^{p_k+1}}\,.\quad(186)$$

$A^k_{r\theta}$ и $B^k_{r\theta}$ произвольныя постоянныя.

Вводя перемѣнную $x = \sin\varphi$, приводимъ второе изъ уравненій (159) къ виду

$$(1-x^2)\frac{d^2\theta_x^k}{dx^2} - 2x\frac{d\theta_x^k}{dx} + p_k(p_k+1)\theta_x = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Это уравненіе Лежандра.

Положимъ

$$\theta_x^k = x^\alpha + a_2 x^{\alpha+2} + a_4 x^{\alpha+4} \ldots + a_{2\mu} x^{\alpha+2\mu}.$$

Характеристическое уравненіе даетъ для α два значенія

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.$$

Такъ какъ

$$a_{2\mu+2} = -a_{2\mu}\,\frac{(p_k-\alpha-2\mu)(p_k+\alpha+1+2\mu)}{(\alpha+2\mu+1)(\alpha+2\mu-1)},$$

то, положивъ сначала $\alpha = 0$, потомъ $\alpha = 1$, получимъ два частныхъ рѣшенія уравненія (187), которыя обозначимъ черезъ P_{p_k} и Q_{p_k}. Рѣшенія эти будутъ

$$\left.\begin{aligned} P_{p_k} &= 1 - \frac{p_k(p_k+1)}{\Gamma(3)} + \frac{p_k(p_k-2)(p_k+1)(p_k+3)}{\Gamma(5)}x^4 - \\ &- \frac{p_k(p_k-2)(p_k-4)(p_k+1)(p_k+3)(p_k+5)}{\Gamma(7)}x^6 + \cdots, \\ Q_{p_k} &= x[1 - \frac{(p_k-1)(p_k+2)}{\Gamma(4)}x^2 + \frac{(p_k-1)(p_k-3)(p_k+2)(p_k+4)}{\Gamma(6)}x^4 - \\ &- \frac{(p_k-1)(p_k-3)(p_k-5)(p_k+2)(p_k+4)(p_k+6)}{\Gamma(8)}x^6 + \ldots {}^{1)} \end{aligned}\right\}(188)$$

Ряды эти будутъ сходится для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между -1 и $+1$. Если p_i цѣлое четное число, первый изъ рядовъ содержитъ конечное число членовъ, если нечетное цѣлое, —второй. При $x = \pm 1$ въ первомъ случаѣ $Q_{p_k}(\pm 1) = \infty$, во второмъ $P_{p_k}(\pm 1) = \infty$. Не трудно видѣть, что ряды эти представляютъ частные случаи гипергеометрическаго ряда, общій типъ котораго, какъ извѣстно, слѣдующій

$$F(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\xi) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\xi + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}\xi^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\xi^3 + \ldots$$

---

[1]) См. Heine, „Handbuch d. Kugelfunctionen“. Berlin, 1861, S. 72.

Полагая

$$\alpha = -\frac{p_k}{2}, \quad \beta = \frac{p_k+1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \xi = x^2,$$

находимъ

$$P_{p_k} = F\left(-\frac{p_k}{2}, \ \frac{p_k+1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ x^2\right),$$

а положивъ

$$\alpha = -\frac{p_k - 1}{2}, \qquad \beta = \frac{p_k+2}{2}, \qquad \gamma = \frac{3}{2}, \quad \xi = x^2,$$

заключаемъ, что

$$Q_{p_k} = xF\left(-\frac{p_k-1}{2}, \ \frac{p_k+2}{2}, \ \frac{3}{2}, \ x^2\right). \; . \; . \; . \; (190)$$

Такимъ образомъ,

$$\theta_x = A^k_{\theta x} P_{p_k} + B^k_{\theta x} Q_{p_k}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (191)$$

гдѣ $A^k_{\theta x}$ и $B^k_{\theta x}$ произвольныя постоянныя.

§ 32.

Интеграція первыхъ двухъ изъ уравненій (155) даетъ

$$\Gamma = \sum_0^\infty \frac{2(k+1)r^2 \dfrac{d\theta^k_r}{dr}}{p_k(p_k+1)} c \frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_0^\infty \frac{2(k+1)r^2 \dfrac{d\theta^k_\varphi}{dr}}{p_k(p_k+1)} c \frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi} = c\left[\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rV)}{\partial r}\right],$$

$$\sum_0^\infty r^2 \theta^k_r c \theta^k_\varphi = \frac{\partial (r^2 cU)}{\partial r} + \frac{\partial (rcV)}{d\varphi}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d(r^2\theta^k_r)}{dr} - 2(k+1)r^2 \frac{d\theta_r}{dr}\right]\theta^k_\varphi = \frac{1}{c}\frac{d\left(c\dfrac{dU^k_\varphi}{d\varphi}\right)}{d\varphi} U^k_r + \frac{d^2(r^2U^k_r)}{dr^2} U^k_\varphi, \\ &\left[r_2\theta^k_r - \frac{2(k+1)}{p_k(p_k+1)} \frac{d\left(r^4 \dfrac{d\theta_r}{dr}\right)}{dr}\right]\frac{d\theta^k_\varphi}{d\varphi} = \frac{d\left(r^2\dfrac{dV^k_{r1}}{dr}\right)}{dr} V^k_\varphi + \frac{d\left(\dfrac{d(cV^k_\varphi)}{d\varphi}\right)}{d\varphi} V^k_{r1}, \end{aligned}\right\} (192)$$

гдѣ $V^k_{r1} = rV^k_r$.

