потому, что аналогичному ограничению подчиняется постоянная в неравенстве, использованном в доказательстве, которое вместе со списком литературы дано во второй части работы.

Поступила 13 марта 1973 г.

УДК 532.135

Э. Н. ТАТАРЧЕНКО

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] выведены уравнения пограничного слоя на произвольной гладкой поверхности для вязкопластичной среды, описываемой достаточно универсальным реологическим уравнением. Эти уравнения справедливы при малом пределе текучести среды.

В случае большого предела текучести среды (как показано в [2]) в разложениях по малому параметру, характеризующему толщину пограничного слоя, необходимо удерживать члены более высокого порядка, которые оказываются существенными при малой кривизне поверхности. Это дало возможность в настоящей работе получить уравнения, допускающие предельный переход к уравнениям плоского обобщенного вязкопластичного пограничного слоя Олдройда [3]. Показано, что трансверсальный перепад давления отсутствует в случаях, когда поверхность изометрична плоскости или является поверхностью вращения. Внешнее течение в обоих случаях должно обладать осевой симметрией.

Используя реологическое соотношение, предложенное в работе [1],

$$P_{ik} = P\delta_{ik} + 2\tilde{\mu} v_{ik}, \tag{1}$$

где P_{ik} и v_{ik} — тензоры напряжений и скоростей деформаций; P — давление; $\tilde{\mu}$ — переменная кажущаяся вязкость, определяемая соотношением

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{h}\left[\tau_0^{\frac{1}{n}} + (\mu h)^{\frac{1}{m}}\right]^n, \tag{2}$$

приводим уравнения вязкопластичной среды к виду

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v}\right) = -\operatorname{grad} P + 2\tilde{\mu}\operatorname{div}\Phi + \Phi\operatorname{grad} 2\tilde{\mu}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

Здесь τ_0 — предел текучести; μ — коэффициент вязкости; ρ — плотность среды, $\overline{\Phi}$ — тензор скоростей деформаций; $h^2 = 2v_{ik}v^{ki}$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций.

Переходя в (3) к безразмерным переменным

$$\vec{r}=L\vec{r}^*;\ \vec{v}=U\vec{v}^*;\ P=P_0P^*;\ \ h=\frac{U}{L}h^*;\ \ t=\frac{L}{U}t^*;\ \ \Phi=\frac{U}{L}\Phi^*, \tag{4}$$

где $L,\ U,\ P_0$ — характерные линейный размер, скорость и давление, получаем

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}\right)=-\frac{P_0\mathrm{Re}}{\rho U^2}\operatorname{grad}P+2\tilde{\mu}\operatorname{div}\Phi+\Phi\operatorname{grad}2\tilde{\mu}; \tag{5}$$

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{h}\left(S^{\frac{1}{n}}+h^{\frac{1}{m}}\right)^n;\ \ S=\tau_0\left(\frac{L}{\mu U}\right)^{\frac{n}{m}};\ \ \mathrm{Re}=\rho U^2\left(\frac{L}{\mu U}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Звездочки в обозначениях безразмерных величин для простоты записи опущены.

Уравнения (5), записанные в ортогональной криволинейной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_k\frac{v_k}{H_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\sum_k\frac{v_i}{H_i}\frac{v_k}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}-\sum_k\frac{v_k^2}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}=$$

$$=-\frac{P_0}{\rho U^2}\frac{1}{H_i}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{2\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}H_i}\sum_k\frac{v_{kk}}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}+ \tag{6}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,H_i}\sum_k\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(H_1H_2H_3\frac{H_i}{H_k}2\tilde{\mu}v_{ik}\right).$$

Здесь v_i, v_{ik} — физические компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформаций; H_i — коэффициенты Лямэ,

$$v_{11}=\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\right),$$

$$v_{12}=\frac{1}{2H_1H_2}\left(H_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+H_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-v_1\frac{\partial H_1}{\partial x_2}v_2\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right),$$

остальные компоненты тензора скоростей деформаций получаются соответствующей заменой индексов.

Пусть обтекаемая поверхность отнесена к системе линий кривизны и задана уравнением $\vec{r}_0=\vec{r}_0(x_1,\ x_2)$, x_3 определяет расстояние точки по нормали к этой поверхности. Линейный элемент в выбранных координатах имеет вид [4]:

$$ds^2=H_1^2\,dx_1^2+H_2^2\,dx_2^2+H_3^2\,dx_3^2;$$

$$H_1=A_1\left(1+\frac{x_3}{R_1}\right);\ \ H_2=A_2\left(1+\frac{x_3}{R_2}\right);\ \ H_3=1,$$

A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы обтекаемой поверхности, а R_1 и R_2 — ее главные радиусы кривизны. Заменяя в уравнениях (6) x_3 на εx_3 и v_3 на εv_3, где ε — малый параметр, характеризующий толщину пограничного слоя и определяемый ниже из условия, чтобы вязкие и пластические силы были одного порядка, с точностью до главных членов получаем

$$\mathrm{Re}\varepsilon^{1+\frac{n}{m}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{v_1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{v_2}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{v_1v_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{v_2^2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)=-\frac{P_0\mathrm{Re}\varepsilon^{1+\frac{n}{m}}}{\rho U^2}\frac{1}{A_1}\frac{\partial P}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v_{13}^0}{h_0}h_0^{\frac{n}{m}}\right)+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v_{13}^0}{h_0}Q_0\right)+\varepsilon\left[\left(\frac{4}{R_1}+\frac{2}{R_2}\right)\frac{v_{13}^0}{h_0}Q_0+2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{Q_0}{h_0}c_{13}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha n}{m}Q_1\right)\right]+\varepsilon^2\left\{2\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{Q_0}{h_0}(b_{13}-\alpha c_{13}-\beta v_{13}^0)+\right.\right. \tag{7}$$

$$\left.+\frac{n}{m}Q_1\left(\frac{2\beta m-\alpha^2(3m-1)}{2m}v_{13}^0+\alpha a_{13}\right)+\frac{n(n-1)}{2m^2}\alpha^2v_{13}^0Q_2\right]+$$

$$+\left(\frac{4}{R_1}+\frac{2}{R_2}\right)\left(\frac{Q_0}{h_0}c_{13}+\frac{\alpha n}{m}v_{13}^0Q_1\right)-\left(\frac{4}{R_1^2}+\frac{2}{R_2^2}\right)\frac{Q_0}{h_0}x_3v_{13}^0+$$

$$+\frac{2}{A_1^2A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A_1A_2v_{11}^0Q_0}{h_0}\right)+\frac{2}{A_1^2A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A_1^2v_{12}^0Q_0}{h_0}\right)-$$

$$\left.-\frac{2Q_0}{A_1h_0}\left(\frac{v_{11}^0}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1}-\frac{v_{22}^0}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)\right\};$$

$$\mathrm{Re}\varepsilon^{2+\frac{n}{m}}\left(-\frac{v_1^2}{R_1}-\frac{v_2^2}{R_2}\right)=-\frac{P_0\mathrm{Re}\varepsilon^{1+\frac{n}{m}}}{\rho U^2}\frac{\partial P}{\partial x_3}+ \tag{8}$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(A_2Q_0\frac{2v_{13}^0}{h_0}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(A_1Q_0\frac{2v_{23}^0}{h_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{2v_{33}^0}{h_0}Q_0\right)\right],$$

где введены следующие обозначения:

$$a_{13}=-\frac{v_1}{2R_1};\quad b_{13}=\frac{1}{2A_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{x_3v_1}{2R_1^2};\quad c_{13}=a_{13}-\alpha v_{13}^0;$$

$$h_0=2\sqrt{(v_{13}^0)^2+(v_{23}^0)^2};\quad \alpha=-\frac{2}{h_0^2}\left(\frac{v_1}{R_1}v_{13}^0+\frac{v_2}{R_2}v_{23}^0\right);$$

$$\beta=\frac{1}{h_0^2}\left[(v_{11}^0)^2+(v_{22}^0)^2+(v_{33}^0)^2+2(v_{12}^0)^2+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{R_1^2}+\frac{v_2^2}{R_2^2}\right)+\left(\frac{2}{A_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}v_{13}^0+\frac{2}{A_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}v_{23}^0\right)+$$

$$+\left(\frac{2v_1x_3}{R_1^2}v_{13}^0+\frac{2v_2x_3}{R_2^2}v_{23}^0\right)\Bigg]-2\alpha^2;$$

$$v_{11}^0=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{v_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2};\quad v_{22}^0=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{v_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1};$$

$$v_{12}^0=\frac{1}{2A_1A_2}\left(A_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+A_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_2}-v_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right);$$

$$v_{13}^0=\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3};\quad v_{23}^0=\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x_3};\quad v_{33}^0=\frac{\partial v_3}{\partial x_3};$$

$$Q_0=h_0^{\frac{n}{m}}(D^n-1);\quad Q_1=h_0^{\frac{n}{m}-1}(D^{n-1}-1);$$

$$Q_2=h_0^{\frac{n}{m}-1}(D^{n-2}-1);\quad D=1+S^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\varepsilon}{h_0}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Уравнения для $i=2$ получаются перестановкой индексов 1 и 2 в уравнении (7).

В уравнениях (7) и (8) при $n\neq 1$ члены, содержащие множители ε и ε^2, могут быть отброшены как малые более высокого порядка. При этом для того чтобы пластические и вязкие силы были одного порядка, необходимо положить $\varepsilon=S^{-\frac{m}{n}}$, и для того чтобы силы давления были того же порядка, выбираем их в виде

$$P_0=\frac{\tau_0}{S}\,\varepsilon^{-\frac{n+m}{m}}. \tag{9}$$

При $n=1$ уравнения значительно упрощаются, так как

$$Q_0=S\varepsilon^{\frac{1}{m}};\quad Q_1=0;\quad Q_2=0.$$

Рассмотрим теперь при $n=1$ движение вдоль первой линии кривизны, $v_2=0$. Пластические силы в этом случае представлены членами, содержащими множитель ε в первой степени. Для того чтобы они были сравнимы с вязкими силами, необходимо положить $\varepsilon=S^{-\frac{m}{m+1}}$ и, соответственно, $P_0=\tau_0$. Уравнения, полученные в этих частных случаях, совпадают с уравнениями работы [1].

Переходим к случаю поверхности малой кривизны. Положим

$$\frac{1}{R_i}=\frac{\varepsilon}{r_i},$$

где r_i — безразмерные радиусы кривизны порядка единицы. При этом пластические силы характеризуются членами, содержащими множитель ε^2, и они будут сравнимы с вязкими силами, если $\varepsilon=S^{-\frac{m}{1+2m}}$, давление, согласно (9), будет $P_0=\tau_0S^{-\frac{m}{1+2m}}$.

Запишем уравнение для $i=2$:

$$\mathrm{Re}\varepsilon^{1+\frac{1}{m}}\left(-\frac{v_1^2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)=-\frac{P_0\mathrm{Re}\varepsilon^{1+\frac{1}{m}}}{\rho U^2}\cdot\frac{1}{A_2}\frac{\partial P}{\partial x_2}+$$

$$+S\varepsilon^{2+\frac{1}{m}}\left[\frac{2}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{v_1}{A_2h_0}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A_1A_2}{h_0}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{v_1}{A_1}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{A_1^2}\frac{1}{h_0}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{h_0}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right],$$

откуда следует, что при течении вдоль первой линии кривизны поперечный перепад давления отсутствует при условиях

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}=\frac{\partial A_1}{\partial x_2}=\frac{\partial A_2}{\partial x_2}=0 \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}=\frac{\partial A_1}{\partial x_2}=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}=0. \tag{11}$$

Условие (10) выполняется для осесимметричных течений на поверхностях вращения. Например, оно осуществляется при обтекании цилиндра вдоль его образующей. Условие (11) имеет место для осесимметричных течений на поверхностях, изометричных плоскости. Из уравнений Кодацци

$$-\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}=\frac{1}{k_1-k_2}\frac{\partial k_1}{\partial x_2};\quad \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}=\frac{1}{k_1-k_2}\frac{\partial k_2}{\partial x_1}$$

следуют соотношения

$$A_1=C_1(x_1)\exp\left[-\int_0^{x_2}\frac{1}{k_1-k_2}\frac{\partial k_1}{\partial x_2}\partial x_2\right],$$

$$A_2=C_2(x_2)\exp\left[+\int_0^{x_1}\frac{1}{k_1-k_2}\frac{\partial k_2}{\partial x_1}dx_1\right],$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности; C_1 и C_2 — произвольные функции.

Если в рассматриваемой области поверхности главные кривизны мало изменяются вдоль дополнительных линий кривизны

$$k_1(x_1,x_2)=\tilde{k}_1(x_1)+\delta_1x_2;\quad k_2(x_1,x_2)=\tilde{k}_2(x_2)+\delta_2x_1,$$

где δ_1 и δ_2 — малые величины, и если в этой области нет омбилических точек ($k_1\neq k_2$), то

$$A_1(x_1,x_2)=C_1(x_1)\left(1-\delta_1\int_0^{x_2}\frac{dx_2}{\tilde{k}_1-\tilde{k}_2}\right)\cong C_1(x_1),$$

$$A_2(x_1, x_2) = C_2(x_2)\left(1 + \delta_2 \int\limits_0^{x_1} \frac{dx_1}{\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2}\right) \simeq C_2(x_2).$$

Таким образом, для указанного класса поверхностей условие (11) выполняется приближенно.

Уравнения (7) и (8) с учетом условия (11), а также уравнения непрерывности, принимают вид

$$\begin{gathered} \mathrm{Re} S^{-\frac{1+m}{1+2m}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(h_0^{\frac{1}{m}-1}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + \left[2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta^2}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right]\omega; \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0; \quad \eta = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -2\omega \frac{\partial \eta}{\partial x_3}; \\ \omega = \operatorname{sign}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}; \quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

При $\mathrm{Re} S^{-\frac{m+1}{1+2m}} \gg 1$ в уравнениях (12) можно пренебречь пластическими силами, приходим к случаю вязкого пограничного слоя. При $\mathrm{Re} S^{-\frac{m+1}{2m+1}} \ll 1$ можно пренебречь инерционными силами.

Принимая в качестве первой координаты длину дуги линии кривизны

$$s_1 = \int\limits_0^{x_1} A_1(x_1)\, dx_1$$

и устремляя r_1 и r_2 к бесконечности, приходим к уравнениям плоского вязкопластичного слоя, которые в размерных переменных имеют вид

$$\begin{gathered} \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial P}{\partial s_1} + \\ + \omega \mu^{\frac{1}{m}} \frac{\partial}{\partial x_3}\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right|^{\frac{1}{m}} + 2\omega\tau_0\left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1} - \frac{\partial \eta^2}{\partial x_3}\right); \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0; \\ \eta = \frac{\partial v_1}{\partial s_1}\Big/\frac{\partial v_1}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -2\omega\tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \neq 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Эти уравнения в частном случае при $m=1$ совпадают с уравнениями плоского пограничного слоя, полученными Олдройдом [3] для пластика Шведова—Бингама [5].

Граничные условия для уравнений (13) записываются в виде $v_1(x_1, 0) = v_3(x_1, 0) = 0$ (условия прилипания), $v_1(x_1, \delta) = \omega U(x_1)$; $P(x_1, \delta) = P_\delta(x_1)$, где δ определяет верхнюю границу пограничного слоя.

Функции $U(x_1)$ и $P_\delta(x_1)$ определяются из решения задачи о внешнем течении идеально-пластического материала и считаются известными. Еще одно граничное условие получается из требования, чтобы на верхней границе пограничного слоя касательное напряжение P_{13} равнялось пределу текучести среды. Переходя к безразмерным переменным (4) из реологического уравнения (1) с точностью до главных членов, находим

$$P_{13} = \omega\tau_0 + \frac{\omega\tau_0}{S\varepsilon^{\frac{1}{m}}}\left(\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right|^{\frac{1}{m}} - 2S\varepsilon^{2+\frac{1}{m}}\eta^2\right).$$

Так как $\varepsilon^{2+\frac{1}{m}}S = 1$, а $P_{13}(x_1, \delta) = \omega\tau_0$, то на верхней границе пограничного слоя должно выполняться условие, которое в размерных переменных имеет вид

$$\left[\left|\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right|^{\frac{1}{m}} - 2\tau_0\eta^2\right]_{x_3=\delta(x_1)} = 0.$$

В частном случае $m=1$, оно совпадает с граничным условием работы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шульман З. П., Байков В. Н.* Вывод уравнения пограничного слоя нелинейновязкопластичной среды. — «Изв. АН БССР. Сер. физико-энергетических наук», 1971, № 1, с. 48—54.
2. *Косачевская Е. А., Татарченко Э. Н.* Магнитогидродинамический вязко-пластический слой на криволинейной поверхности.—Тезисы докл. V Всесоюз. конф. по современным проблемам геометрии. Самарканд, 1972, с. 106—109.
3. *Oldroyd T. G.* Thwo — dimensional plastic flow of a Bingham solid. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1947, vol. 43, N 3, p. 383.
4. *Струминский В. В.* Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности. — «Докл. АН СССР», 1956, 108, № 4, с. 595—598.
5. *Прагер В.* Введение в механику сплошной среды. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 177 с.
6. *Косачевский Л. Я., Строчков И. А.* Вязкопластический пограничный слой при степенном распределении скорости вдоль внешней границы. — «Прикладная математика и механика», 1969, № 33, вып. 5, с. 875—879.

Поступила 6 января 1975 г.

УДК 530.145

О. В. УВАРОВ,
В. А. ЩЕРБИНА, канд. физ.-мат. наук

СТРУКТУРА R-ОПЕРАЦИИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В работе дается математическое обоснование R-операции для фейнмановских амплитуд, отвечающих теории с лагранжианом взаимодействия вида

$$L_{int} = \sum_{(\alpha)} c_{\alpha_j} \int D^{\alpha_j}\delta(x_2 - x_1, \ldots, x_{n_j} - x_1) : \prod_{p=1}^{n_j} a_l(x_l)\, dx_l,$$

где $a_l(x)$ — поле с пропагатором

$$f_l(x)=\sum_{(\alpha)} b_\alpha D^\alpha \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\exp\left\{-i\frac{x^2}{4t}-im_l^2 t\right\},\ m_l>0. \tag{1}$$

Коэффициенты b_α могут быть матричными, однако для дальнейшего это несущественно и при записи будет игнорироваться.

С помощью введения специальной индефинитной метрики, в которой пропагатор $f_l(x)$ приобретает вид

$$f_l(x)=\sum_{(\alpha)} b_\alpha D^\alpha \int_0^\infty \frac{\varphi_l(t)}{t^2}e^{-i\frac{x^2}{4t}}dt=\sum_{(\alpha)} b_\alpha f(x;\alpha) \tag{1'}$$

с $\varphi_l(t)$ из пространства Шварца S, $\varphi^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots$, строятся заглаженные вклады от фейнмановских диаграмм $\Pi(G;\ x)$ и «вклады с вычитаниями» $R(G)\Pi(G;\ x)$. Здесь $R(G)$ есть элемент некоторой специальной алгебры операторов над $\Pi(G;\ x)$, построенной ниже, причем $R(G)\Pi(G;\ x)$ выдерживает предельный переход от (1′) к (1), давая ренормированные фейнмановские амплитуды.

Первое доказательство аналогичного результата для случая квантовой электродинамики (с некоторыми модификациями) было дано в работе [1], затем в [2—4]. Данная работа является естественным дополнением к [4] и ставит своей целью дать полные доказательства всех фактов, относящихся к структуре $R(G)$ в общем случае произвольного локального взаимодействия.

1. Редуцированные диаграммы. Алгебра P-операторов

По некоторым причинам в выражении для L_{int} удобно не производить интегрирования по $x_2,\ldots,x_{n_j}$, понимая под плотностью $L_{\text{int}}(x)$ оператор $\sum c_{\alpha_j} D^{\alpha_j}\delta(x_2-x_1,\ldots,x_{n_j}-x_1){:}\prod_{l=1}^{n_j} a_l(x_l){:}$. Функционалы $\Lambda(u)=c_\alpha D^\alpha\delta(u)$, $u=\{u_2,\ldots,u_k\}$, $u_j=x_j-x_1$ ($j=2,\ldots,k$) и их линейные комбинации мы будем называть вершинными, u — набором независимых разностей, x_1 — базовой вершиной, а всю совокупность $x=\{x_1,\ldots,x_{n_j}\}$ — обобщенной вершиной.

Обычным образом $T\left\{\prod_{j=1}^{n} L_{\text{int}}(x(j))\right\}$ расписывается в виде суммы вкладов от различных диаграмм G с n обобщенными вершинами $x(j)$, определяемыми структурой $L_{\text{int}}(x)$. Каждой такой диаграмме сопоставляется трансляционно-инвариантная коэффициентная функция $\Pi(G;x)$, представляющая собой произведение вершинных функционалов и пропагаторов $f_l(x_r(j)-x_s(j'))$ вида (1′), отвечающих линиям между обобщенными вершинами.

Поддиаграммой $G_j \subset G$ будем называть диаграмму, образованную некоторым набором обобщенных вершин из G и всеми линиями из G, проходящими через эти вершины. Внутренние линии из G, принадлежащие только одним концом вершине из G_j, будем считать внешними для нее. Вклад $\Pi(G_j;\ x)$ строится теперь по тем же правилам, что и $\Pi(G; x)$. Наконец, будем говорить, что G_1, $G_2 \subset G$ частично перекрываются, если ни одна из них не является частью другой, и у них есть хотя бы одна общая вершина.

Важную роль для дальнейшего имеет операция стягивания сильно связной поддиаграммы $G' \subset G$ в обобщенную вершину. Соответствующим образом будет при этом преобразовываться и $\Pi(G; x)$. Будем рассматривать это преобразование как результат применения некоторого оператора $P(G'; \nu)$ к $\Pi(G;\ x)$, т. е.

$$P(G';\nu)\,\Pi(G;x) = \Lambda(u(G');\nu)\frac{\Pi(G;x)}{\Pi(G';x)}.$$

Здесь ν — порядок вершинного функционала $\Lambda(u(G'); \nu)$; $u(G')$ — набор независимых разностей, отвечающих $\Pi(G';\ x)$.

Вообще пусть G_l, $l \in \{l\} = \{l_1, \ldots, l_k\}$ — некоторый набор непересекающихся попарно сильно связных поддиаграмм из G. Под $G_{\{l\}}$ будет пониматься диаграмма, полученная из G после стягивания всех G_l, $l \in \{l\}$, в обобщенные вершины.

Пусть некоторая $G_j \subset G$ не имеет с $G_l \subset G$ для всех $l \in \{l\}$ частичных пересечений и не является частью ни одной из них. Образом G_j в $G_{\{l\}}$ назовем поддиаграмму $G_{j\{l\}}, \subset G_{\{l\}}$, полученную из G_j стягиванием тех G_l из набора $\{l\}$, которые входят в G_j. Обозначим $G_{j\{l\}},=f(C_j)$и, соответственно, $G_j=f^{-1}(G_{j\{l\}},)$. Это обратное отображение позволяет определить прообраз всякой поддиаграммы из $G_{\{l\}}$ в G.

Если $G_j \subset G$ имеет образ $G_{j\{l\}},$ в $G_{\{l\}}$, то положим

$$P(G_j;\nu)\,\Pi(G_{\{l\}};x) = P(G_{j\{l\}},;\nu)\,\Pi(G_{\{l\}};x).$$

В противном случае $P(G_j;\nu)\,\Pi(G_{\{l\}};x) = 0$. Если по определению считать операторы $P(G_j;\ \nu)$ коммутирующими между собой, то перечисленные выше свойства этих операторов позволяют вычислять $\prod\limits_{l \in \{l\}} P(G_l,\ \nu_l)\,\Pi(G; x)$ для произвольных наборов G_l, $l \in \{l\}$, сильно связных поддиаграмм из G.

Таким образом, всякой диаграмме G сопоставляется алгебра полиномов от операторов $P(G_j;\ \nu_j)$, где G_j пробегает набор $\{G\}$ всевозможных сильно связных поддиаграмм из G.

Все предыдущие построения не зависели от выбора коэффициентов в вершинных функционалах $\Lambda(u(G_j); \nu_j) = P(G_j; \nu_j) \times \times \Pi(G_j; x)$. Их выбор, т. е. задание операторов $P(G_j;\nu_j)$ нужно особо оговаривать. При том P-операторы, отвечающие некоторой диаграмме G_j, могут отличаться друг от друга как степенью соответствующего вершинного функционала, так и способом задания коэффициентов.

Вклад $\Pi(G;x)$ распадается на сумму функций, в которых каждой обобщенной вершине $x(j)$ отвечает однородный функционал $\Lambda(u(j);\nu_j)=\sum_{|\gamma|-\nu_j} c_\gamma D^\gamma \delta(u(j))$ и внутренним линиям соответствуют пропагаторы $f(x;\alpha)=\int\limits_0^\infty \varphi_l(t)\exp\left(-i\frac{x^2}{4t}\right)f(x;\alpha;t)\,dt$ из (1′). Для этих слагаемых мы сохраним то же обозначение $\Pi(G;x)$, различая диаграммы G по набору обобщенных вершин, внутренних линий и порядку сингулярности обобщенных вершин.

Нетрудно видеть, что $\Pi(G;x)$ можно представить в виде линейной комбинации выражений вида

$$\prod_{(j)}\delta^{(\lambda_j)}(u(j))\prod_{(l)}f_l^{(\beta_l)}(x_1(j)-x_1(j');\alpha_l). \tag{2}$$

Здесь аргументы вкладов внутренних линий теперь есть разности координат базовых вершин $x_1(j)$. Мультииндексы производных β_l зависят от номера соответствующей внутренней линии. Для дальнейшего существенно, что в каждом таком выражении $\sum_{(j)}|\lambda_j|+\sum_{(l)}|\beta_l|=\Sigma\nu_j$ — сумме порядков локальных функционалов в $\Pi(G;x)$.

Обозначим набор независимых разностей базовых вершин

$$\{x_1(2)-x_1(1),\, x_1(3)-x_1(1),\, \ldots,\, x_1(n)-x_1(1)\}=\{u_2',\ldots,u_n'\}=$$
$$=u'\;(u_1'\equiv 0).$$

В отличие от $\Pi(G;x)$ произведение $\prod\limits_{l=1}^{L} f_l\;(u'_{j_l}-u'_{k_l};\alpha_l+\beta_l)$, где l — номер внутренней линии, будет обозначаться $\Pi(G_\beta^{\text{red}},u')$, так что

$$\Pi(G;x)=\sum c_{\gamma\lambda\beta}\prod_{j=1}^{n}\delta^{(\lambda_j)}(u(j))\,\Pi(G_\beta^{\text{red}};u'). \tag{2′}$$

Справа стоит сумма прямых произведений, поскольку все $u(j)$ $(j=1,\ldots,n)$, u_k' $(k=2,\ldots,n)$ независимы между собой. Числа $n\equiv n(G)$ и $L\equiv L(G)$ равны числу обобщенных (базовых) вершин в G и внутренних линий соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\Pi(G_\beta^{\text{red}};u')=\int\limits_0^\infty \prod_{l=1}^{L}\varphi_l(t_l)\,dt_l f(u'_{j_l}-u'_{k_l};\alpha_l+\beta_l,t_l)\exp\left\{-\frac{i}{4}A(u';t)\right\}=$$
$$=\int\limits_0^\infty \prod_{-1}^{L}\varphi_l(t_l)\,dt_l\,\Pi(G_\beta^{\text{red}};u',t), \tag{3}$$

$A(u';t)=\sum_{l=1}^{L}\frac{(u'_{j_l}-u'_{k_l})^2}{t_l}$ — невырожденная квадратичная форма от $\{u'_2,\dots,u'_n\}$. Здесь

$$t^2 f(u;\alpha,t)=\exp\left\{i\frac{u^2}{4t}\right\}D^\alpha\exp\left\{-i\frac{u^2}{4t}\right\}=\sum_{k=0}^{|\alpha|}t^{-\frac{|\alpha|+k}{2}}P_k(u), \qquad (4)$$

причем сумма берется по k одинаковой четности с $|\alpha|$, а $P_k(u)$ — однородный полином степени k.

