ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ (II)

Н. И. Ахиезер и В. А. Марченко

(Харьков)

§ 1. В настоящей заметке мы будем пользоваться известной формулой Пуассона

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-2\pi imt}\, dt, \tag{1}$$

для справедливости которой достаточно, чтобы функция $g(t)$ стремилась к нулю при $t \to \pm\infty$ и имела абсолютно интегрируемую на всей оси производную первого порядка.

Положим, что $f(x)$ есть целая трансцендентная функция экспоненциального типа (коротко: ц. ф. э. т.) с показателем $\leqslant \sigma$, для которой при некотором целом $r \geqslant 0$

$$\frac{f(x)}{|x-i|^{2r+1}} \in L^2(-\infty, \infty).$$

При выполнении этих условий будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $W_\sigma^{(r)}$.

Возьмём произвольное натуральное число n, положим $h = \frac{\sigma}{n}$ и введём ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant \sigma + h(r+1)$

$$f_h(x) = f(x)\left(\frac{2\sin\frac{xh}{2}}{xh}\right)^{2r+2}$$

Так как

$$f_h(x) = F(x)\,\frac{2\sin\frac{xh}{2}}{xh},$$

где

$$F(x) = f(x)\left(\frac{2\sin\frac{xh}{2}}{xh}\right)^{2r+1} \in L^2(-\infty, \infty),$$

то $f_h(x)$ принадлежит как $L^2(-\infty, \infty)$, так и $L^1(-\infty, \infty)$. Кроме того, легко проверить, что $f_h(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Покажем теперь, что к функции

$$g(t)=f_h\left(x+\frac{2\pi t}{h}\right) \tag{2}$$

применима формула (1). Для этого достаточно проверить абсолютную интегрируемость на всей оси функции $g'(t)$.

Так как $g(t)$ есть произведение двух ц. ф. э. т., принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$, то абсолютная интегрируемость функции $g'(t)$ есть следствие того, что принадлежность $L^2(-\infty, \infty)$ ц. ф. э. т. $G(t)$ влечёт принадлежность $L^2(-\infty, \infty)$ также и производной $G'(t)$.

Формула (1) для функции (2) имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{2k\pi}{h}\right)\left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\right)^{2r+2}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_h^{(r)}(mh)\, e^{imhx}=s_h^{(r)}(x), \tag{3}$$

где

$$A_h^{(r)}(t)=\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\frac{2\sin\frac{hu}{2}}{hu}\right)^{2r+2} e^{-iut}\,du. \tag{4}$$

Величина $A_h^{(r)}(t)$, очевидно, равна нулю при $t\geqslant\sigma+h(r+1)$, а также при $t\leqslant-\sigma-h(r+1)$. Поэтому $s_h^{(r)}(x)$ есть тригонометрическая сумма порядка $n+r$ с периодом $\frac{2\pi}{h}$. При $r=0$ эта тригонометрическая сумма совпадает с полиномом Б. М. Левитана [1]. При $r>0$ мы получаем обобщение полиномов Б. М. Левитана, которое было рассмотрено одним из нас [2]. Здесь мы получили новое представление этих полиномов

$$s_h^{(r)}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{2k\pi}{h}\right)\left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\right)^{2r+2} \tag{5}$$

Это представление иногда удобно для оценки быстроты, с которой $s_h^{(r)}(x)$ стремится к $f(x)$ при $n\to\infty$ $(h\to 0)$.

Действительно,

$$f(x)-s_h^{(r)}(x)=f(x)\left\{1-\left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx}\right)^{2r+2}\right\}-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' f\left(x+\frac{2k\pi}{h}\right)\left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\right)^{2r+2}$$

Допустим, что

$$|f(x)| \leqslant A + Bx^{2r} \quad (-\infty < x < \infty).$$

В таком случае

$$\left|f(x) - s_h^{(r)}(x)\right| \leqslant \left(A + Bx^{2r}\right) \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx}\right)^{2r+2} \right\} +$$

$$+ A \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx + 2k\pi}\right)^{2r+2} + $$

$$+ B \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(2\sin\frac{hx}{2}\right)^{2r+2} \frac{1}{h^{2r}} \frac{1}{(hx + 2k\pi)^2}.$$

Откуда

$$\left|f(x) - s_h^{(r)}(x)\right| \leqslant (A + Bx^{2r})(r+1) \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx}\right)^2 \right\} +$$

$$+ (A + Bx^{2r}) \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx}\right)^2 \right\} =$$

$$= (A + Bx^{2r})(r+2) \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx}\right)^2 \right\}.$$

Эта оценка лучше той, которая дана в статьях [2], [3].

§ 2. Для построения полиномов $s_h^{(r)}(x)$ не требуется знания всех значений функции $f(x)$. Мы покажем, что достаточно знать значения $f(x)$ лишь для определённых дискретных значений аргумента.

