ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1950 Том XXII

О БЕСКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

А. К. Сушкевич

Харьков

§ 1. Мы рассматриваем бесконечные „треугольные" матрицы" $(a_{\alpha\beta})$ с элементами из данного числового поля P. „Треугольными" матрицами я называю такие матрицы, у которых все элементы книзу от главной диагонали равны нулю, т. е. $a_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha>\beta$. Сумма, разность и произведение таких матриц всегда существуют и являются тоже „треугольными" матрицами.

Если $A=(a_{\alpha\beta})$ и $B=(b_{\alpha\beta})$ две данные (треугольные) матрицы, а $C=AB=(c_{\alpha\beta})$ — их произведение, то:

$$c_{\alpha\beta}=a_{\alpha\alpha}b_{\alpha\beta}+a_{\alpha,\alpha+1}b_{\alpha+1,\beta}+\cdots+a_{\alpha\beta}b_{\beta\beta};\ (\alpha\leqq\beta). \tag{1}$$

К этим матрицам относятся все диагональные матрицы, в частности „единичная" матрица E и „нулевая" матрица, которую мы просто обозначаем нулем.

Пусть $A=(a_{\alpha\beta})$ — данная матрица; посмотрим, в каких случаях существует обратная к ней матрица $X=(x_{\alpha\beta})$, т. е. такая, что $AX=E$. Для определения элементов $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \ldots x_{\beta\beta}$ β-го столбца в X имеем по (1) систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{1\beta}+a_{12}x_{2\beta}+\cdots+a_{1\beta}x_{\beta\beta}&=0\\ a_{22}x_{2\beta}+\cdots+a_{2\beta}x_{\beta\beta}&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{\beta\beta}x_{\beta\beta}&=1 \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда постепенно, начиная с последнего уравнения, однозначно определяем $x_{\beta\beta}, x_{\beta-1,\beta}, \ldots x_{1\beta}$, если только ни один из диагональных элементов в A не равен 0. Таким образом, если все $a_{\alpha\alpha}\neq 0$, то существует „обратная" матрица $X=A^{-1}$.[1] Такие матрицы A являются так называемыми „алгебраическими единицами"; назовем их „неособенными". Так как из (1) следует, что $c_{\alpha\alpha}=a_{\alpha\alpha}b_{\alpha\alpha}$, то очевидно, что произведение неособенных матриц — тоже неособенная матрица.

Так как наши треугольные матрицы, очевидно, образуют абелеву группу относительно сложения, а для умножения верен ассоциативный закон, то совокупность всех треугольных матриц над полем P — бесконечная ассоциативная алгебра или некоммутативное кольцо.

---

[1] Легко убедиться, что и $XA=E$.

Обозначим его через **A**. Все неособенные матрицы из **A** составляют обычную (бесконечную) группу **B** относительно умножения.

§ 2. Матрицу (треугольную), в которой хоть один диагональный элемент: $a_{\alpha\alpha}=0$, назовем „особенной“.

Теорема. Всякая особенная матрица A представляет собой левый нулевой делитель.

Доказательство. Пусть в A $a_{\alpha\alpha}=0$ с наименьшим α; возьмем уравнение $AX=0$, где $X=(x_{\alpha\beta})$ — неизвестная матрица. По (1) имеем (при $\lambda\geqq\alpha$):

$$\begin{aligned}
a_{11}x_{1\lambda}+a_{12}x_{2\lambda}+\dots+a_{1,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}+a_{1\alpha}x_{\alpha\lambda}+\dots+a_{1\lambda}x_{\lambda\lambda}&=0\\
a_{22}x_{2\lambda}+\dots+a_{2,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}+a_{2\alpha}x_{\alpha\lambda}+\dots+a_{1\lambda}x_{\lambda\lambda}&=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
a_{\alpha-1,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}+a_{\alpha-1,\alpha}x_{\alpha\lambda}+\dots+a_{\alpha-1,\lambda}x_{\lambda\lambda}&=0\\
a_{\alpha\alpha}x_{\alpha\lambda}+\dots+a_{\alpha\lambda}x_{\lambda\lambda}&=0\\
\dots\dots\dots\dots&\\
a_{\lambda\lambda}x_{\lambda\lambda}&=0.
\end{aligned}\tag{3}$$

Если $a_{\alpha+1,\alpha+1}\neq0,\dots\ a_{\lambda\lambda}\neq0$, то последовательно найдем:

$$x_{\lambda\lambda}=0,\quad x_{\lambda-1,\lambda}=0,\dots\quad x_{\alpha+1,\lambda}=0,$$

но $x_{\alpha\lambda}$ можно взять произвольным, отличным от нуля, ибо $a_{\alpha\alpha}=0$. Пусть $x_{\alpha\lambda}=l_\lambda$; тогда из (3):

$$\begin{aligned}
a_{11}x_{1\lambda}+a_{12}x_{2\lambda}+\dots+a_{1,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}&=-a_{1\alpha}l_\lambda,\\
a_{22}x_{2\lambda}+\dots+a_{2,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}&=-a_{2\alpha}l_\lambda,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
a_{\alpha-1,\alpha-1}x_{\alpha-1,\lambda}&=-a_{\alpha-1,\alpha}l_\lambda.
\end{aligned}\tag{4}$$

Эта система (при данном l_λ) имеет единственное решение, которое имеет вид:

$$x_{1\lambda}=k_1l_\lambda,\quad x_{2\lambda}=k_2l_\lambda,\dots x_{\alpha-1,\lambda}=k_{\alpha-1}l_\lambda;$$

наконец, $x_{\alpha\lambda}=l_\lambda$. Но при $\lambda<\alpha$ найдем:

$$x_{1\lambda}=x_{2\lambda}=\dots=x_{\lambda\lambda}=0.$$

Таким образом, получим:

$$X=\begin{pmatrix}
0\ 0\dots0 & k_1l_\alpha & k_1l_{\alpha+1} & \dots\\
0\ 0\dots0 & k_2l_\alpha & k_2l_{\alpha+1} & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
0\ 0\dots0 & k_{\alpha-1}l_\alpha & k_{\alpha-1}l_{\alpha+1} & \dots\\
0\ 0\dots0 & l_\alpha & l_{\alpha+1} & \dots\\
0\ 0\dots0 & 0 & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}\tag{5}$$

Здесь $l_\alpha, l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \ldots$ произвольны, а $k_1, k_2, \ldots k_{\alpha-1}$ — решение системы:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1,\alpha-1}k_{\alpha-1} &= -a_{1\alpha}, \\ a_{12}k_2 + \cdots + a_{2,\alpha-1}k_{\alpha-1} &= -a_{2\alpha}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{\alpha-1,\alpha-1}k_{\alpha-1} &= -a_{\alpha-1,\alpha}. \end{aligned} \tag{4a}$$

Заметим, что X зависит только от элементов первых α столбцов матрицы A.

Если в A, кроме $a_{\alpha\alpha}$, ни один диагональный элемент не равен 0, то матрицы вида (5) — единственны, для которых $AX=0$.