Из представлений (2) и (3) для $\Pi(G;p,t)$ преобразования Фурье от $\Pi(G;x;t)$ по $u(j)$ $(j=1,\dots,n)$ и u', получаем

$$\Pi(G;p,t)=\sum_{(m)}S_m(t)\,\Pi_m(p)\exp\{iA^{-1}(p;t)\}, \qquad (5)$$

где $S_m(t)$ — однородные рациональные функции от t, степень однородности которых ρ_m связана со степенью j_m соответствующего однородного полинома $\Pi_m(p)$ соотношением

$$\rho_m=\frac{j_m-\sum\limits_{(l)}|\alpha_l|-\sum\limits_{(j)}\nu_j}{2}+2[n(G)-1]-2L(G). \qquad (6)$$

Напомним, что α_l отвечает вкладу в $\Pi(G;x)$ от линии с номером l в силу (1′), а $\sum\limits_{(j)}\nu_j$ есть сумма порядков всех обобщенных вершин в G.

Функции $S_m(t)$ представляют собой линейные комбинации функций, каждая из которых представляет собой результат умножения $\prod\limits_{l=1}^{L}t_l^{-2-\beta_l}$ $(\beta_l\leqslant|\alpha_l|)$ на некоторое произведение коэффициентов квадратичной формы $A^{-1}(p;t)$. Эта форма, будучи обратной к $A(u;t)$, ограничена сверху на любом компакте из $D=\{t:t_l>0,\ l=1,\dots,L(G)\}$.

Всюду далее под $P(G;\nu)$ понимается оператор, задаваемый равенством

$$F\{P(G;\nu)\Pi(G;u)\}(p)=-\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}D^\alpha\Pi(G;p)|_{p=0}p^\alpha.$$

В частности, если $\nu=r(G)$, то $P(G;r(G))=P(G)$. Индекс расходимости $r(G)$ диаграммы G определяется обычным образом (см., например, [3], [2]) и в нашем случае

$$r(G)=\sum_{(l)}|\alpha_l|+\sum_{(j)}\nu_j+2L(G)-4[n(G)-1].$$

Для $r(G)<0$ положим $P(G)=0$.

Сохраним для $FP(G)F^{-1}$, где F — преобразование Фурье, обозначение $P(G)$.

Нетрудно видеть, что для $N(G)=1+P(G)$ справедливы представления

$$N(G)\,\Pi(G;p,t)=\int\limits_0^1\frac{(1-\tau)^{r(G)}}{r(G)!}\,d\tau\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{r(G)+1}\Pi(G;\tau p,t) \qquad (7)$$

и

$$N(G)\,\Pi(G;u,t)=\int\limits_0^1\frac{(1-\tau)^{r(G)}}{r(G)!}\,d\tau\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{r(G)+1}\left[\frac{1}{\tau^{4k(G)}}\Pi\left(G;\frac{u}{\tau},t\right)\right],$$

где $4k(G)$ — размерность аргумента u в $\Pi(G;u)$. Если в (7) интеграл по τ берется в пределах от ζ до 1, то соответствующий оператор будем обозначать $N_\zeta(G)=1+P_\zeta(G)$, где $P_\zeta(G)\to P(G)$ при $\zeta\to 0$. Ясно, что

$$P_\zeta(G)\,\Pi(G;u,t)=-\sum_{k=0}^{r(G)}\frac{(1-\zeta)^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^k\left[\frac{1}{\zeta^{4k(G)}}\Pi\left(G;\frac{u}{\zeta},t\right)\right]. \qquad (8)$$

2. Параметрический интеграл для ренормированных амплитуд

Пусть $\{G\}$ — совокупность всех сильно-связных расходящихся ($r(G_j)\geqslant$) поддиаграмм G. Сопоставим $\Pi(G;x)$ «вклад с вычитаниями»

$$R(G)\,\Pi(G;x)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_0^1(d\tau)\prod_{\{G\}}T(G_j;\tau_j)\,\Pi(G;x),$$

который мы определим как функционал над пространством Шварца S, задаваемый для каждой $\varphi\in S$ интегралом

$$\int\limits_0^\infty\prod_{l=1}^L\varphi_l(t_l)dt_l\int\limits_0^1\prod_{G_j\in\{G\}}\frac{(1-\tau_j)^{r(G_j)}}{r(G_j)!}\,d\tau_j\left(\frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^{r(G_j)+1}\frac{1}{\tau^{4k(G_j)}}\times$$

$$\times\int\prod_{(k)}\Lambda\left(\frac{u(k)}{\pi_k(\tau)};\nu_k\right)\prod_{l=1}^{L(G)}\exp\left\{-\frac{i}{4t_l}\frac{(u_{j_l}-u_{k_l})^2}{\pi_l^2(\tau)}\right\}f\left(\frac{u_{j_l}-u_{k_l}}{\pi_l(\tau)};\alpha_l,t_l\right)\varphi(x)dx.$$

Здесь каждый $T(G_j;\tau_j)$ действует на свою группу сомножителей, отвечающих G_j, так что $\pi_l(\tau)$ содержит набор сомножителей τ_j, отвечающих номерам всех поддиаграмм, для которых l-я линия или l-я вершина является внутренней.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $\varphi_l(t)$ убывает на бесконечности быстрее любой обратной степени t, то $F\{R(G)\Pi(G;u)\}(p)$ представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося на всяком компакте по p интеграла*

$$\int_0^1 \prod_{G_j\in\{G\}} \frac{(1-\tau_j)^{r(G_j)}}{r(G_j)!}\, d\tau_j \tau_j^{-1} \int_0^\infty \prod_{l=1}^{L(G)} dt_l\, \varphi_l\left(\frac{t_l}{\pi_l^2(\tau)}\right) \sum_{(m)} S_m(t) \times$$

$$\times \Pi_m(p) \exp\{iA^{-1}(G; p, t)\}, \tag{9}$$

где $A^{-1}(G; p, t)$ — квадратичная форма, обратная

$$A(G; u, t) = \sum_{l=1}^{L(G)} \frac{(u_{i_l} - u_{k_l})^2}{t_l},$$

$S_m(t)$ — однородные рациональные функции; $\Pi_m(p)$ — однородные полиномы. $S_m(t)$ убывают на бесконечности недостаточно быстро или даже растут. Поэтому при $\varphi_l(t) \to e^{-im_l^2 t}$ интеграл (9) не является абсолютно сходящимся. Однако возможен несобственный предельный переход в функционале (9), т. е. когда $\varphi_l(t) \to e^{-im_l^2 t}$ специальным образом. А именно, будем предполагать, что все $m_l^2 > a > 0$ и $\tilde{\varphi}_l(s) \geqslant 0$ есть бесконечно дифференцируемые финитные функции с носителем, лежащем в ε-окрестности точки m_l^2. Тогда имеет место

Теорема 2. *Вклад с вычитаниями $R(G)\Pi(G; x)$ от произвольной диаграммы Фейнмана G для полей с массами $m_l > 0$ представляет собой линейный непрерывный функционал над S, равный предельному значению функционала (9) при*

$$\tilde{\varphi}_l(s) = \int_0^\infty \varphi_l(t)\, e^{ist}\, dt \to \delta(s - m_l^2),$$ *где $\tilde{\varphi}_l(s)$ есть функция описанного выше класса.*

В справедливости сформулированных теорем 1 и 2 нетрудно убедиться, дословно повторяя доказательства соответствующих теорем в [3] и [5].

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве равенства

$$R(G)\Pi(G; u) = \prod_{G_j\in\{G\}} [1 + P(G_j)]\, \Pi(G; u), \tag{10}$$

показывающего, что $R(G)\Pi(G; u)$ есть конечная часть фейнмановской амплитуды, полученная после применения к $\Pi(G; u)$ R-операции Н. Н. Боголюбова.

3. Вычитательная процедура

В силу теоремы 1 последовательность функционалов

$$(R_\zeta(G)\Pi(G; u), \varphi(u)) = (\prod_{G_j\in\{G\}} N_{\zeta_j}(G_j)\, \Pi(G; u), \varphi(u)),$$

представляющихся абсолютно по τ_j сходящимися интегралами для любых $0 \leqslant \zeta_j < 1$, имеет своим пределом $(R(G)\Pi(G; u), \varphi(u))$ при $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots) \to 0$.

Если все $\zeta_j > 0$, то по всем τ_j в $R_\zeta(G)\Pi(G; u)$ можно выполнить интегрирование, что дает

$$R_\zeta(G)\Pi(G; u) = \Pi(G; u) + \sum_{\{l\}} \prod_{l \in \{l\}} P_{\zeta_l}(G_l)\Pi(G; u), \tag{11}$$

где сумма взята по всевозможным наборам $\{l\}$ номеров $G_l \in \{G\}$.

Операторы $P_{\zeta_j}(G_j)$ умножаются не так, как операторы $P(G_j)$. Каждый из них задается соотношением (8) и действует независимо на свою группу сомножителей подобно $T(G_j; \tau_j)$ в $R(G) \times \times \Pi(G; u)$.

Все слагаемые в правой части (11) распадаются на два класса. Первому отвечают наборы $\{l\}$ номеров диаграмм из $\{G\}$ не имеющих попарно частичных пересечений. В таких слагаемых предельный переход $\varsigma \to 0$ будем производить последовательно, полагая равными нулю сначала все ς, отвечающие минимальным диаграммам, затем те, которые отвечают следующим по величине и т. д. Тривиальным образом проверяется, что при этом

$$\Pi(G; u) + \lim_{\zeta \to 0} \sum_{\{l\}}^{(1)} \prod_{\{l\}} P_{\zeta_l}(G_l)\Pi(G; u) = \prod_{G_j \in \{G\}} [1 + P(G_j)]\Pi(G; u),$$

где в $\Sigma^{(1)}$ собраны все слагаемые первого класса.

Таким образом, для доказательства равенства (10) достаточно показать, что при описанном выше предельном переходе по $\varsigma \to 0$

$$\lim_{\zeta \to 0} \sum_{\{l\}}^{(2)} \prod_{\{l\}} P_{\zeta_l}(G_l)\Pi(G; u) = 0,$$

где $\Sigma^{(2)}$ берется по $\{l\}$, содержащим хотя бы одну пару частично перекрывающихся поддиаграмм.

Заметим прежде всего, что отдельные слагаемые в Σ либо вообще не имеют предела при $\varsigma \to 0$, либо он отличен, вообще говоря, от нуля.

Итак, занумеруем все диаграммы $G_k \in \{G\}$ в порядке их возрастания: сначала все минимальные, образующие набор $\{G\}^1 \in \{G\}$, в произвольном порядке, затем все минимальные из $\{G\} \diagdown \{G\}^1$ обозначим через $\{G\}^2$ и занумеруем их и т. д.

В $R_\zeta(G)\Pi(G; u)$ последовательно устремим $\zeta_1 \to 0, \zeta_2 \to 0, \ldots$. Ясно, что $\prod_{j>1}[1 + P_{\zeta_j}(G_j)]P(G_1)\Pi(G; u)$ имеет смысл. Пусть вообще $G_{k+1} \in \{G\}$ такова, что после предельного перехода по всем ζ_j, $j < k$, получен предел, равный

$$\prod_{l > k+1}[1 + P_{\zeta_j}(G_j)]P_\zeta(G_{k+1})\prod_{j \leqslant k}[1 + P(G_j)]\Pi(G; u),$$

где $P(G_j)$ при $j \leqslant k$ перемножаются по сформулированным ранее правилам. Это значит, что $\prod_{j<k}[1 + P(G_j)] = 1 + \sum_{\{l\}} \prod_{\{l\}} P(G_l)$,

где сумма справа берется по наборам $\{l\}$ без частичных пересечений.

Среди диаграмм G_l, отвечающих слагаемому $\prod\limits_{(l)} P(G_l)$, есть, вообще говоря, такие, что с G_{k+1} частично пересекаются. Поскольку между G_l, $l \in \{l\}$ допустимо отношение вложения, то G_{k+1} со всей совокупностью может иметь многослойное частичное пересечение. Возникающая здесь сложная картина упорядочивается следующим образом.

Разобьем совокупность $\{l\}$ на подмножества $\{l\}^1$, $\{l\}^2$, ..., номеров диаграмм первого, второго и т. д. классов. Диаграмме G_l, $l \in \{l\}^m$, сопоставим ее образ $G_l^{(m)}$, полученный после стягивания в обобщенные вершины всех диаграмм с номерами из $\{l\}^{m-1}, \ldots, \{l\}^1$. Под G_{k+1}^m будем понимать образ диаграммы, задаваемой совокупностью вершин из G_{k+1} и всех тех G_l, $l \in \bigcup\limits_1^{m-1} \{l\}^k$, которые имеют с ней частичное пересечение, полученный при таком же стягивании. Заметим, что если диаграммы G_l не меняются «по объему» при переходе к $G_l^{(m)}$, то $G_{k+1}^{(m)}$ больше G_{k+1}, т. е. вклад ее зависит от большего числа аргументов.

Выделим среди $G_l, l \in \{l\}$, те, для которых $G_l^{(m)}$ перекрываются с $G_{k+1}^{(m)}$ частично. Совокупность их номеров обозначим через $\{l\}_1$. Из определения $\{l\}_1$ непосредственно вытекает: если $l \in \{l\}_2 = \{l\} / \{l\}_1$, то либо $G_l^{(m)} \subset G_{k+1}^{(m)}$, либо $G_l^{(m)} \cap G_{k+1}^{(m)} = \varnothing$. В этом случае $G_l \cap G_{k+1} = \varnothing$ и подавно.

Прообраз $G_{k+1}^{(m)} \cap G_i^{(m)}$ $(i \in \{l\}_1)$ распадается на некоторую совокупность сильно-связных максимальных поддиаграмм. Их номера образуют совокупность $\{l\}_{i,m}$, причем $l<k$, если $l \in \{l\}_{i,m}$. Если теперь из $\sum\limits_{\{l\}} \prod\limits_{\{l\}} P(G_l)$ выделить $\sum\limits_{\{l\}}^{\{l\}_1} \prod\limits_{l \in \{l\}} P(G_l)$ всех слагаемых с одинаковым набором $\{l\}_1$, то, как легко видеть,

$$\prod_{i \in \{l\}_1} \prod_{j \in \{l\}_{i,m}} [1 + P(G_j)] \sum_{\substack{\{l\} | \cup \{l\}_{im} \\ i \in \{l\}_1}}^{\{l\}_1} \prod_{\{l\}} P(G_l) = \sum_{\{l\}}^{\{l\}_1} \prod_{\{l\}} P(G_l).$$

Поскольку ясно, что

$$\sum_{\{l\}} \prod_{\{l\}} P(G_l) = \sum_{\{l\}_1} \sum_{\}l\}}^{\{l\}_1} \prod_{\{l\}} P(G_l),$$

то

$$\prod_{j > k+1} [1 + P_{\zeta_j}(G_j)] P_\zeta(G_{k+1}) \sum_{\{l\}} \prod_{\{l\}} P(G_l) \Pi(G; u) =$$

$$= \sum_{\{l\}_1} \prod_{l > k+1} [1 + P_{\zeta_l}(G_l)] P_\zeta(G_{k+1}) \prod_{i \in \{l\}_1} \prod_{j \in \{l\}_{i,m}} [1 + P(G_j)] \times$$

$$\times\left\{\sum_{\substack{\{l\}/\cup\{l\}_{i,m}\\ i\in\{l\}_1}}^{\{l\}_1}\prod_{l\in\{l\}}P(G_l)\,\Pi(G;u)\right.$$

Целью дальнейших построений является доказательство того факта, что каждое из слагаемых справа имеет предел при $\varsigma\to 0$, причем он равен нулю в том случае, когда $\{l\}_1\neq\varnothing$.

Существование такого предела очевидно, если $\bigcup_{(i)}\{l\}_{i,m}\cap\{l\}\neq\varnothing$, так как соответствующая величина равна нулю. Очевидно оно и в том случае, когда $\{l\}_1=\varnothing$, поскольку G_{k+1} не имеет частичных пересечений с G_l, $l\in\{l\}$.

Рассмотрим теперь отличное от нуля слагаемое вида

$$\prod_{l>k+1}[1+P_{\zeta_j}(G_j)]\prod_{i\in\{l\}_1}P(G_i)\prod_{j\in\{l\}_{i,m}}[1+P(G_j)]\prod_{l\in\{l\}_2}P(G_l)\Pi(G;u,\zeta), \tag{12}$$

где $\Pi(G;u,\zeta)=P_\zeta(G_{k+1})\,\Pi(G;u)$.

Поскольку для любой диаграммы G из свойств функций $f(x;\alpha,t)$ в (4) вытекает $\Pi\left(G;\frac{u}{\zeta},t\right)=\zeta^{r(G)+2L(G)+4k(G)}\,\Pi(G;u,\zeta^2t)$, то

$$P_\zeta(G)\,\Pi(G;u)=-\sum_{j=0}^{r(G)}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^j\zeta^{r(G)}\times$$

$$\times\int_0^\infty\prod_{l=1}^{L(G)}\varphi\left(\frac{t_l}{\zeta^2}\right)dt_l\,\Pi(G;u,t)=\sum_{\{j\}}c(\{j\})\zeta^{r(G)-|j|}\times$$

$$\times\int_0^\infty\prod_{l=1}^{L(G)}\varphi_{j_l}\left(\frac{t_l}{\zeta^2}\right)dt_l\,\Pi(G;u,t).$$

Здесь $\varphi_j(t)=t^j\varphi^{(j)}(t)\in S$.

Отсюда немедленно вытекает, что $P_\zeta(G_{k+1})\,\Pi(G;\,u)$ представляется в виде суммы слагаемых, каждое из которых отличается от $\Pi(G;\,u)$ ς-преобразованными вкладами от линий G_{k+1}, имеющими вид

$$\int_0^\infty\varphi_j\left(\frac{t}{\zeta^2}\right)dt\,f(u;\alpha,t)\exp\left(-i\frac{u^2}{4t}\right).$$

Обозначим через G' наибольший из прообразов диаграмм $G_{k+1}^{(m)}$, отвечающих заданному набору $\{l\}$. Ясно, что при $\{l\}_1\neq\varnothing, G'\supset G_{k+1}$, т. е. G' совпадает с одной из G_j, $j>k+1$. Из данного выше описания структуры функционала $P_\zeta(G_j)$ $\Pi(G;\,u)$ непосредственно вытекает, что (12) будет иметь нулевой предел при $\varsigma\to 0$, если

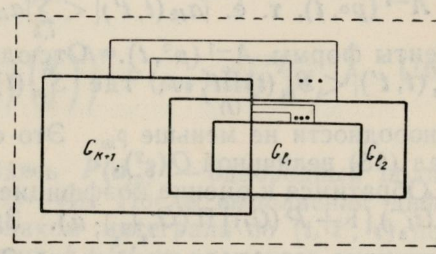
$$\lim_{\zeta\to 0}[1+P_\zeta(G')]\prod_{i\in\{l\}_1}P(G_i)\prod_{i\in\{l\}_{i,m}}[1+P(G_i)]\prod_{l\in\{l\}_2}P(G_l)\Pi(G';u,\zeta)=0. \tag{13}$$

Выделим среди диаграмм G_l, $l \in \{l\}_1$, максимальные. В $\{l\}_1$ имеются диаграммы, принадлежащие каждой такой максимальной диаграмме. Выделив среди них максимальные и продолжая этот процесс далее, разобьем $\{l\}_1$ на подгруппы, нумерующие системы диаграмм, образующих своеобразные «деревья», «стволами» которых являются максимальные диаграммы из $\{l\}_1$. Что касается диаграмм с номерами из $\{l\}_2$, то под действием отвечающих им операторов $P(G_l)$ происходит стягивание диаграмм из $\{l\}_1$ с соответствующим преобразованием их вкладов. Важно, что ни одна из G_l, $l \in \{l\}_2$, не имеет частичных пересечений с G_j, $j \in \underset{(l)}{U}\{l\}_{t,m}$ и G'.

Пользуясь представлением (2′) для преобразования Фурье, стоящего под знаком предела в (13) вклада, получим выражение в виде суммы слагаемых

$$\int_{\zeta'}^{1} \frac{(1-\tau)^{r(G')}}{r(G')!}\, d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{r(G')+1} \Pi\,(G'^{\mathrm{red}}_{\beta}; \tau p', \zeta)\, \Pi\,[\tau p\,(j)]^{\lambda}{}_{l}\, c_{\lambda\beta}(\zeta). \qquad (14)$$

Здесь диаграмма G' редуцируется за счет собственных обобщенных вершин и стягиваний, отвечающих максимальным поддиаграммам с номерами из $\{l\}_1$. Коэффициенты $c_{\lambda\beta}$ (ς) представляют собой суммы произведений коэффициентов соответствующих локальных функционалов. Эти коэффициенты, в свою очередь, выражаются через вклады от редуцированных максимальных диаграмм G_l, $l \in \{l\}_1$ и коэффициенты локальных функционалов, отвечающих максимальным, принадлежащим данному G_l, стягиваемым диаграммам.



Удобнее сначала рассмотреть простой вариант, когда $\{l\}_1 = \{l\} = (l_1, l_2)$, где $G_{l_1} \subset G_{l_2}$ и каждая имеет частичное пересечение с G_{k+1}. Будем также считать, что $G_i = G_{l_1} \cap G_{k+1}$ и $G_{l_2,\{l_1\}} \cap G_{k+1,\{l_1\}} = G_j$ — сильно-связные расходящиеся диаграммы.

На рисунке внешний прямоугольник изображает G', а остальные — G_{k+1}, $G_{l_2} \supset G_{l_1}$. Кривые изображают внутренние линии из G', не вошедшие в G_{k+1} и G_{l_2}, и, соответственно, линии из $G_{k+1,\{l_1\}}$, не входящие в G_{k+1} и G_{l_1}.

Диаграмма $G'^{\mathrm{req}}_{\{l_2\}}$ имеет набор ς-преобразованных линий, аргументы которых образуют полную систему для $\Pi(G'^{\mathrm{red}}_{\{l_2\}}; u)$.

Локальный функционал $P(G_{l_2})\,\Pi\,(G_{l_2,\{l_1\}}; u)$ неоднороден, поэтому $\Pi\,(G'_{\{l_2\}}; u)$ распадается на слагаемые с однородными вкладами от обобщенной вершины G_{l_2}, индекс расходимости каждого из которых не превосходит $r(G')$. После редуцирования этих вкладов для каждой из $G'^{\mathrm{red}}_{\{l_2\},\beta}$ индекс расходимости

$r(G'^{\text{red}}_{\{l_2\},\beta})$ связан с $r(G')$ соотношением $r(G'^{\text{red}}_{\{l_2\}\beta}) + \sum|\lambda_j| \leqslant r(G')$, где $\Sigma(\lambda_j)$ есть сумма порядков всех локальных функционалов в $\Pi(G'\{l_2\};\ u)$. Из этого неравенства нетрудно заключить, что подынтегральное выражение в (14) распадается на сумму с полиноминально зависящими от τ коэффициентами выражений вида

$$\int_0^\infty \prod_{(l)} \varphi_{i_l}\left(\frac{t_l}{\zeta^2}\right) dt_l \prod_{(j)} \varphi_{k_j}(t'_j)\, dt'_j\, S_m(t,t')\Pi_m(p)\, e^{iA^{-1}(p,t,t')}. \tag{15}$$

Здесь $S_m(t,t') = \dfrac{P_m(a_{ik}(t,t'))}{\prod\limits_{(l)} t_l^{\lambda_l} \prod\limits_{j} t'^{\nu_j}_j}$, $P_m(a_{ik}(t,t'))$ — полиномы от коэффициентов формы $A^{-1}(p,t,t')$, причем $S_m(t,t')$ однородны по (t,t') и их степень однородности ρ_m удовлетворяет неравенству $\rho_m \geqslant -L(G'^{\text{red}}_{\{l_2\},\beta}) + 1$.

Но $A(u^\circ,t,t')$ — временная часть формы $A(u,t,t')$, отвечающей $G'^{\text{red}}_{\{l_2\},\beta}$, удовлетворяет неравенству $A(u^\circ,t,t') > A(u^\circ,t)$, где $A(u^\circ,t)$ получается из $A(u^\circ,t,t')$ после отбрасывания вкладов от линий, не подвергшихся ζ-преобразованию. Поэтому $A^{-1}(p^\circ,t,t') < A^{-1}(p^\circ,t)$, т. е. $|a_{ik}(t,t')| < \sum\limits_{i,k}|a_{ik}(t)|$, где $a_{ik}(t)$ есть коэффициенты формы $A^{-1}(p^\circ,t)$. Отсюда немедленно вытекает оценка $|S_m(t,t')| < S_m(t)\prod\limits_{(j)} t'^{-\nu_j}_j$, где $S_m(t)$ однородна, и ее степень однородности не меньше ρ_m. Это сразу позволяет оценить интеграл (15) величиной $O(\varsigma^2)$.

Обратимся к оценке коэффициентов локального функционала $P(G_{l_2})[1+P(G_j)]\,\Pi(G_{l_2\{l_1\}};u)$. Здесь $N(G_l) = 1 + P(G_l)$ есть вычитание, сосредоточенное на $G_{k+1,\{l_1\}} \cap G_{l_2\{l_1\}}$.

Представим $\Pi(G_{l_2,\{l_1\}};u)$ в виде суммы слагаемых $\Pi(G^{\text{red}}_{l_2,\{l_1\},\beta};u \times \times \Pi\delta^{(\gamma_j)}(u(j)\,c_k(\zeta)$, где $c_k(\zeta)$—коэффициенты функционала $P(G_{l_1}) \times \times \Pi(G_{l_1};u)$. В первом сомножителе в качестве аргументного набора выберем независимые разности u в $G^{\text{red}}_{j\{l_1\}}$ и аргументы v какого-нибудь набора линий, образующие базис в остальной части диаграммы $G^{\text{red}}_{l_2,\{l_1\},\beta}$. Тогда отвечающая этой диаграмме квадратичная форма может быть записана в виде

$$A(u,v,t) = \left(\begin{pmatrix} A_1 + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_2 + A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right).$$

Здесь $(A_1 u, u) > 0$, $(A_2 v, v) > 0$ и $\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right) \geqslant 0$.