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая, подобно предыдущему,

$$U_\varphi^k = \theta_\varphi^k, \quad V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi^k}{d\varphi},$$

и опредѣливъ U_r^k и V_{r1}^k изъ уравненій

$$K_r = -U_r^k p_k(p_k+1) + \frac{d^2(r^2 U_r^k)}{dr^2},$$

$$L_r = -V_r^k p_k(p_k+1) + \frac{d\left(r^2 \frac{dV_{r1}^k}{dr}\right)}{dr},$$

гдѣ черезъ K_r и L_r обозначены выраженія, заключенныя въ скобкахъ лѣвыхъ частей уравненій (192).

При помощи этого рѣшенія легко опредѣлить состояніе равновѣсія упругой сферической оболочки подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ ея поверхностямъ. Проекціи напряженій будутъ выражаться черезъ θ_φ^k такъ же, какъ и въ предыдущемъ вопросѣ, а $\theta_\varphi = P_{pk}$, ибо Q_{pk} обратится въ ∞, если будемъ разумѣть подъ p_k рядъ цѣлыхъ четныхъ чиселъ. Останавливаться на этой задачѣ не будемъ.

Разсмотримъ другое рѣшеніе уравненій (192), при помощи котораго опредѣлимъ состояніе равновѣсія полаго сферически-усѣченнаго конуса, или пояса сферической оболочки въ предположеніи, что на ихъ коническія поверхности не дѣйствуетъ силъ.

Положивъ

$$\theta^k = r^{p_k}\theta_\varphi^k, \quad U^k = r^{p_k+1}U_\varphi^k, \quad V^k = r^{p_k+1}V_\varphi^k, \quad \ldots \ldots (193)$$

гдѣ U_φ и V_φ функціи одного φ, получимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія U_φ^k и V_φ^k

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(c\,\frac{dU_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi} + (p_k+2)(p_k+3)\,c\,U_\varphi^k = c\theta_\varphi^k l, \\ &\frac{d\left(\frac{1}{c}\,\frac{d(cV_\varphi^k)}{d\varphi}\right)}{d\varphi} + (p_k+2)(p_k+3)\,V_\varphi^k = \frac{d\theta_\varphi}{d\varphi}\,l_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (194)$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\left.\begin{aligned} l &= (p_k+2) - 2p_k(k+1), \\ l_1 &= 1 - \frac{2(k+1)}{p_k+1}(p_k+3). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (195)$$

§ 33.

Прежде чѣмъ перейти къ отысканію U_φ и V_φ, выведемъ нѣкоторыя свойства функцій P_{p_k} и Q_{p_k}, представляющихъ, какъ замѣчено, частныя рѣшенія уравненія

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}-2x\frac{dF}{dx}+p_k(p_k+1)F=0\,.\quad.\quad.\quad.\quad.\,(196)$$

По формулѣ Liouville'я основной детерминантъ

$$\Delta(F)=ce^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}.$$

Въ данномъ случаѣ $c=1$ и, слѣдовательно,

$$Q_{p_k}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dQ_{p_k}}{dx}=\frac{1}{x^2-1}\ ^{1)}\,.\quad.\quad.\quad.\,(197)$$

Возьмемъ четыре функціи P_{p_k}, Q_{p_k}, P_{p_k+2}, Q_{p_k+2} изъ которыхъ первыя двѣ удовлетворяютъ уравненію (196), а двѣ послѣднія уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2F_1}{dx^2}-2x\frac{dF_1}{dx}+(p_k+2)(p_k+3)F_1=0\quad.\,(198)$$

Легко видѣть, что

$$2[2p_k+3]\,FF_1=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(F_1\frac{dF}{dx}-F\frac{dF_1}{dx}\right)\right],$$

откуда, интегрируя и опуская произвольную постоянную, получаемъ

$$\int FF_1dx=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[F_1\frac{dF}{dx}-F\frac{dF_1}{dx}\right].$$

Замѣняя F черезъ P_{p_k}, Q_{p_k} и F_1 черезъ P_{p_k+2}, Q_{p_k+2}, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
\int P_{p_k}P_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int P_{p_k}Q_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx}-P_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int Q_{p_k}P_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx}-Q_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],\\
\int Q_{p_k}Q_{p_k+2}dx&=\frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx}-Q_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right].
\end{aligned}\right\}.\,(199)$$

---

1) См. Forsyth, „A treatise on differential equations". London, 1883, p. 143 etc.

Обозначимъ черезъ θ_x^k и Φ_x^k общіе интегралы уравненій (196) и (198). Такъ какъ

$$p_k(p_k+1)\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx = -\int_{-1}^{+1}\theta_x^i((1-x^2)(\theta_x^k)')dx = -p_i(p_i+1)\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx,$$

то

$$\int_{-1}^{+1}\theta_x^k\theta_x^i dx = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (200)$$

если только $i \gtrless k$.

Слѣдовательно,

$$\int_{-1}^{+1}\Phi_x^k\theta_x^i dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (201)$$

при всякихъ k и i.

Этими формулами мы и воспользуемся впослѣдствіи.

§ 34.

Переходимъ теперь къ опредѣленію функцій U_φ^k и V_φ^k. Преобразуя уравненія (194) къ перемѣнной x, получаемъ для перваго изъ нихъ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dU_x^k}{dx}\right]+(p_k+2)(p_k+3)U_x^k = l\theta_x^k. \quad \ldots (202)$$

Интегралъ подобнаго уравненія безъ правой части будетъ

$$A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2},$$

гдѣ A_u^k и B_u^k произвольныя постоянныя, а P_{p_k+2}, Q_{p_k+2} функціи Лежандра порядка (p_k+2). [1])

Пользуясь методомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, получимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія A_u^k и B_u^k въ функціяхъ x

$$\frac{dA_u^k}{dx} = \frac{l[A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}]}{(1-x^2)\Delta} Q_{p_k+2},$$

$$\frac{dB_u^k}{dx} = -\frac{l[A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}]}{(1-x^2)\Delta} P_{p_k+2},$$

гдѣ

$$\Delta = \frac{1}{x^2-1}.$$

---

[1]) Всякую функцію, удовлетворяющую уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2E}{dx^2} - 2x\frac{dF}{dx} + n(n+1)F = 0,$$

какова бы ни была постоянная n, я буду называть Лежандровой функціей n-аго порядка.