Пусть теперь, кроме $a_{\alpha\alpha}$, еще и $a_{\beta\beta}=0\ (\beta>\alpha)$, причём $a_{\alpha+1,\alpha+1}\neq 0$, $a_{\beta-1,\beta-1}\neq 0$; тогда по (1):

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha}x_{\alpha\beta} + a_{\alpha,\alpha+1}x_{\alpha+1,\beta} + \cdots + a_{\alpha\beta}x_{\beta\beta} &= 0, \\ a_{\alpha+1,\alpha+1}x_{\alpha+1,\beta} + \cdots + a_{\alpha+1,\beta}x_{\beta\beta} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{\beta\beta}x_{\beta\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как $a_{\beta\beta}=0$, то можно взять $x_{\beta\beta}\neq 0$; тогда предыдущие уравнения (6) определят однозначно $x_{\beta-1,\beta}, \ldots x_{\alpha+1,\beta}$, а первое уравнение (6) даст:

$$a_{\alpha,\alpha+1}x_{\alpha+1,\beta} + a_{\alpha,\alpha+2}x_{\alpha+2,\beta} + \cdots + a_{\alpha\beta}x_{\beta\beta} = 0 \quad (\text{ибо } a_{\alpha\alpha}=0);$$

а это возможно, если ранг матрицы $\beta-\alpha$ порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{\alpha,\alpha+1} & a_{\alpha,\alpha+2} & \ldots a_{\alpha\beta} \\ a_{\alpha+1,\alpha+1} & a_{\alpha+1,\alpha+2} & \ldots a_{\alpha+1,\beta} \\ 0 & a_{\alpha+2,\alpha+2} & \ldots a_{\alpha+2,\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots a_{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

есть $\beta-\alpha-1$.[1] А это означает, что в общем случае матрицы (5) являются общим решением уравнения $AX=0$. Эти матрицы X образуют левый идеал, ибо, если X_1 и X_2 — решения уравнения $AX=0$, а Z — произвольная (треугольная) матрица, то и $X_1 \pm X_2$ и X_1Z — тоже решения того же уравнения.

§ 3. Пусть в матрице A только один диагональный элемент, именно, $a_{\alpha\alpha}=0$. Возьмем уравнение $УA=0$ с неизвестной матрицей $У=(y_{\alpha\beta})$. По (1) имеем для элементов $\varkappa$-й строки в $У$ $(\varkappa\leqq\alpha)$:

$$\begin{aligned} & y_{\varkappa\varkappa}a_{\varkappa\varkappa}=0 \\ & y_{\varkappa\varkappa}a_{\varkappa,\varkappa+1} + y_{\varkappa,\varkappa+1}a_{\varkappa+1,\varkappa+1}=0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & y_{\varkappa\varkappa}a_{\varkappa\alpha} + y_{\varkappa,\varkappa+1}a_{\varkappa+1,\alpha} + \ldots + y_{\varkappa\alpha}a_{\alpha\alpha}=0 \qquad (7) \\ & y_{\varkappa\varkappa}a_{\varkappa,\alpha+1} + y_{\varkappa,\varkappa+1}a_{\varkappa+1,\alpha+1} + \ldots + y_{\varkappa\alpha}a_{\alpha,\alpha+1} + y_{\varkappa,\alpha+1}a_{\alpha+1,\alpha+1}=0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

[1] В случае, если $\beta+\alpha+1$, можно взять $x_{\alpha+1,\alpha+1}\neq 0$ произвольным только при $a_{\alpha,\alpha+1}=0$.

Отсюда получаем:

$$y_{\varkappa\varkappa}=0,\ y_{\varkappa,\varkappa+1}=0,\ldots y_{\varkappa,\alpha-1}=0,$$

но $y_{\varkappa\alpha}$ можно взять неравным нулю, ибо $a_{\alpha\alpha}=0$; в дальнейшем последовательно определяем: $y_{\varkappa,\alpha+1}$, $y_{\varkappa,\alpha+2},\ldots$ in inf.

Пусть $y_{\varkappa\alpha}=k_\varkappa$; тогда $y_{\varkappa,\alpha+1}=k_\varkappa l_{\alpha+1}$, $y_{\varkappa,\alpha+2}=k_\varkappa l_{\alpha+2},\ldots$, где $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2},\ldots$ — решение (единственное) системы уравнений:

$$\begin{array}{l} l_{\alpha+1}a_{\alpha+1,\alpha+1}=-a_{\alpha,\alpha+1} \\ l_{\alpha+1}a_{\alpha+1,\alpha+2}+l_{\alpha+2}a_{\alpha+2,\alpha+2}=-a_{\alpha,\alpha+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{8}$$

Однако при $\varkappa>\alpha$ все $y_{\varkappa\lambda}=0$. Итак:

$$Y=\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots 0 & k_1 & k_1 l_{\alpha+1} & k_1 l_{\alpha+2}\ldots \\ 0 & 0\ldots 0 & k_2 & k_2 l_{\alpha+1} & k_2 l_{\alpha+2}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots 0 & k_\alpha & k_\alpha l_{\alpha+1} & k_\alpha l_{\alpha+2}\ldots \\ 0 & 0\ldots 0 & 0 & 0 & 0\ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{9}$$

Здесь $k_1, k_2,\ldots k_\alpha$ произвольны, тогда как $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2},\ldots$ in inf. — решение системы (8). Матрица Y зависит только от строк матрицы A, начиная с α-й.

Пусть теперь в A кроме $a_{\alpha\alpha}$ еще и $a_{\gamma\gamma}=0\ (\gamma<\alpha)$, но $a_{\alpha-1,\alpha-1},\ldots a_{\gamma+1,\gamma+1}$ все $\neq 0$. Тогда по (1):

$$\begin{array}{l} y_{\gamma\gamma}a_{\gamma\gamma}=0 \\ y_{\gamma\gamma}a_{\gamma,\gamma+1}+y_{\gamma,\gamma+1}a_{\gamma+1,\gamma+1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\gamma\gamma}a_{\gamma,\alpha-1}+y_{\gamma,\gamma+1}a_{\gamma+1,\alpha-1}+\ldots+y_{\gamma,\alpha-1}a_{\alpha-1,\alpha-1}=0 \\ y_{\gamma\gamma}a_{\gamma\alpha}+y_{\gamma,\gamma+1}a_{\gamma+1,\alpha}+\ldots+y_{\gamma,\alpha-1}a_{\alpha-1,\alpha}+y_{\gamma\alpha}a_{\alpha\alpha}=0. \end{array} \tag{10}$$

Если взять $y_{\gamma\gamma}\neq 0$ (ведь $a_{\gamma\gamma}=0$), то уравнения (10), кроме последнего, определят однозначно $y_{\gamma,\gamma+1},\ldots y_{\gamma,\alpha-1}$, а последнее уравнение (10) даст:

$$y_{\gamma\gamma}a_{\gamma\alpha}+y_{\gamma,\gamma+1}a_{\gamma+1,\alpha}+\ldots+y_{\gamma,\alpha-1}a_{\alpha-1,\alpha}=0 \text{ (ибо } a_{\alpha\alpha}=0).$$

Это возможно только, если ранг матрицы $\alpha-\gamma$ порядка

$$\begin{pmatrix} a_{\gamma,\gamma+1} & a_{\gamma+1,\gamma+1} & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\gamma,\alpha-1} & a_{\gamma+1,\alpha-1} & a_{\gamma+2,\alpha-1} & a_{\alpha-1,\alpha-1} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma+1,\alpha} & a_{\gamma+2,\alpha} & a_{\alpha-1,\alpha} \end{pmatrix} \text{ есть } \alpha-\gamma-1.$$ [1]

Следовательно, в общем случае матрицы типа (9) единственные решения уравнения $YA=0$. Эти матрицы составляют правый идеал. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема. Если в особенной матрице только конечное число диагональных элементов равно нулю, то такая матрица есть правый нулевой делитель.