Но $A = \begin{pmatrix} A_1 + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_2 + A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{1/2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix} + \right.$

$$+\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix} A_1^{1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\left(\begin{pmatrix} A_1+A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_2+A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)=\left(\Bigg[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\Bigg]^{-1}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2}\,p \\ A_2^{-1/2}\,q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1^{-1/2}\,p \\ A_2^{-1/2}\,q \end{pmatrix}\right).$$

Заметим, что A_1 зависит от параметров t_j, отвечающих ς-преобразованным вкладам, а A_2, $A_{i,k}$ $(_{ik=1,2})$ t_l' — от линий, не испытавших такого преобразования.

Если расписать $[1+P\ (G_j)]$ в виде интеграла по τ, то $A_1^{-1/2}$ всюду заменится на $\tau_1^{-1/2}$. Путем несложных преобразований можно показать, что коэффициенты функционала $P(G_{l2})[1+P(G_j)]\times \times \Pi G_{l_2,\{l_1\}};\ u$ оцениваются суммой выражений вида

$$|c_k(\zeta)|\left|\int\limits_0^1 P(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\infty \Pi\varphi_{jl}\left(\frac{t_l}{\zeta^2}\right)dt_l\,\Pi\varphi(t_l')\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\tau p}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^s\sum_{m=0}^{M}\left(A^{-1}(t\tau^2;t')\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)^m P(a_{ik})\,\Pi t_l^{-\mu_l}\Pi t_j'^{-\nu_j} \qquad (16)$$

с числовыми коэффициентами. Здесь $P(a_{ik})$ — однородный полином от элементов матрицы $A^{-1}(t\tau^2,\ t')$. После выполнения дифференцирований по τ и τp под знаком интеграла по $(t,\ t',\ \tau)$ появится однородный полином степени $k+/r/$ от элементов матрицы $A_1{}^{-1/2}$ с коэффициентами $\lambda(t,\ t',\ \tau)$, ограниченными при $0\leqslant\ \tau\leqslant 1$ и $0\leqslant t,\ t'\leqslant C$. В конечном счете интеграл в (16) оценивается суммой выражений вида

$$c\,(p,q)\int\limits_0^\infty \Pi|\varphi_{j_l}\ \left(\frac{t_l}{\zeta^2}\right)|dt_l\,\Pi|\ \varphi(t_l')\,|dt_l' S\,(t)\,R\,(t'),$$

где $S(t)$, $R(t')$ — однородные функции конечной степени, причем интеграл по t' сходится, а по t есть $O(\zeta^2)$.

Все сказанное является простым следствием неотрицательности матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1/2}\tau & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2}\tau & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix},$$

ограниченности на каждом компакте при $t,\ t'\geqslant 0$ матриц $A_1{}^{-1}$, A_2^{-1} и того, что величина $k+/r/$ в (16) обеспечивает нужную степень однородности функции $S(t)$. Для $c_k\ (\zeta)$ в (16) оценка $0(\zeta^2)$ получается совершенно аналогично.

Может случиться, что G_{k+1} и G_{l_2} (а значит, и G_{l_1}) или G_{k+1} и G_{l_1} не имеют общих линий. Тогда коэффициенты соответствующих локальных функционалов не будут зависеть от ζ. В конечном счете для (16) мы получаем оценку $O(\varsigma^2)$.

В общем случае произвольного $\prod\limits_{\{l\}} P(G_l)$ все оценки проводятся по приведенной схеме.

Полученная для (16) оценка $O(\varsigma^2)$ обеспечивает справедливость равенства (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щербина В. А.* О вычислительном формализме в квантовой теории поля, 38—64, Каталог депонированных работ. Изд. ВИНИТИ, 1964. 43 с.
2. *Нерр К.* — «Commun. Math. Phyz», 1966, vol. 2, p. 301.
3. *Щербина В. А.* Препринт ИТФ—69—36. Киев, «Наукова думка», 1969. 85 с.
4. *Гордевский В. Д., Уваров О. В., Чудинович И. Ю., Щербина В. А.* Preprint ITP—73—110E, Kiev, 1973, p. 17; ТМФ, т. 20, 2, 74, p. 147—159 с.
5. *Щербина В. А., Чудович И. Ю.* Препринт ИТФ—74—151Р. Киев, «Наукова думка», 1974. 24 с.

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 530.145

О. В. УВАРОВ

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ТЕОРИИ *R*-ОПЕРАЦИИ

Настоящая работа является естественным продолжением работы [3].

Как было отмечено в [3], коэффициенты $\Lambda(u\,(G_j);\ \nu_j)$ можно выбирать различными способами. В частности, так, что преобразование Фурье функционала $\Lambda(u(G_j;\ \nu_j))$ совпадает с отрезком ряда Маклорена до степени ν_j включительно преобразования Фурье функционала $\Pi(G_{\{l\},j};\ u\ (G_j))$. Чтобы отличать указанную возможность выбора коэффициентов от прочих, будем снабжать такие локальные функционалы и соответствующие им P-операторы значком $\wedge$ сверху.

Через $\{G\}$ будем обозначать совокупность всех сильно-связных поддиаграмм из G. Если вершинные функционалы и полиномы $P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ в выражении для причинных функций, отвечающих внутренним линиям диаграммы G, однородны, а $P(G_j;\ \nu_j) = \hat{P}\,(G_j;\ \ r(G_j)) = P(G_j)$, то, как показано в [3], [5], в функционале $\widehat{R}(G;\nu)\Pi(G;u) =$

$$=\Pi\,[1+P(G_l)]\Pi(G;u)=\Pi(G;u)+\sum_{\{l\}}^{G_l\in\{G\}}\Pi\,(G_{\{l\}};u)$$

можно выполнить предельный переход $\varphi \to e^{-im^2t}$ (φ — предел), снимающий заглаживания с причинных функций. Здесь $\Pi(G\{l\},\ u)$—

контрчлены к $\Pi(G;\ u)$, структура которых задается набором $\{l\}$ по правилу

$$\Pi(G_{\{l\}}; u) = \prod_{\{l\}} P(G_l) \prod_{\{G_l\}/G_l} [1 + P(G_j)]\, \Pi(G_l; u) \frac{\Pi(G; u)}{\prod_{\{l\}} \Pi(G_l; u)}.$$

Напомним, что $P(G_j) \overset{\text{def}}{=} 0$, если $r(G_j) < 0$.

Таким образом, добавление контрчленов $\Pi(G_{\{l\}}; u)$ к $\Pi(G; u)$ компенсирует расходимости, возникающие при предельном переходе по φ.

Известно, что указанный способ определения $P(G_j;\ \nu_j)$ не является единственным, при котором функционал

$$R(G; \nu)\, \Pi(G; u) = \prod_{\{G\}} [1 + P(G_j; \nu_j)]\, \Pi(G; u) \tag{1}$$

имеет φ-предел. Допустимый произвол в определении $P(G_j;\ \nu_j)$ в (1) мы и изучим в дальнейшем.

Случай, когда $P(G_j)$ в $\hat{R}(G)$ заменяется на некоторые $P(G_j;\ r(G_j))$ изучен в [1, 2].

1. Максимальные вычитания

Пусть G и G' сильно-связные диаграммы, вершинные функционалы которых однородны и внутренним линиям каждой из них сопоставлены функции

$$D^\alpha \int_0^\infty \varphi(t) t^{-2} \exp\left(-i \frac{x^2}{4t}\right) dt.$$

Пусть G и G' связаны соотношением

$$\{G\} < \{G'\}, \tag{2}$$

которое означает, что G и G' имеют одинаковую топологическую структуру и отличаются только тем, что степени производных δ-функций вершинных функционалов и причинных функций диаграммы G не превосходят степеней производных соответствующих вершинных функционалов и причинных функций диаграммы G'. Отсюда следует, что если G_k произвольная поддиаграмма G (или сама G), а G'_k ее образ в G', то

$$r(G_k) \leqslant r(G'_k). \tag{3}$$

Это значит, что образ любой расходящейся поддиаграммы из G есть расходящаяся поддиаграмма в G'. Обратное, вообще говоря, не верно.

Рассмотрим оператор $\hat{R}(G') = \prod_{\{G'\}} [1 + P(G'_j)]$, определенный на множестве функционалов $\Pi(G'_{\{l\}}; x)$, $\Pi(G_{\{l\}}; x)$, где $\{l\}$ — некоторая совокупность номеров сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из G или их образов из G'.

Обозначим через $\hat{R}_{\{l\}}(G')$ оператор, построенный из $\hat{R}(G')$ по совокупности $\{l\}$ следующим образом: 1) из $\hat{R}(G')$ вычеркнуты все сомножители, соответствующие диаграммам $G'_j \in \{G'\}$, для которых $G'_j \cap G'_l \neq \varnothing$, и $G'_j \cap G'_l \neq G'_l$ при всех $l \in \{l\}$; 2) затем в оставшемся произведении $1 + P(G'_j)$ заменены на $1 + P(G_j)$, если G'_j не перекрывается ни с одной из G_l, $l \in \{l\}$.

Имеет место следующая

Лемма 1.

$$\hat{R}(G')\,\Pi(G; u) = \hat{R}(G)\,\Pi(G; u) + \sum_{\{l\}} \hat{R}_{\{l\}}(G')\,\Pi(G_{\{l\}}; u), \tag{4}$$

где

$$\hat{R}(G)\,\Pi(G; u) = \prod_{\{l\}} [1 + P(G_j)]\,\Pi(G; u),$$

$$\Pi(G_{\{l\}}; u) = \prod_{l \in \{l\}} \Delta\Lambda(u(G_l); r(G'_l))\, \frac{\Pi(G; u)}{\prod_{l \in \{l\}} \Pi(G_l; u)} \tag{5}$$

и $\Delta\Lambda(u(G_l);\ r(G'_l)) = [P(G'_l) - P(G_l)] \prod_{\{G_l\}/G_l} [1 + P(G_i)]\,\Pi(G; u)$,

причем $P(G_i) = 0$, *если* $r(G_i) < 0$ (*аналогично для* $P(G'_l)$).

Суммирование в (4) проводится по всем наборам $\{l\}$ сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из G или их образов из G'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\Delta P(G'_l) = P(G'_j) - P(G_j)$, тогда $R(G')\,\Pi(G; u)$ можно переписать в виде $\hat{R}(G)\,\Pi(G; u) +$

$$+ \sum_{\{l\}'} \Pi' [1 + P(G_j)] \prod_{\{l\}'} \Delta P(G'_l)\,\Pi(G; u), \tag{6}$$

где $\{l\}'$ — произвольный набор частично неперекрывающихся диаграмм из $\{G'\}$ и $\Pi'[1 + P(G_j)]$ получено из $\prod_{\{G\}}[1 + P(G_j)]$ вычеркиванием всех сомножителей, для которых G_j из набора $\{l\}'$. Если $\{l\}$ — совокупность минимальных диаграмм из $\{l\}'$, а $\{l\}_1$ — совокупность диаграмм $G_i \in \{G\}$, для которых $G_i \cap G_l = \varnothing$, $l \in \{l\}$, то сумму $\sum_{\{l\}'}$ в (6) можно переписать в виде

$$\sum_{\{l\}'} \Pi'' [1 + P(G_i)] \prod_{\{l\}_1} [1 + P(G_{i'})] \prod_{j \in \{l\}'/\{l\}} \Delta P(G'_j) \prod_{k \in \{l\}} \Delta P(G'_k) \times$$

$$\times \prod_{G_l \in \{G_k\}/G_k} [1 + P(G_l)] \,\Pi(G; u),$$

где $\Pi''[1 + P(G_i)]$ получено из $\dfrac{\Pi'[1+P(G_i)]}{\prod_{\{l\}}[1+P(G_l)]}$ вычеркиванием всех сомножителей, соответствующих $G_j \subset G_l$, $l \in \{l\}$ или частично перекрывающихся с одной из $G_l, l \in \{l\}$. Группируя слагаемые с одинаковыми $\{l\}$ $\{l\}_1$, получим

$$\sum_{\{l\}} \hat{R}_{\{l\}}(G')\,\Pi(G_{\{l\}}; u). \tag{7}$$

Лемма доказана.

Вершинные функционалы в (5)

$$\Delta\Lambda(u(G_j); r(G'_j)) = \sum_{|\gamma| \leqslant r(G'_j)} c(\gamma, \varphi)\,\delta^{(\gamma)}(u(G_j)) =$$

$$= [P(G'_j) - P(G_j)] \prod_{\{G_j\}/G_j} [1 + P(G_l)]\,\Pi(G_j; u)$$

имеют конечные в пределе по φ коэффициенты в силу соотношения (3). Поэтому

$$\Pi(G_{\{l\}}; u) = \sum_{\substack{\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots\}\\ |\gamma_l| \leqslant r(G'_l)}} a(\gamma, \varphi)\,\Pi(G^{\gamma}_{\{l\}}; u),$$

где

$$\Pi(G^{\gamma}_{\{l\}}; u) = \prod_{l \in \{l\}} \delta^{(\gamma_l)}(u(G_l))\,\frac{\Pi(G; u)}{\prod_{k \in \{l\}} \Pi(G_k; u)}$$

и $a(\gamma;\varphi)$ имеют φ-предел при всех $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$.

Поскольку $|\gamma_l| \leqslant r(G'_l)$, $l \in \{l\}$, то

$$r(G^{\gamma}_{\{l\}}) \leqslant r(G^{\gamma}_{\{l\}}) - \sum_{\{l\}} |\gamma_l| + \sum_{\{l\}} r(G'_l) \leqslant r(G'), \tag{8}$$

причем (8) выполнено и для любой сильно-связной поддиаграммы из $G^{\gamma}_{(l)}$ и соответствующего ей прообраза в G'. Так же, как и при доказательстве леммы 1, получим

$$\hat{R}_{\{l\}}(G')\,\Pi(G^{\gamma}_{\{l\}}; u) = \hat{R}(G^{\gamma}_{\{l\}})\,\Pi(G^{\gamma}_{\{l\}}; u) + \sum_{\{l\}} a'(\gamma'; \varphi)\,\hat{R}_{\{l\}'}(G')\,\Pi(G^{\gamma'}_{\{l\}'}; u),$$

где все $a'(\gamma'; \varphi)$ имеют φ-предел, а к каждому слагаемому $\hat{R}_{\{l\}'}(G')\,\Pi(G^{\gamma'}_{(l)'}; u)$, в свою очередь, применимы аналогичные приведенным выше рассуждения. Через конечное число таких шагов для $\hat{R}(G')\Pi(G; u)$ получим выражение в виде суммы слагаемых вида $\hat{R}(G(\Pi)G;\ u)$ или $\hat{P}(G;v)\hat{R}(G)\Pi(G;\ u)$ с конечным в пределе по φ коэффициентами. Итак, доказана

Теорема 1. *Если диаграммы G и G' связаны соотношени $\{G\} < \{G'\}$, то функционал $\hat{R}(G')\Pi(G;u) = \prod_{\{G\}}[1+P(G_j')]\Pi(G;u)$ имеет φ-предел.*

Пусть теперь G — диаграмма, вершинные функционалы кот рой неоднородны, а внутренним линиям соответствуют вклады

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_0^\infty \varphi(t)t^{-2}\exp\left(-i\frac{x^2}{4t}\right)dt$$

с, вообще говоря, неоднородными $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Тогда вклад $\Pi(G;u$ такой диаграммы распадается в сумму вкладов $\Pi(G(\gamma;\alpha);u$ диаграмм $G(\gamma;\alpha)$ с однородными вершинными функционалам и полиномами $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Причем $\{G(\gamma;\alpha)\} < \{G(\gamma';\alpha')\}$, если $\gamma \leqslant \gamma$ и $\alpha \leqslant \alpha'$. Здесь $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ и $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ — мультииндексы характеризующие соответственно степени производных δ-функци и причинных функций диаграммы $G(\gamma;\ \alpha)$.

Пусть $r(G_k) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{(\gamma,\alpha)} r(G_k(\gamma,\alpha))$, где $G_k \subseteq G$ и $P(G_k) = 0$, есл $r(G_k) < 0$. Тогда в силу доказанной теоремы функциона

$$\hat{R}(G)\Pi(G;u) = \prod_{G_i \in \{G\}}[1+P(G_i)]\Pi(G;u) \text{ имеет } \varphi\text{-предел.}$$

2. Конечные перенормировки

Вернемся к функционалу (1) $R(G;\nu)\Pi(G;u) = \prod_{\{G\}}[1+P(G_j$ $\nu_j)]\Pi(G;u)$.

В силу леммы 1

$$R(G;\nu)\Pi(G;u) = \hat{R}(G)\Pi(G;u) + \sum_{\{l\}} R_{\{l\}}(G;\nu)\Pi(G^{(1)}_{\{l\}};u), \quad (9$$

где вершинные функционалы $\Delta\Lambda(u(G_l);\ \nu_l)$, $l \in \{l\}$, стоящие в вы ражении для $\Pi(G^{(1)}_{\{l\}};\ u)$ (соотношение (5)), имеют вид

$$\Delta\Lambda^{(1)}(u(G_l);\nu_l) = [P(G_l;\nu_l) - P(G_l)]\prod_{\{G_l\}/G_l}[1+P(G_i)]\Pi(G_l;u). \quad (10)$$

Очевидно, степень локального функционала $\Delta\Lambda^{(1)}$ $(u(G_l))$ рав на $\max[\nu_l;\ r(G_l)]$.

Мы предполагаем, что коэффициенты исходных вершинных функционалов $\Lambda(u(j); \nu_j)$ вклада $\Pi(G; u)$ конечны. Тогда из (9) следует, что для того чтобы функционал $R(G; \nu)\Pi(G; u)$ имел φ-предел, необходимо и достаточно, чтобы функционал $\sum_{\{l\}} R_{\{l\}}(G; \nu)\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u)$ имел φ-предел.

Лемма 2. *Для того чтобы функционал*

$$\sum_{\{l\}} R_{\{l\}}(G; \nu)\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u) \tag{11}$$

имел φ-предел, необходимо, чтобы коэффициенты $c(\gamma; \varphi)$ произвольного функционала $\Delta\Lambda^{(1)}(u(G_l))$ имели φ-предел.

Доказательство. Рассмотрим произвольный локальный функционалы $\Delta\Lambda^{(1)}(u(G_l))$, $G_l \in \{G\}$ и $\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u)$, где $\{l\}$ состоит из одного элемента — l.

Пусть $f(u)$ — функция основного пространства Шварца имеет вид

$$[u(G_l)]^{\alpha}\psi(u(G_l))\chi(u). \tag{12}$$

Напомним, что $u(G_l)$ образует полный набор независимых разностей диаграммы G_l. Нетрудно видеть, что при подходящем выборе $\chi(u)$ и α
$$\Big(\sum_{\{l\}} R_{\{l\}}(G; \nu)\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u), f(u)\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma \geqslant \alpha} c(\gamma; \varphi)\left(\delta^{(\gamma)}(u(G_l))\frac{\Pi(G; u)}{\Pi(G_l; u)}, f(u)\right),$$

причем $\left(\delta^{(\gamma)}(u(G_l))\dfrac{\Pi(G; u)}{\Pi(G_l; u)}, f(u)\right)$ имеют φ-предел при всех $\gamma \geqslant \alpha$, $|\gamma| \leqslant \nu_l$.

Выбирая α в (12) соответствующим образом, можно последовательно показать, что каждый из коэффициентов $c(\gamma, \varphi)$, для которого $|\gamma| = \nu_e$ имеет φ-предел, если (11) имеет φ-предел, затем каждый из $c(\gamma, \varphi)$, $|\gamma| = \nu_e - 1$ имеет φ-предел и т. д. Лемма доказана.

Пусть коэффициенты каждого локального функционала $\Delta\Lambda^{(1)}(u\ (G_k);\ \nu_k)$ имеют φ предел. Тогда, применяя предыдущие рассуждения к каждому из слагаемых в (11), получим: для того чтобы функционал $\sum_{\{l\}} R_{\{l\}}(G, \nu)\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u)$ имел φ-предел, необходимо и достаточно, чтобы функционал

$$\Phi^{(2)}(u) = \sum_{\{l\}} [R_{\{l\}}(G; \nu) - \hat{R}(G^{(1)}_{\{l\}})\Pi(G^{(1)}_{\{l\}}; u) \tag{13}$$

имел φ-предел.

Оказывается функционал $\Phi^{(2)}(u)$ имеет ту же структуру, что и (11), и поэтому к нему применимы аналогичные построения.

Очевидно,

$$[R_{\{l\}}(G;\nu)-\hat{R}(G^{(1)}_{\{l\}})]\,\Pi(G^{(1)}_{\{l\}};u)=\sum_{\{k\}}R_{\{l\},\{k\}}(G;\nu)\,\Pi(G^{(1)}_{\{l\},\{k\}};u),\ (1$$

причем суммирование проводится по всем совокупностям $\{k$ неперекрывающихся сильно-связных поддиаграмм $G_{\{l\},k}$ из $G_{\{l}$ каждая из которых содержит хотя бы одну обобщенную вершин образ $G_l,\ l\in\{l\}$. Здесь

$$\Pi(G^{(1)}_{\{l\},\{k\}};u)=\prod_{\{k\}}\Delta\Lambda(u(G_k);)\ \frac{\Pi(G^{(1)}_{\{l\}};u)}{\prod_{l\in\{k\}}\Pi(G^{(1)}_{\{l\}i};u)},$$

где

$$\Delta\Lambda(u(G_k);\nu_k)=[P(G_k;\nu_k)-P(G^{(1)}_{\{l\},k})]\times$$
$$\times\prod_{\{G^{(1)}_{\{l\},k}\}\setminus G^{(1)}_{\{l\}k}}[1+P(G^{(1)}_{\{l\},i})]\,\Pi(G^{(1)}_{\{l\},k};u)\qquad(15$$

и $G_k=f^{-1}(G^{(1)}_{\{l\},k})$, и $R_{\{l\}\{k\}}(G;\nu)$ строится из $R_{\{l\}}(G;\nu)$ по $\{k$ и $\Pi(G^{(1)}_{\{l\}};u)$ так же, как и $R_{\{l\}}(G;\nu)$ из $R(G;\nu)$ по $\{l\}$ и $\Pi(G;u$

Для каждого слагаемого в (13) очевидным образом можн указать такой набор $\{j\}$ сильно-связных неперекрывающихся под диаграмм из G и соответствующее этому набору множество вершин ных функционалов вида (10) или (15), что $\Pi(G^{(1)}_{\{l\},\{k\}};u)=\Pi(G_{\{j\}};u)$. Поэтому, группируя в (13) слагаемые с одним и тем же набором $\{j\}$ и одинаковым множеством вершинных функционало $\Delta\Lambda^{(1)}(u(G_j))$, получим

$$\Phi^{(2)}(u)=\sum_{\{j\}}R_{\{j\}}(G;\nu)\,\Pi(G^{(2)}_{\{j\}};u).\qquad(16)$$

Здесь $\Pi(G^{(2)}_{\{j\}};u)=\prod_{k\in\{j\}}\Delta\Lambda^{(i_k)}(u(G_k);\nu_k)\dfrac{\Pi(G;u)}{\prod_{l\in\{j\}}\Pi(G_l;u)}$, $i_k=1,2$, и $\Delta\Lambda^{(2}\times$

$$\times(u(G_k);\nu_k)=\sum_{\{l\}_k}[P(G_k;\nu_k)-P(G^{(1)}_{\{l\}_k,k})]\prod_{\{G^{(1)}_{\{l\}_k k}\}/G^{(1)}_{\{l\}_k,k}}\times$$
$$\times[1+P(G^{(1)}_{\{l\}_k,i})]\,\Pi(G^{(1)}_{\{l\}_k,k};u),$$

где суммирование проводится по всевозможным наборам $\{l\}_k$ сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из $\{G_k\}$. Очевидно, степень функционала $\Delta\Lambda^{(2)}(u(G_k))$ равна $\max[\nu_k;\ r(G^{(1)}_{\{l\}_k,k})]$.

Повторяя доказательство леммы 2, получим: для того чтобы функционал $\Phi^{(2)}(u)$ имел φ-предел, необходимо, чтобы коэффициенты каждого локального функционала $\Delta\Lambda^{(2)}(u(G_l))$ имели φ-предел.

Пусть коэффициенты локальных функционалов $\Delta\Lambda^{(i)}(u(G_k))$, $i=1, \ldots, m$, построенных последовательно описанным выше способом, имеют φ-предел. Тогда, аналогично предыдущему, получим: 1) для того чтобы функционал $R(G;\nu)\Pi(G;u)$ имел φ-предел, необходимо и достаточно, чтобы функционал $\Phi^{(m+1)}(u) = \sum_{\{j\}} R_{\{j\}}(G;\nu)\Pi(G^{(m+1)}_{\{j\}};u)$ имел φ-предел;

2) для того чтобы функционал $\Phi^{(m+1)}(u)$ имел φ-предел, необходимо, чтобы коэффициенты каждого локального функционала

$$\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_k);\nu_k) = \sum_{\{l\}_k}[P(G_k;\nu_k) - P(G^{(m)}_{\{l\}_k,k})] \times$$

$$\times \prod_{\{G^{(m)}_{\{l\}_k,k}\setminus G^{(m)}_{\{l\}_k,k}\}} [1 + P(G^{(m)}_{\{l\}k,i})]\Pi(G^{(m)}_{\{l\}_k,k};u)$$

имели φ-предел. Здесь суммирование проводится по всевозможным наборам $\{l\}_k$ сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из G_k.

После конечного числа таких шагов (их будет, очевидно, не больше, чем число классов диаграмм $\{G\}$) для $R(G;\nu)\Pi(G;u)$ получим выражение в виде суммы (с конечными в пределе по φ коэффициентами) слагаемых, каждое из которых имеет φ-предел. Отсюда непосредственно следует, что сформулированные выше условия на коэффициенты локальных функционалов $\Delta\Lambda^{(k)}(u(G_j);\nu_j)$ являются и достаточными для существования φ-предела функционала $R(G;\nu)\Pi(G;u)$, если они последовательно выполнены для всех типов локальных функционалов $\Delta\Lambda^{(k)}$, возможных для данной диаграммы G.

Итак, доказана

Теорема 2. *Для того чтобы функционал* $R(G;\nu)\Pi(G;u) = \prod_{\{G\}}[1 + P(G_j;\nu_j)]\Pi(G;u)$ *имел φ-предел, необходимо и достаточно, чтобы операторы $P(G_j;\nu_j)$ были таковы, что коэффициенты всех возможных для G локальных функционалов*

$$\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_k);\nu_k) = \sum_{\{l\}_k}[P(G_k;\nu_k) - P(G^{(m)}_{\{l\}_k,k})] \times$$

$$\times \prod_{\{G^{(m)}_{\{l\}k,k}\}/G^{(m)}_{\{l\}_k,k}} [1 + P(G^{(m)}_{\{l\}_k,i})]\Pi(G^{(m)}_{\{l\}_k;k};u)$$ *имели φ-предел.*

Здесь суммирование проводится по всевозможным наборам $\{l\}_k$ сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из $\{G_k\}$, а

$$\Pi(G^{(m)}_{\{l\}_k,k};u) = \prod_{l\in\{l\}_k}\Delta\Lambda^{(k_l)}(u(G_l))\,\frac{\Pi(G;u)}{\prod_{j\in\{l\}_k}\Pi(G_j;u)},$$

где $\{k_l\}$ — набор целых чисел из $[1, m]$, среди которых есть хотя бы одно равное m.