С этой целью положим

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^{2r}\frac{f^{(2r)}(0)}{(2r)!} + x^{2r+1}F(x).$$

Здесь $F(x)$ так же, как и $f(x)$, есть ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant \sigma$. Полагая

$$\varphi(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^{2r}\frac{f^{(2r)}(0)}{(2r)!},$$

$$\psi(x) = x^{2r+1}F(x),$$

представим $s_h^{(r)}(x)$ в виде

$$s_h^{(r)}(x) = s_h^{(r)}(\varphi;\, x) + s_h^{(r)}(\psi;\, x).$$

Для построения первого слагаемого нужно знать лишь величины $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(2r)}(0)$. Обратимся ко второму слагаемому

$$s_h^{(r)}(\psi; x) = \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{h}\right)^{2r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(x + \frac{2k\pi}{h}\right) \frac{\left(2\sin\frac{hx}{2}\right)^2}{(hx+2k\pi)h}$$

Здесь суммируется функция

$$g(t) = F\left(x + \frac{2t\pi}{h}\right) \frac{\left(2\sin\frac{hx+2t\pi}{2}\right)^2}{h(hx+2t\pi)},$$

которая стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ и производная которой абсолютно интегрируема на всей оси согласно замечаниям § 1.

В силу формулы Пуассона

$$s_h^{(r)}(\psi; x) = \left(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{h}\right)^{2r} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} B_m e^{imhx}$$

где

$$B_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \frac{\left(2\sin\frac{hu}{2}\right)^2}{hu} e^{-imhu} du .$$

Возьмём теперь функцию

$$F\left(\frac{\pi x}{\sigma}\right) \frac{\left(2\sin\frac{h\pi x}{2\sigma}\right)^2}{h\frac{\pi x}{\sigma}} e^{-imh\frac{\pi x}{\sigma}} \quad \left(h = \frac{\sigma}{n}\right),$$

где m — одно из чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)$.

Применение формулы Пуассона даёт

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \frac{\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2}{\frac{k\pi}{n}} e^{-im\frac{k\pi}{n}} =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{t\pi}{\sigma}\right) \frac{\left(2\sin\frac{t\pi}{2n}\right)^2}{\frac{t\pi}{n}} e^{-im\frac{t\pi}{n}} e^{-2\pi irt} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \frac{\left(2\sin\frac{hy}{2}\right)^2}{hy} e^{-imhy} e^{-2nhiry} dy .$$

Так как $F(y)$ ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant \sigma = nh$ и число m удовлетворяет неравенству

$$-n < m < n,$$

то фигурирующий под знаком суммы интеграл будет равен нулю для всех r, кроме $r = 0$. Следовательно,

$$B_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,\frac{\left(2\sin\frac{hy}{2}\right)^2}{hy}\,e^{-imhy}\,dy = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\frac{\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2}{2k\pi h}\,e^{-im\frac{k\pi}{n}}.$$

Мы видим, что для построения полинома $s_h^{(r)}(\psi; x)$ достаточно знать значения функции $F(x)$ в точках $\frac{k\pi}{\sigma}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, т. е. значения функции $f(x)$ в точках $\frac{k\pi}{\sigma}$ и, кроме того, $f^{(2r+1)}(0)$.

Приведём здесь окончательную формулу для случая $r = 0$. Эта формула имеет вид

$$s_h^{(0)}(x) = f(0) + f'(0)\frac{\sin\sigma x}{\sigma} +$$

$$+ \frac{2n\sin\sigma x\,\sin\frac{hx}{2}}{\pi^2}\sum_{r=\pm 1}^{\infty}\frac{(-1)^r\sin\frac{\pi r}{2n}\left\{f\left(\frac{r\pi}{\sigma}\right) - f(0)\right\}}{r^2\sin\left(\frac{hx}{2} - \frac{\pi r}{2n}\right)}.$$

Полагая здесь $n \to \infty$ и учитывая, что $s_h^{(0)}(x) \to f(x)$, получим известную интерполяционную формулу для ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant \sigma$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{\sin\sigma x}{\sigma} + \frac{\sin\sigma x}{\pi}\,x\sum_{r=\pm 1}^{\infty}\frac{(-1)^r\left\{f\left(\frac{r\pi}{\sigma}\right) - f(0)\right\}}{r\left(x - \frac{\pi r}{\sigma}\right)},$$

которая, таким образом, верна, если $f(x) \in W_\sigma^{(0)}$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Левитан, ДАН, 15, № 4 (1937).
2. Н. Ахиезер, ДАН, 54, № 1 (1946).
3. М. Крейн, Уч. зап. Куйбышевского педагогич.. института, в. 7 (1943).