Возникает вопрос: если в особенной матрице бесчисленное множество диагональных элементов равно нулю, то является ли такая матрица непременно правым нулевым делителем? Следующий пример доказывает, что это не так. Пусть:

---

[1]) Если $\gamma=\alpha-1$, то это условие принимает вид: $a_{\gamma,\gamma+1}=0$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \end{pmatrix};$$

т. е. в A $a_{2k+1,\,2k+1}=0$, $a_{2k+1,\,2k+2}=1$, $a_{2k+1,\,2k+3}=1$ $(k=0,1,2,\dots)$;

$$a_{2k,\,2k}=2,\ a_{2k,\,2k+1}=1\ (k=1,2,3,\dots),$$

все остальные элементы в A равны нулю.

Пусть $Y=(y_{\alpha\beta})$ — какое-нибудь решение уравнения $YA=0$. Имеем по (1):

$$y_{\alpha\alpha}a_{\alpha\beta}+y_{\alpha,\alpha+1}a_{\alpha+1,\beta}+\dots+y_{\alpha,\beta-2}a_{\beta-2,\beta}+$$
$$+y_{\alpha,\beta-1}a_{\beta-1,\beta}+y_{\alpha\beta}a_{\beta\beta}=0.$$

Если β — четное, то $a_{\beta\beta}=2$, $a_{\beta-1,\beta}=1$, $a_{\beta-2,\beta}=\dots=a_{\alpha\beta}=0$, т. е.:

$$y_{\alpha,\beta-1}+2y_{\alpha\beta}=0.$$

Заменив β на $\beta+1$ ($\beta+1$ — нечетное), имеем:

$$a_{\beta+1,\beta+1}=0,\ a_{\beta,\beta+1}=a_{\beta-1,\beta+1}=1,$$

следовательно:

$$y_{\alpha,\beta-1}+y_{\alpha\beta}=0.$$

Отсюда получается: $y_{\alpha,\beta-1}=y_{\alpha\beta}=0$, т. е. $Y=0$, т. е. матрица A не есть правый нулевой делитель.

§ 4. Обратно, если $k_1, k_2, \dots k_{\alpha-1}$ произвольно данные числа, то можно по (4a) подобрать для A первые α столбцов (взяв $a_{\alpha\alpha}=0$), а затем взять остальные столбцы в A произвольно, так что будет $AX=0$, где X определено по формуле (5) с произвольными $l_\alpha, l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \dots$

Аналогично можно при данных произвольных $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \dots$ подобрать по (8) строки для A, начиная с α-ой, а первые $\alpha-1$ строк взять произвольно, так что будет $YA=0$, где Y определено по (9) при произвольных $k_1, k_2, \dots k_\alpha$.

Строение матриц (5) и (9) одинаково. Заменив в (9) $k_1, k_2, \dots k_\alpha$ на $k_1 l_\alpha, k_2 l_\alpha, \dots k_\alpha l_\alpha$ и, меняя обозначения, написав $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \dots$ вместо $l_\alpha l_{\alpha+1}, l_\alpha l_{\alpha+2}, \dots$, получим матрицу:

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_1 l_\alpha & k_1 l_{\alpha+1} & k_1 l_{\alpha+2} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_2 l_\alpha & k_2 l_{\alpha+1} & k_2 l_{\alpha+2} & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_\alpha l_\alpha & k_\alpha l_{\alpha+1} & k_\alpha l_{\alpha+2} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Уравнения (4а) остаются в силе и для новых наших обозначени если к их правым частям приписать множителя k_α; аналогичн остаются верными и уравнения (8), если к их правым частям припи сать множитель l_α.

Совокупность всех матриц вида (11) — обобщенная группа относ тельно умножения. Именно, если обозначим:

$$Z = \left(k_1 k_2, \ldots\ k_\alpha / l_\alpha,\ l_{\alpha+1}, \ldots\right),\quad Z' = \left(k_1', k_2', \ldots\ k_\alpha' / l_\alpha',\ l_{\alpha+1}', \ldots\right),$$

то

$$ZZ' = \left(k_1 k_\alpha',\ k_2 k_\alpha', \ldots\ k_\alpha k_\alpha' / l_\alpha l_\alpha',\ l_\alpha l_{\alpha+1}', \ldots\right), \qquad (1$$

т. е. и ZZ' — тоже типа (11). Легко видеть, что, если Z — типа (5 то и ZZ' тоже; если Z' — типа (9), то и ZZ' — тоже (как и долж быть).

Пусть теперь для матрицы Z одновременно верны уравнения (4 и (8), т. е. и $AZ = 0$ и $ZA = 0$. В этом случае, если мы помножи $k_1, k_2, \ldots\ k_\alpha$ на какое-нибудь число $s \neq 0$, а все $l_\alpha, l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \ldots$ разделим на s, то Z не изменится, и уравнения (4а), (8) останут верными. Поэтому можно обозначить: $k_\alpha l_\alpha = x \in P$ и рассматривать (при данном A) как функцию от x. В таком случае $Z_x Z_{x'} = Z_{x\ldots}$ $Z_x + Z_{x'} = Z_{x+x'}$,

ибо:

$$Z + Z' = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & k_1 l_\alpha + k_1' l_\alpha' & k_1 l_{\alpha+1} + k_1' l_{\alpha+1}' & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots 0 & k_\alpha l_\alpha + k_\alpha' l_\alpha' & k_\alpha l_{\alpha+1} + k_\alpha' l_{\alpha+1}' & \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

но при данном A числа $k_1, \ldots\ k_\alpha$ пропорциональны числам $k_1', \ldots\ k$ а $l_\alpha, l_{\alpha+1}, \ldots$ пропорциональны числам $l_\alpha', l_{\alpha+1}', \ldots$

Отсюда следует, что такие матрицы Z_x образуют п о л е, прос изоморфное полю P (ибо при $x \neq x'$ и $Z_x \neq Z_{x'}$). В этом поле ед ницей умножения является матрица:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0\ 0 \ldots 0 & k_1 & k_1 l_{\alpha+1} & k_1 l_{\alpha+2} & \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & k_2 & k_2 l_{\alpha+1} & k_2 l_{\alpha+2} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0 \ldots 0 & k_{\alpha-1} & k_{\alpha-1} l_{\alpha+1} & k_{\alpha-1} l_{\alpha+2} & \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & 1 & l_{\alpha+1} & l_{\alpha+2} & \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots k_{\alpha-1}$ — решение уравнений (4a), а $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \ldots$ решение уравнений (8). Эти величины при данном A, вполне определены; но вообще они — произвольны.