3. «Лишние» вычитания

Имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть G_j — произвольная сильно-связная поддиаграмма из G и коэффициенты каждого локального функционала $\Delta\Lambda^{(k)}(u(G_l); \nu_l)$, где $G_l \subset G_j$ и $k=1, \ldots, m$, имеют φ-предел.*

Тогда, если все коэффициенты $\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_j); \nu_j)$ имеют φ-предел, то

$$\nu_j \geqslant \max_{\{l\}_j} r(G^{(m)}_{\{l\}_j,j}), \tag{17}$$

и обратно, если $P(G_j;\nu_j) = \hat{P}(G_j; \nu_j)$ и выполняется (17), то все коэффициенты локального функционала $\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_j); \nu_j)$ имеют φ- предел.

Доказательство. Обратное утверждение непосредственно следует из того, что $\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_j); \nu_j) = \sum_{\{l\}_j} [1 + \hat{P}(G_j; \nu_j)] \times$

$$\times \prod_{\{G^{(m)}_{\{l\}_j,j}\}/G^{(m)}_{\{l\}_j,j}} [1 + P(G^{(m)}_{\{l\}_j,i})] \Pi(G^{(m)}_{\{l\}_j,j}; u) -$$

$-\sum_{\{l\}_j} \hat{R}(G^{(m)}_{\{l\}_j,j}) \Pi(G^{(m)}_{\{l\}_j,j}; u)$ и при $\nu_j \geqslant \max_{\{l\}_j} r(G^{(m)}_{\{l\}_j,j})$ каждый из функционалов $[1 + \hat{P}(G_j; \nu_j)] \prod_{\{G^{(m)}_{\{l\}_j,j}\}/G^{(m)}_{\{l\}_j,j}} [1 + P(G^{(m)}_{\{l\}_j,i})] \Pi(G^{(m)}_{\{l\}_j,j}; u)$ имеет φ-предел.

Теперь пусть $\nu_j < r(G^{(m)}_{\{\bar{l}\}_j,j})$ при некотором $\{\bar{l}\}_j$, тогда среди коэффициентов $\Delta\Lambda^{(m+1)}(u(G_j))$ найдутся и такие, которые совпадают с коэффициентами ряда Маклорена по степеням p преобразования Фурье функционала $\Pi(G^{m}_{(\bar{l})_j} j; u)$. Но, как показано в [1, 2], эти коэффициенты расходятся в пределе по φ, если ряд Маклорена содержит степени n переменной p, для которых $n \leqslant r(G^{(m)}_{\{\bar{l}\}_j,j})$. Отсюда и следует необходимость вычитания всех таких степеней.

Лемма доказана.

Из леммы 3, в частности, следует, что если $R(G; \nu)\Pi(G; u)$ имеет φ-предел, то степень каждого локального функционала $\Delta\Lambda^{(k)}(u(G_j))$ совпадает с ν_j, поскольку в этом случае должно выполняться $\nu_j \geqslant \max_{\{l\}_j} r(G^{(k-1)}_{\{l\}_j,j})$, а значит, $\nu_j \geqslant \max_{\{l\}_j} [r(G_j) -$

$$- \sum_{i \in \{l\}_j} r(G_i) + \sum_{l \in \{l\}_j} \nu_l].$$

Если класс диаграммы есть неубывающая функция ее номера, то в силу доказанного выше справедлива

Теорема 3. *Если* $R(G;\ \nu)\Pi(G;\ u)$ *имеет* φ-*предел, то последовательно для всех диаграмм первого, второго класса и т. д. из* $\{G\}$ *выполняется условие*

$$\nu_j \geqslant \max_{\{l\}} \left[r(G_j) - \sum_{\{l\}_j} r(G_i) + \sum_{l \in \{l\}_j} \nu_l \right], \tag{18}$$

где $\{l\}_j$ — произвольная совокупность сильно-связных неперекрывающихся поддиаграмм из $\{G_j\}$. Обратно, если $P(G_j;\ \nu_j) = \hat{P}(G_j;\ \nu_j)$ для каждой диаграммы из $\{G\}$ и соотношение (18) выполняется последовательно для всех диаграмм первого, второго класса и т. д. из $\{G\}$, то $R(G;\ \nu)\Pi(G;\ u)$ имеет φ-предел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щербина В. А.* Препринт ИТФ-69—36. Киев, «Наукова думка», 1969. 85 с.
2. *Щербина В. А.* О вычислительном формализме в квантовой теории поля, 38—64. Каталог депонированных работ. Изд. ВИНИТИ, 1964. 43 с.
3. *Уваров О. В., Щербина В. А.* Структура R-операции для локальных взаимодействий (см. статью в настоящем выпуске).

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 517.944

В. М. БОРОК, д-р физ.-мат. наук

ТОНКАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопросу единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциально-разностных уравнений посвящены работы [1—3]. Основной результат, полученный в этих работах, состоит в том, что решение $\bar{u}(x,\ t)$ системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{u}\,(x + h_k, t), \tag{1}$$

$$\bar{u} = \{u_1\ (x, t), \ldots,\ u_n\,(x, t)\},\ x \in R^m,\ t \in [0, T],$$

$P_k(s)$ — полиноминальные порядка $\leqslant p$ матрицы $n \times n$, $h_k \in R^m$, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие условию

$$\bar{u}\,(x, 0) = 0 \tag{2}$$

и оценке

$$|D^{(\alpha)}\,\bar{u}\,(x,\ t)| \leqslant C_u \exp\{b\,|x|\ln|x|\},\ |\alpha| \leqslant p,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{3}$$

при $b < H^{-1} = (\max\,||h_k||)^{-1}$ тождественно равно нулю.

Целью настоящей заметки является получение более тонкого критерия единственности (типа теоремы Тэклинда).

Пусть $l(x)>0$ $(x>0)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условиям:

l_1) функция $x^{-1}l(x)$ убывает при достаточно больших значениях x;

l_2) при любых $x>0$, $y>0$ и некоторых $A>0$, $B>0$, $C>0$ $(x+y)l(x+y)\leqslant xl(x)+yl(y)+Ax+By+C$.

Положим

$$b_k=\sup_{y\geqslant 1}[l(y)\ln y]^k\exp\{-\alpha y\,l(y)\ln y\},\quad \alpha<1 \tag{4}$$

и обозначим

$$\Phi_a=\{\varphi(x)\in C^\infty(R^m):\forall\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\, C_{\varepsilon\varphi}:|D^{(\alpha)}\varphi(x)|\leqslant \leqslant C_{\varepsilon\varphi}A_\varphi^{|\alpha|}b_{|\alpha|}\exp\{-(a-\varepsilon)|x|\,l(|x|)\}.$$

Покажем, прежде всего, что при любом $a>0$ это пространство содержит нетривиальные функции, для чего воспользуемся теоремой Бабенко [4], из которой вытекает следующее: пусть $L(x)=\exp\{a|x|\,l(|x|)\}$ при $|x|>1$; $\ln L(x)=O(x^2)$

при $x\to 0$; $M(x)=\sup\limits_k\dfrac{|x|^k}{b_k}$ при $|x|>1$; $\ln M(x)=O(x^2)$

при $x\to 0$. Тогда пространство Φ_a содержит нетривиальную функцию, если

$$\text{а)}\ \varlimsup_{x\to\infty}\frac{\ln\ln L(x)}{\ln x}<3;\qquad \text{б)}\ \varliminf_{y\to\infty}\mu(y)\left[y^3\int_0^\infty\frac{\ln L(\xi)d\xi}{\xi^2(\xi^2+y^2)}\right]^{-1}>0,$$

где

$$\mu(y)=\ln\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}ty}{M(t)}dt.$$

В нашем случае условие а), очевидно, выполнено. Для проверки условия б) оценим функцию $M(x)$, используя ее определение и формулу (4):

$$M(\ln x\cdot l(x))\leqslant\exp\{\alpha x\,l(x)\ln x\},\quad x>1. \tag{5}$$

Из (5) и монотонности $M(t)$ следует

$$\mu(y)\geqslant\ln\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\exp\{ty\}}{M(t)}dt\geqslant\ln\frac{1}{2}\int_{t(y)-1}^{t(y)}\frac{\exp\{ty\}}{M(t)}dt\geqslant$$

$$\geqslant\ln\left\{\frac{1}{2}\exp\{yt(y)-y\}[M(t(y))]^{-1}\right\},$$

полагая $t(y)=l(y)\ln y$, получим

$$\mu(y) \geqslant \ln\left\{\frac{1}{2}\exp\left[yl(y)\ln y - y - Cyl(y)\ln y\right]\right\} \geqslant Ayl(y)\ln y \tag{6}$$

при некотором $A > 0$.

В то же время при достаточно больших значениях y имеем

$$\int_0^\infty \frac{\ln L(\xi)}{\xi^2(\xi^2+y^2)}\,d\xi = \left(\int_0^1 + \int_1^y + \int_y^\infty\right)\frac{\ln L(\xi)}{\xi^2(\xi^2+y^2)}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{y^2} + \frac{al(y)\ln y}{y^2} + \frac{C_2 l(y)}{y^2} \leqslant \frac{a'l(y)\ln y}{y^2}, \quad a' > a. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает справедливость условия б). Тем самым доказано существование функции $\varphi(x) \in \Phi_a$, $\varphi(x) \not\equiv 0$.

Покажем далее, что пространство Φ_a «достаточно богато функциями», т. е. если $f(x)$ — локально интегрируемая функция и при любой $\varphi(x) \in \Phi_a \int\limits_{R^m} \varphi(x) f(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ (почти всюду). Для этого воспользуемся приведенным в [5] признаком того, что пространство достаточно богато функциями: последнее верно, если а) существует $\varphi(x) \not\equiv 0$, $\varphi(x) \in \Phi_a$, б) при любом $h \in R^m \varphi(x+h) \in \Phi_a$ и $\varphi(x)\mathrm{e}^{i(x,y)} \in \Phi_a$, если $\varphi(x) \in \Phi_a$. В нашем случае выполнение условия а) доказано; условие $\varphi(x+h) \in \Phi_a$ при $\varphi(x) \in \Phi_a$ вытекает из оценки

$$|D^{(\gamma)}\varphi(x+h)| \leqslant C_{\varepsilon\varphi} A_\varphi^{|\gamma|} b_{|\gamma|} \exp\left\{-\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)|x+h|\,l(|x+h|)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\varepsilon h\varphi} A_\varphi^{|\gamma|}\, b_{|\gamma|} \exp\{-(a-\varepsilon)|x|\,l(|x|)\},$$

а выполнение условия $\varphi(x)\mathrm{e}^{i(x,h)} \in \Phi_a$ легко следует из монотонности последовательности b_k.

Пусть теперь $\overline{u}(x, t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию (2) и оценке

$$|D^{(\alpha)}\overline{u}(x,t)| \leqslant C_u \exp\{|x|\,l(|x|)\}, \quad |\alpha| \leqslant p, \tag{8}$$

и пусть $\overline{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$, $\varphi_i(x) \in \Phi_a$ $i = 1, \ldots, n$, $a > 1$.

Обозначим $F_{\overline{\varphi}}(t) = \int\limits_{R^m} (\overline{u}(x,t), \overline{\varphi}(x))\,dx$,

$$L^*\overline{\varphi}(x,t) = \sum_{k=1}^N P_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{\varphi}(x-h_k, t),$$

где $P_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — формально сопряженное к $P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ дифференциальное выражение. Тогда, как легко видеть,

$$F_{\bar{\varphi}}^{(k)}(t) = \int_{R^m} (\bar{u}(x,\ t),$$

$$L^{*k}\bar{\varphi}(x))\,dx,$$

$$F_{\bar{\varphi}}^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Оценим $L^{*k}\bar{\varphi}(x)$. Имеем

$$L^{*k}\bar{\varphi}(x) = \sum_{l_1,\ldots,l_k=1}^{N} P^*_{l_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\ldots P^*_{l_k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\varphi}\left(x - \sum_{j=1}^{k} h_{l_j}\right),$$

откуда

$$|L^{*k}\bar{\varphi}(x)| \leqslant M^k \sup_{\substack{(\gamma),|\gamma|\leqslant kp \\ (h_{l_1},\ldots,h_{l_k})}} \left|D^{(\gamma)}\bar{\varphi}\left(x - \sum_{j=1}^{k} h_{l_j}\right)\right|.$$

Учитывая (8) и определение пространства Φ_a, получим

$$|F_{\bar{\varphi}}^{(k)}(t)| \leqslant C_\varepsilon M^k A_{\varphi}^{kp} C_u b_{kp} \int_{R^m} \exp\{(|x| + kH)\, l(|x| + kH) -$$

$$-(a-\varepsilon)\,|x|\, l(|x|)\}\,dx \leqslant C'_\varepsilon M_1^k b_{kp} \exp\{kHl(kH)\}. \tag{10}$$

Если полученные оценки гарантируют квазианалитичность функции $F_{\bar{\varphi}}(t)$, то в силу (9) $F_{\bar{\varphi}}(t) \equiv 0$, тогда и $\bar{u}(x,\ t) \equiv 0$, поскольку пространство Φ_a достаточно богато функциями.

Но из оценок (10) следует [6] квазианалогичность $F_{\bar{\varphi}}(t)$, если расходится ряд

$$\sum_k \exp\{-Hl(kH)\} b_{kp}^{-\frac{1}{k}}. \tag{11}$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть $\bar{u}(x,\ t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию (2) и оценке (8), где $l(r)$ — функция, для которой выполнены условия (l_1) и (l_2), и пусть последовательность b_k определена формулами (4). Если ряд (11) расходится, то $\bar{u}(x,\ t)$ $\equiv 0$.*

Расходимость ряда (11) является не только достаточным, но и необходимым условием того, что $u(x,\ t)$ $\equiv 0$ в случае разностных по пространственным переменным систем вида (1) [7].

Доказанная теорема приводит к результатам, полученным в [1] — [3], если положить $l(r) = \alpha \ln r$, $\alpha < \frac{1}{H}$. Более точный результат получится, например, если положить $l(r) = \frac{1}{H}\ln r - \frac{2p-1}{H}\ln\ln r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камынин Л. И.* О единственности решения задачи Коши в классе быстро растущих функций для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — «Докл. АН СССР», 1955, № 103, с. 545—548.

2. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений. — «Докл. АН СССР», 1956, № 108, с. 1001—1003.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — В кн.: Обобщенные функции. Вып. 3. М., 1958, с. 48—56.
4. *Бабенко К. И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и преобразовании Фурье целых функций. — «Тр. мат. о-ва», 1956, № 5, с. 24—29.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — В кн.: Обобщенные функции. Вып. 2. М., 1958.
6. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 240 с.
7. *Болковой С. Н,. Житомирский Я. И.* О единственности решения задачи Коши для эволюционных разностных систем линейных уравнений с переменными коэффициентами. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17. Харьков, 1973, с. 26—30.

Поступила 9 января 1975 г.

УДК 519.9+575.1

Ю. И. ЛЮБИЧ, д-р физ.-мат. наук

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ С. Н. БЕРНШТЕЙНА О НЕОБХОДИМОСТИ ЗАКОНА МЕНДЕЛЯ

Упомянутая в заглавии теорема С. Н. Бернштейна [1, 2] формулируется следующим образом.

Пусть V — квадратичное отображение симплекса $\Delta^2=\{x\in \boldsymbol{R}^3: x\geqslant 0,\ s(x)\equiv x_1+x_2+x_3=1\}$ *в себя*:

$$(Vx)_j=\sum_{i,k=1}^{3} p_{ik,j}\,x_i\,x_k, \tag{1}$$

где $p_{ik;j}=p_{ki,j}\geqslant 0,\quad \sum_j p_{ik,j}=1.$ *Если* $a)$ $V^2=V$; $b)$ $p_{12,3}=1$; $c)$ $(Vx)_j\not\equiv 0$, то V имеет вид

$$(Vx)_1=p^2,\ (Vx)_2=q^2,\ (Vx)_3=2pq, \tag{2}$$

где

$$p=x_1+\frac{1}{2}x_3,\ q=x_2+\frac{1}{2}x_3. \tag{3}$$

Отображение (2) — (3) играет фундаментальную роль в популяционной генетике, где оно называется законом Харди-Вайнберга и появляется в качестве эквивалента закона Менделя (см., например, [3, с. 611]). Поэтому можно сказать, что из условий $a)$ — $c)$ с необходимостью следует закон Менделя. Все эти условия имеют биологический смысл и вполне доступны экспериментальной проверке.

Первоначальное доказательство теоремы (см. [2]) элементарно, но мало прозрачно. Несколько более обозримое доказательство было дано нами в [4]. Излагаемое ниже доказательство вскрывает алгебраическую природу теоремы С. Н. Бернштейна (ср. [5]).

Обозначим через e_1, e_2, e_3 стандартный базис пространства $\boldsymbol{R}^3$. и будем интерпретировать коэффициенты $p_{ik,\ j}$ как структурные константы некоторой алгебры A, очевидно, коммутативной, но неассоциативной. При этом $Vx=x^2 (x\in\Delta^2)$, $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0) \Rightarrow xy\geqslant 0$ и $s(xy)=s(x)s(y)$. Условие $V^2=V$ равносильно тождеству

$$(x^2)^2=s^2(x)x^2\ (x\in R^3). \tag{4}$$

Таким образом, если $s(x)=1$, то x^2 — идемпотент.

Всюду ниже мы предполагаем, что условия *a) — c)* выполнены.

Рассмотрим идеал $N=\{x|s(x)=0\}$. Очевидно, $\dim N=2$.

Лемма 1. *Для любого ненулевого идемпотента $e\in A$ существует такой базис $\{w,\ \bar{w}\}$* идеала N, что

$$ew=\frac{1}{2}w,\quad e\bar{w}=0 \tag{5}$$

и для любого такого базиса

$$w^2=\alpha\bar{w},\ \ \bar{w}^2=\beta w,\ \ w\bar{w}=\gamma w. \tag{6}$$

Доказательство. Если $e\in A$ — ненулевой идемпотент, то $s(e)=1$, ибо $s(e)\neq 0$ (иначе $(e^2)^2=0$, т. е. $e=0$). Записывая любой вектор $x\in A$ в виде $x=s(x)e+y (y\in N)$, подставляя в (4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получаем [ср. 4]:

$$2e(2ey)=2ey, \tag{7}$$

$$2ey^2+(2ey)^2=y^2, \tag{8}$$

$$(2ey)y^2=0, \tag{9}$$

$$(y^2)^2=0. \tag{10}$$

Введем линейный оператор $L:N\to N$, полагая $Ly=2ey$. Тождество (7) означает, что $L^2=L$, т. е. L — проектор. Легко видеть, что $L\neq 0,\ 1$. Действительно, если $L=0$, то $ey=0 (y\in N)$ и в силу (8) $y^2=0 (y\in N)$, откуда $x^2=s^2(x)e$. Но тогда условие $p_{12,3}=1$ влечет $e=e_3$ и, следовательно, $(Vx)_1\equiv 0$, $(Vx)_2\equiv 0$, вопреки *c*). Если же $L=1$, то $2ey=y (y\in N)$ и в силу (8) $(2ey)^2=0$, т. е. опять $y^2=0$ $(y\in N)$, откуда $x^2=s^2(x)e+s(x)y$. Но тогда $p_{12,3}=0$, вопреки *b*).

Поскольку $\dim N=2$ и проектор $L\neq 0,\ 1$, то $\operatorname{rg} L=1$. Остается выбрать $w\in \operatorname{Im} L\setminus\{0\}$, $\bar{w}\in \operatorname{Ker} L\setminus\{0\}$, ибо (5) означает: $Lw=w$, $L\bar{w}=0$.

Рассмотрим разложение по базису $\{w,\ \bar{w}\}:y=\varphi(y)w+$ $+\bar{\varphi}(y)\bar{w}(y\in N)$.

Очевидно, $\varphi(w)=1$, $\bar{\varphi}(\bar{w})=1$, $\varphi(\bar{w})=0$, $\bar{\varphi}(w)=0$.

Далее, $Ly=\varphi(y)w$, откуда $\varphi(y)w=2ey$.

Это позволяет записать тождество (8) в виде

$$y^2=\varphi(y^2)w+\bar{\varphi}^2(y)w^2. \tag{8$'$}$$

Полагая $y=w$, находим: $\varphi(w^2)=0$. Следовательно, $w^2=\alpha\bar{w}$ при некотором α. Полагая $y=\bar{w}$, находим $\bar{w}^2=\beta w$, где $\beta=\varphi(\bar{w}^2)$. Наконец, из (8$'$) следует:

$$y_1y_2=\varphi(y_1y_2)w+\bar{\varphi}(y_1)\bar{\varphi}(y_2)w^2(y_1,\ y_2\in N), \tag{8$''$}$$

откуда $w\bar{w}=\gamma w$, где $\gamma=\varphi(w\bar{w})$.

Следствие. $\dim A^2 \geqslant 2$.

Действительно, $A^2 \supset \mathrm{Lin}(e, w)$.

На самом деле при данных условиях справедлива

Лемма 2. $\dim A^2 = 3$.

Доказательство. Так как $A^2 = \mathrm{Lin}(e, w, \alpha\overline{w})$, то при $\dim A^2 = 2$ будет $\alpha = 0$, т. е. $w^2 = 0$.

Поэтому

$$(e + \tau w)^2 = e + \tau w \ (\tau \in \boldsymbol{R}). \tag{11}$$

Прямая $x = e + \tau w (\tau \in \boldsymbol{R})$ лежит в плоскости $P = \{x | s(x) = 1\}$ и является образом при отображении $(x, y) \to xy (x, y \in P)$. Следовательно, она содержит точку $e_1 e_2 = \Sigma p_{12,j} e_j = e_3$, а также все точки образа $\mathrm{Im}\, V$. Так как $\mathrm{Im}\, V$ лежит в треугольнике Δ^2 и не сводится к одной точке (иначе $x^2 = s^2(x) e$, что, как мы уже видели, невозможно), то наша прямая пересекает сторону $[e_1, e_2]$ треугольника Δ^2 в некоторой точке $\lambda e_1 + \mu e_2$ ($\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$). Тогда $(\lambda e_1 + \mu e_2)^2 = \lambda e_1 + \mu e_2$ в силу (11). Отсюда $\lambda\mu = 0$ (ибо $e_1 e_2 = e_3$). Пусть, например, $\mu = 0$. Тогда $\lambda = 1$, т. е. наша прямая проходит через точку e_1. Поэтому $\mathrm{Im}\, V = [e_1, e_3]$, т. е. $(Vx)_2 \equiv 0$, вопреки *c*).

Следствие. В формулах (6) $\alpha \neq 0$.

Рассмотрим теперь идеал $\mathrm{Ann}\, A = \{y | yz = 0 (z \in A)\}$. Очевидно, $\mathrm{Ann}\, A \subset N$.

Лемма 3. $\mathrm{Ann}\, A = \mathrm{Lin}\, (\overline{w})$.

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{Ann}\, A$. Тогда $y = \eta w + \overline{\eta}\overline{w}$ и в силу (5) $ey = \frac{1}{2}\eta w$. Так как $ey = 0$, то $\eta = 0$. Таким образом, $\mathrm{Ann}\, A \subset \mathrm{Lin}(\overline{w})$. Остается показать, что $\overline{w} \in \mathrm{Ann}\, A$. Согласно (5) $e\overline{w} = 0$. Далее, полагая в (9) $y = w$ и учитывая, что $2ew = Lw = w$, получаем $w^3 = 0$. Значит, $w\overline{w} = \alpha^{-1} w^3 = 0 \ (\alpha \neq 0)$ по следствию леммы 2. Наконец, $\overline{w}^2 = \alpha^{-2} (w^2)^2 = 0$ в силу (10). Лемма доказана.

Перейдем к фактор-алгебре $\tilde{A} = A / \mathrm{Ann}\, A$. Она двумерна в силу леммы 3 и порождается образами E, W векторов e, w при естественном гомоморфизме. Таблица умножения в этом базисе имеет в силу (5), (6) вид

$$E^2 = E, \quad EW = \frac{1}{2} W, \ W^2 = 0. \tag{12}$$

Линейные формы s, φ переносятся на $\tilde{A}$ в качестве координат:

$$X = s(X) E + \varphi(X) W$$

(подразумевается, что φ сначала продолжена на все R^3 так, что $\varphi(e) = 0$)). Тогда из (12) следует $X^2 = s(X) E$ (в частности, $X^2 = X$ при $s(X) = 1$), т. е. умножение в фактор-алгебре имеет вид

$$X_1 X_2 = \frac{1}{2} \{X_1 s(X_2) + X_2 s(X_1)\}. \tag{13}$$

Пусть E_1, E_2, E_3 — образы в $\tilde{A}$ векторов e_1, e_2, e_3 стандартного базиса пространства $\boldsymbol{R}^3$.

Лемма 4. *Выпуклая оболочка векторов E_1, E_2, E_3 есть отрезок $[E_1, E_2]$, причем он не вырождается в точку (т. е. $E_1 \neq E_2$).*

Доказательство. Так как $e_3 = e_1 e_2$, то $E_3 = E_1 E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ в силу (13). Если $E_1 = E_2$, то $E_1 = E_2 = E_3$, т.е. $e_3 - e_1$, $e_3 - e_2$ принадлежат $\operatorname{Ann} A$, что противоречит одномерности аннулятора (лемме 3).

Теперь мы в состоянии вычислить структурные константы алгебры A и этим завершить доказательство теоремы. Прежде всего установим, что e_1, e_2 — идемпотенты; $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$. Имеем

$$e_1^2 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \omega e_3 \, (\lambda, \mu, \omega \geqslant 0, \ \lambda + \mu + \omega = 1).$$

Переходя в фактор-алгебру, получаем

$$E_1 = \left(\lambda + \frac{\omega}{2}\right) E_1 + \left(\mu + \frac{\omega}{2}\right) E_2.$$

Так как E_1 — крайняя точка отрезка $[E_1, E_2]$ и $E_2 \neq E_1$, то $\mu + \frac{\omega}{2} = 0$, откуда $\mu = 0$, $\omega = 0$, $\lambda = 1$, т. е. $e_1^2 = e_1$. Аналогично e_2^2.

С самого начала $e_1 e_2 = e_3$. Остается найти $e_1 e_3$, $e_2 e_3$, e_3^2. Поскольку $E_3 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, то $e_1 + e_2 - 2e_3 \in \operatorname{Ann} A$. Поэтому $e_1(e_1 + e_2 - 2e_3) = 0$, откуда $e_1 e_3 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_1 e_2) = \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_3$.

Аналогично $e_2 e_3 = \frac{1}{2}(e_2 e_1 + e_2^2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$.