Интегрируя эти уравненія, находимъ [при помощи формулъ (199)]

$$A_u^k = (A_u^k) - lA_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx} - P_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right] -$$

$$- lB_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[Q_{p_k+1}\frac{dQ_{p_k}}{dx} - Q_{p_k}\frac{dQ_{p_k+2}}{dx}\right],$$

$$B_u^k = (B_\theta^k) + lA_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dP_{p_k}}{dx} - P_{p_k}\frac{dP_{p_k+1}}{dx}\right] +$$

$$+ lB_\theta^k \frac{1-x^2}{2(2p_k+3)}\left[P_{p_k+2}\frac{dQ_{p_k}}{dx} - Q_{p_k}\frac{dP_{p_k+2}}{dx}\right],$$

гдѣ (A_u^k) и (B_u^k) новыя произвольныя постоянныя.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на P_{p_k+2}, второе на Q_{p_k+2} и сложивъ, получимъ

$$U_x^k = A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2} + \frac{l}{2(2p_k+3)} A_\theta^k P_{p_k} + \frac{l}{2(2p_k+3)} B_\theta^k Q_{p_k}. \quad (203)$$

Для простоты опускаемъ скобки у постоянныхъ A_u^k и B_u^k.

Полагая

$$V_{1\varphi}^k = cV_\varphi^k$$

и преобразуя второе изъ уравненій (194) къ перемѣнной x, имѣемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2 V_{1x}^k}{dx^2} + (p_k+2)(p_k+3)V_{1x}^k = (1-x^2)\frac{d\theta_x^k}{dx} l_1.$$

Дифференцируя это уравненіе по x и обозначая $\frac{dV_{1x}^k}{dx}$ черезъ V'_{1x}, получаемъ

$$(1-x^2)\frac{d^2 V'_{1x}}{dx^2} - 2x\frac{dV'_{1x}}{dx} + (p_k+2)(p_k+3)V'_{1x} = \theta_x l_2, \quad . \ (204)$$

гдѣ

$$l_2 = -l_1 p_k(p_k+1) = -p_k(p_k+1)\left[1 - \frac{2(k+1)}{p_k+1}(p_k+3)\right]. \ (205)$$

Уравненіе (203) отличается отъ (202) только постоянной l_2. Слѣдовательно,

$$V'_{1x} = A_v^k P_{p_k+2} + B_v^k Q_{p_k+2} + \frac{l_2 A_\theta^k}{2(2p_k+3)} P_{p_k} + \frac{l_2 B_\theta^k}{2(2p_k+3)} Q_{p_k}.$$

Отсюда

$$V_{1x}^k = -\sqrt{1-x^2}\, V_x^k = A_v^k \int P_{p_k+2} dx + B_v^k \int Q_{p_k+2} dx + \frac{l_2 A_\theta^k}{2(2p_k+3)} \int P_{p_k} dx + \frac{l_2 B_\theta^k}{2(2p_k+3)} \int Q_{p_k} dx$$

и

$$\left. \begin{aligned} V_x^k = -\sqrt{1-x^2}\Bigg[& \frac{A_v^k}{(p_k+2)(p_k+3)} \frac{dP_{p_k+2}}{dx} + \frac{B_v^k}{(p_k+2)(p_k+3)} \frac{dQ_{p_k+2}}{dx} + \\ & + \frac{l_2 A_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dP_{p_k}}{dx} + \frac{l_2 B_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dQ_{p_k}}{dx} \Bigg]. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

§ 35.

Полученныя выраженія U_x^k, V_x^k и θ_x^k содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ

$$A_\theta^k,\ B_\theta^k,\ A_u^k,\ B_u^k,\ A_v^k \text{ и } B_v^k.$$

Между четырьмя послѣдними изъ нихъ должно существовать два соотношенія, выражающихъ A_u^k и B_u^k соотвѣтственно черезъ A_v^k и B_v^k (или наоборотъ).

Подставивъ U_x, V_x и θ_x въ равенство (87) и замѣтивъ, что

$$\frac{(p_k+3)\,l + l_2}{2(2p_k+3)} - 1 = 0\,,$$

мы отождествимъ упомянутое равенство, полагая

$$\left. \begin{aligned} (p_k+3)\, A_u^k + A_v^k = 0\,, \\ (p_k+3)\, B_u^k + B_v^k = 0\,. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

Такимъ образомъ,

$$\left. \begin{aligned} \theta_x^k &= A_\theta^k P_{p_k} + B_\theta^k Q_{p_k}\,, \\ U_x^k &= A_u^k P_{p_k+2} + B_u^k Q_{p_k+2} + \frac{l A_\theta^k}{2(2p_k+3)} P_{p_k} + \frac{l B_\theta^k}{2(2p_k+3)} Q_{p_k}\,, \\ V_x^k &= \sqrt{1-x^2}\Bigg[\frac{A_u^k}{p_k+2} \frac{dP_{p_k+2}}{dx} + \frac{B_u^k}{p_k+2} \frac{dQ_{p_k+2}}{dx} - \\ & - \frac{l_2 A_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dP_{p_k}}{dx} - \frac{l_2 B_\theta^k}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} \frac{dQ_{p_k}}{dx} \Bigg], \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

и

$$\theta=\sum_0^\infty r^{p_k}\theta_x^k\,,\quad U=\sum_0^\infty r^{p_k+1}U_x^k\,,\quad V=\sum_0^\infty r^{p_k+1}V_x^k\ .\ .\ .\ (209)$$

гдѣ подъ θ_x^k, U_x^k и V_x^k разумѣются предыдущія выраженія.