Обозначим сокращенно:

$$Z_1 = (k_\varkappa / l_\lambda).$$

Если x — любое число из P, то, как легко видеть:

$$Z_x = xZ_1.$$

Далее имеем:

$$Z_1^2 = Z_1;\ aZ_1 + bZ_1 = (a+b)\,Z_1;\ aZ_1 \cdot bZ_1 = abZ_1.$$

Мы считаем, что $k_\varkappa$ и l_λ ($k = 1, 2, \ldots \alpha - 1$; $\lambda = \alpha + 1, \ldots$ in inf.) здесь нам даны. Если же мы будем брать разные $k_\varkappa$, l_λ, то по (12) имеем:

$$\left(k_\varkappa / l_\lambda\right)\left(k'_\varkappa / l'_\lambda\right) = \left(k_\varkappa / l'_\lambda\right). \tag{13}$$

Отсюда следует, что все матрицы вида $(k_\varkappa / l_\lambda)$ с различными $k_\varkappa$ и l_λ составляют относительно умножения так называемую единичную обобщенную группу типа ядра, тогда как все матрицы Z типа (11) образуют вообще обобщенную группу типа ядра (относительно умножения).

§ 5. Рассмотрим теперь все диагональные матрицы над полем P; очевидно, что они образуют коммутативную и ассоциативную алгебру $\Delta \subset$ A. Если обозначить через e_λ матрицу, в которой на λ-м месте диагонали стоит единица, а все остальные элементы равны нулю, то диагональная матрица $D \in \Delta$ с диагональными элементами a_1, a_2, $a_3, \ldots$ in inf. представится в виде:

$$D = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Δ — бесконечная алгебра с „основными единицами"

$$e_\lambda\ (\lambda = 1, 2, \ldots \text{ in inf.}),$$

причем: $e_\varkappa e_\lambda = \delta_{\varkappa\lambda} e_\varkappa$, где $\delta_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = \lambda \\ 0 & \text{„ } \varkappa \neq \lambda \end{cases}.$

Можно считать, что Δ — прямая сумма бесчисленного (счётного) множества алгебр, просто изоморфных полю P. Регулярными элементами в Δ являются те матрицы, в которых все диагональные матрицы $a_i \neq 0$; все эти матрицы — алгебраические „единицы".

§ 6. Поставим теперь вопрос о двусторонних идеалах или об инвариантных субалгебрах в нашей алгебре **A**. Пусть **B** — одна из инвариантных субалгебр в **A** и $B \in$ **B**, причем B неособенная матрица; тогда существует $B \in$ **A** и $BB^{-1} = E \in$ **B**, а следовательно и всякая матрица из **A** находится в **B**, т. е. **B** = **A**. Таким образом, всякая инвариантная субалгебра для **A** (за исключением самой **A**) состоит из особенных матриц.

Все особенные матрицы из **A** не составляют субалгебры, но составляют обобщенную группу („ассоциативную систему") относительно умножения. Но совокупность матриц, у которых **все** диагональ[...] элементы равны нулю (назовем такие матрицы „существенно-осо[...]ными“), есть инвариантная субалгебра для **A**; обозначим ее чере[...]

Очевидно:

$$\mathbf{A} = \Delta + \Omega;$$

всякая матрица $A \in \mathbf{A}$ однозначно представляется в виде:

$$A = D + O, \quad (1[...]$$

где $D \in \Delta$, $O \in \Omega$; алгебры Δ и Ω „взаимно-простые“, т. е. имеют ед[...]ственную общую обеим матрицу — нулевую; т. е. **A** есть прям[...] сумма алгебр Δ и Ω.[1]

Пусть также:

$$A' = D' + O' \in \mathbf{A},\ D' \in \Delta,\ O' \in \Omega;$$

тогда:

$$A + A' = (D + D') + O'', \quad AA' = DD' + O''', \quad \text{где} \quad O'' \text{ и } O''' \in \Omega.$$

Это говорит, что фактор-алгебра $\mathbf{A}/\Omega$ просто изоморфна алгебре[...]

Пусть теперь A и B — две матрицы из Ω, и $AB = C$; элеме[...] из A, B, C обозначим соответственно через $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$; тогда по [...]

$$c_{\varkappa,\varkappa+1} = a_{\varkappa\varkappa} b_{\varkappa,\varkappa+1} + a_{\varkappa,\varkappa+1} b_{\varkappa+1,\varkappa+1} = 0$$

ибо

$$a_{\varkappa\varkappa} = b_{\varkappa+1,\varkappa+1} = 0.$$

Следовательно, в C не только главная диагональ состоит из ну[...]но и следующая за ней, справа параллельная ей, диагональ т[...] состоит из нулей.

Если для всякого $\varkappa$ при определенных α, β:

$$a_{\varkappa\varkappa} = a_{\varkappa,\varkappa+1} = \cdots = a_{\varkappa,\varkappa+\alpha} = 0, \qquad b_{\varkappa\varkappa} = b_{\varkappa,\varkappa+1} = \cdots = b_{\varkappa,\varkappa+\beta} = [...]$$

то и

$$c_{\varkappa,\varkappa+1} = a_{\varkappa\varkappa} b_{\varkappa,\varkappa+\lambda} + a_{\varkappa,\varkappa+1} b_{\varkappa+1,\varkappa+\lambda} + \cdots + a_{\varkappa,\varkappa+\lambda} b_{\varkappa+\lambda,\varkappa+\lambda} = [...]$$

при $\lambda \leqq \alpha + \beta + 1$.

Таким образом, если мы обозначим: $\Omega = \Omega_0$, а через Ω_k — алге[...] всех матриц из Ω, у которых k диагоналей справа от главной сост[...] из нулей, то:

$$\Omega_0 \Omega_0 \subset \Omega_1; \quad \Omega_\alpha \Omega_\beta \subset \Omega_{\alpha+\beta+1}. \quad (1[...]$$

Если $A \in \Omega_\alpha$, $B \in \Omega_\beta$ и, следовательно, $C = AB \in \Omega_{\alpha+\beta+1}$, то име[...]

$$c_{\varkappa,\varkappa+\alpha+\beta+2} = a_{\varkappa,\varkappa+\alpha+1} b_{\varkappa+\alpha+1,\varkappa+\alpha+\beta+2};$$

$$c_{\varkappa,\varkappa+\alpha+\beta+3} = a_{\varkappa,\varkappa+\alpha+1} b_{\varkappa+\alpha+1,\varkappa+\alpha+\beta+3} + a_{\varkappa,\varkappa+\alpha+2} b_{\varkappa+\alpha+2,\varkappa+\alpha+\beta+3};$$

[1] Определение прямой суммы см., напр., в книге Н. Г. Чеботарева „Вв[...]ние в теорию алгебр“, стр. 35.

$$c_{\varkappa,\,\varkappa+\alpha+\beta+4} = a_{\varkappa,\,\varkappa+\alpha+1}\, b_{\varkappa+\alpha+1,\,\varkappa+\alpha+\beta+4} + a_{\varkappa,\,\varkappa+\alpha+2}\, b_{\varkappa+\alpha+2,\,\varkappa+\alpha+\beta+4} + a_{\varkappa,\,\varkappa+\alpha+3}\, b_{\varkappa+\alpha+3,\,\varkappa+\alpha+\beta+4}.$$

Отсюда видно, что при данном $C \in \Omega_{\alpha+\beta+1}$ можно всегда подобрать $A \in \Omega_\alpha$ и $B \in \Omega_\beta$ так, что будет: $C = AB$. Т. е. формулы (15) можно заменить более точными:

$$\Omega_0\,\Omega_0 = \Omega_1\,; \quad \Omega_\alpha\,\Omega_\beta = \Omega_{\alpha+\beta+1}\,. \tag{15a}$$

Легко видеть, что Ω_k при всяком $k = 1, 2, 3, \ldots$ in inf. інвариантная субалгебра для $\mathbf{A}$, для Ω и вообще для всякого Ω_h при $h < k$.