Наконец, $e_3^2 = \frac{1}{2}(e_3 e_1 + e_3 e_2) = \frac{1}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 + \frac{1}{2} e_3$.

Полученные структурные константы определяют отображение (2)—(3). Их значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ — суть менделевские коэффициенты наследственности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernstein S. N.* Démonstration mathematique de la loi d'hérédité de Mendel. — C. R. Ac. Sci. (Paris), 1923, vol. 177, p. 528—531.
2. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. — «Учен. зап. Укр. отд. мат.», 1924, вып. 1, с. 83—115.
3. *Вилли К.* Биология, М., «Мир», 1968. 808 с.
4. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. — «Усп. мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5 (161), с. 51—116.
5. *Любич Ю. И.* Двухуровневые бернштейновские популяции. — «Мат. сб.», 1974, т. 95, № 4, с. 606—628.

УДК 519.9

Г. Ч. КУРИННОЙ

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ЭВОЛЮЦИОННОМ СПЕКТРЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

Рассмотрим $(n+1)$-мерную коммутативную (неассоциативную) алгебру A_n над полем C комплексных чисел. Алгебра называется барической, если она снабжена весом, т. е. нетривиальным гомоморфизмом w: $A_n \to C$. По предложению П. Холгейта, высказанному в переписке с Ю. И. Любичем, алгебра A_n называется шеферовской, если она обладает базисом C_0, C_1, ..., C_n со свойствами [1]

$$w(C_0)=1,\ w(C_i)=0\ (i=1,2,\dots,n), \tag{1}$$

$$C_0C_i=\gamma_iC_i+\sum_{n\geqslant j>i}\gamma_{0,i,j}\,C_j\ (i=0,\dots,n), \tag{2}$$

$$C_iC_j=\sum_{n\geqslant k>\max(i,j)}\gamma_{i,j,k}\,C_k\ (i,j=1,\dots,n). \tag{3}$$

Базис $C_0, C_1, \dots, C_n$ называется каноническим базисом, хотя он не единственен.

Класс шеферовских алгебр возник в связи с задачами математической генетики. В этом плане многие авторы [4] изучали последовательности

$$G^0,\ G^1,\ G^2,\ \dots \tag{4}$$

элементов шеферовской алгебры, удовлетворяющие уравнению

$$G^{p+j}+\alpha_1G^{p+j-1}+\dots+\alpha_pG^j=0,\ j=0,1,2,\dots \tag{5}$$

где $w(G^j)=1$; p — фиксированное натуральное число, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in C$ — постоянные коэффициенты. Такие последовательности называются траекториями. Характеристический полином $\lambda^p+\alpha_1\lambda^{p-1}+\dots+\alpha_p$ уравнения (5) называется эволюционным полиномом, а его корни — эволюционными корнями. Множество корней называется эволюционным спектром.

До работы Ю. И. Любича [4] эволюционный спектр описывался рекуррентно на основе той или иной индуктивной структуры (см., например, [2], [5], [6]). Впрочем, в работах [2], [6] имеется некоторая явная формула, относящаяся, однако, не к самому спектру, а к некоторому его расширению. Ю. И. Любич [4] вычислил явно эволюционный спектр для алгебры, порождаемой аутосомной гаплоидной популяцией. Его техника была распространена В. М. Киржнером [7], [8] на алгебры, возникающие в других генетических ситуациях.

---

[1] По поводу этих свойств и их связей с другими определениями см. [1—3].

В настоящей заметке дана явная формула для эволюционных корней, отвечающих траекториям в шеферовской алгебре A_n, построенным по схеме работы Хьюча [6]:

$$G^{j+p} = \sum_{k,h=0}^{p-1} b_{k,h} G^{j+k} G^{j+h}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Здесь p — фиксированное натуральное число, $G^1, \ldots, G^p$ — произвольные элементы из A_n с $w(G^1) = \ldots = w(G^p) = 1$. Предполагается, что коэффициенты $b_{k,h}$ $(k, h = 0, 1, \ldots, p-1)$ удовлетворяют условиям: $b_{k,h} \geqslant 0$, $b_{k,h} = b_{h,k}$, $\sum\limits_{k,h=0}^{p-1} b_{k,h} = 1$ и $b_{0k} \neq 0$ хотя бы для одного из $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

В [6] доказано, что последовательности (6) являются траекториями, и дан рекуррентный метод нахождения эволюционных корней. Этот метод состоит в следующем. Обозначим через P_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ координатную проекцию алгебры A_n на линейную оболочку элементов $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ канонического базиса и определим в этой линейной оболочке умножение, полагая $X \cdot Y = P_k(X \cdot Y)$, где справа умножение производится в A_n. Полученную таким образом $(k+1)$-мерную алгебру обозначим через A_k. Очевидно, она шеферовская, а $C_0, C_1, \ldots, C_k$ — ее канонический базис. Единственным корнем алгебры A_0 является число $r_{0,1} = 1$. Если корни $r_{k,1}$, $r_{k,2}, \ldots$ алгебр A_k при $k = 0, 1, \ldots, i-1$ известны, то эволюционные корни $r_{i,1}$, $r_{i,2}, \ldots$ алгебры A_i либо имеют вид

$$r_{k,u} r_{j,v} \; (0 \leqslant k, j < i; \; u, v = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

либо являются корнями уравнения

$$x^p - 2\gamma_i \left[x^{p-1} \sum_{h=0}^{p-1} b_{p-1,h} + \ldots + \sum_{h=0}^{p-1} b_{0,h} \right] = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать алгебру A_n как переменный элемент многообразия шеферовских алгебр с фиксированным базисом $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Величины $b_{k,h}$ в (6) постоянны. Корни уравнения (8) будем обозначать через $r_{i,1}$, $r_{i,2}, \ldots, r_{i,p}$.

Теорема. *Эволюционный спектр алгебры A_n при $n \geqslant 1$ совпадает с множеством мономов вида*

$$r_{1,1}^{m_1} \, r_{1,2}^{m_2} \ldots r_{2,1}^{l_1} \, r_{2,2}^{l_2} \ldots \; r_{n,1}^{k_1} \, r_{n,2}^{k_2} \ldots, \tag{9}$$

для которых

$$(m_1 + m_2 + \ldots) + 2(l_1 + l_2 + \ldots) + \ldots + 2^{n-1}(k_1 + \ldots) \leqslant 2^{n-1}. \tag{10}$$

Ограничение (10) показывает, что описание эволюционного спектра в работах [2], [6] избыточно. Заметим, что по отношению к индивидуальной алгебре и наше описание иногда оказывается избыточным (ср. с эволюционным спектром в [4]).

Доказательство. Докажем, что если (9) входит в спектр A_n, то выполняется (10). Эволюционный спектр A_0 состоит из 1, алгебры A_1 из 1, $r_{1,1}$, $r_{1,2}, \ldots$ Для элементов спектра A_1 ограничение (10) выполняется. Допустим (10) выполняется для спектра алгебр $A_1, \ldots, A_{n-1}$ и λ — эволюционный корень A_n. Тогда (см. [6]) либо $\lambda = r_{n,i}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant p$ и (10) выполняется, либо $\lambda = \alpha \cdot \beta$, где α, β — эволюционные корни алгебр A_i, A_j соответственно для некоторых $0 \leqslant i, j < n$. Пусть

$$\alpha = r_{1,1}^{m'_1} \; r_{1,2}^{m'_2} \ldots r_{2,1}^{l'_1} \; r_{2,2}^{l'_2} \ldots \quad \beta = r_{1,1}^{m''_1} \; r_{1,2}^{m''_2} \ldots \; r_{2,1}^{l''_1} \; r_{2,2}^{l''_2} \ldots$$

Тогда

$$(m'_1 + m'_2 + \ldots) + 2(l'_1 + l_2 + \ldots) + \ldots \leqslant 2^{i-1}, \quad (m''_1 + m''_2 + \ldots) + 2(l''_1 + l''_2 + \ldots) + \ldots \leqslant 2^{j-1}.$$

Так как $i, j < n$, то $(m'_1 + m''_1 + m'_2 + m''_2 + \ldots) + 2(l'_1 + l''_1 + l'_2 + l''_2 + \ldots) + \ldots \leqslant 2^{n-1}$ и λ удовлетворяет (10).

Остальная часть работы посвящена доказательству того, что если моном (9) удовлетворяет неравенству (10), то он входит в эволюционный спектр алгебры A_n. Будем предполагать, что $C_0 \times C_0 = C_0$.

При построении траектории с помощью (6), где

$$G^j = \sum_{i=1}^{n} y_{i,j} C_i + C_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

в качестве коэффициентов при C_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) мы будем получать многочлены от трех наборов переменных:

γ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\gamma_{k,l,m}$ ($0 \leqslant k, l < m \leqslant n$) и $y_{1,1}$, $y_{1,2}, \ldots$, $y_{2,1}$, $y_{2,2}, \ldots$, $y_{n,p}$. Обозначим через M_i множество мономов от этих переменных, которые входят слагаемым хотя бы в один коэффициент при C_i; M_0 состоит из одной 1. Будем считать два монома из M_i ($0 \leqslant i \leqslant n$) эквивалентными, если они отличаются только постоянными множителями и множителями вида γ_j ($0 \leqslant j \leqslant i$). Используя (6) и применяя индукцию по $i = 0, 1, \ldots, n$, видим, что число классов эквивалентных мономов в каждом M_i конечно. Отсюда следует, что существует натуральное число m и набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ рациональных функций от $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ такой, что $\alpha_1 G^1 + \alpha_2 G^2 + \ldots + \alpha_m G^m = 0$ для всех $y_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$) и $\gamma_{k,l,m}$ ($0 \leqslant k, l < m \leqslant n$). С каждым классом эквивалентных мономов N мы можем связать $\gamma(N)$ — произведение структурных констант, отличных от $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, входящих в какой-то моном из N; $y(N)$ — часть монома из N, зависящая от $y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{n,p}$. Например, если в класс N входит моном $2(\gamma_{1,1,2})^4 \; (\gamma_{2,2,3})^2 \; \gamma_{3,3,5} \; y_{1,1}^4 \; y_{2,1}^4 \; \gamma_5$, то $\gamma(N) = (\gamma_{1,1,2})^4 \; (\gamma_{2,2,3})^2 \; \gamma_{3,3,5}$; $y(N) = y_{1,1}^4 \; y_{2,1}^4$. В частности, $\gamma(M_0) = y(M_0) = 1$.

Обозначим через $X(N, k)$ сумму тех мономов из класса $N \subseteq M_i$, которые входят слагаемым в коэффициент при C_i в G^k. Из (6) следует, что $X(N, k)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$X(N, k) = \gamma_i \sum_{g,h=0}^{p-1} b_g \, [X(N, k-p+g) + X(N, k-p+h)] +$$

$$+ \sum_{N_1 N_2} \sum_{g,h=0}^{p-1} b_{g,h} \, \gamma_{i_1 i_2, i} \, X(N_1, k-p+g) \, X(N_2, k-p+h). \qquad (11)$$

Здесь суммирование происходит по тем упорядоченным парам классов $N_1 \subseteq M_{i_1}$, $N_2 \subseteq M_{i_2}$, для которых $\gamma_{i_1, i_2, i} \cdot \gamma(N_1) \cdot \gamma(N_2) = \gamma(N)$ и $y(N_1) \cdot y(N_2) = y(N)$, $k > p$. Равенство (11) можно переписать следующим образом:

$$X(N, k) = \sum_{h=0}^{p-1} b_h \, 2\gamma_i X(N, k-p+h) +$$

$$+ \sum_{N_1, N_2} \sum_{g,h=0}^{p-1} b_{g,h} \, \gamma_{i_1, i_2, i} \, X(N_1, k-p+h) \, X(N_2, k-p+g). \qquad (12)$$

Здесь и ниже через b_h обозначено $\sum_{g=0}^{p-1} b_{g,h}$ $(h = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Если $\gamma(N) = 1$ для некоторого класса $N \subseteq M_i$, то $y(N) = y_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ и $X(N, k)$ удовлетворяет соотношению

$$X(N, k) = \sum_{h=0}^{p-1} 2\gamma_i \, b_h \, X(N, k-p+h). \qquad (13)$$

Отсюда $X(N, k) = \sum_{j=1}^{p} A(N, r_{i,j}) \, r_{i,j}^k$. Коэффициенты $A(N, r_{i,j})$ можно найти из начальных условий $A(N, r_{i,1}) \, r_{i,1}^k + \ldots + A(N, r_{i,p}) \, r_{i,p}^k = \delta_{k,j}$ при $k = 1, 2, \ldots, p$. Решая эту систему по правилу Крамера, находим

$$A(N, r_{i,k}) = (-1)^{j-k} \sigma_{p-k-1} (r_{i,1}, \ldots, r_{i,k-1}, r_{i,k+1}, \ldots, r_{i,p} \times$$
$$\times \prod_{\substack{1 \le l < m \le p \\ l, m \ne k}} (r_{i,m} - r_{i,l}) \, [\prod_{1 \le l < m \le p} (r_{i,m} - r_{i,l})],^{-1} \qquad (14)$$

где через σ_s обозначено s-й элементарный симметрический полином.

Будем считать, что r_{i_1,j_1} предшествует корню r_{i_2,j_2}, если $i_1 < i_2$ или $i_1 = i_2$ и $j_1 > j_2$. Используя этот порядок, лексикографически упорядочим множество мономов от $r_{1,1}, \ldots, r_{n,p}$.

Если f_1 и $f_2 \neq 0$—два полинома от $r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}, \ldots, r_{n,p}$ с вещественными коэффициентами, то положим

$$\operatorname{sign} \frac{f_1}{f_2} = \begin{cases} 1, \text{ если отношение коэффициентов при лексикографически старших членах } f_1 \text{ и } f_2 \text{ положительно;} \\ -1, \text{ если отношение коэффициентов при лексикографически старших членах } f_1 \text{ и } f_2 \text{ отрицательно; } 0, \text{ если } f_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть для некоторого класса эквивалентных мономов $N \subseteq M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо $y(N) = y_{1,1}^{k_{1,1}} \cdot y_{1,2}^{k_{1,2}} \ldots y_{n,p}^{k_{n,p}}$.
Введем обозначения: $R(N)$ — множество мономов

$r_{1,1}^{m_{1,1}}\, r_{1,2}^{m_{1,2}} \ldots r_{n,p}^{m_{n,p}}$, для которых $m_{i,1} + m_{i,2} + \ldots + m_{i,p} = k_{i,1} + \ldots + k_{i,p}$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$; $r(N) = r_{1,1}^{k_{1,1}} \cdot r_{1,2}^{k_{1,2}} \ldots r_{n,p}^{k_{n,p}}$.

Будем говорить, что мономы

$$f = r_{1,1}^{m_{1,1}} \ldots r_{i,j}^{m_{i,j}}\, r_{i,j+1}^{m_{i,j+1}} \ldots r_{n,p}^{m_{n,p}} \text{ и } g = r_{1,1}^{m_{1,1}} \ldots r_{i,j}^{m_{i,j+1}} \times$$

$$\times r_{i,j+1}^{m_{i,j+1}-1} \ldots r_{n,p}^{m_{n,p}}$$ получаются один из другого с помощью одной «транспозиции».

Определение. *Расстоянием $d(f, g)$ между мономами $f, g \in R(N)$ будем называть минимальное число «транспозиций», с помощью которых от монома f можно перейти к моному g.*

С каждым классом N эквивалентных мономов свяжем орграф $\Gamma(N)$. Этот граф имеет два типа вершин. Вершины первого типа нумеруются классами эквивалентных мономов, а вершины второго типа — упорядоченными тройками классов эквивалентных мономов.

Опишем процесс построения орграфа $\Gamma(N)$. Этот орграф имеет сток—вершину N. Если $\gamma(N) = 1$, то N — единственная вершина в $\Gamma(N)$, ребер $\Gamma(N)$ не имеет. Если $\gamma(N) \neq 1$, $N \subseteq M_i$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n$, то $\gamma(N) = \gamma_{i_1,i_2,i}\gamma(N_1)\gamma(N_2)$ для некоторых $0 \leqslant i_1, i_2 \leqslant n$; $N_1 \subseteq M_{i_1}$, $N_2 \subseteq M_{i_2}$. В этом случае вершинами орграфа $\Gamma(N)$ будут $N, (N, N_1, N_2)$ и множества вершин орграфов $\Gamma(N_1)$, $\Gamma(N_2)$ для тех классов N_1 и N_2, для которых $\gamma(N) = \gamma_{i_1,i_2,i}\gamma(N_1)\gamma(N_2)$ и $y(N) = y(N_1)y(N_2)$. Из вершин (N, N_1, N_2) идут направленные ребра в N, из вершин N_1, N_2 — в (N, N_1, N_2). Ребрами орграфа $\Gamma(N)$ будут также ребра орграфов $\Gamma(N_1)$, $\Gamma(N_2)$.

Элементарными выкладками доказывается.

Лемма 1. Для любых целых неотрицательных чисел $m_{i,j}(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{p} 2^{i-1} m\, i,\, j \leqslant 2^{n-1}, \tag{15}$$

существуют натуральные $1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant l \leqslant p$ и целые неотрицательные числа $m'_{k,l},\ \ m''_{k,l}$ такие, что $m'_{k,l} + m''_{k,l} = m_{k,l}$ и

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} + 2^{k-1}(m_{k,1} + \ldots + m_{k,l-1} + m'_{k,l}) \leqslant 2^{n-2},$$

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} 2^{i-1} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} + 2^{k-1}(m''_{k,l} + m_{k,l+1} + \ldots + m_{k,p}) \leqslant 2^{n-2}.$$

Лемма 2. Если моном $f = r_{1,1}^{m_{1,1}} r_{1,2}^{m_{1,2}} \ldots r_{n,p}^{m_{n,p}}$ *является корнем характеристического уравнения для последовательности* $\{X(N, k)\}$, *где* $N \subseteq M_i$ $(i = 0,1, \ldots, n)$, $y(N) = y_{1,1}^{k_{1,1}}\ y_{1,2}^{k_{1,2}} \ \ldots\ y_{n,p}^{k_{n,p}}$ и $f \in R(N)$. *то* $\sum\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j} < \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} k_{i,j}$. Суммирование в левой части неравенства происходит по тем $i = 1, 2, \ldots, n$, для которых $\sum\limits_{j=1}^{p} k_{i,j} \neq 0$.

Доказательство проводим индукцией по числу вершин графа $\Gamma(N)$. Если $\Gamma(N)$ содержит только одну вершину, то $y(N) = y_{i,j}$, $\gamma(N) = 1$ и $\{X(N, k)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (13). Отсюда следует, что все корни f характеристического уравнения для $\{X(N,k)\}$ принадлежат $R(N)$.

Пусть орграф $\Gamma(N)$ содержит более одной вершины и $(N,\ N_1,\ N_2)$, ... — вершины, из которых идут направленные ребра в вершину N. Из того, что последовательность $X(N, 1)$, $X(N, 2)$,... удовлетворяет соотношению (12), следует, что либо $f = r_{i,j}$ для некоторого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$, либо $f = f_1 f_2$, где t_1 и f_2 — корни характеристических уравнений для $\{X(N_1,\ k)\}$ и $\{X(N_2,\ k)\}$ соответственно. При этом орграфы $\Gamma(N_1)$ и $\Gamma(N_2)$ содержат меньше вершин, чем $\Gamma(N)$. Так как орграф $\Gamma(N)$ содержит более одной вершины, то для всех $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$ $\ k_{i,j} = 0$ и для монома $f = r_{i,j}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ лемма справедлива. Если $f = f_1 f_2$ и лемма справедлива для классов N_1 и N_2, то, используя равенство $y(N) = y(N_1)\ y(N_2)$, получаем справедливость леммы для класса N.

Рассмотрим произвольный класс эквивалентных мономов $N \subseteq M_i$. Для него можно записать $X(N, k) = \Sigma A(N, f) \cdot f^k$, где суммирование проводится по тем мономам $f(r_{1,1}, \ldots, r_{n,p})$, которые являются корнями характеристического уравнения для $\{X(N, k)\}$.

Лемма 3. *Если $f \in R(N)$, то f является корнем характеристического уравнения для $\{X(N, k)\}$ и $\operatorname{sign} A(N, f) = (-1)^{d(r(N), f)}$.*

Формула (14) и лемма 2 позволяют легко доказать этот результат индукцией по числу вершин орграфа $\Gamma(N)$.

Пусть моном $\mathbf{y} = y_{1,1}^{k_{1,1}} \ldots y_{n,p}^{k_{n,p}}$ удовлетворяет условию $(k_{1,1} + k_{1,2} + \ldots) + 2(k_{2,1} + \ldots) + \ldots + 2^{n-1}(k_{n,1} + \ldots) \leqslant 2^{n-1}$. Если $k_{n,1} + k_{n,2} + \ldots + k_{n,p} \neq 0$, то $y = y_{n,i}$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, p$, y является коэффициентом при C_n в G^i и существует класс N такой, что $y = y(N)$. Если $k_{n,1} + k_{n,2} + \ldots + k_{n,p} = 0$, то, применяя лемму 1 и используя индукцию по n, видим, что снова существует класс N, где $y = y(N)$. Для доказательства теоремы осталось применить лемму 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shafer R. D.* Structure of genetic algebras. — «Amer. I. Math»., 1949, vol. 71, p. 121—135.
2. *Holgate P.* Sequences of powers in genetic algebras. — «I. London Math. Soc.,» 1967, vol. 42, p. 489—496.
3. *Gonshor H.* Contributions to genetic algebras. — «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1971, vol. 17, (2), p. 289—298.
4. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. — «Усп. мат. наук», 1971, т. XXVI, № 5, (161), с. 51—116.
5. *Reiersol O.* Genetic algebras studied recursively and by means of differential operators. — «Math. Scand.», 1962, vol. 10, p. 25—44.
6. *Heuch I.* Sequences in genetic algebras for overlapping generalisations. — «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1972, vol. 18, N 1, p. 19—29.
7. *Киржнер В. М.* О поведении траекторий полиплоидных генетических систем с миграциями. — В кн.: Вычислительная математика и вычислительная техника. Вып. 111. ФТИНТ АН УССР, 1972, с. 141—143.
8. *Киржнер В. М.* О поведении траекторий некоторого класса генетических систем. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 2, с. 287—290.

Поступила 3 февраля 1975 г.

УДК 517.948+512.13

Е. П. ГОМОЗОВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СЕМЕЙСТВ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

В работе изучается вопрос о сопряженности семейств ростков диффеоморфизмов конечного класса гладкости. Задача о сопряженности одиночных диффеоморфизмов изучалась в [1—4]. Сформулируем некоторые полученные в этих работах результаты.

Ростки C^k- диффеоморфизмов $F, G: (R^n,0) \to (R^n,0)$ называются сопряженными в классе C^l, если существует такой C^l -диффеоморфизм $\Phi: (R^n,0) \to (R^n,0)$, что $\Phi F = G\Phi$. Ростки C^k-диффеоморфизмов F и G называются формально сопряженными, если существует такой C^∞ - диффеоморфизм $\Phi_0:(R^n,0) \to (R^n,0)$, что все производные отображения $\Phi_0(F) - G(\Phi_0)$ до k-й включительно равны нулю при $x=0$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — собственные числа матрицы $\Lambda = F'(0)$. Отсутствие резонансных соотношений

$$\lambda_i \neq \lambda_1^{t_1} \dots \lambda_p^{t_p}, \; 2 \leqslant \sum_i t_i \leqslant k \qquad (*)$$

обеспечивает формальную сопряженность ростка F с ростком $G(x) = \Lambda x + g(x)$.

Пусть, далее, $\rho_1 < \dots < \rho_q$ — модули собственных чисел матрицы Λ. Рассмотрим объединение замкнутых отрезков

$$I(\Lambda, k) = \bigcup_{i<j} [\rho_i^k \, \rho_l^+; \; \rho_j^k \, \rho_l^-],$$

где $\rho^+ = \max(\rho, 1)$, $\rho^- = \min(\rho, 1)$. Отрезок $[a, b]$ при $a > b$ считается пустым.

Обозначим через $C^{k,\alpha}$ множество функций класса C^k, k-я производная которых принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

В [4] имеются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть F — росток $C^{k,1}$-диффеоморфизма с условием $(*)$ и множество $I(\Lambda, k)$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ. Тогда F и Λ сопряжены в классе C^k.*

Теорема 2. *Пусть F—росток $C^{1,1}$-диффеоморфизма и собственные числа матрицы Λ удовлетворяют условию $\rho_s \neq \rho_i \, \rho_j$ $(\rho_i \leqslant 1 \leqslant \rho_j)$. Тогда F и Λ сопряжены в классе C^1.*

Теорема 3. *Пусть F — росток гиперболического $C^{k,1}$-диффеоморфизма с условием $(*)$ и $q \leqslant k$ — количество различных по модулю собственных чисел матрицы Λ. Тогда F и Λ сопряжены в классе C^l, где $l = \left[\dfrac{k}{q}\right]$.*

Как эти, так и более общие результаты работы [4] имеют место и для семейств ростков диффеоморфизмов.

Для точной формулировки нам понадобятся некоторые определения; m- параметрическим $C^{k,\alpha}$- семейством ростков диффеоморфизмов называется росток такого $C^{k,\alpha}$- отображения $H:(R^{n+m},0) \to (R^n,0)$, что сужение $H: (R^n \times \varepsilon, 0) \to (R^n, 0)$ является диффеоморфизмом при каждом $\varepsilon \in R^m$; $C^{k,\alpha}$- семейство H называется $C^{k,\alpha}$- деформацией ростка F, если $H(x, 0) = F(x)$ $(x \in R^n)$. В дальнейшем мы используем обозначение $F_\varepsilon(x) = H(x, \varepsilon)$.

Семейства G_μ, H_μ называются C^l-эквивалентными, если существует такое C^l-семейство диффеоморфизмов Φ_μ, что $G_\mu = \Phi_\mu^{-1} H_\mu \Phi_\mu$.

Будем говорить, что деформация $G_\mu (\mu \in R_q)$ отображается в деформацию F_ε, если существует такая C^l-замена параметра φ: $(R^q, 0) \to (R^m, 0)$, что деформации G_μ и $F_{\varphi(\mu)}$ C^l-эквивалентны.

Деформация F_ε ростка F называется C^l-версальной, если любая другая деформация G_μ ростка F отображается в деформацию F_ε в классе C^l с помощью деформации Φ_μ тождественного диффеоморфизма.

Дальнейшие обозначения заимствованы в [4]. Пусть F — росток $C^{k,\alpha}$-диффеоморфизма и $\Lambda = F'(0)$.