Согласно обозначеніямъ § 33, можно представить эти равенства въ такомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} U&=\sum_0^\infty r^{p_k+1}\left[\Phi_x^k+\frac{l}{2(2p_k+3)}\,\theta_x^k\right],\\ V&=\sum_0^\infty r^{p_k+1}\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{p_k+2}\,\Phi_x^k-\frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)}\,\theta_x^k\right].\end{aligned}\right\}\ (210)$$

Замѣтимъ, что кромѣ полученнаго можно найти и другое рѣшеніе, полагая

$$\theta_r^k=\frac{\theta_\varphi^k}{r^{p_k+1}}\,,\qquad U_r^k=\frac{U_\varphi^k}{r^{p_k}}\,,\qquad V_r^k=\frac{V_\varphi^k}{r^{p_k}}\,;$$

болѣе общее рѣшеніе будетъ

$$\left.\begin{aligned} \theta^k&=\left(C_\theta^k r^{p_k}+D_\theta^k\,\frac{1}{r^{p_k+1}}\right)\theta_\varphi^k\,,\\ U^k&=\left(C_\theta^k r^{p_k+1}\,U_{\varphi 1}^k+\frac{D_\theta^k}{r^{p_k}}\right)U_{\varphi 2}^k\,,\\ V^k&=\left(C_\theta^k r^{p_k+1}\,V_{\varphi 1}^k+\frac{D_\theta^k}{r^{p_k}}\right)V_{\varphi 2}^k\,,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (211)$$

гдѣ C_θ^k и D_θ^k произвольныя постоянныя.

Сущность анализа не измѣнится, если положимъ $C_\theta^k=1$, $D_\theta^k=0$. Въ послѣднемъ случаѣ можно, какъ увидимъ далѣе, опредѣлить состояніе равновѣсія разсматриваемаго тѣла при извѣстнымъ образомъ заданныхъ силахъ, дѣйствующихъ на одной изъ сферическихъ поверхностей, ограничивающихъ его. Если же возьмемъ болѣе общее рѣшеніе (211), можемъ задать силы на обѣихъ сферическихъ поверхностяхъ. Число заданныхъ функцій увеличится вдвое и въ столько же разъ увеличится число условій, которымъ должны удовлетворять эти функціи. Ходъ же рѣшенія задачи, какъ сказано, въ существѣ дѣла не измѣнится. Я ограничусь этимъ замѣчаніемъ и остановлюсь на предположеніи, что

$$C_\theta^k=1\,,\qquad D_\theta^k=0\,.$$

§ 36.

Остается опредѣлить функцію W, удовлетворяющую уравненію

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2(rcW)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial(rcW)}{\partial\varphi}\right]=0 \ldots\ldots (212)$$

Положивъ

$$W=\sum W^k \quad \text{и} \quad cW^k=r^{p_k}W_\varphi^k, \ldots (213)$$

гдѣ n_k произвольная постоянная, получимъ

$$\frac{d\left(\frac{1}{c}\frac{dW_\varphi^k}{d\varphi}\right)}{d\varphi}+n_k(n_k+1)\frac{1}{c}\frac{dW_\varphi^k}{d\varphi}=0, \ldots (212_1)$$

или

$$(1-x^2)\frac{d^2W_x^k}{dx^2}+n_k(n_k+1)W_x^k=0, \ldots (212_2)$$

гдѣ, какъ и прежде, $x=\sin\varphi$.

Такъ какъ

$$(1-x^2)\frac{d^2W_x'}{dx^2}-2x\frac{dW_x'}{dx}+n_k(n_k+1)W_x'=0, \text{ [1]}$$

то

$$W_x^k=A_w^kP_{n_k}+B_w^kQ_{n_k} \ldots\ldots (214)$$

и

$$W_x^k=-(1-x^2)\left[\frac{A_w^k}{n_k(n_k+1)}\frac{dP_{n_k}}{dx}+\frac{B_w^k}{n_k(n_k+1)}\frac{dQ_{n_k}}{dx}\right].$$

Отсюда получаемъ

$$W^k=-\sqrt{1-x^2}\left[\frac{A_w^k}{n_k(n_k+1)}\frac{dP_{n_k}}{dx}+\frac{B_w^k}{n_k(n_k+1)}\frac{dQ_{n_k}}{dx}\right]r^{n_k}. \;. (215)$$

Обозначивъ черезъ Ψ_x^k общій интегралъ уравненія

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}-2x\frac{dF}{dx}+n_k(n_k+1)F=0,$$

представимъ предыдущее равенство въ видѣ

$$W_x^k=-\sqrt{1-x^2}\,[\Psi_x^k]'\frac{r^{n_k}}{n_k(n_k+1)} \ldots\ldots (216)$$

---

[1]) Черезъ W_x' обозначено $\dfrac{dW_x^k}{dx}$.

Слѣдовательно,

$$W = -\sum_0^\infty \frac{r^{n_k}}{n_k(n_k+1)} \sqrt{1-x^2}\,[\Psi_x^k]' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

§ 37.