Таким образом, имеем бесконечную убывающую цепь инвариантных субалгебр для $\mathbf{A}$:

$$\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \text{ in inf.} \tag{16}$$

Алгебру Ω можно рассматривать как обобщение радикала для $\mathbf{A}$. Очевидно, всякая нильпотентная матрица из $\mathbf{A}$ входит в Ω; но не всякая матрица из Ω нильпотентна в обычном смысле; если $A \in \Omega$, то по (15) $A^{m+1} \in \Omega_m$; можно считать, что $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$. Таким образом, можно считать, что Ω — максимальная „ниль потентная" субалгебра и порядок её нильпотентности $= \infty$.

§ 7. Рассмотрим теперь инвариантную субалгебру $\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{A}$ всех матриц из $\mathbf{A}$, в которых элемент $a_{\alpha\alpha} = 0$ (при некотором определенном α; но и другие элементы диагонали отдельных матриц из $\mathbf{A}_\alpha$ могут оказаться равными нулю).

Пусть $A = (a_{\alpha\beta}) \in \mathbf{A}$; тогда:

$$A = a_{\alpha\alpha}\, e_\alpha + A_\alpha\,, \quad \text{где} \quad A_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\,;$$

и это представление для данного A однозначно. Если и

$$B = b_{\alpha\alpha}\, e_\alpha + B_\alpha \in \mathbf{A}, \quad B_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\,,$$

то

$$A + B = (a_{\alpha\alpha} + b_{\alpha\alpha})\, e_\alpha + Z_\alpha\,; \quad AB = a_{\alpha\alpha}\, b_{\alpha\alpha}\, e_\alpha + U_\alpha\,,$$

где Z_α и $U_\alpha \in \mathbf{A}$.

Это означает, что фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{A}_\alpha$ просто изоморфна полю P (для всякого α); следовательно, алгебры $\mathbf{A}_\alpha$ — простые идеалы.

Аналогично обозначим через $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ алгебру всех матриц из $\mathbf{A}$, у которых диагональные элементы, стоящие на α-м и на β-м местах, равны нулю; легко видеть, что $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ — инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}$. Если $X \in \mathbf{A}$ — произвольная матрица с элементами $x_{\chi\lambda}$, то:

$$X = x_{\alpha\alpha}\, e_\alpha + x_{\beta\beta}\, e_\beta + X_{\alpha\beta}\,, \quad \text{где} \quad X_{\alpha\beta} \in \mathbf{A}_{\alpha\beta}\,,$$

и такое представление однозначно.

Фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ здесь просто изоморфна алгебре 2-го порядка над P *с основными единицами* e_α, e_β *при условиях:*

$$e_\alpha^2 = e_\alpha\,, \quad e_\beta^2 = e_\beta, \quad e_\alpha\, e_\beta = e_\beta\, e_\alpha = 0.$$

Это все обобщается на алгебру тех матриц из **A**, в которы[х] определенных местах главной диагонали стоят нули (при этом м[но]жество этих мест может быть конечным или бесконечным).

Очевидно:

$$\mathbf{A}_{\alpha} \supset \mathbf{A}_{\alpha\beta} \supset \mathbf{A}_{\alpha\beta\gamma} \supset \ldots \Omega;$$

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha} \cap \mathbf{A}_{\beta}, \quad \mathbf{A}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{A}_{\alpha} \cap \mathbf{A}_{\beta} \cap \mathbf{A}_{\gamma},$$

и т. д. (здесь $\cap$ — знак пересечения).

Наконец:

$$\Omega = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \ldots$$

§ 8. Из формулы (1) видно, что, если (при $A = (a_{\alpha\beta})$, $B = (b$… $C = AB = (c_{\alpha\beta})$) при $\varkappa > \alpha$ все $a_{\varkappa\lambda} = 0$ или все $b_{\varkappa\lambda} = 0$, то и все $c_{\varkappa\lambda} =$ … Следовательно, все матрицы из **A**, строки которых, начиная с $(\alpha + 1$… состоят из нулей, составляют инвариантную субалгебру, которую … обозначим через $\mathbf{K}_{\alpha}$.

Далее, из (1) заключаем: если при $\lambda < \alpha$ все $a_{\varkappa\lambda} = 0$ или все $b_{\varkappa\lambda} =$ … то и все $c_{\varkappa\lambda} = 0$. Следовательно, все матрицы из **A**, в которых п[ер]вые $\alpha - 1$ столбцов состоят из нулей, образуют инвариантную су[б]алгебру, которую мы обозначим через $\Lambda_{\alpha-1}$.

Из формулы (1) также получается: если при $\varkappa < \alpha$ все $a_{\varkappa\lambda} = 0$, … и все $c_{\varkappa\lambda} = 0$. Т. е. все матрицы из **A**, в которых первые $\alpha - 1$ ст[роки] состоят из нулей, образуют л е в ы й идеал для **A**, который мы об[о]значим через $\mathbf{K}'_{\alpha-1}$.

Наконец, из формулы (1) заключаем: если при $\lambda > \alpha$ все $b_{\varkappa\lambda} =$ … то и все $c_{\varkappa\lambda} = 0$; т. е. все матрицы из **A**, в которых все столб[цы], начиная с $(\alpha + 1)$-го, состоят из нулей, образуют п р а в ы й идеал дл[я] … который мы обозначим через Λ'_{α}.

Очевидно, что:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{\alpha} + \mathbf{K}'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha} + \Lambda'_{\alpha}. \qquad (17)$$

Заметим, что $\mathbf{K}_{\alpha}$ и $\mathbf{K}'_{\alpha}$ имеют единственную общую матрицу — нулевую; подобно же Λ_{α} и Λ'_{α}.

Далее

$$\mathbf{K}'_{\alpha}\mathbf{K}_{\alpha} = 0; \quad \Lambda_{\alpha}\Lambda'_{\alpha} = 0. \qquad (18)$$

Пусть A и A_1 — любые матрицы из **A**; тогда по (17):

$$A = K + K', \quad A_1 = K_1 + K_1; \quad K \text{ и } K_1 \in \mathbf{K}_{\alpha}, \quad K' \text{ и } K'_1 \in \mathbf{K}'_{\alpha},$$

причем эти представления A и A_1, однозначны.

Далее:

$$A + A_1 = (K + K_1) + (K' + K'_1);$$

$$AA_1 = KK_1 + KK'_1 + K'K_1 + K'K'_1;$$

но $KK_1 \in \mathbf{K}_\alpha$, $KK_1' \in \mathbf{K}_\alpha$, ибо $\mathbf{K}_\alpha$ инвариантная субалгебра, $K'K_1 = 0$ по первой формуле (18); $K'K_1' \in \mathbf{K}_\alpha'$.

Обозначив: $KK_1 + KK_1' = K_2$,

получим: $AA_1 = K_2 + K'K_1'$, где $K_2 \in \mathbf{K}_\alpha$.

Отсюда следует, что фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{K}_\alpha$ просто изоморфна с $\mathbf{K}_\alpha'$, т. е. с $\mathbf{A}$, ибо легко видеть, что алгебра $\mathbf{K}_\alpha'$ просто изоморфна с $\mathbf{A}$.

Аналогично, по той же формуле (17), имеем:

$$A = L' + L, \quad A_1 = L_1' + L_1, \text{ где } L',\ L_1' \in \Lambda_\alpha';\ L,\ L_1 \in \Lambda_\alpha,$$

причем эти представления A и A_1 однозначны.