Пусть, далее, $\rho_1, \ldots, \rho_q$ — модули собственных чисел матрицы Λ и L_i — инвариантное подпространство, отвечающее части спектра, лежащей на окружности $|z| = \rho_i$. Положим $Q = 1, 2, \ldots, q\}$ и $L_c = \sum\limits_{i \in c} L_i \ (c \subset Q)$. Далее, пусть Γ — семейство подмножеств из Q, содержащее Q в качестве элемента и замкнутое относительно пересечения. Положим $\rho_c = \max\limits_{i \in c} \rho_i$, $\omega_c^+(\Gamma, \Lambda, k, \alpha) = \min \max \{(\rho_{\overline{c/c'}})^\alpha \rho_{c'};$ $(\rho_{\overline{c}})^\alpha \rho_{c \setminus c'} \rho_{c'}^{k-1};$ $(\rho_{\overline{c}})^\alpha \rho^k_{c \setminus c}{}'\}$, где max берется из трех чисел, стоящих в фигурных скобках, а min—по всем подмножествам $c' \in \Gamma$, $c' \subseteq c$. Считается, что $\rho_{c \setminus c'} = \rho_c$, если $c' = c$. Кроме того, положим

$$\omega_c^- (\Gamma, \Lambda, k, \alpha) = (\omega_c^+ (\Gamma, \Lambda^{-1}, k, \alpha))^{-1}.$$

Обозначим через $I(\Gamma, \Lambda, k, \alpha)$ объединение замкнутых интервалов

$$\bigcup_{c \in \Gamma} [\omega_c^- (\Gamma, \Lambda, k, \alpha);\ \omega_c^+ (\Gamma, \Lambda, k, \alpha)\ .$$

Интервал считается пустым, если $\omega_c^+ < \omega_c^-$.

Теорема *А. Пусть F — росток $C^{k,\alpha}$-диффеоморфизма и пусть существует такое семейство Γ подмножеств из Q, что подпространства $L_c (c \in \Gamma)$ инвариантны относительно F, а множество $I(\Gamma, \Lambda, k, \alpha)$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ. Тогда существует C^k-версальная деформация ростка F.*

Это обобщение теоремы A работы [4].

С л е д с т в и е 1. *Пусть F — такой росток $C^{k,1}$-диффеоморфизма с условием $(*)$, что $I(\Lambda, k)$ не содержит собственных чисел матрицы Λ. Тогда любая деформация ростка F отображается в классе C^k в семейство линейных отображений Λ_ε, которое является версальной (в классе линейных операторов) деформацией оператора Λ.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть F — росток $C^{k,1}$-диффеоморфизма, удовлетворяющий условиям следствия 1. Деформация F_ε ростка F версальна в том и только в том случае, когда семейство $\Lambda_\varepsilon = \dfrac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}\Big/_{x=0}$ является версальной (в классе матриц) деформацией матрицы Λ.*

С л е д с т в и е 3. *Пусть F — росток $C^{1,1}$-диффеоморф и модули собственных чисел матрицы Λ удовлетворяют условию $\rho_s \neq \rho_i \cdot \rho_j \, (\rho_i \leqslant 1 \leqslant \rho_j)$. Тогда любая деформация ростка F отображается в классе C^1 в семейство линейных отображений Λ_ε, которое является версальной (в классе линейных операторов) деформацией оператора Λ.*

С л е д с т в и е 4. *Пусть F — росток $C^{1,1}$-диффеоморфизма, удовлетворяющий условию следствия 3. Деформация F_ε ростка F версальна в том и только в том случае, когда семейство $\Lambda_\varepsilon = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=0}$ является версальной (в классе матриц) деформацией матрицы Λ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы *A*. Запишем росток F в виде $F(x) = \Lambda x + f(x)$, $f(0) = f'(0) = 0$; пусть $\quad (x)$ — j-я координата вектора $f(x)$.

Обозначим $\Lambda_i = \Lambda_{|L_i}$ и рассмотрим базис, в котором матрица Λ имеет блочно-диагональный вид $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q)$. Как известно (см. [5]), версальную деформацию Λ_ε матрицы Λ можно выбрать так: $\Lambda_\varepsilon = \Lambda + B_\varepsilon$, причем $[B'_\varepsilon, \Lambda] = 0$. Следовательно, B_ε имеет блочно-диагональный вид, а значит все L_i инвариантны относительно Λ_ε. Будем искать версальную деформацию F в виде $F_{\varepsilon,\mu}(x) = \Lambda_\varepsilon x + f_\mu(x)$, где Λ_ε — версальная (в классе матриц) деформация матрицы Λ, а j-я координата вектора $f_\mu(x)$ имеет вид

$$f_\mu^{(j)}(x) = \theta^{(j)}(\mu) \, f^{(j)}(x), \quad \theta^{(j)}(0) = 1;$$

$\frac{\partial \theta}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$ имеет максимальный ранг. Из вида деформации $F_{\varepsilon,\mu}$ следует, что все $L_c \, (c \in \Gamma)$ инвариантны относительно $F_{\varepsilon,\mu}$.

Покажем теперь, что всякая деформация вида $F_{\varepsilon,\nu}(x) = \Lambda_\varepsilon x + f_\nu(x)$ отображается в $F_{\varepsilon,\mu}$ в классе C^k. Будем искать „приводящее" семейство $\Phi_{\varepsilon,\nu}$ в виде $\Phi_{\varepsilon,\nu}(x) = x + \varphi_{\varepsilon,\nu}(x)$. Это приводит к уравнению

$$\Lambda_\varepsilon \varphi_{\varepsilon,\nu}(x) - \varphi_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x + f_\nu(x)) = f_{\psi(\varepsilon,\nu)}(x) - f_\nu(x). \tag{1}$$

Если условие (*) не выполнено, то ростки $F_{\varepsilon,\mu}$ и $F_{\varepsilon,\nu}$, вообще говоря, не являются формально сопряженными при ненулевом значении параметра. Однако, если взять пространство параметров μ достаточно большой размерности, то, применяя теорему о неявной функции, можно построить такую C^k-замену параметра ψ, что ростки $F_{\varepsilon,\psi(\varepsilon,\nu)}$ и $F_{\varepsilon,\nu}$ являются формально сопряженными в некоторой окрестности точки $(\varepsilon, \nu) = 0$. Поэтому можно считать, что все производные по x отображения $f_{\psi(\varepsilon,\nu)} - f_\nu$ до k-й включительно равны нулю при $x = 0$.

Положим

$$h_{c,c'}(\Lambda, k, \beta, \gamma) = \max(\rho^\beta_{c \setminus c'} \, \rho^k_{c'}; \; \rho^\gamma_c \, \rho_{c \setminus c'} \, \rho^{k-1}_{c'}; \; \rho^\gamma_c \, \rho^k_{c \setminus c'}) \; (c' \subset c).$$

Для каждого $c \in \Gamma$ и каждого $i = 1, \ldots, q$ найдется такое $c' \subset c$, $c' \in \Gamma$ и такие числа β, γ (каждое из которых равно 0 или α), что

$$h_{c,c'}\ (\Lambda, k, \beta, \gamma) < \rho_i \text{ или } h_{c,c'}(\Lambda^{-1}, k, \beta, \gamma) < \rho_i^{-1}. \qquad (1')$$

Пусть c', β, γ этим условием выбраны и зафиксированы.

Обозначим через $T_{\varepsilon,\nu}$ оператор

$$(T_{\varepsilon,\nu}\,\varphi_{\varepsilon,\nu})(x) = \Lambda_\varepsilon\,\varphi_{\varepsilon,\nu}(x) - \varphi_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x + f_\nu(x)).$$

Пусть $\pi_c: R^n \to L_c$ — ортопроектор, $V(\delta)$ — замкнутая δ-окрестность точки $x = 0$, $V(\omega)$ — замкнутая ω-окрестность точки $(\varepsilon, \nu) = 0$.

Обозначим через $I^k_{c,l}(\delta,\omega)$ пространство отображений $\varphi: V(\delta)\times \times V(\omega) \to L_l$, удовлетворяющих условиям:

$a)$ $\pi_c^*\varphi = \varphi$, $\pi_{c'}^*\varphi = 0$ $(c' \subset c,\ c' \neq c)$; $\varphi(x, 0) = 0$ $(x \in V(\delta),\ 0 \in V(\omega))$;

$b)$ $$\varphi\|\overset{\text{def}}{=} \max_{\|x\|\leqslant\delta,\|\varepsilon,\nu\|\leqslant\omega} \max\left(\frac{\|\varphi^{(0,k)}(x'', x')\|}{\|x''\|^\beta};\ \max_{k\geqslant l\geqslant 1} \frac{\|\varphi^{(l,k-l)}(x'',x')\|}{\|x\|^\gamma}\right) <$$ $< \infty$.

Здесь $x = (x'', x') \in L_c$, $x' = \pi_{c'}x$, $x'' = x - x'$. Если $c' = c$, то $x'' = x$. Через $\varphi^{(p,q)}(x'', x')$ обозначена частная производная порядка p по x'', порядка q по x'.

Покажем, что нормы тензоров, участвующих в условии b), можно выбрать так, чтобы оператор $I - \Lambda^{-1}T_{\varepsilon,\nu}: I^k_{c,l} \to I^k_{c,l}$ был, в зависимости от номера i, либо сжатием, либо растяжением. В самом деле, пусть i фиксировано и выполнено первое из условий (1).

Обозначим через $\tau_\delta(x)$ C^∞-функцию, равную нулю вне $V(\delta)$, единице в окрестности точки $x = 0$ и такую, что $|\tau(x)| \leqslant 1$. Оператор

$$(R_{\delta,\varepsilon,\nu}\varphi_{\varepsilon,\nu})(x) = \Lambda^{-1}\tau_\delta(F_{\varepsilon,\nu}(x))\quad \varphi_{\varepsilon,\nu}(F_{\varepsilon,\nu}(x)) - B_\varepsilon\,\varphi_{\varepsilon,\nu}(x),\ \varphi_{\varepsilon,\nu} \in I^k_{c,l}(\delta, \omega)$$

является представителем оператора $I - \Lambda^{-1}T_{\varepsilon,\nu}$. Далее,

$$(R_{\delta,\varepsilon,\nu}\,\varphi_{\varepsilon,\nu})^{(l,k-l)}(x) = \Lambda^{-1}\tau_\delta(F_{\varepsilon,\nu}(x))\,E_{k,l}(F_{\varepsilon,\nu};x)\,\varphi^{(l,k-l)}_{\varepsilon,\nu}(F_{\varepsilon,\nu}(x)) - - \Lambda^{-1}B_\varepsilon\,\varphi^{(l,k-l)}_{\varepsilon,\nu}(x) + (B_{k,l}\,\varphi_{\varepsilon,\nu})(x),$$

где $B_{k,l}\varphi_{\varepsilon,\nu}$ содержит производные низших порядков от $\varphi_{\varepsilon,\nu}$, а $E_{k,l}(F_{\varepsilon,\nu}; x)$ при каждом x— линейный оператор в пространстве тензоров.

Оценим члены, содержащие старшие производные. Имеем

$$\Lambda^{-1}B_\varepsilon = O(\varepsilon)\ (\varepsilon \to 0);$$

$$E_{k,l}(F_{\varepsilon,\nu};\ x) = \Lambda^{\otimes l}_{c\setminus c'} \otimes \Lambda^{\otimes k-l}_{c'} + O(x, \varepsilon, \nu)\ (x, \varepsilon, \nu \to 0).$$

Выберем нормы тензоров так, чтобы $\|\Lambda^{-1}B_\varepsilon\| \leqslant \eta$, $\|\Lambda_i^{-1}\|\cdot\|\Lambda^{\otimes l}_{c\setminus c'} \otimes \otimes \Lambda^{\otimes k-l}_{c'}\| = \rho_i^{-1}\ \rho^l_{c\setminus c'}\ \rho^{k-l}_{c'} + \theta\ (l = 0, 1, \ldots, k)$, где $\eta > 0$, $\theta > 0$ — достаточно малые числа. Тогда

$$\max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\Lambda^{-1}\tau_\delta(x)\,\varphi^{(0,k)}_{\varepsilon,\nu}(F_{\varepsilon,\nu}(x))\,E_{k,0}(F_{\varepsilon,\nu};x)\|}{\|x''\|^\beta} \leqslant (\rho_i^{-1}\cdot\rho^k_{c'}\cdot\rho^\beta_{c\setminus c'}+\eta+ +\theta)\max_{x,\varepsilon,\nu}\frac{\|\varphi^{(0,k)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x''\|^\beta}$$

и

$$\max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\Lambda^{-1}\tau_\delta(x)\,\varphi^{(l,k-l)}_{\varepsilon,\nu}(F_{\varepsilon,\nu}(x))\,E_{k,l}(F_{\varepsilon,\nu};x)\|}{\|x\|^\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant(\rho_i^{-1}\cdot\rho^{k-l}_{c'}\cdot\rho^l_{c\setminus c'}+\eta+\theta)\max_{x,\varepsilon,\nu}\frac{\|\varphi^{(l,k-l)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x\|^\gamma}.$$

Отсюда при достаточно малых δ, ε, ν

$$\|R_{\delta,\varepsilon,\nu}\,\varphi\| \leqslant (\rho_i^{-1}\,h_{c,c'}(\Lambda,k,\beta,\gamma)+\xi)\,\|\varphi\| = q\,\|\varphi\|\ (q<1).$$

Итак, если выполнено первое из условий (1), то оператор $I-\Lambda^{-1}T_{\varepsilon,\nu}$ — сжатие в пространстве $J^k_{c,i}$. Аналогично проверяется, что если выполнено второе из условий (1), оператор $I-\Lambda^{-1}T_{\varepsilon,\nu}$ — растяжение в пространстве $J^k_{c,i}$. Рассмотрим теперь прямую топологическую сумму $J^k_c=\sum\limits_i J^k_{c,i}$. В силу предложения 1.2 работы [4] оператор $T_{\varepsilon,\nu}\colon J^k_c\to J^k_c$ имеет ограниченное правое обратное семейство. Занумеруем теперь все элементы $c\in\Gamma$ так, чтобы c' предшествовал c, если $c'\subset c$. Тогда алгебраическая сумма $J=\sum\limits_{c\in\Gamma} J^k_c$ прямая; причем, если $\varphi\in J$, $\varphi\in C^k$. Определим оператор проектирования $P_c\colon J\to J^k_c$ равенством $P_c= =\varphi\pi^*_c\Big(\varphi-\sum\limits_{c'<c,\,c'\neq c}P_{c'}\varphi\Big)$. Если же c — наименьший элемент в Γ, то $P_c\varphi=\pi^*_c\varphi$. Применяя теперь основную лемму работы [4], мы получаем, что уравнение (1) имеет решение класса C^k.

Пусть теперь $G_\nu=\Lambda_\nu+f_\nu$ — произвольная деформация ростка F. Поскольку Λ_ε версальная (в классе матриц) деформация матрицы Λ, найдутся такая деформация единичной матрицы C_ν и такая замена параметра τ, что $\Lambda_\nu=C_\nu^{-1}\Lambda_{\tau(\nu)}C_\nu$. Рассмотрим деформацию $\widetilde{F}_{\varepsilon,\nu}=\Lambda_\varepsilon+C_\nu f_\nu C_\nu^{-1}$. По доказанному выше найдется такая деформация $\Phi_{\varepsilon,\nu}\colon(R^n,0)\to(R^n,0)$ тождественного диффеоморфизма и такая замена параметра ψ, что $\widetilde{F}_{\varepsilon,\nu}=\Phi^{-1}_{\varepsilon,\nu}F_{\varepsilon,\psi(\nu)}\Phi_{\varepsilon,\nu}$. Но $G_\nu=C_\nu^{-1}\widetilde{F}_{\tau(\nu),\nu}C_\nu$, поэтому $G_\nu= =C_\nu^{-1}\Phi^{-1}_{\tau(\nu),\nu}F_{\tau(\nu),\psi(\nu)}\Phi_{\tau(\nu),\nu}C_\nu$, и теорема доказана.

Введем, следуя [4], некоторые обозначения.

Рассмотрим множество M^q всех целочисленных мультииндексов $t=(t_1,\dots,t_q)$. Это множество упорядочено: $t<t'\leftrightarrow t_i\leqslant$

$\leqslant t'_i$ $(i=1, 2, \dots, q)$. Пусть σ — подмножество в M^q, состоящее из попарно несравнимых элементов. Будем говорить, что σ мажорирует элемент $t \in M^q$, если $t < t'$ для некоторого $t' \in \sigma$. Обозначим через $l(\sigma)$ наибольшее из таких чисел l_q, что каждый мультииндекс $t = (t_1, \dots, t_q)$ с условием $|t| = \sum_{i=1}^{q} t_i \leqslant l$ мажорируется множеством σ.

Положим $t_c = (t'_1, \dots, t'_q)$ $(c \subset Q)$, где $t'_i = t_i$ $(i \in c)$, $t'_i = 0$ $(i \in \bar{c})$. Обозначим через $\tilde{\sigma}_c$ множество всех мультииндексов вида t_c $(t \in \sigma)$, а через σ_c — множество максимальных элементов в $\tilde{\sigma}_c$. Далее, обозначим через σ^*_c множество всех таких мультииндексов r, что $r_c = 0$ и $r + t$ мажорируется множеством σ для любого $t \in \sigma_c$.

Положим

$$l_i(c) = \max_{c' \subset c} \max_{r \in \sigma^*} r_i (c \subset Q, \ i = 1, 2, \dots, q).$$

Введем обозначение $\bar{\rho}^t = \rho_1^{t_1} \dots \rho_q^{t_q}$ и положим

$$\omega^+_{c,r}(\Lambda, \sigma) = \bar{\rho}^r \min_{i \in c} \max \ \{\max_t \bar{\rho}^t \rho_{\bar{i}}; \ \max_t \bar{\rho}^t \rho_{\bar{c}}\},$$

где первый max в фигурных скобках берется по таким $t \in \sigma_c$, для которых $t_i \leqslant l_i(c)$, а второй — по таким $t \in \sigma_c$, для которых $t_i > l_i(c)$. Кроме того, положим $\omega^-_{c,r}(\Lambda, \sigma) = (\omega^+_{c,r}(\Lambda^{-1}, \sigma))^{-1}$.

Пусть $I(\Lambda, \sigma) = \bigcup_{(c,r)} [\omega^-_{c,r}(\Lambda, \sigma); \omega^+_{c,r}(\Lambda, \sigma)]$, где объединение берется по всем таким парам (c, r) $(c \subset Q)$, для которых $r \in \sigma^*_c$.

Обозначим, наконец, $s(\Lambda, k) = \max l(\sigma)$, где max берется по всем таким семействам $\sigma \subset M^q$ мультииндексов t, для которых $|t| \leqslant k$ $(t \in \sigma)$ и множество $I(\Lambda, \sigma)$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ.

Теорема *B. Пусть F — росток $C^{k,1}$-диффеоморфизма с условием* (*) *и $s(\Lambda, k) \geqslant 1$. Тогда любая деформация ростка F отображается в классе C^s в семейство линейных отображений Λ_ε, которое является версальной (в классе линейных операторов) деформацией оператора Λ.*

Это обобщение на случай семейств теоремы B работы [4].

Следствие 1. *Деформация F_ε ростка $C^{k,1}$-диффеоморфизма F с условием* (*) *C^s-версальна тогда и только тогда, когда семейство $\Lambda_\varepsilon = \left.\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0}$ является версальной (в классе матриц) деформацией матрицы Λ.*

Из условия $s(\Lambda, k) \geqslant 1$ вытекает гиперболичность F, а отсюда получается неравенство $s \geqslant \left[\frac{k}{q}\right]$.

Следствие 2. *Пусть F — росток $C^{k,1}$-диффеоморфизма с условием $(*)$ и $q \leqslant k$ — количество различных по модулю собственных чисел матрицы Λ. Тогда любая деформация ростка F отображается в классе C^s $\left(\text{где } s=\left[\frac{k}{q}\right]\right)$ в семейство линейных отображений Λ_ε, которое является версальной (в классе линейных операторов) деформацией оператора Λ.*

Следствие 3. *Деформация F_ε ростка $C^{k,1}$-диффеоморфизма F с условием $(*)$ C^s-версальна $\left(\text{где } s=\left[\frac{k}{q}\right]\right)$ тогда и только тогда, когда семейство $\Lambda_\varepsilon = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=0}$ является версальной (в классе матриц) деформацией матрицы Λ.*

Доказательство теоремы B. Рассуждая как при доказательстве теоремы A, приходим к уравнению $\Lambda_\varepsilon \varphi_{\varepsilon,\nu}(x) - \varphi_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x) + f_\nu(x + \varphi_{\varepsilon,\nu}(x)) = 0$. Для каждых $c \subset Q$, $r \in \sigma_c^*$, $i = 1, 2, \ldots, q$ положим $h_{c,r,i}(\Lambda, \sigma, \beta, \gamma) = \bar{\rho}^r \max\{\max\limits_t \bar{\rho}^t \rho_i^\beta; \max\limits_t \bar{\rho}^t \rho_c^\gamma\}$, где первый max в фигурных скобках берется по таким $t \in \sigma_c$, для которых $t_i \leqslant l_i(c)$, а второй — по таким $t \in \sigma_c$, для которых $t_i > l_i(c)$. Согласно условиям теоремы, найдутся такие зависящие от j, c и r числа i, β, γ (каждое из чисел β и γ равно 0 либо 1), что

$$h_{c,r,i}(\Lambda, \sigma, \beta, \gamma) < \rho_j \quad \text{или} \quad h_{c,r,i}(\Lambda^{-1}, \sigma, \beta, \gamma) < \rho_j^{-1}. \tag{2}$$

Пусть числа i, β, γ этими условиями выбраны и зафиксированы.

Пусть $r = (r_1, \ldots, r_q)$ — некоторый мультииндекс и $A: L_1^{\times r_1} \times \ldots \times \ldots L_q^{\times r_q} \to L_j$ — полилинейное отображение. Положим $x^r = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{r_1}; \ldots; \underbrace{x_q, \ldots, x_q}_{r_q}) \in L_1^{\times r_1} \times \ldots \times L_q^{\times r_q}$. Через Ax^r будем обозначать значение отображения A на элементе x^r.

Обозначим через $J^\sigma_{c,r,j}(\delta, \omega)$ $(r \in \sigma_c^*)$ пространство отображений $\psi: V(\delta) \times V(\omega) \to L_j$ вида $\psi_{\varepsilon,\nu}(x) = \varphi_{\varepsilon,\nu}(x) x^r$, где $\varphi_{\varepsilon,\nu}(x)$ при каждом x, ε, ν — полилинейное отображение из $L_1^{\times r_1} \times \ldots \times L_q^{\times r_q}$ в L_j, удовлетворяющее как функция от x, ε, ν условиям:

a) $$\pi_c^* \varphi_{\varepsilon,\nu} = \varphi_{\varepsilon,\nu}, \quad \varphi_{0,0}(x) = 0;$$

b) для любого $t < \sigma_c$ существует частная производная $\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)$, $\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(0) = 0$. Под частной производной порядка t понимается производная порядка t_1 по $x_1 \in L_1$, порядка t_2 по $x_2 \in L_2$ и т. д.;

) если $c' \subset c\,(c' \neq c)$, то $\pi^*_{c'c}\,\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x) = 0\,(t \in \sigma^*_{c'})$.

Кроме того, требуется, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$N_1(\varphi_{\varepsilon,\nu}) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_t \max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x_i\|^\beta} < \infty,$$

где внешний max берется по таким $t \in \sigma_c$, для которых $t_i \leqslant l_i(c)$ и

$$N_2(\varphi_{\varepsilon,\nu}) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_t \max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x\|^\gamma} < \infty,$$

где внешний max берется по таким $t \in \sigma_c$, что $t_i > l_i(c)$.

Норма в пространстве $J^\sigma_{c,r,j}(\delta, \omega)$ определяется так: $\|\psi_{\varepsilon,\nu}\| = \max\,(N_1(\varphi_{\varepsilon,\nu}),\ N_2(\varphi_{\varepsilon,\nu}))$.

Покажем, что нормы тензоров, участвующих в определении пространств $J^\sigma_{c,r,j}$ можно выбрать так, чтобы оператор $I - \Lambda^{-1} T_{\varepsilon,\nu}: J^\sigma_{c,r,j} \to J^\sigma_{c,r,j}$ был в зависимости от j либо сжатием, либо растяжением. Пусть j фиксировано и выполнено первое из условий (2). Для каждого $\psi_{\varepsilon,\nu}(x) = \varphi_{\varepsilon,\nu}(x)\, x^r \in J^\sigma_{c,r,j}$ положим

$$(R_{\delta,\varepsilon,\nu}\,\psi_{\varepsilon,\nu})(x) = \Lambda^{-1}\tau_\delta(\Lambda_\varepsilon x)\,\varphi_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x)\,(\Lambda_\varepsilon x)^r - \Lambda^{-1} B_\varepsilon\,\varphi_{\varepsilon,\nu}(x)\,x^r.$$

Оператор $R_{\delta,\varepsilon,\nu}$ является представителем оператора $I - \Lambda^{-1} T_{\varepsilon,\nu}$.

Для каждого $t = (t_1, \ldots, t_q)$ имеем

$$(R_{\delta,\varepsilon,\nu}\,\psi_{\varepsilon,\nu})^{(t)}(x) = \Lambda^{-1}\tau_\delta(\Lambda_\varepsilon x)\,\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x)\,\Lambda_\varepsilon^{\otimes t}(\Lambda_\varepsilon x)^r - \\ - \Lambda^{-1} B_\varepsilon\,\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)\,x^r + (B_t\,\psi_{\varepsilon,\nu})(x),$$

где $B_t \psi_{\varepsilon,\nu}$ содержит производные от $\varphi_{\varepsilon,\nu}$ низших порядков, $\Lambda_\varepsilon^{\otimes t} = \Lambda_{1\varepsilon}^{\otimes t_1} \otimes \ldots \otimes \Lambda_{q\varepsilon}^{\otimes t_q}$, $\Lambda_{p\varepsilon} = \Lambda_\varepsilon|_{L_p}$.

Выберем нормы тензоров так, чтобы

$$\|\Lambda^{-1}{}_j\| \cdot \|\Lambda_\varepsilon^{\otimes t}\| \cdot \|\Lambda_\varepsilon^{\otimes r}\| = \rho_j^{-1}\,\bar{\rho}^{(t+r)} + \eta$$

при любых t и r, а $\eta > 0$ достаточно мало. Тогда при $t_i \leqslant l_i(c)$

$$\max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\Lambda^{-1}\tau_\delta(\Lambda_\varepsilon x)\,\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_\varepsilon x)\Lambda_\varepsilon^{\otimes t} \otimes \Lambda_\varepsilon^{\otimes r}\|}{\|x_i\|^\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \rho(_j^{-1}\ \bar{\rho}^{(t+r)}\,\rho_i^\beta + \eta) \max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x_i\|^\beta},$$

а при $t_i > l_i(c)$

$$\max_{x,\varepsilon,\nu} \frac{\|\Lambda^{-1}\tau_{\delta}(\Lambda_{\varepsilon}x)\,\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(\Lambda_{\varepsilon}x)\,\Lambda_{\varepsilon}^{\otimes t}\otimes\Lambda_{\varepsilon}^{\otimes r}\|}{\|x\|^{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant (\rho_j^{-1}\ \bar{\rho}^{(t+r)}\quad \rho_c^{\gamma} + \eta)\max_{x,\varepsilon,\nu}\frac{\|\varphi^{(t)}_{\varepsilon,\nu}(x)\|}{\|x\|^{\gamma}}.$$

Следовательно, при достаточно малых δ, ε, ν

$$\|R_{\delta,\varepsilon,\nu}\,\psi_{\varepsilon,\nu}\| \leqslant (\rho_j^{-1} h_{c,r,t}(\Lambda, \sigma, \beta, \gamma) + \eta_1)\,\|\psi\| = q\,\|\psi\| \quad (q < 1).$$

Таким образом, если выполнено первое из условий (2), то оператор $I - \Lambda^{-1}T_{\varepsilon,\nu}: J^{\sigma}_{c,r,j} \to J^{\sigma}_{c,r,j}$ является сжатием, если второе — растяжением. Дальнейшие рассуждения повторяют схему доказательства теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-spase. — «Amer. J. Math.», 1958, vol. 80, p. 623—631.
2. *Hartman P.* On local homeomorphisms of Euclidean space. — «Bol. Soc Math. Mexicana». 1960, vol. 5, p. 182—194.
3. *Venti R.* Linear normal forms of differential equations. — «J. Differ. Equation», 1966, vol. 5, p. 220—241.
4. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и сопряженность локальных диффеоморфизмов конечного класса гладкости. — «Функциональный анализ», 1973, т. 7(4), с. 17—28.
5. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров. — «Усп. мат. наук», 1971, т. 26(2), с. 101—114.