Вводя перемѣнную x въ выраженія (157), получаемъ

$$R_r = 2K\left[k\theta + \frac{\partial U}{\partial r}\right],$$

$$\Phi_\varphi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial V}{\partial x}\right],$$

$$\Psi_\psi = 2K\left[k\theta + \frac{U}{r} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{V}{r}\right],$$

$$\Phi_\psi = \Psi_\varphi = K\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{W}{r}\right],$$

$$\Psi_r = R_\psi = K\left[\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r}\right],$$

$$R_\varphi = \Phi_r = K\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{r}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right].$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
R_r &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[f_k\theta_x^k + (p_k+1)\Phi_x^k\right],\\
\Phi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[g_k\theta_x^k - (p_k+2)\Phi_x^k + x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)' - j_k(\theta_x^k)'\right)\right],\\
\Psi_\varphi &= 2K\sum_0^\infty r^{p_k}\left[h_k\theta_x^k + \Phi_x^k - x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi_x^k)' - j_k(\theta_x^k)'\right)\right],\\
\Phi_\psi &= \Psi_\varphi = K\sum_0^\infty r^{n_k-1}\left[\Psi_x^k - \frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi_x^k)'\right],\\
\Psi_r &= R_\psi = K\sum_0^\infty r^{n_k-1}\frac{1-n_k}{n_k(n_k+1)}\sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)'.\\
R_\varphi &= \Phi_r = K\sum_0^\infty r^{p_k}\sqrt{1-x^2}\left[m_k(\Phi_x^k)' + q_k(\theta_x^k)'\right],
\end{aligned}\right\} . \quad (218)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
f_k &= k + \frac{l(p_k+1)}{2(2p_k+3)}\,,\\
g_k &= k + \frac{1}{2(2p_k+3)}(l+l_2)\,,\\
j_k &= \frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)}\,,\\
h_k &= \frac{2(p_k+1)}{p_k+2}\,,\\
m_k &= 1 + \frac{p_k+1}{p_k+2} - \frac{1}{p_k+2} = \frac{2(p_k+1)}{p_k+2}\,.\\
q_k &= \frac{l}{2(2p_k+3)} - \frac{l_2}{2p_k(2p_k+2)} + \frac{l_2}{2p_k(p_k+1)(2p_k+3)} =\\
&= \frac{1}{2(2p_k+3)}\left[l - \frac{l_2}{p_k+1}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (219)$$

§ 38.

Предыдущій анализъ даетъ, такимъ образомъ, выраженія четырехъ функцій U, V, W и θ и проекцій на координатныя оси напряженій въ извѣстныхъ функціяхъ отъ $x = \sin\varphi$ и восьми группъ произвольныхъ постоянныхъ

$$A_u^k,\ B_u^k,\ A_\theta^k,\ B_\theta^k,\ A_w^k,\ B_w^k,\ p_k,\ n_k$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots \infty).$$

Задача будетъ вполнѣ рѣшена, если опредѣлимъ эти постоянныя по предѣльнымъ условіямъ задачи.

Пустъ на коническихъ поверхностяхъ (т. е. для двухъ значеній $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$)

$$\left.\begin{aligned}
&[R_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} = 0\,, \qquad [R_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = 0\,,\\
&[\Phi_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} = 0\,, \qquad [\Phi_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = 0\,,\\
&[\Psi_\varphi]_{\varphi=\varphi_0} = 0\,, \qquad [\Psi_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

Эти равенства, удовлетворяющіяся при всякомъ r, разобьются на безконечное число таковыхъ (каждое).

Обозначивъ черезъ x_0 и x_1 два значенія x, соотвѣтствующія φ_0 и φ_1 получимъ для $k^{\underline{\text{таго}}}$ изъ нихъ

*

$$\left.\begin{aligned}&[m_k(\Phi^k_x)'+q_k(\theta^k_x)']_{x=x_0}=0\,,\qquad [m(\Phi^k_x)'+q_k(\theta^k_x)']_{x=x_1}=0\,,\\ &\left\{g_k\theta^k_x-(p_k+2)\Phi^k_x+x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi^k_x)'-j_k(\theta^k_x)'\right)\right\}_{x=x_0}=0\,,\\ &\left\{g_k\theta^k_x-(p_k+2)\Phi^k_x+x\left(\frac{1}{p_k+2}(\Phi^k_x)'-j_k(\theta^k_x)'\right)\right\}_{x=x_1}=0\,,\end{aligned}\right\}.\quad(221)$$

$$[\Psi^k_x-\frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi^k_x)']_{x=x_0}=0\,,\ [\Psi^k_x-\frac{2x}{n_k(n_k+1)}(\Psi^k_x)']_{x=x_1}=0\,.\quad(222)$$

Лѣвыя части этихъ равенствъ линейны однородны относительно постоянныхъ A и B со значками; равенства (221) содержатъ A и B со значками u и θ, а (222) — A и B со значкомъ w и опредѣлятъ соотвѣтственно отношенія

$$\frac{A^k_u}{B^k_\theta}\,,\quad \frac{B^k_u}{B^k_\theta}\,,\quad \frac{A^k_\theta}{B^k_\theta}\ \text{ и }\ \frac{A^k_w}{B^k_w}\,.$$

Результатъ исключенія A^k_u, B^k_u, A^k_θ и B^k_θ даетъ уравненіе (трансцендентное) для опредѣленія p_k, а результатъ исключенія A^k_{wx} и B^k_{wx} — подобное же уравненіе для n_k.