Далее:

$$A + A_1 = (L' + L_1') + (L + L_1);\ AA_1 = L'L_1' + L'L_1 + LL_1' + LL_1;$$

но $L'L_1' \in \Lambda_\alpha'$; $L'L_1 \in \Lambda_\alpha$; $LL_1' = 0$ (по второй формуле (18)); $LL_1 \in \Lambda_\alpha$;

следовательно:

$$AA_1 = L'L_1' + L_2, \text{ где } L_2 = L'L_1 + LL_1 \in \Lambda_\alpha.$$

Таким образом, фактор-алгебра $\mathbf{A}/\Lambda_\alpha$ просто изоморфна алгебре Λ_α', а Λ_α', как легко видеть, просто изоморфна алгебре всех конечных треугольных матриц α-го порядка (над полем P).

§ 9. Рассмотрим теперь матрицы из $\mathbf{A}$, в которых все строки, кроме α-ой, состоят из нулей; совокупность таких матриц обозначим через Z_α. Из той же основной формулы (1) следует, что Z_α — левый идеал для $\mathbf{A}$ (а следовательно, субалгебра, но не инвариантная).

Пусть $A = (a_{\varkappa\lambda}) \in \mathbf{A}$, $B = (b_{\varkappa\lambda}) \in Z_\alpha$; $C = AB = (c_{\varkappa\lambda})$; по формуле (1):

$$c_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\varkappa} b_{\varkappa\lambda} + a_{\varkappa,\varkappa+1} b_{\varkappa+1,\lambda} + \ldots + a_{\varkappa\lambda} b_{\lambda\lambda}. \tag{1a}$$

Отсюда видно, что при $\varkappa > \alpha$ или при $\lambda < \alpha$ $c_{\varkappa\lambda} = 0$; при $\varkappa \leqq \alpha \leqq \lambda$ $c_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\alpha} b_{\alpha\lambda}$; таким образом:

$$C = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{1\alpha} b_{\alpha\alpha} & a_{1\alpha} b_{\alpha,\alpha+1} & \ldots \\ 0 \ldots 0 & a_{2\alpha} b_{\alpha\alpha} & a_{2\alpha} b_{\alpha,\alpha+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & a_{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\alpha} b_{\alpha,\alpha+1} & \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}; \tag{11a}$$

это — та же матрица, что и (11) в § 4. Заметим, что из матрицы $\mathbf{A}$ здесь используется только α-й столбец.

Если $A \in Z_\alpha$, $B \in Z_\beta$, $\beta \neq \alpha$, $C = AB$, то по (1a) при $\alpha > \beta$ вообще все $c_{\varkappa\lambda} = 0$, т. е. и $C = 0$, а при $\alpha < \beta$ при $\varkappa \neq \alpha$, или при $\varkappa = \alpha$, $\lambda > \beta$ $c_{\varkappa\lambda} = 0$, тогда как при $\varkappa = \alpha$, $\lambda \geqq \beta$ $c_{\alpha\lambda} = a_{\alpha\beta} b_{\beta\lambda}$; т. е. в C все строки состоят из нулей, кроме α-й строки, а элементы α-й строки пропорциональны элементам β-й строки в B, причем множитель пропорциональности $= a_{\alpha\beta}$.

Таким образом, при $\alpha > \beta$ $Z_\alpha Z_\beta = 0$; при $\alpha \leqq \beta$ $Z_\alpha Z_\beta \subset Z_\alpha$.

Рассмотрим теперь совокупность $Z_\alpha + Z_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ тех матриц из **A**, в которых все элементы равны нулю, кроме элементов α-й и β-й строк. Пусть $A_1, A_2 \in Z_\alpha$; $B_1, B_2 \in Z_\beta$, тогда:

$$(A_1 + B_1)(A_2 + B_2) = A_1 A_2 + A_1 B_2 + B_1 A_2 + B_1 B_2;$$

но

$$A_1 A_2 \in Z_\alpha, \quad B_1 B_2 \in Z_\beta,$$

а из произведений $A_1 B_2$ и $B_1 A_2$ одно равно нулю, а другое — из Z_α или из Z_β; следовательно, во всяком случае: $(A_1 + B_1)(A_2 + B_2) \in Z_\alpha + Z_\beta$, и $Z_\alpha + Z_\beta$ субалгебра для **A**; но не только субалгебра, а и левый идеал для **A**, ибо при $X \in \mathbf{A}$ $(A_1 + B_1) X = A_1 X + B_1 X \in Z_\alpha + Z_\beta$.

Это непосредственно обобщается на случай конечного множества субалгебр $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma, \ldots$ и даже бесконечного счётного множества $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma, \ldots$ $(\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ in inf.); их сумма — тоже левый идеал для **A**. Мы обозначим:

$$Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma + \ldots = Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$$

Если $A_\alpha \in Z_\alpha$, $A_\beta \in Z_\beta$, $A_\gamma \in Z_\gamma, \ldots$, $X \in \mathbf{A}$, то для умножения: $(A_\alpha + A_\beta + A_\gamma + \ldots) X$ верен дистрибутивный закон, ибо он ведь сводится к обычному правилу умножения матриц (ибо $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \ldots$ ведь только „строки").

Исследуем, может ли субалгебра $Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ быть инвариантной. В этом случае и $\mathbf{A} Z_{\alpha\beta\gamma\ldots} \subset Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$; но при $X \in \mathbf{A}$, $A \in Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ XA — сумма матриц вида (11); следовательно, для того, чтобы $Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ была инвариантной субалгеброй, во-первых, множество номеров $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ должно быть конечным; во-вторых, эти номера должны составлять часть натурального ряда чисел — от 1 до некоторого числа α; в этом случае $Z_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ действительно будет инвариантной субалгеброй; таковы, напр., Z_1, $Z_{1,2}$, вообще $Z_{1,2,\ldots\alpha}$. Но $Z_{1,2,\ldots\alpha} = \mathbf{K}_\alpha$ — та же субалгебра, которую мы рассматривали в § 8.

§ 10. Теперь рассмотрим совокупность Θ_α матриц из **A**, в которых α-я строка состоит из нулей. Из основной формулы (1) или (1a) следует, что при $A \in \Theta_\alpha$, $B \in \mathbf{A}$ и $AB \in \Theta_\alpha$, т. е. Θ_α — алгебра и левый идеал для **A**. Легко убедиться, что и множества: $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_\alpha \cap \Theta_\beta$, $\Theta_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \cap \Theta_\gamma$ и т. д. — тоже левые идеалы для **A**; даже в случае бесконечного (счётного) множества номеров $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ in inf.:

$\Theta_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \cap \Theta_\gamma \cap \ldots$ — левый идеал для **A**.

Рассмотренный в § 8 левый идеал $\mathbf{K}'_\alpha$ — не что иное, как $\Theta_{12\ldots\alpha}$.

Пусть $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ — возрастающая последовательность (конечная или бесконечная) натуральных чисел, а $\alpha' < \beta' < \gamma' < \ldots$ „дополнительная" последовательность натуральных чисел, образованная теми натуральными числами, которые не входят в первую последовательность.