Поступила 3 февраля 1975 г.

УДК 519.9 : 575.1

А. А. КРАПИВИН

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим квадратичное отображение $V:\ R^n \to R^n$, заданное формулами

$$x'_j = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik,j}\,x_i\,x_k,\quad a_{ik,j} = a_{ki,j}\ (i, k, j = 1, \dots, n)$$

и сохраняющее гиперплоскость $H = \{\,x \mid s(x) = 1\,\}$ $(s(x) = x_1 + \dots + x_n)$. Оно называется бернштейновским, если $V^2 = V$ в гиперплоскости H. Этот класс отображений был введен С. Н. Бернштейном [1] и далее исследован в ряде работ Ю. И. Любича (см., например, [2, 3]) в связи с некоторыми вопросами математической генетики. Условие $V^2 = V$ по терминологии С. Н. Бернштейна выражает «принцип стационарности» при наследовании простых признаков. Естественным обобщением этого условия является $V^{p+1} = V^p$ (в гиперплоскости H) при некотором $p \geqslant 1$. Назовем это свойство квазистационарностью порядка p (стационарностью для $p = 1$, т. е. в бернштейновском случае). Нас будет интересовать вопрос о том, когда из квазистационарности можно сделать вывод о стационарности. Нетрудно для любого $p>1$ указать пример отображения, квазистационарного порядка p, но не ниже.

Пример. Рассмотрим в R^{p+1} квадратичное отображение: $x'_j = x_{j+1} s(x)$ $(j=1, \ldots, p-1)$, $x'_p = 0$, $x'_{p+1} = (x_1 + x_{p+1}) s(x)$.

Ограничение этого отображения на гиперплоскость H совпадает с линейным оператором, матрица которого

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

такова, что $B^{p+1} = B^p$, но $B^{k+1} \neq B^k$ при $0 < k < p$.

В работе [2, § 4] было показано, что с каждым бернштейновским отображением связано семейство линейных операторов $\{L\}$, для которых $L^2 = L$ (т. е. проекторов). По каждому такому проектору можно построить систему координат, в которой отображение V имеет в определенном смысле нормальный вид. Этот факт играет существенную роль при исследовании бернштейновских отображений. Оказывается, с квазистационарным отображением порядка p можно аналогичным образом связать семейство операторов $\{L\}$, для которых $L^{p+1} = L^p$. Можно было бы ожидать, что если $L^2 = L$ для всех операторов семейства, отображение стационарно. К сожалению, это неверно, но еще одно дополнительное условие того же рода дает возможность заключить о стационарности. В этом состоит основной результат настоящей статьи.

Дальнейшее изложение удобно вести на языке алгебры A_V, определяемой квадратичным отображением V. В этой алгебре $x^2 = Vx$ (см., например, [2, § 8]). Функционал s является в этой алгебре «весом», т. е. линейным мультипликативным функционалом. Квазистационарность порядка p равносильна тождеству

$$x^{[p+1]} = s^{[p]}(x)\, x^{[p]}, \tag{1}$$

где возведение в степень с показателем $[k]$ определяется через последовательные возведения в квадрат: $a^{[k+1]} = (a^{[k]})^2$, $a^{[0]} = a$, так что $V^k x = x^{[k]}$. Алгебру со свойством (1) будем называть квазистационарной порядка p (стационарной, или бернштейновской, при $p=1$).

Лемма 1. *Формула $e = x^{[p]}$ при $s(x) = 1$ дает общий вид идемпотентов алгебры A_V.*

Действительно, из (1) видно, что $e = x^{[p]}$ $(s(x)=1)$ — идемпотент. Обратно, если $e^2 = e$, то $s(e) = s^2(e)$, т. е. либо $s(e) = 0$, либо $s(e) = 1$. Если $s(e) = 0$, то $e = 0$ в силу (1). Поэтому $s(e) = 1$ и $e = e^{[p]}$.

Рассмотрим теперь идеал $N = \{x | s(x) = 0\}$ (из (1) видно, что $x^{[p+1]} = 0$ для всех $x \in N$, поэтому N называют нильидеалом). Тогда для любого идемпотента e имеет место прямое разложение

$$x = s(x)e + y \quad (y \in N). \tag{2}$$

Рассмотрим в N линейный оператор $L_e y = 2ey$ (он не выводит из N, так как N — идеал).

Лемма 2. $L_e^{p+1} = L_e^p$.

Для проверки достаточно подставить (2) в (1) и сравнить коэффициенты при $s^{[p+1]-1}$.

Рассмотрим теперь в N квадратичный оператор $Qy = y^2$ (он не выводит из N, так как N — идеал) и «производные» квадратичные операторы:

$$Q_e^{(k)} = \sum_{i=}^{k} L_e^{k-i} Q L_e^i \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Лемма 3. $Q_e^{(p)} = Q_e^{(p-1)}$.

Для проверки достаточно подставить (2) в (1) и сравнить коэффициенты при $s^{[p+1]-2}$.

Для бернштейновских отображений леммы 2, 3 переходят в соотношения $L_e^2 = L_e$, $QL_e + L_e Q = Q$, установленные в [2, §4], где сверх этого были получены еще два соотношения, которые вместе с предыдущими характеризуют бернштейновские отображения. На языке алгебры A_V эта система соотношений может быть записана в виде (см. [4]):

$$\begin{aligned} &2e\,(2ey) = 2ey, && (B_1)\\ &2ey^2 + (2ey)^2 = y^2, && (B_2)\\ &(2ey)\,y^2 = 0, && (B_3)\\ &(y^2)^2 = 0. && (B_4) \end{aligned}$$

Теорема. *Пусть для всех идемпотентов алгебры A_V, порожденной квазистационарным квадратичным отображением V, выполняются условия:*

$$L_e^2 = L_e, \tag{3}$$

$$\overline{L}_e Q \overline{L}_e = 0, \tag{4}$$

где $\overline{L}_e = 1 - L_e$. Тогда отображение V стационарно.

Подчеркнем, что условия (3), (4), очевидно, необходимы для стационарности.

Доказательство. Достаточно проверить соотношения (B_1) — (B_4). Первое из них совпадает с (3), поэтому перейдем к (B_2). Положим $W_e = \operatorname{Im} L_e$, $\overline{W}_e = \operatorname{Im} \overline{L}_e = \operatorname{Ker} L_e$. Соотношение (4) означает, что

$$\overline{W}_e^2 \subset W_e. \tag{5}$$

В силу (3) $Q_e^{(k)} = L_e Q + (k-1) L_e Q L_e + Q L_e \, (k \geqslant 1)$. Поэтому лемма 3 принимает вид $L_e Q L_e = 0$, что означает:

$$W_e^2 \subset \overline{W}_e. \tag{6}$$

Из леммы 1 следует, что элемент $e_\tau = (e + \tau z)^{[p]}$, где $z \in N$, τ — вещественный параметр, является идемпотентом. Применяя условие (3) к этому идемпотенту, получаем

$$2e_\tau (2e_\tau y) = 2e_\tau y \, (y \in N); \; e_\tau = e + \tau 2ez + \ldots \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при τ, получаем тождество в N:

$$(2ez)\, y = 2e\,((2ez)\, y) + (2ez)\,(2ey). \tag{8}$$

Полагая $z = w \in W_e$, $y = \overline{w} \in \overline{W}_e$, находим $w\overline{w} = 2e(w\overline{w})$, откуда

$$W_e \overline{W}_e \subset W_e. \tag{9}$$

Из (5), (6), (9) легко вытекает (B_2).

Действительно, если $y \in N$, то $y = w + \overline{w}$ $(w \in W_e, \overline{w} \in \overline{W}_e)$. Следовательно, $y^2 = w^2 + 2w\overline{w} + \overline{w}^2$, $2e\,y^2 = L_e y^2 = 2w\overline{w} + \overline{w}^2$, $(2ey)^2 = w^2$.

Проверим, наконец, (B_3), (B_4). Из (B_2) следует: $e_\tau = e + \tau 2ez + \tau^2 z^2 + \ldots$ Снова подставляя в (3) и сравнивая коэффициенты при τ^2, получаем тождество в N:

$$z^2 y = 2e\,(z^2 y) + 2\,(2ez)\,((2ez)\,y) + z^2\,(2ey). \tag{10}$$

Подставляя далее e_τ в (B_2) и сравнивая коэффициенты при τ и τ^2, получаем еще два тождества:

$$(2ez)\, y^2 + 2\,(2ey)\,((2ez)\,y) = 0, \tag{11}$$

$$z^2 y^2 + 2\,((2ez)\,y)^2 + 2\,(2ey)\,(z^2 y) = 0. \tag{12}$$

Полагая в (10) $z = y = w$, получаем $w^3 = 0$, а при $z = w$, $y = \overline{w}$ $w\,(w\overline{w}) = 0$. Полагая далее в (11) $z = w$, $y = \overline{w}$, получаем $w\overline{w}^2 = 0$. Но тогда, записывая $y \in N$ в виде $y = w + \overline{w}$, приходим к (B_3).

Полагая в (12) $z = y = w$, получаем $(w^2)^2 = 0$, а при $z = y = \overline{w}$ $(\overline{w}^2)^2 = 0$; при $z = w$, $y = \overline{w}$ $w^2\overline{w}^2 + 2(w\overline{w})^2 = 0$; при $z = w$, $y = w + \overline{w}$ $w^2(w\overline{w}) = 0$. при $z = w + \overline{w}$, $y = \overline{w}$ имеем $w^2(w\overline{w}) = 0$; Отсюда $(y^2)^2 = 0$ $(y = w + \overline{w})$, т. е. имеет место (B_4). Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что нельзя ограничиться выполнением условий (3), (4) для одного какого-то идемпотента. Зададим алгебру A_V в некотором базисе $\{e_1, w_1, \overline{w}_1, w_2\}$ таблицей умножения

	e_1	w_1	$\bar{w}_1$	$\bar{w}_2$
e_1	e_1	$\frac{1}{2}w_1$	0	0
w_1	$\frac{1}{2}w_1$	$\bar{w}_1$	0	0
$\bar{w}_1$	0	0	0	0
$\bar{w}_2$	0	0	0	w_1

Здесь условие (3) выполнено не только для e_1, но для всех идемпотентов e, условие (4) выполнено для идемпотента e_1, соответствующее квадратичное отображение V ($Vx=x^2$) квазистационарного порядка 2, но не стационарно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. — «Уч. зап. науч.-исслед. кафедр Украины. Отд. мат.», 1924, вып. 1, с. 83—115.
2. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. — «Усп. мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5, с. 52—116.
3. *Любич Ю. И.* Двухуровневые бернштейновские популяции. — «Мат. сб.», 1974, т. 95(137), № 4, (12), с. 606—628.
4. *Любич Ю. И.* Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о необходимости закона Менделя. См. статью в настоящем выпуске.

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 517.944

Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МЕДЛЕННО РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Классы единственности решения задачи Коши для одного линейного уравнения в частных производных с медленно растущими коэффициентами исследованы нами в [1, 2]. Обобщение этих результатов для некоторых типов систем уравнений было получено в [3].

Настоящая статья посвящена описанию классов единственности решения задачи Коши для широкой совокупности систем и содержит, в частности, результаты работ [1, 2].

Мы рассматриваем систему уравнений в частных производных вида

$$D_t^{m_k} u_k(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}\sum_{l=0}^{m_j-1} A_{kslj}(x)\, D_x^s D_t^l u_j(x,t), \qquad (1)$$

$$k=1, \dots, n; \quad D_t^l = \frac{\partial^l}{\partial t^e}, \quad D_x^s = \frac{\partial^s}{\partial x^s} \quad -\infty < x < \infty,$$
$$0 \leqslant t < \infty$$

и наряду с (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda^{m_k} y_k(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{p} \sum_{l=0}^{m_j-1} A_{kslj}(x) \lambda^l D_x^s y_j(x, \lambda). \tag{2}$$

Обозначим $L = \operatorname{diag}\{\lambda^{m_1}, \lambda^{m_2}, \dots, \lambda^{m_n}\}$,

$$Q_s(x, \lambda) = \left(\sum_{l=0}^{m_j-1} A_{kslj}(x) \lambda^l \right)_{k,j=1}^{n} = (Q_{kjs}(x, \lambda))_{k,j=1}^{n},$$

$$\Delta(x, \lambda, \mu) = \det\left(-L + \sum_{s=0}^{p} Q_s(x, \lambda) \mu^s \right),$$

$$\overline{y}(x, \lambda) = \{y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)\}.$$

При этом система (2) примет вид

$$L\overline{y}(x, \lambda) = \sum_{s=0}^{p} Q_s(x, \lambda) D_x^s \overline{y}(x, \lambda). \tag{2'}$$

Многочлен $\Delta(x, \lambda, \mu)$ относительно μ имеет степень не выше np:

$$\Delta(x, \lambda, \mu) \equiv \sum_{s=0}^{np} \left(\sum_{l=0}^{m_s} a_{sl}(x) \lambda^l \right) \mu^s. \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{l=0}^{m_{np}} a_{npl}(x) \lambda^l = \lim_{\mu \to \infty} \Delta(x, \lambda, \mu) \mu^{-np} = \det Q_p(x, \lambda),$$

$$\sum_{l=0}^{m_0} a_{0l}(x) \lambda^l = \det(-L + Q_0(x, \lambda)).$$

Обозначим $m_{np} = r$, $m_0 = m$. Впредь будем предполагать:

I $\quad a_{npr}(x) \equiv a \neq 0, \quad a$ — постоянная.

II $\quad m > r, \; a_{0m}(x) \equiv b \neq 0, \; b$ — постоянная.

III $\quad m_s < m - s\dfrac{m-r}{np}, \quad 0 < s < np.$

Теоремы, приведенные ниже, отвечают на вопрос, какие условия при $|x| \to \infty$ гарантируют, что решение $\overline{u}(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\}$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$D_t^k u_j(x, t)|_{t=0} = 0, \ k = 0, \ldots, m_j - 1, \ j = 1, \ldots, n, \tag{1^0}$$

тождественно равно нулю.

Пусть $H_i(x) > 0$, $i = 1, 2$ — четные, возрастающие при $x > 0$ функции, для которых

$$\int_0^\infty [H_i](x)]^{1 - \frac{np}{m-r}} dx = \infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* I, II, III, *а ее коэффициенты таковы, что функции* $a_{sl}(x)$, *определяемые тождеством* (3), *удовлетворяют условиям* (*медленный рост*)

IV $\quad \sup\limits_{|t| \leqslant |x|} |a_{sl}(t)| \leqslant [H_2(|x|)]^{np \frac{m-l}{m-r} - s}, \ -\infty < x < \infty$

$$\left| \int_0^x |D_y a_{sl}(y)| dy \right| \leqslant C [H_2(|x|)]^{np \frac{m-l}{m-r} - s}, \quad \begin{matrix} 0 \leqslant l \leqslant m_s \\ 0 \leqslant s \leqslant np. \end{matrix}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия

V $\quad \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a} i^{m-r}\right) \neq 0;$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right) \neq 0 \text{ при } m - r = 2m_1 + 1, \ np = 2n_1 + 1;$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{b}{a}\right) \neq 0 \text{ при } m - r = 2m_1, \ np = 2n_1 + 1.$$

Тогда всякое регулярное решение $\overline{u}(x, t)$ задачи (1)—(1^0), удовлетворяющее при каком-либо $\alpha > 0$ оценке

$$|D_t^r D_x^k u_j(x, t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t + \int_0^{|x|} H_1(t)\, dt\right\}, \tag{5}$$

$r = 0, \ldots, m_j - 1$; $j = 1, \ldots, n$; $k = 0, \ldots, p$; $0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x < \infty$, тождественно равно нулю.

Доказательство. Схема рассуждений аналогична примененной в [1]: используя (5) и (1^0), применяем к (1) преобразование Лапласа и приходим к системе (2). Задача сводится к доказательству того, что всякое аналитическое в некоторой правой полуплоскости решение $\overline{y}(x, t)$ системы (2) и удовлетворяющее в ней оценке

$$|D^x \bar{y}(x, \lambda)| \leqslant C \exp \left\{ \int_0^{|x|} H_1(t)\, dt \right\},$$

тождественно равно нулю.

Систему (2) можно свести к системе первого порядка, вводя, как обычно, новую искомую вектор-функцию $\bar{z}(x, t) = \{z_1(x, t), \ldots, z_{np}(x, t)\}$, где

$$z_i(x, t) = y_i(x, t), \ z_{n+1}(x, t) = D_x y_i(x, t),$$
$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$
$$z_{n(p-1)+i}(x, t) = D_x^{p-1} y_i(x, t), \ i = 1, \ldots, n.$$

В получающейся системе

$$A_1(x,\lambda) D_x \bar{z}(x, \lambda) = A_2(x, \lambda)\, \bar{z}(x, \lambda) \tag{6}$$

матрицы $A_1(x, \lambda)$ и $A_2(x, \lambda)$ имеют блочный вид:

$$A_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} E_{n(p-1)} & 0 \\ 0 & Q_p(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$A_2(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_n & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & E_n \\ L-Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & \ldots & -Q_{p-1} \end{pmatrix},$$

где E_i — единичная матрица порядка i.

Нетрудно видеть, что

$$\Delta(x, \lambda, \mu) = \det(A_1(x, \lambda)\mu - A_2(x, \lambda)).$$

Для описания асимптотики решений системы (6) воспользуемся результатом работы [4].

В [4] дана асимптотика решений системы вида (6) в областях $|x| \leqslant g(|\lambda|)$, $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \to \infty$, а функция $g(r)$ определяется следующим образом по коэффициентам $a_{sl}(x)$ полинома $\Delta(x, \lambda, \mu)$. Пусть

$$B_0(\rho) = \max_{0 \leqslant s \leqslant np}\ \max_{0 \leqslant l \leqslant m_s}\ \sup_{|x| \leqslant \rho} |a_{sl}(x)|^{\left[m-l-\frac{s}{np}(m-r)\right]^{-1}},$$

$$B_1(\rho) = \max_{0 \leqslant s \leqslant np}\ \max_{0 \leqslant l \leqslant m_s} \left(\int_{-\rho}^{\rho} |a_{sl}^1(x)|\, dx \right)^{\left[m-l-\frac{s}{np}(m-r)\right]^{-1}},$$

$$B(r) = \max\{B_0(r), B_1(r)\},$$

$b(r) > 0$ — непрерывная, возрастающая при $r > 0$ функция, причем $\lim_{r \to \infty} (b(r))^{-1} B(r) = 0$ и, наконец, $g(r)$ — функция, обратная $b(r)$.

Примем $\Lambda = \{\lambda = \sigma + i\tau : \sigma = \sigma_0, /\tau/ \geqslant \tau_0\}$ и проверим выполнение условий теоремы об асимптотике [4]. Условия I—III совпадают с условиями I—III теоремы 1. Условие IV из [4] формулируется следующим образом: существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda \in \Lambda$ и $l = 0, \ldots, pn - 1$ при $pn > 2$ и $l = 1$ при $pn = 2$ справедливо неравенство

$$/\sin (np)^{-1} ((l+1)\pi + \arg b - \arg a + (m-r) \arg \lambda)/ \geqslant \delta.$$

В силу выбора множества Λ с достаточно большим τ_0 в нашем случае достаточно проверить, что при тех же значениях l

$$\sin (np)^{-1} \left((l+1)\pi + \arg b - \arg a \pm (m-r) \frac{\pi}{2} \right) \neq 0.$$

Последнее легко вытекает из условия V. Итак, все условия теоремы об асимптотике выполнены.

Построим функцию $g(r)$, участвующую в формулировке этой теоремы. Из условия IV следуют оценки $B_0(\rho) \leqslant \leqslant [H_2(\rho)]^{\frac{np}{m-r}}$, $B_1(\rho) \leqslant [H_2(\rho)]^{\frac{np}{m-r}}$, откуда $B(\rho) \leqslant [H_2(\rho)]^{\frac{np}{m-r}}$.

Поскольку, не уменьшая общности, можно считать $\lim\limits_{\rho \to \infty} (H_1(\rho))^{-1} H_2(\rho) = 0$, то можно положить

$$b(\rho) = a (H_1(\rho))^{\frac{np}{m-r}} \tag{7}$$

с некоторой постоянной a, которую мы выберем ниже. Функция $g(\rho)$ является обратной к функции $b(\rho)$. В силу теоремы об асимптотике из [4], система (6) имеет при $|x| \leqslant g(|\lambda|)$, $\lambda \in \Lambda$, np линейно независимых решений $z_0(x, \lambda), \ldots, z_{np-1}(x, \lambda)$, для которых справедливо представление

$$\vec{z}_j(x, \lambda) = \{1, \mu_j(x, \lambda), \ldots, (\mu_j(x, \lambda))^{np-1}\} \exp \left\{ \int\limits_0^x \mu_j(t, \lambda)\, dt \right\} \times$$

$$\times (1 + o(1)), \quad o(1) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0, \tag{8}$$

где $$\varepsilon_j = \exp\left\{\frac{2\pi i j}{np}\right\}, \quad \mu_j = \varepsilon_j (-ba^{-1} \lambda^{m-r})^{(np)^{-1}}.$$

Имея целью представить решение $\bar{z}(x, \lambda)$ системы (6) в области $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ в виде линейной комбинации функций (8), покажем, что $\det A_1(x, \lambda)$ отличен от нуля в рассматриваемой области (при достаточно большом τ_0). Действительно,

$$\det A_1(x, \lambda) = \det Q_p(x, \lambda) = a\lambda^r + \sum_{l=0}^{r-1} a_{npl}(x) \lambda^l.$$

Но из определения $g(|\lambda|)$ следует, что при $|x| \leqslant g(|\lambda|)$

$$\left|\sum_{l=0}^{r-1} a_{npl}(x)\lambda^l\right| = o(1)\,|\lambda|^r,\quad o(1)\xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0.$$

Записывая $\bar{z}(x,\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{np-1} c_j(\lambda)\,\bar{z}_j(x,\lambda)$ и повторяя схему рассуждений из [2], придем к оценке $|c_j(\lambda)| \leqslant C \exp\left\{\int_0^{|x|} (H_1(t) - a_1 |\lambda|^{\frac{m-r}{np}})\,dt\right\}$, справедливой при некотором $a_1 > 0$. Постоянная a_1 определяется числами a, b, а также величиной a_0 из оценки

$$|\cos \arg \mu_j(x,\lambda)| \geqslant a_0 > 0,\quad 0 \leqslant j \leqslant np-1. \tag{9}$$

Оценка (9) устанавливается с помощью условия V. Если постоянная a в (7) выбрана так, что $a^{\frac{m-r}{np}} < a_1$, то из последней оценки получаем $|c_j(\lambda)| \leqslant C\exp\{-C_1 g(|\lambda|)\,|\lambda|^{\frac{m-r}{np}}\}$. Отсюда так же, как в [2], используя условие (4), получим, что аналитическая функция $\bar{z}(x,\lambda) \equiv 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, откуда и следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2 относится к случаю, когда условие V теоремы 1 не выполняется.

Пусть $h_1(x) > 0$, $h_2(x) > 0$ — четные, возрастающие при $x > 0$ функции, удовлетворяющие при некотором $\varepsilon > 0$ условию

$$\int^{\infty} (h_i(x))^{1-\frac{np}{m-r}-\varepsilon}\,dx = \infty,\ i = 1,\ 2.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I—IV теоремы 1 с заменой $H_2(x)$ на $h_2(x)$ и оценка (5) с заменой $H_1(x)$ на $h_1(x)$.* Тогда решение $\bar{u}(x,t)$ задачи (1)—(1⁰) тождественно равно нулю.

Доказательство отличается от рассмотрений в теореме 1 лишь тем, что в роли Λ выбирается множество $\Lambda_A = \{\lambda = \sigma + i\tau : |\tau| = A\sigma\}$ и устанавливается, что A можно выбрать сколь угодно большим и таким, что на множестве Λ_A справедлива асимптотика (8) и, кроме того, имеет место оценка (9).

Отметим, что если для системы (1) $np \leqslant m-r$, то условие (4) выполнено при любых $H_i(x)$. Тогда условие IV теоремы 1 становится излишним, а результат формулируется в виде: решение $u(x, t)$ задачи (1)—(1^0), для которого при некотором $\alpha>0$ и любом фиксированном x, $-\infty<x<\infty$, выражения $\exp\{-\alpha t\} D_t^r D_x^k u_j(x, t)$, $k=0, \ldots, p$, $r=0, \ldots, m_j$, $j=1, \ldots, n$, ограничены при $0\leqslant t<\infty$, тождественно равно нулю.

В силу теоремы 2, тот же результат верен и при отсутствии условия V, если $np<m-r$.

Отметим в заключение, что полученные классы единственности решения задачи (1)—(1^0) не могут быть расширены. Это следует, например, из результатов по неединственности решения задачи Коши для уравнений вида (1) при $n=1$, $r=0$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши. — «Докл. АН СССР, т. 172, № 6, 1967 г.
2. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. — «Изв. АН СССР», 1967, т. 31, вып. 4, с. 763—782.
3. *Максимовская Н. С.* Классы единственности решения задачи Коши для системы линейных уравнений с растущими коэффициентами. — «Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та», 1973, т. 123, с. 25—55.
4. *Житомирский Я. И.* Об асимптотике решений систем линейных дифференциальных уравнений в расширяющихся областях. — «Дифференциальные уравнения», № 3, 1976, с. 623—630.

Поступила 16 января 1975 г.

УДК 517.91+943

В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук,
А. В. ЛУЦЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА. I

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где A, B — постоянные вещественные матрицы размеров $n\times n$ и $n\times r$ соответственно; x — вектор n-мерного пространства E_n; u — вектор r-мерного пространства E_r.

Зададим подпространство G равенством $G=\{x: Hx=0\}$, где H — постоянная матрица.