Замѣнивъ θ^k_x и Ψ^k_x соотвѣтственно черезъ

$$A^k_\theta P_{p_k}+B^k_\theta Q_{p_k}\,,\quad A^k_u P_{p_k+2}+B^k_u Q_{p_k+2}\,,$$

приведемъ (221) къ виду

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^k_u m_k(P_{p_k+2})_i+\beta^k_u m_k(Q_{p_k+2})_i+\alpha^k_\theta q_k(P_{p_k})_i=-q_k(Q_{p_k})_i\,,\\ &\alpha^k_u\left[\frac{x_i}{p_k+2}(P_{p_k+2})'_i-(p_k+2)(P_{p_k+2})_i\right]+\beta^k_u\left[\frac{x_i}{p_k+2}(Q_{p_k+2})'_i-\right.\\ &\left.-(p_k+2)(Q_{p_k+2})_i\right]+\alpha^k_\theta[g_k(P_{p_k})_i-j_k(P_{p_k})'_i]=j_k(Q_{p_k})'_i-g_k(Q_{p_k})_i\,,\end{aligned}\right\}.\quad(223)$$

гдѣ вообще

$$(F)_i\,,\quad (F)'_i\quad {\scriptstyle(i=0,\ 1)}$$

обозначаютъ значеніе функціи F или ея производной соотвѣтственно при $x=x_0$, $x=x_1$, и

$$\alpha^k_u=\frac{A^k_u}{B^k_\theta}\,,\quad \beta^k_u=\frac{B^k_u}{B^k_\theta}\,,\quad \alpha^k_\theta=\frac{A^k_\theta}{B^k_\theta}\,.\ .\ .\ .\ .\ (224)$$

Исключая изъ предыдущихъ уравненій постоянныя α^k_u, β^k_u и α^k_θ, получаемъ такое уравненіе для опредѣленія p_k

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (225)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{x_0}{p_k+2}(P_{p_k+2})'_0 - (p_k+2)(P_{p_k+2})_0, \\ a_{12} &= \frac{x_0}{p_k+2}(Q_{p_k+2})'_0 - (p_k+2)(Q_{p_k+2})_0, \\ a_{13} &= g_k(P_{p_k})_0 - j_k(P_{p_k})'_0, \\ a_{14} &= g_k(Q_{p_k})_0 - j_k(Q_{p_k})'_0, \\ a_{21} &= \frac{x_1}{p_k+2}(P_{p_k+2})'_1 - (p_k+2)(P_{p_k+2})_1, \\ a_{22} &= \frac{x_1}{p_k+2}(Q_{p_k+2})'_1 - (p_k+2)(Q_{p_k+2})_1, \\ a_{23} &= g_k(P_{p_k})_1 - j_k(P_{p_k})'_1, \quad a_{24} = g_k(Q_{p_k})_1 - j_k(Q_{p_k})'_1, \\ a_{31} &= m_k(P_{p_k+2})'_0, \quad a_{32} = m_k(Q_{p_k+2})'_0, \\ a_{33} &= q_k(P_{p_k})'_0, \quad a_{34} = q_k(Q_{p_k})'_0, \\ a_{41} &= m_k(P_{p_k+2})'_1, \quad a_{42} = m_k(P_{p_k+2})'_1, \\ a_{43} &= q_k(P_{p_k})'_1, \quad a_{44} = q_k(Q_{p_k})'_1. \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

Уравненіе (225) имѣетъ безконечное множество вещественныхъ корней.

§ 39.

Замѣнивъ Ψ^k_x черезъ $A^k_w P_{p_k} + B^k_w Q_{p_k}$ и обозначивъ черезъ α^k_w отношеніе $\dfrac{A^k_w}{B^k_w}$, получимъ изъ уравненій (222)

$$\left.\begin{aligned} \alpha^k_w[n_k(n_k+1)(P_{n_k})_0 - 2x_0(P_{n_k})'_0] + [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_0 - 2x_0(Q_{n_k})'_0] = 0, \\ \alpha^k_w[n_k(n_k+1)(P_{n_k})_1 - 2x_1(P_{n_k})'_1] + [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_1 - 2x_1(Q_{n_k})'_1] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (227)$$

Отсюда получаемъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія постоянной n_k

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} [n_k(n_k+1)(P_{n_k})_0 - 2x_0(P_{n_k})'_0], & [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_0 - 2x_0(Q_{n_k})'_0] \\ [n_k(n_k+1)(P_{n_k})_1 - 2x_1(P_{n_k})'_1], & [n_k(n_k+1)(Q_{n_k})_1 - 2x_1(Q_{n_k})'_1] \end{vmatrix} = 0 . \quad (228)$$

Это уравненіе, также какъ и (223), имѣетъ безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней. Допустимъ для простоты, что тѣло симметрично относительно плоскости xy, т. е $x_0 = -x_1$. Обозначивъ черезъ $b_{ik}(i, k = 1, 2)$ элементы опредѣлителя $\varDelta_2$, имѣемъ

$$b_{11} = b_{21}, \qquad b_{12} = -b_{22},$$

такъ какъ P_{n_k} четная, а Q_{n_k} нечетная функція x. Уравненіе (228) приведется къ такому

$$\varDelta_2 = b_{11} b_{22} = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (228_1)$$

Дадимъ n_k значенія послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ и обозначимъ соотвѣтствующія имъ значенія P_{n_k} (при данномъ $x = a$) черезъ $(P_{n_k})_{2i}$ $(i = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty)$. Знаки послѣднихъ членовъ въ двухъ смежныхъ выраженіяхъ $(P_{n_k})_{2i}$, $(P_{n_k})_{2i+2}$ противоположны. При всякомъ a найдется такое значеніе $n_k = 2l$ (въ данномъ рядѣ ихъ), что знакъ P_{n_k} при $n_k > 2l$ будетъ зависѣть отъ знака послѣдняго члена, такъ что всѣ $(P_{n_k})_{2j}$ $(j > l)$ будутъ поперемѣнно положительны и отрицательны. Уравненіе

$$P_{n_k} = 0,$$

имѣетъ, слѣдовательно, безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней, заключенныхъ между послѣдовательными четными числами (начиная отъ опредѣленнаго значенія n_k, зависящаго отъ даннаго x). Тоже должно сказать и объ уравненіи

$$b_{11} = 0.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что уравненіе

$$b_{22} = 0,$$

имѣетъ безчисленное множество положительныхъ вещественныхъ корней, заключающихся между послѣдовательными нечетными числами (начальное значеніе которыхъ также зависитъ отъ даннаго x).