Тогда:

$$Z_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Theta_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots}$$

§ 11. Теперь рассмотрим совокупность матриц из **A**, в которых все столбцы, кроме α-го состоят из нулей; обозначим эту совокупность через Z'_α. При $A \in \mathbf{A}$, $B \in Z'_\alpha$, $C = AB \in Z'_\alpha$, как легко выводим из (1a). Следовательно, Z'_α— алгебра и правый идеал для **A**.

Пусть теперь $A \in Z'_\alpha$, $B \in \mathbf{A}$; тогда из (1a) получаем: при $\varkappa > \alpha$ или при $\lambda < \alpha$ $c_{\varkappa\lambda} = 0$, а при $\varkappa \leqq \alpha \leqq \lambda$ $c_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\alpha} b_{\alpha\lambda}$. Следовательно, в этом случае $C = AB$ имеет форму (11a). Заметим, что в матрице B здесь используется только α-я строка.

То же получим, если $A \in Z'_\alpha$, $B \in Z_\alpha$; отсюда следует, что $Z'_\alpha Z_\alpha$— обобщенная группа (относительно умножения) матриц вида (11a) (ср. конец § 4).

Если же $\alpha \neq \beta$, то: $Z'_\alpha Z_\beta = 0$.

Далее: $Z'_\alpha Z'_\beta = 0$ при $\alpha > \beta$; $Z'_\alpha Z'_\beta \in Z'_\beta$ при $\alpha \leqq \beta$.

Обозначим через Θ'_α совокупность матриц из **A**, в которых α-й столбец состоит из нулей; из (1a) легко убедиться, что Θ'_α — алгебра и правый идеал для **A**. Если $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ конечное или бесконечное множество натуральных чисел (номеров), то, как и в §§ 9 и 10, найдем:

$$Z'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = Z'_\alpha + Z'_\beta + Z'_\gamma + \ldots \text{ и } \Theta'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Theta'_\alpha \cap \Theta'_\beta \cap \Theta'_\gamma \cap \ldots$$

тоже алгебры и правые идеалы для **A**.

Если $\alpha' < \beta' < \gamma' < \ldots$ „дополнительный" ряд для $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$, то:

$$Z'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Theta'_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots}$$

§ 12. В дальнейшем обозначим через $e_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqq \beta)$ матрицу, в которой на пересечении α-й строки и β-го столбца стоит единица (т. е. $a_{\alpha\beta} = 1$), а все остальные элементы равны нулю. Если же $\alpha > \beta$, то будем считать: $e_{\alpha\beta} = 0$ (нулевая матрица).

Рассмотрим пересечение: $U_\alpha^{(\beta)} = Z_\alpha \cap Z'_\beta$. Легко убедиться, что матрицы из $U_\alpha^{(\beta)}$ имеют вид: $a \cdot e_{\alpha\beta}$, где a — скалярный множитель (т. е. из P).

Легко видеть, что $e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} = 0$ при $\beta \neq \gamma$, тогда как $e_{\alpha\beta} e_{\beta\delta} = e_{\alpha\delta}$.[1] Отсюда следует, что при $\alpha < \beta$ $U_\alpha^{(\beta)}$ — нильпотентная алгебра; а при $\alpha > \beta$ $U_\alpha^{(\beta)} = 0$; при $\alpha = \beta$ $U_\alpha^{(\alpha)}$ — просто изоморфна полю P.

Обобщая предыдущее, рассмотрим пересечение:

$$U_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}^{(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)} = Z_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \cap Z'_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}.$$

---

[1]) Конечно, при $\alpha < \beta < \delta$.

Легко видеть, что пересечение алгебр — тоже алгебра.

Если $A \in U^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$, то $A = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} e_{\alpha_\varkappa \beta_\lambda}$; (19)

здесь $a_{\varkappa\lambda}$ — скаляры (из P). Между этими матрицами (19) и между mn-матрицами над полем P легко установить взаимнооднозначное соотношение, если только $\alpha_m \leqq \beta_1$, именно, матрице (19) соответствует mn-матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{2_2} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Если же $\alpha_m > \beta_1$, то матрице A (19) тоже соответствует mn-матрица $\bar{A}$, отличающаяся от (20) только тем, что в нижнем левом углу её стоят нули. В частности, может оказаться, что $\bar{A}$ — треугольная матрица (см. ниже, конец этого параграфа). Это соотношение (в обоих случаях) сохраняется при сложении, а именно:

$$\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}.$$

Что касается умножения, то для mn-матриц при $m \neq n$ вообще не определено умножение. Но наши матрицы (19) перемножать можно, и произведения получаются той же самой формы (19), ибо $U^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ — алгебра; и это обычное умножение матриц (19) определяет некоторое новое действие, род умножения, и для матриц (20). Именно, если $AB = C$, то мы определим: $\bar{A}\bar{B} = \bar{C}$,

Заметим, что это новое „умножение" вообще не совпадает с обычным умножением конечных матриц n-го порядка при $m = n$.

Пример 1. Рассмотрим $U^{(34)}_{123}$; матрицы этой алгебры имеют вид:

$$A = a_{13} e_{13} + a_{14} e_{14} + a_{23} e_{23} + a_{24} e_{24} + a_{33} e_{33} + a_{34} e_{34};$$

пусть еще:

$$B = b_{13} e_{13} + b_{14} e_{14} + b_{23} e_{23} + b_{24} e_{24} + b_{33} e_{33} + b_{34} e_{34};$$

тогда

$$AB = a_{13} b_{33} e_{13} + a_{13} b_{34} e_{14} + a_{23} b_{33} e_{23} + a_{23} b_{34} e_{24} + a_{33} b_{33} e_{33} + a_{33} b_{34} e_{34}.$$

Здесь:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

и закон умножения этих (3, 2) — матриц следующий·

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} a_{13} b_{33} & a_{13} b_{34} \\ a_{23} b_{33} & a_{23} b_{34} \\ a_{33} b_{33} & a_{33} b_{34} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим алгебру $U^{(25)}_{15}$; ее матрицы имеют вид

$$A = a_{12}e_{12} + a_{15}e_{15} + a_{55}e_{55};$$

если и

$$B = b_{12}e_{12} + b_{15}e_{15} + b_{55}e_{55},$$

то:

$$AB = a_{15}b_{55}e_{15} + a_{55}b_{55}e_{55}.$$

Здесь (если изменить обозначения):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, если в $U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$ ни одно β_λ не равно ни одному α_μ, то для всех матриц A и B из $U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$ $AB = 0$, т. е. $U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$, так называемая „нулевая" алгебра.

Если $m = n$, то матрицы (20) квадратные, конечные, n-го порядка. Выясним, когда в этом случае наше „искусственное" умножение сводится на обычное умножение матриц. Легко видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ были одинаковы, т. е. чтобы было: $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \dots \beta_n = \alpha_n$.

Обозначим: $U^{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = U_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$; это — алгебра всех треугольных матриц n-го порядка над полем $\mathbf{P}$.

Алгебры $U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$, в частности $U_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ — не идеалы для $\mathbf{A}$; легко видеть, что:

$$U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}\mathbf{A} \subset Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}; \quad \mathbf{A}U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} \subset Z'_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}.$$

§ 13. Пересечение двух алгебр $U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$ и $U^{(\delta_1\delta_2\dots\delta_l)}_{\gamma_1\gamma_2\dots k}$ — тоже алгебра того же типа: $U^{(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_s)}_{\rho_1\rho_2\dots\rho_r}$, где $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_r$ — номера, общие двум рядам: $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ (или „пересечение" этих двух рядов); подобно же, $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_s$ — „пересечение" рядов $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ и $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_l$. Если одно из этих двух пересечений „пустое", то пересечение соответствующих алгебр равно нулю (т. е. есть одна лишь нулевая матрица).