Систему (1) назовем стабилизируемой относительно подпространства G, если существует такое линейное зависящее от x управление $u=Qx$ (Q — постоянная матрица размера $r\times n$), что $Hx(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$, где $x(t)$ — любое решение системы $\frac{dx}{dt} = Ax + BQx$.

Задача стабилизации системы (1) для случая $G=0$ решена в работе [1].

Задача для произвольного подпространства G рассматривалась в [2, 3].

Основная теорема о необходимом и достаточном условии стабилизируемости доказывается эффектно: дается алгоритм, который позволяет определить, является ли данная система стабилизируемой на данное подпространство G, и в случае стабилизируемости дается явный вид стабилизирующего управления.

Пусть L — подпространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$. Так как L инвариантно относительно A, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Введем в $L^{\perp}$ канонический базис из вещественных частей собственных и корневых векторов A^*. Тогда $L^{\perp}$ можно представить в виде $L^{\perp} = K^- + K^+$, где K^- — подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а K^+ — подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Соответственно разложению $E_n = K^- + K^+ + L$ любой вектор g разлагается в сумму $g = g^- + g^+ + g^L$.

Если обозначить $g^M = g^+ + g^L$, то любой вектор g можно также представить в виде

$$g = g^- + g^M. \tag{2}$$

Докажем предварительно три леммы.

Лемма 1. *Для произвольных — вектора g^-, управления $u(x)$ и начального условия x_0 решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет соотношению*

$$(g^-, x(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Вектор g^- может быть записан в виде разложения по корневым векторам матрицы A^*: $g^- = \operatorname{Re}\sum_k \eta_k$, где η_k — корневой вектор высоты m_k, отвечающий собственному значению λ_k с $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$.

Если обозначить $u(x(t))$ через $\nu(t)$, то справедлива формула

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\nu(\tau)\, d\tau.$$

Пусть b_i — столбцы матрицы B. Имеем

$$(g^-, x(t)) = (g^-, e^{At} x_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^r (g^-, e^{A(t-\tau)} b_i)\, \nu_i(\tau)\, d\tau.$$

Так как $e^{A(t-\tau)} b_i \in L$, а $g^- \in L^{\perp}$, то интеграл равен нулю.

Тогда $(g^-, x(t)) = (e^{A^*t} g^-, x_0)$.

Вычислим $e^{A^*t}\eta_k$: $e^{A^*t}\eta_k = e^{\lambda_k t} e^{(A^* - \lambda_k E)t} = e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{\infty} (A^* - \lambda_k E)^j \eta_k \frac{t^j}{j!} =$

$$= e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{m_k - 1} (A^* - \lambda_k E)^j \eta_k \frac{t^j}{j!}$$

(здесь использовано то, что для корневого вектора высоты m_k $(A^* - \lambda_k E)^{m_k}\eta_k = 0$).

Таким образом, $e^{A^*t}g^- = \mathrm{Re} \sum_k e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{m_k - 1} \frac{t^j}{j!} (A^* - \lambda_k E)^j \eta_k$, откуда в силу $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Если $g^+ \neq 0$, то существует начальное условие x_0 такое, что решение $x(t)$ системы (1) с произвольным управлением $u(x)$ удовлетворяет соотношению $(g^+, x(t)) \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$.*

Доказательство. Так как $g^+ \in L^\perp$, то, как и в доказательстве предыдущей леммы, $(g^+, x(t)) = (g^+, e^{At}x_0) = (e^{A^*t}g^+, x_0)$. Поскольку g^+ разлагается по корневым векторам A^*, то $e^{A^*t}g^+$ представим в виде линейной комбинации функций вида $e^{\lambda t}t^\mu (\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0)$ с векторными коэффициентами, причем в силу $g^+ \neq 0$ один из этих коэффициентов (обозначим его f_0) отличен от нуля. Если f_0 — вещественный, то в качестве x_0 выберем вектор, не ортогональный f_0 и ортогональный всем остальным коэффициентам. Если f_0 — комплексный, то в разложение обязательно войдет член $\bar{f}_0 e^{\bar{\lambda} t} t^\mu$. В этом случае в качестве x_0 достаточно взять вещественный вектор, не ортогональный f_0 (тогда он также не ортогонален $\bar{f}_0$) и ортогональный всем остальным слагаемым.

В первом случае $(e^{A^*t}g^+, x_0) = e^{\lambda t}t^\mu (f_0, x_0)$ $(\lambda \geqslant 0)$,

во втором $(e^{A^*t}g^+, x_0) = 2\mathrm{Re}\,(e^{\lambda t}t^\mu (f_0, x_0)) = 2t^\mu e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} [\mathrm{Re}\,(f_0, x_0) \times \cos \mathrm{Im}\,\lambda t - \mathrm{Im}\,(f_0, x_0) \sin \mathrm{Im}\,\lambda t]$.

Таким образом, в обоих случаях $(g^+, x(t)) = (e^{A^*t}g^+, x_0) \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$.

Лемма 3. *Если система (1) стабилизируема относительно подпространства $\{x: (g, x) = 0\}$ и если вектор g ортогонален всем столбцам матрицы $(B, AB, \ldots, A^{j-1}B)$, то любое решение системы (1) со стабилизирующим управлением $u = Qx$ удовлетворяет соотношениям $(A^{*i}g, x(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ $(i = 0, 1, \ldots, j)$.*

Доказательство. Так как при выборе управления $u = Qx$ система (1) превращается в однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то ее общее решение выражается через экспоненты $e^{\mu_i t}$, умноженные на полиномы от t. Поэтому, если $(g, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, эта функция содержит только убывающие экспоненты, значит, все ее производные также стремятся к нулю.

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(g, x) = (g, Ax + BQx) = (g, Ax) = (A^*g, x) \underset{t\to\infty}{\to} 0;$$

$$\frac{d}{dt}(A^*g, x) = (A^*g, Ax + BQx) = (A^{*2}g, x) + (g, ABQ\ \ ) =$$

$$= (A^{*2}g, x) \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}(A^{*j-1}g, x) = (A^{*j}g, x) + (g, A^{j-1}BQx) = (A^{*j}g, x) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Сформулируем и докажем теорему о необходимом и достаточном условии стабилизируемости для случая одномерного управления u (при этом матрица B заменится вектором b).

Пусть запись $D \subset Z$, где D — матрица, а Z — подпространство, обозначает, что все столбцы матрицы D принадлежат подпространству Z; запись $Z\ \{a, b, \ldots\}$ обозначает линейную оболочку векторов $a, b, \ldots$

Теорема. *Для стабилизируемости системы* $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$ *относительно подпространства* $G = \{x: Hx = 0\}$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $H^* \subset K^-$, *либо существовали вектор* c *и неотрицательное число* j *такие, что* $H^* \subset L\ \{c, A^*c, \ldots, A^{*j} c\} + K^-$, *причем* $(c, A^k b) = 0$ $(0 \leqslant k < j)$, $(c, A^j b) \neq 0$.

Необходимость. Предположим, что система (1) стабилизируема относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ управлением $u = Qx$.

Если $H^* \subset K^-$, то необходимость доказана.

Пусть теперь $H^* \subset K^-$. Обозначим столбцы матрицы H^* через h_i. Рассмотрим полученные в соответствии с обозначением (2) векторы h_i^M. Пусть q — максимальное число линейно независимых векторов системы $\{h_i^M\}$. Очевидно, $q \geqslant 1$. Не нарушая общности, будем считать, что векторы $h_1, \ldots, h_q$ линейно независимы.

Обозначим $H^{*(1)} = (h_1^M, h_2, \ldots, h_q^M)$.

Докажем, что существуют постоянные α_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$, не равные нулю одновременно, такие, что для некоторого $j \geqslant q - 1$ вектор $\tilde{c} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\tilde{c}, b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, b) = 0,$$

$$(\tilde{c}, Ab) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, Ab) = 0, \tag{3'}$$

. . . .

$$(\tilde{c}, A^{j-1}b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^{j-1} b) = 0,$$

$$(\tilde{c}, A^j b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^j b) \neq 0. \tag{3''}$$

Действительно, при $j=q-1$ система (3_1) имеет нетривиальное решение, как однородная линейная система $q-1$ уравнений с q неизвестными, т. е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$, удовлетворяющий системе (3′). Если при данном j удовлетворяется соотношение (3″), то нужный вектор построен. В противном случае вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет системе (3′) при $j=q$. Если соотношение (3″) удовлетворяется, то вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет нужным требованиям при $j=q$. В противном случае снова увеличиваем j на единицу и повторяем рассуждения.

Докажем, что при некотором $j \leqslant n$ вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет соотношению (3″). Предположим противное, т. е. вектор $\tilde{c}$ ортогонален $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$, следовательно, $\tilde{c} \in L^{\perp}$. При этом по построению $\tilde{c}^- = 0$. Таким образом, $\tilde{c} = \tilde{c}^+ \neq 0$. Поэтому по лемме 2 при произвольном управлении $u(x)$ найдется x_0 такое, что $(\tilde{c}, x(t)) \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$.

Но $$\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i, x(t)\right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t)\right) =$$

$$= (\tilde{c}, x(t)) + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t)\right).$$

И так как второе слагаемое по лемме 1 стремится к нулю, то $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i, x(t)) \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$ при любом управлении $u(x)$, что противоречит стабилизируемости системы.

Итак, требуемый вектор $\tilde{c}$ построен. Возможны два случая:

1. $H^{*(1)} \subset L\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, \ldots, (A^{*j}\tilde{c})^M\}$.

В этом случае

$$H^* \subset L\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, \dots, A^{*j}\tilde{c}\} + K^-, \tag{4}$$

и доказательство необходимости закончено.
Действительно, возьмем любой вектор h_i. Тогда

$$h_i^M \in L\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, \dots, (A^{*j}\tilde{c})^M\}, \text{ т. е. } h_i^M = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M.$$

Имеем $h_i = h_i^M + h_i^- = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M + h_i^- = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c} -$

$$- \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^- + h_i^- \in L\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, \dots, A^{*j}\tilde{c}\} + K^-.$$

2. $$H^{*(1)} \subset L\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, \dots, (A^{*j}\tilde{c})^M\}. \tag{5}$$

В этом случае рассмотрим матрицу $H^{*(2)} = (H^{*(1)}\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c}), \dots, (A^{*j}\tilde{c})^M)$.

Докажем, что ранг этой матрицы, который обозначим через q_2, больше или равен $q+1$. Для этого достаточно доказать, что $j+1$ векторов $\tilde{c}^M, \dots, (A^{*j})^M$ линейно независимы. Пусть $\sum_{k=0}^{j} \delta_k (A^{*k}\tilde{c})^M = 0$. Умножим это равенство скалярно на вектор b:

$$0 = \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^M, b) = \sum_{k=0}^{j} \delta_k (A^{*k}\tilde{c}, b) - \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^-, b).$$

Так как $(A^{*k})\tilde{c})^- \in L^\perp$, а $b \in L$, то $\sum_{k=0}^{j} \delta_k (A^{*k}\tilde{c}, b) = 0$

Используя (3′), получаем $\delta_j (A^{*j}\tilde{c}, b) = 0$, а, используя (3″), получаем $\delta_j = 0$.

Умножим равенство $\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k (A^{*k}\tilde{c})^M = 0$ на вектор Ab. Как и выше, получим $0=\sum_{k=0}^{j-1}\delta_k((A^{*k}\tilde{c})^M, Ab)=\sum_{k=0}^{j-1}(A^{*k}\tilde{c}, Ab)\,\delta_k=$

$=\delta_{j-1}(A^{*j}\tilde{c}, b)$, откуда $\delta_{j-1}=0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты δ_k равны нулю.

Таким образом, в силу (5) ранг $H^{*(2)}$ больше или равен $j+2\geqslant q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{*(2)}$ и любого решения $x(t)$ системы (1) со стабилизирующим управлением $u=Qx\,(h_i^{(2)}, x(t))\underset{t\to\infty}{\to}0$.

Для столбцов матрицы $H^{*(1)}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 1:

$$(h_i^{(1)}, x(t))=(h_i^M, x(t))=(h_i, x(t))-(h_i^-, x(t))\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Таким образом, система (1) стабилизируема на подпространство $x:(\tilde{c}, x)=0\}$ тем же управлением $u=Qx$. Следовательно, по лемме 3 $(A^{*k}\tilde{c}, x(t))\underset{t\to\infty}{\to}0$ $(k=0, 1, \ldots, j)$.

Окончательно имеем

$$((A^{*k}\tilde{c})^M, x(t))=(A^{*k}\tilde{c}, x(t))-((A^{*k}\tilde{c})^-, x(t))\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{*(1)}$ применительно к матрице $H^{*(2)}$, получим, что либо при некотором векторе $\tilde{c}_2$ и числе j_2 выполнено соотношение $H^{*(2)}\subset L\times$ $\times\{\tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, \ldots, (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M\}$, т. е. $H^*\subset L\{\tilde{c}_2, A^*\tilde{c}_2, \ldots, A^{*j_2}\tilde{c}_2\}+K^-$, либо можно построить матрицу $H^{*(3)}$, ранг которой не меньше $q_2+1\geqslant q+2$:

$$H^{*(3)}=(H^{*(2)}, \tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, \ldots, (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M).$$

Этот процесс построения матриц $H^{*(k)}$ с увеличивающимся рангом должен обязательно оборваться на соотношении типа (4), так как ранг любой системы n-мерных векторов не превышает n.

Достаточность. Пусть существует вектор c и число j такие, что $H^*\subset L\{c, A^*c, \ldots, A^{*j}c\}+K^-$, $(c, A^kb)=0\,(0\leqslant k<j)$, $(c, A^jb)\neq 0$.

Введем переменные $y_m\,(1\leqslant m\leqslant j+1)$ следующим образом: $y_m=(A^{*^{m-1}}c, x)=(c, A^{m-1}x)$.

Тогда

$$\dot{y}_1=(c, \dot{x})=(c, Ax+bu)=(c, Ax)=y_2,$$

$$\dot{y}_2 = (c, A\dot{x}) = (c, A^2x + Abu) = (c, A^2x) = y_3,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\dot{y}_j = (c, A^{j-1}\dot{x}) = (c, A^jx + A^{j-1}bu) = (c, A^jx) = y_{j+1},$$

$$\dot{y}_{j+1} = (c, A^j\dot{x}) = (c, A^{j+1}x + A^jbu) = (c, A^{j+1}x) + (c, A^jb)\, u.$$

Выбирая

$$u = \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m (c, A^{m-1}x)\right] =$$

$$= \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m y_m\right], \tag{6}$$

где положительные постоянные γ_m подобраны так, чтобы система

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3, \dots,\ \dot{y}_j = y_{j+1},\ \dot{y}_{j+1} = -\sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m y_m$$

имела только экспоненциально убывающие решения.

По предположению для любого i существуют постоянные β_m^i и вектор $q_{\bar{i}} \in K^-$ такие, что $h_i = \sum\limits_{m-1}^{j+1} \beta_m^i A^{*m-1} c + g_{\bar{i}}$.

Поэтому при управлении задаваемой формулой (6) для любого решения системы (1) получим $(h_i, x(t)) = \sum\limits_{m=1}^{j+1} \beta_m^i y_m(t) + (g_{\bar{i}}, x(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ при любом начальном условии x_0. Действительно, первое слагаемое стремится к нулю по выбору управления $u(x)$, а стремление к нулю второго слагаемого вытекает из леммы 1.

Если $H^* \subset K^-$, то стабилизируемость системы (1) относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ также следует из леммы 1.

Теорема доказана.

Приведем алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить вектор c, найти число j и дать явный вид стабилизирующего управления $u = Qx$.

Пусть $\operatorname{rank} H = l$. Напомним, что через h_i обозначены столбцы матрицы H^*, и, не нарушая общности, будем считать векторы h_1, $h_2, \dots, h_l$ линейно независимыми.

1. Находим базис K^-.

2. Вычисляем $r = \operatorname{rank}(Hb, HAb, \dots, HA^{n-1}b)$. Рассмотрим систему уравнений относительно ω_i $(i = 1, 2, \dots, l)$:

$$(\xi, b) = (\xi, Ab) = \ldots = (\xi, A^{n-1} b) = 0,$$

где $\xi = \sum_{i=1}^{l} \omega_i h_i$. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l-r}$ линейно независимые решения этой системы. Если хоть один из этих векторов не принадлежит K^-, то стабилизация относительно подпространства G невозможна.

3. Пусть все $\xi_j \in K^-$ (если при этом $r=0$, то $H^* \subset K^-$ и есть стабилизация при любом выборе управления $u(x)$, например при $u(x) \equiv 0$).

Дополним систему $\xi_1, \ldots, \xi_{l-r}$ векторами $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_r}$ до базиса в линейной оболочке $L(h_1, \ldots, h_l)$. Обозначим через $H^*_{(1)}$ матрицу $(h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_r})$.

4. Рассмотрим систему уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$:

$$(c, b) = (c, Ab) = \ldots = (c, A^{j-1} b) = 0, \tag{7}$$

где
$$c = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k h_{i_k},$$

а j таково, что ранг системы (7) равен $r-1$, в то время как ранг системы, полученной из (7) заменой j на $j+1$, равен r. При этом $j \geqslant r-1$ и $(c, A^j b) \neq 0$.

5. Проверяем, выполнено ли включение

$$H^*_{(1)} \subset L\{c, A^* c, \ldots, A^{*j} c\} + K^-. \tag{8}$$

Если (8) имеет место, то стабилизация возможна. Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные γ_i $(i = 1, 2, \ldots, j+1)$, чтобы уравнение относительно μ $\mu^{j+1} + \gamma_1 \mu^j + \ldots + \gamma_{j+1} = 0$ имело все корни μ такие, что $\operatorname{Re}\mu < 0$. Управление $u(x)$ задаем формулой

$$u(x) = \frac{1}{(c, A^j b)} \left[-(c, A^{j+1} x) - \sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m (c, A^{m-1} x) \right]. \tag{9}$$

6. Если включение (8) не имеет места, то строим матрицу

$$H^*_{(2)} = (H^*_{(1)}, c, A^* c, \ldots, A^{*j} c).$$

Если число $r_2 = \operatorname{rank}(H_{(2)} b, H_{(2)} Ab, \ldots, H_{(2)} A^{n-1} b)$ равно r, то стабилизация невозможна.

Если $r_2 \geqslant r+1$, то, заменяя H на $H_{(2)}$, переходим к пункту 2 и повторяем дальнейшие построения. В силу того, что r_k (если данный процесс дойдет до построения матрицы $H_{(k)}$) не может неограниченно увеличиваться ($r_k \leqslant n$), то на некотором обращении к пунктам 2—6 обнаружится невозможность стабилизации, или выполнится включение типа (8). В этом случае стабилизирующее управление определяется формулой (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н.* О стабилизации динамических систем дополнительными силами. — «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, вып. 1, с. 5—16.
2. *Bhattacharyya S. P., Pearson J. B., Wonham W. M.* On zeroing the output of a linear systems. — «Information and Control», 1972, vol. 20, N 2, p. 135—142.
3. *Wonham W. M.* Tracking and regulation in linear multivariable systems. — «SIAM J. Control», 1973, vol. 11, N 3, p. 424—437.

Поступила 5 февраля 1975 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 134

Математика и механика

Выпуск 41

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технические редакторы *Л. Е. Мокроусова, Г. П. Александрова*
Корректор *М. Ф. Христенко*

Сдано в набор 7/X 1975 г. Подписано в печать 9/III 1976 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8. Тираж 1000. Зак. 2342. БЦ 50054. Цена 56 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа» при Харьковском государственном университете.
310003, Харьков, 3, Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
310003, Харьков, 3, Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.929+517.934

Математическая модель автомата вождения самоходной машины, отслеживающего кривую с помощью копира. *Кашурко А. С., Коробов В. И., Подольский Е. Н., Синяков В. А.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 3—11.

В статье получен алгоритм управления самоходной машины, обеспечивающего ее движение по заданной заранее неизвестной кривой. Это управление определяется из дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, причем само отклонение удовлетворяет дифференциальному уравнению. В предположении малости этого отклонения получен явный вид управления.

Ил. 1. Список лит. 3 назв.

УДК 518.825

Математическая модель возвратного скрещивания при отборе константных форм в гибридном потомстве самоопылителей. *Татарченко Л. П., Перькова В. П., Литвиненко А. И.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 11—15.

Рассмотрена одна из задач селекции — замена в генотипе организма самоопылителя пары хромосом, несущих доминантные гены в гомозиготном состоянии на гомологичные хромосомы, несущие рецессивные гены.

Показано, что использование возвратного скрещивания резко ускоряет процесс селекции. Получена формула для подсчета вероятности появления организма нужного нам генотипа в любом поколении. Получено также выражение для предельной вероятности.

УДК 681.3 : 519.21

Об одном алгоритме последовательного улучшения стратегии. *Баранов В. В., Подцыкин Н. С.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 16—23.

Рассматриваются управляемые случайные процессы с дискретным временем и конечными множествами состояний и управлений.

Строится алгоритм поиска оптимальной стратегии, основанный на последовательном приближенном улучшении стратегии. Приводится достаточное условие улучшения стратегии и показана сходимость алгоритма за конечное число итераций к оптимальной стратегии.

Список лит. 3 назв.

УДК 681.3 : 519.21

Об управляемых процессах с непрерывным управлением. *Баранов В. В.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 23—31.

Рассматриваются управляемые процессы с непрерывным наблюдением и управлением. Доказывается существование оптимальной кусочно-постоянной нерандомизированной марковской стратегии. Показано, что в рассматриваемом случае вычислительная процедура для отыскания оптимальной стратегии эквивалентна соответствующей процедуре для управляемых процессов с дискретным временем.

Список лит. 7 назв.

УДК 517.91

Идеально наблюдаемые системы с минимальным выходом. *Коробов В. И., Маринич А. П.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 31—41.

Рассматривается задача наблюдения линейной управляемой системы с минимальным выходом при отсутствии информации об управлении. Показано, чему равен минимальный выход для идеально наблюдаемых систем, а также приводится каноническая форма идеально наблюдаемых систем с минимальным выходом.

Список лит. 7 назв.

УДК 62—501.12

К управляемости спектром в линейной динамической системе. *Чуприна В. Е.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 41—44.

Для линейной динамической системы

$$\dot{x}=Ax+Bu,$$
$$y=Hx$$

получен критерий управляемости спектром с одномерным выходом.

Список лит. 2 назв.

УДК 532.135

Об устойчивости равновесия упругой среды. I: *Альперин И. Г.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 44—53.

Рассматривается устойчивость равновесия свободного упругого тела в n-мерном эвклидовом пространстве, находящегося под действием системы объемных и поверхностных сил. Исследуются условия устойчивости исходного равновесного состояния.

УДК 532.135

Об уравнениях вязкопластичного пограничного слоя на криволинейной поверхности. *Татарченко Э. Н.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 53—59.

Выводятся уравнения пограничного слоя на криволинейной поверхности для среды, описываемой достаточно общим реологическим уравнением. Исследуется влияние на течение кривизны поверхности. Для поверхностей малой кривизны получены условия отсутствия трансверсального перепада давления и показано, что уравнения допускают предельный переход к плоскому пограничному слою типа Олдроида.

Список лит. 6 назв.

УДК 530.145

Структура R-операции для локальных взаимодействий. *Уваров О. В., Щербина В. А.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика, Вып. 41, 1976, с. 59—72.

Дается математическое обоснование R-операции для фейнмановских амплитуд, отвечающих теории с лагранжианом взаимодействия. С помощью введения специальной индефинитной метрики строятся заглаженные вклады фейнмановских диаграмм $\Pi(G;\ x)$ и «вклады с вычитаниями» $R(G)\Pi(G;\ x)$. Показано, что $R(G)$ есть элемент некоторой специальной алгебры операторов над $\Pi(G;\ x)$, построенной в работе, причем $R(G)\Pi(G;\ x)$ выдерживает предельный переход, снимающий заглаживания, давая ренормированные амплитуды.

Ил. 1. Список лит. 5 назв.

УДК 530.145

Конечные перенормировки в теории R-операции. *Уваров О. В.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 72—81.

Рассматриваются фейнмановские амплитуды $\Pi(G;\ x)$ с заглаженными пропагаторами.

С диаграммой G сопоставляется «вклад с вычитаниями»

$$R(G;\ \nu)\Pi(G;\ x)=\prod_{\{G\}}[1+P(G_j;\ \nu_j)]\,\Pi(G;\ x),$$

где $P(G_j,\ \nu_j)$ — образующие некоторой коммутативной и ассоциальной алгебры операторов, заданных на $\Pi(G;\ x)$. Исследуется вопрос о допустимом произволе в определении P-операторов, при котором возможен предельный переход в функционале $R(G;\ \nu)\Pi(G;\ x)$, снимающих заглаживания с причинных функций.

Список лит. 3 назв.

УДК 517.944

Тонкая теорема единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциально-разностных уравнений. *Борок В. М.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 81—85.

Доказана теорема типа Тэклинда, описывающая классы единственности решения задачи Коши для систем, указанных в заголовке. Полученные результаты уточняют известные ранее результаты Л. И. Камынина, Б. Л. Гуревича.

Список лит. 7 назв.

УДК 519.9+575.1

Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о необходимости закона Менделя. *Любич Ю. И.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 85—88.

Дано новое доказательство упомянутой теоремы, основанное на исследовании строения соответствующей генетической алгебры.

Список лит. 5 назв.

УДК 519.9

Замечание об эволюционном спектре генетических алгебр. *Куринной Г. Ч.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 89—95.

Дается явная формула для эволюционного спектра генетических алгебр, отвечающих популяциям с перекрывающимися поколениями.

Список лит. 8 назв.

УДК 517.948+512.13

Эквивалентность семейств диффеоморфизмов конечного класса гладкости. *Гомозов Е. П.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 95—104.

Доказаны теоремы и линеаризации семейств ростков диффеоморфизмов конечного класса гладкости. Построены конечно-параметрические версальные семейства ростков диффеоморфизмов конечного класса гладкости.

Список лит. 5 назв.

УДК 519.9 : 575.1

Квазистационарные квадратичные отображения. *Крапивин А. А.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 104—108.

Рассматриваются квадратичные отображения V в R^n, сохраняющие гиперплоскость $s(x)=1$ ($s(x)$ — сумма координат точки x) и удовлетворяющие в этой гиперплоскости условию $V^{p+1}=V^p$ при некотором $p\geqslant 1$. Найден критерий того, чтобы из этого условия следовало $V^2=V$.

Список лит. 4 назв.

УДК 517.944

О единственности решения задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с медленно растущими коэффициентами. *Житомирский Я. И.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 108—114.

Дано обобщение результатов автора по классам единственности решения задачи Коши, полученных ранее для одного уравнения, на случай систем линейных уравнений в частных производных с медленно растущими коэффициентами.

Список лит. 4 назв.

УДК 517.91/943

Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. *Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н.* «Вестник Харьковского университета», № 134. Математика и механика. Вып. 41, 1976, с. 114—123.

Для линейной автономной системы $x=Ax+bu$ даны эффективные необходимые и достаточные условия стабилизируемости относительно произвольного заданного подпространства.

Приводится конечный алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и построить стабилизирующее управление в виде линейной функции от фазовых координат.

Список лит. 3 назв.