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (228) имѣетъ безчисленное множество вещественныхъ положительныхъ корней между послѣдовательнымъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ.

Тоже должно сказать и объ уравненіи (226). Постоянныя p_k и n_k, такимъ образомъ, опредѣлены.

§ 40.

Остается опредѣлить постоянныя B_{θ}^{k} и B_{w}^{k}.

Покажемъ, что при данныхъ условіяхъ задачи

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=0\,,\quad\ldots\ldots\quad(229)$$

если $i \gtrless k$.

Интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)(\Psi_x^i)'\Psi_x^k\Big|_{x_0}^{x_1}+N_i\int_{x_0}^{a_1}\Psi_x^k\Psi_x^i\,dx\,.$$

гдѣ

$$N_i=n_i(n_i+1).$$

Совершая интеграцію въ другомъ порядкѣ, получаемъ

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)(\Psi_x^i)'\Psi_x^k\Big|_{x_0}^{x_1}+N_k\int_{x_0}^{x_1}\Psi_x^k\Psi_x^i\,dx\,.$$

Отсюда

$$(N_k-N_i)\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=(1-x^2)[N_k\Psi_x^k(\Psi_x^i)'-N_i\Psi_x^i(\Psi_x^k)'].$$

Такъ какъ [равенства (222)]

$$\Big[N_k\Psi_x^k-2x(\Psi_x^k)'\Big]_{x_0}^{x_1}=0,$$

$$\Big[N_i\Psi_x^i-2x(\Psi_x^i)'\Big]_{x_0}^{x_1}=0,$$

то

$$N_k\Psi_x^k(\Psi_x^i)'-N_i\Psi_x^i(\Psi_x^k)'=0\,;$$

слѣдовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1}(1-x^2)(\Psi_x^k)'(\Psi_x^i)'\,dx=0,$$

если $i \gtrless k$. Что и требовалось доказать.

Допустимъ, что одно изъ тангенціальныхъ напряженій, дѣйствующихъ на одной изъ сферъ, именно $\Psi_r=R_{\varphi}$, задано въ функціи x, которую обозначимъ черезъ $f(x)$. Если a радіусъ этой сферы, то

$$\sum_0^{\infty} M_k \sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)' = f(x)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

гдѣ

$$M_k = a^{n_k - 1}\frac{1-n_k}{n_k(n_k+1)}\,.$$

Помножая обѣ части равенства (230) на $\sqrt{1-x^2}(W_x^k)'$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ x_0 до x_1, получаемъ при помощи (229)

$$M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)[(\Psi_x^k)']^2\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,(\Psi_x^k)'\,dx\,.$$

Подставивъ въ это равенство вмѣсто Ψ_x^k его выраженіе въ видѣ

$$B_w^k[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']$$

и сокративъ на B_w^k, имѣемъ

$$B_w^k M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']dx\,,$$

откуда

$$B_w^k = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']\,dx}{M_k \int_{x_0}^{x_1} (1-x^2)[\alpha_w^k(P_{n_k})' + (Q_{n_k})']^2\,dx}\Bigg\} \quad . \quad . \quad (231)$$

§ 41.

Для опредѣленія постоянной B_θ^k можно задать или вторую составляющую тангенціальнаго напряженія на одной изъ сферическихъ поверхностей, или коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема въ функціи x. Послѣдняя, какъ увидимъ, не вполнѣ произвольна и должна быть однозначной и непрерывной между $x=1$, $x=-1$, т. е. разлагающейся въ рядъ по функціямъ Лежандра какого угодно параметра.

Положимъ, что при $r=a$

$$[R_\varphi]_{r=a} = [\Phi_r]_{r=a} = f_1(x)K\,,$$

гдѣ $f_1(x)$ заданная функція x_1 т. е.

$$\sum_0^{\infty} a^{p_k}\sqrt{1-x^2}\,B_\theta^k[m_k(\Phi_x^k)' + q_k(\theta_x^k)'] = f_1(x)\,, \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

гдѣ Φ_x^k и θ_x^k извѣстныя функціи x и опредѣленныхъ постоянныхъ α_u^k, β_u^k и α_θ^k.

Какъ извѣстно (§ 33),

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)(\Phi_x^k)'(\Phi_x^i)'\,dx=0\\
&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)(\theta_x^k)'(\theta_x^i)'\,dx=0\,,\\
&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)(\Phi_x^k)'(\theta_x^i)'\,dx=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(233)$$

если $i \gtrless k$, и

при всякомъ k и i.

Допустимъ, что

$$\frac{f_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_0^\infty A_k[m_k(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)']\quad\ldots\ldots(234)$$

для всѣхъ значеній x между -1 и $+1$, гдѣ A_k постоянная.