Посмотрим теперь, составляет ли алгебру сумма алгебр:

$$U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} + U^{(\delta_1\delta_2\dots\delta_l)}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k}.$$

Пусть:

$$A = \sum_{\substack{\varkappa=1,\dots m \\ \lambda=1,\dots n}} a_{\varkappa\lambda}e_{\alpha_\varkappa\beta_\lambda}, \quad B = \sum_{\substack{\mu=1,\dots m \\ \nu=1,\dots n}} b_{\mu\nu}e_{\alpha_\mu\beta_\nu} \quad \text{из} \quad U^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

$$A_1 = \sum_{\substack{\rho=1,\dots k \\ \sigma=1,\dots l}} a'_{\rho\sigma}e_{\gamma_\rho\delta_\sigma}, \quad B_1 = \sum_{\substack{\tau=1,\dots k \\ \upsilon=1,\dots l}} b'_{\tau\upsilon}e_{\gamma_\tau\delta_\upsilon} \quad \text{из} \quad U^{(\delta_1,\dots\delta_l)}_{\gamma_1,\dots\gamma_k}$$

Тогда:

$$(A+A_1)(B+B_1)=\sum_{\varkappa,\lambda}\sum_{\mu,\nu}a_{\varkappa\lambda}b_{\mu\nu}e_{\alpha_\varkappa\beta_\lambda}e_{\alpha_\mu\beta_\nu}+\sum_{\varkappa,\lambda}\sum_{\tau,\upsilon}a_{\varkappa\lambda}b'_{\tau\upsilon}e_{\alpha_\varkappa\beta_\lambda}e_{\gamma_\tau\delta_\upsilon}+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma}\sum_{\mu,\nu}a'_{\rho\sigma}b_{\mu\nu}e_{\gamma_\rho\delta_\sigma}e_{\alpha_\mu\beta_\nu}+\sum_{\rho,\sigma}\sum_{\tau,\upsilon}a'_{\rho\sigma}b'_{\tau\upsilon}e_{\gamma_\rho\delta_\sigma}e_{\gamma_\tau\delta_\upsilon}.$$

Из четырех сумм правой части первая принадлежит к $U^{(\beta_1\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$, а последняя к $U^{(\delta_1\ldots\delta_l)}_{\gamma_1\ldots\gamma_k}$; две средние вообще не принадлежат ни к одной из этих двух алгебр, т. е. в общем случае они должны быть равны нулю для того, чтобы $(A+A_1)(B+B_1)$ принадлежала бы к $U^{(\beta_1\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}+U^{(\delta_1\ldots\delta_l)}_{\gamma_1\ldots\gamma_k}$. А для этого пересечение рядов $\alpha_1,\ldots\alpha_m$ и $\delta_1,\ldots\delta_l$ должно быть пустым; точно так же и пересечение рядов $\beta_1,\ldots\beta_n$ и $\gamma_1,\ldots\gamma_k$ должно быть пустым.

В частности, если ряды $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ и $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n$ имеют пустое пересечение, то $U_{\alpha_1,\ldots\alpha_m}+U_{\beta_1,\ldots\beta_n}$ — алгебра, и при этом прямая сумма алгебр $U_{\alpha_1,\ldots\alpha_m}$ и $U_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$.

Можно взять прямую сумму нескольких, даже счётного множества, таких алгебр:

$$\sum_\varkappa U_{\alpha_1^{(\varkappa)}\alpha_2^{(\varkappa)}\ldots\alpha_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}},$$

где никакие два ряда $\alpha_1^{(\varkappa)},\alpha_e^{(\varkappa)},\ldots\alpha_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}$ не имеют общих номеров.

Такая прямая сумма — алгебра треугольных квазидиагональных матриц (определенного строения). В случае бесчисленного множества слагаемых порядки $n_\varkappa$ отдельных слагаемых могут быть ограничены или не ограничены в своей совокупности; в первом случае существует такое число $M>0$, что для всякого k $n_\varkappa<M$; во втором случае для всякого $P>0$ можно найти такое k (и не одно, а бесчисленное множество таких номеров k), что $n_\varkappa>P$.

§ 14. Найдем еще пересечение алгебры $U^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ с алгеброй Ω (см. § 6). Если ряды $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ и $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n$ совсем не имеют общих номеров, то $U^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\subset\Omega$; такая алгебра $U^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ нильпотентна (в обычном смысле). В общем же случае $U^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\cap\Omega$ состоит из тех матриц в $U^{(\beta_1\ldots\beta_n)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$, в которых все диагональные элементы равны нулю; это пересечение — тоже нильпотентная алгебра. В частности, можно найти пересечение Ω и $U_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$, а также пересечение Ω и $\sum_\varkappa U_{\alpha_1^{(\varkappa)}\alpha_2^{(\varkappa)}\ldots\alpha_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}}$, где сумма имеет конечное или бесконечное множество слагаемых. В первом, а также во втором случае, если только числа $n_\varkappa$ ограничены в своей совокупности, это пересечение тоже представляет собой нильпотентную алгебру в обычном смысле.

Кроме этих имеются еще нильпотентные субалгебры в **А**. Напр., пересечение: $Z_\alpha^{(0)} = \Omega \cap Z_\alpha$ (Z_α — та же алгебра, что и в § 9) даже „нулевая" алгебра, т. е.: $\left(Z_\alpha^{(0)}\right)^2 = 0$; а по формулам § 9: $Z_\alpha^{(0)} Z_\beta^{(0)} = 0$ при $\alpha \geqq \beta$; и $Z_\alpha^{(0)} Z_\beta^{(0)} \subset Z_\alpha^{(0)}$ при $\alpha < \beta$. Таким образом, при $\alpha < \beta$:

$$\left(Z_\alpha^{(0)} + Z_\beta^{(0)}\right)^2 \subset Z_\alpha^{(0)};\ \left(Z_\alpha^{(0)} + Z_\beta^{(0)}\right)^3 = 0.$$

Вообще:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^2 \subset \sum_{\varkappa=1}^{m-1} Z_\varkappa^{(0)};$$

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^3 \subset \left(\sum_{\varkappa=1}^{m-1} Z_\varkappa^{(0)}\right)^2, \text{ ибо } Z_m^{(0)} Z_\varkappa^{(0)} = 0 \text{ при } \varkappa = 1, 2, \ldots m;$$

но $\left(\sum_{\varkappa=1}^{m-1} Z_\varkappa^{(0)}\right)^2 \subset \sum_{\varkappa=1}^{m-2} Z_\varkappa^{(0)}$, следовательно: $\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^3 \subset \sum_{\varkappa=1}^{m-2} Z_\varkappa^{(0)}$.

Методом полной индукции легко доказать, что:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^\lambda \subset \sum_{\varkappa=1}^{m-\lambda+1} Z_\varkappa^{(0)};$$

при $\lambda = m$:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^m \subset Z_1^{(0)};\ \left(\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}\right)^{m+1} = 0.$$

Следовательно, $\sum_{\varkappa=1}^{m} Z_\varkappa^{(0)}$ нильпотентная алгебра с индексом $m+1$.