Помножая равенство (234) на $(1-x^2)(\Phi_x^k)'$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ $x=-1$ до $x=+1$, находимъ

$$A_k m_k\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\Phi_x^k)']^2\,dx=\int_{-1}^{+1}f(x)(\Phi_x^k)'\,dx.$$

Помножая то же равенство на $(1-x^2)(\theta_x^k)'$ и интегрируя въ тѣхъ же предѣлахъ, имѣемъ

$$A_k q_k\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\theta_x^k)']^2\,dx=\int_{-1}^{+1}f(x)(\theta_x^k)'\,dx,$$

гдѣ $f(x)=f_1(x)\sqrt{1-x^2}$. Отсюда

$$A_k=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)(\Phi_x^k)'\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\Phi_x^k)']^2\,dx}=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)(\theta_x^k)'\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\theta_x^k)']^2\,dx}\,.\quad(235)$$

Такъ какъ Φ_x^k и θ_x^k линейныя однородныя функціи P_{p_k+2}, Q_{p_k+2}, P_{p_k} и Q_{p_k}, то помноженіемъ равенства (234) на послѣднія и интеграціей между $x=-1$ и $x=1$, получимъ еще четыре выраженія для постоянной A_k, т. е. всего пять соотношеній въ опредѣленныхъ интегралахъ, которымъ должна удовлетворять функція $f(x)$. Обозначимъ отношеніе, содержащее функцію P_m, черезъ (A_m), а отношеніе, содержащее Q_m, черезъ (B_m). Пять упомянутыхъ соотношеній, очевидно, равносильны тремъ

$$(A_{p_k+2})=(B_{p_k+2}),\quad(A_{p_k+2})=(A_{p_k}),\quad(A_{p_k+2})=(B_{p_k}).\quad.\ (236)$$

Эти уравненія будутъ удовлетворены, если $p_k\,(k=0\,,\,1\,,\,2\,.\,.\,\infty)$ будетъ общимъ ихъ корнемъ.

Положимъ

$$(A_{p_k+2})-(B_{p_k+2})=\Psi_1(p_k)\,,\quad (A_{p_k-2})-(A_{p_k})=\Psi_2(p_k)\,,$$
$$(A_{p_k+2})-(B_{p_k})=\Psi_3(p_k)$$

и

$$y_0=\Delta_1(p_k)\,,\quad y_1=\Psi_1(p_k)\,,\quad y_2=\Psi_2(p_k)\,,\quad y_3=\Psi_3(p_k)\,,\,. \quad (237)$$

гдѣ $\Delta_1(p_k)$ опредѣлитель (225). $\Delta_1(p_k)$ и $\Psi_i(p_k)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ извѣстныя функціи p_k. Уравненія (237) представляютъ четыре трансцендентныхъ кривыхъ, абсциссы и ординаты которыхъ соотвѣтственно суть y_i и p_k. Функція $f(x)$ должна быть такова, чтобы кривыя (237) имѣли безконечно большое число общихъ точекъ пересѣченія на оси абсциссъ. Разумѣется, можно найти безчисленное множество функцій f, удовлетворяющихъ этому условію. Предполагая A_k опредѣленною постоянной, изъ равенства

$$\sum_0^\infty a^{p_k}B_\theta^k[m_k(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)']=\sum_0^\infty A_k[m_k(\Phi_x^k)'+q_k(\theta_x^k)']\,,$$

находимъ

$$B_\theta^k=\frac{A_k}{a^{p_k}}=\frac{1}{a^{p_k}}\,\frac{\int_{-1}^{+1}f(x)\,(\Phi_x^k)'\,dx}{\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[(\Phi_x^k)']^2\,dx}\ \Bigg\}\,.\,. \quad (238)$$

Всѣ постоянныя опредѣлены.

§ 42.

Вмѣсто тангенціальнаго напряженія Φ_r можно задать въ функціи x коэффиціентъ кубическаго измѣненія объема θ, что представитъ даже нѣкоторое преимущество, такъ какъ произволъ заданной функціи въ послѣднемъ случаѣ менѣе стѣсненъ, чѣмъ въ первомъ.

Положимъ

$$\sum_0^\infty a^{p_k}B_\theta^k(\alpha_\theta^k P_{p_k}+Q_{p_k})=\psi(x)\,;$$

пусть

$$\psi(x)=\sum_0^\infty A_k(\alpha_\theta^k P_{p_k}+Q_{p_k})$$

для всѣхъ значеній x между -1 и $+1$. Въ данномъ случаѣ $\psi(x)$ должно удовлетворять только одному равенству

$$(A_{p_k})=(B_{p_k})$$

или

$$\left.\frac{\int_{+1}^{+1}\psi(x)P_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k(P_{p_k})^2+Q_{p_k}P_{p_k}]dx}=\frac{\int_{+1}^{+1}\psi(x)Q_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k P_{p_k}Q_{p_k}+(Q_{p_k})^2]dx}.\right\} . \quad (239)$$

Функція $\psi(x)$ должна быть такова, чтобы кривыя

$$y_0=\Delta_1(p_k)\,,\qquad y_1=\psi_1(p_k)\,,$$

гдѣ $\psi_1(p_k)=(A_{p_k})-(B_{p_k})$, имѣли безконечное число общихъ точекъ пересѣченія съ осью абсциссъ p_k.

Постоянная B_θ^k опредѣлится равенствомъ

$$\left.B_\theta^k=\frac{1}{a^{p_k}}\frac{\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_{p_k}dx}{\int_{-1}^{+1}[\alpha_\theta^k(P_{p_k})^2+Q_{p_k}P_{p_k}]dx}.\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (240)$$

Сходимость рядовъ (209), (217), (185). (183) для значеній перемѣнныхъ r, φ и ψ, соотвѣтствующихъ точкамъ пространства, заполненнаго матеріей разсматриваемыхъ тѣлъ, докажется такъ же, какъ сходимость рядовъ, выражающихъ U, V, W и θ въ вопросѣ о равновѣсіи цилиндрическихъ тѣлъ.
