ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

ОБ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУППАХ

Л. М. Глускин

В настоящей работе исследована некоторая конструкция в теории полугрупп и с ее помощью найден базис инверсных полугрупп В. В. Вагнера.

§ 1. Полугруппой называется множество S с всюду определенной на нем однозначной бинарной ассоциативной операцией. Операцию в полугруппе S будем записывать мультипликативно. S называется инверсной полугруппой или обобщенной группой (см., например, [1] — [4]), если любые ее два идемпотента переместимы между собой и для всякого ее элемента u в S существует обобщенно обратный к нему элемент, т. е. такой элемент $u^{-1} = v$, что

$$uvu = u, \ vuv = v. \tag{1}$$

Бинарным отношением в множестве A называется произвольное подмножество декартова произведения $A \times A$ [5], [6]. Симметричное, рефлексивное и транзитивное бинарное отношение называется эквивалентностью. Бинарное отношение ρ в полугруппе S называется стабильным [1], [6], если для любых $a, \ b, \ c \in S$ из $(a, \ b) \in \rho$ следует $(ac, \ bc) \in \rho$, $(ca, \ cb) \in \rho$. Известно, что попарно непересекающиеся классы $\bar{a}$, на которые стабильная эквивалентность разбивает полугруппу S, образуют полугруппу $\bar{S} = S/\rho$ относительно действия

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad (x \in \bar{x})$$

а отображение $\varphi x = \bar{x}$, $(x \in \bar{x})$ является гомоморфизмом S на S/ρ. Обратно, всякий гомоморфизм φ полугруппы S порождается некоторой ее стабильной эквивалентностью ρ.

Для всякого бинарного отношения ρ в полугруппе S существует наименьшая стабильная эквивалентность σ в полугруппе S такая, что $\rho \leq \sigma$; σ называется стабильно-эквивалентным замыканием отношения ρ [1].

Всюду в настоящей работе для любого бинарного отношения ρ вместо $(a, \ b) \in \rho$ мы будем писать $a \rho b$ (см., например, [5]).

§ 2. Пусть G — аддитивная абелева линейно упорядоченная группа; $H(G)$ — множество всех троек $(k, \ c, \ m)$, где $k, \ c, \ m \in G$. Введем в $H(G)$ действие

$$(k, \ c, \ m)(k', \ c', \ m') = (\max\{k, \ k' - c\}, \ c + c', \ \max\{m', \ m - c'\}). \tag{2}$$

Из (2) следует:

$$\{(k, \ c, \ m)(k', \ c', \ m')\}(k'', \ c'', \ m'') = (k, \ c, \ m)\{(k', \ c', \ m')(k'', \ c'', \ m'')\} =$$
$$= (\max\{k, \ k' - c, \ k'' - c - c'\}, \ c + c' + c'', \ \max\{m'', \ m' - c'', \ m - c' - c''\}),$$

т. е. (2) определяет $H(G)$ как полугруппу.

Пользуясь (2), легко проверить, что

1) Идемпотентами полугруппы $H(G)$ являются все элементы $(k, 0, m)$ и только они (0 — единица группы G).

2) Любые два идемпотента полугруппы $H(G)$ переместимы между собой.

3) Для каждого элемента $(k, c, m) \in H(G)$ элемент $(k+c, -c, m+c)$ является обобщенно обратным.

Таким образом, множество $H(G)$ является инверсной полугруппой относительно действия (2).

Обозначим через $H^*(G)$ подмножество $H(G)$, состоящее из всех троек (k, c, m), удовлетворяющих условиям:

$$k \geqslant 0,\ m \geqslant 0,\ k+c \geqslant 0,\ m+c \geqslant 0,\ k+c+m > 0. \tag{4}$$

Если $(k, c, m), (k', c', m') \in H^*(G)$, то из (4) следует:

$$\max\{k,\ k'-c\} \geqslant k \geqslant 0,\ \max\{m',\ m-c'\} \geqslant m' \geqslant 0,$$
$$\max\{k,\ k'-c\} + (c+c') \geqslant k'+c' \geqslant 0,$$
$$\max\{m',\ m-c'\} + (c+c') \geqslant m+c \geqslant 0,$$
$$\max\{k,\ k'-c\} + (c+c') + \max\{m',\ m-c'\} \geqslant k + (c+c') + m - c' = $$
$$= k+c+m > 0,$$

и, в силу (2), $H^*(G)$ является подполугруппой $H(G)$.

Если элемент $(k; c, m) \in H(G)$ удовлетворяет условиям (4), то и обобщенно обратный к нему элемент $(k+c, -c, m+c)$ также удовлетворяет этим условиям. Таким образом, $H^*(G)$ вместе с любым своим элементом содержит и обобщенно обратный к нему элемент и, следовательно, является инверсной полугруппой.

§ 3. Обозначим через H полугруппу $H^*(G)$, взяв в качестве G аддитивную группу всех целых чисел, через Σ — класс всех полугрупп, являющихся гомоморфными образами полугруппы H. Перечисление всех полугрупп класса Σ в силу п. 1 равносильно перечислению всех стабильных эквивалентностей в полугруппе H.

Пусть $M = \begin{bmatrix} r_1, & r_2, & r_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{bmatrix}$ — матрица с целыми неотрицательными элементами, подчиненная условиям:

$$\begin{aligned} & n_i = 0 \to r_i = 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)\,^*, \\ & n_1 > 0 \to \{n_2 = n_3 = 1,\ r_2 \leqslant r_1,\ r_3 \leqslant r_1\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим далее через σ_M бинарное отношение в полугруппе H, определенное точно на трех парах элементов из H:

$$(0,\ r_1+n_1,\ 0)\,\sigma_M\,(0,\ r_1\ 0),\quad (n_2,\ r_2,\ 0)\,\sigma_M\,(0,\ r_2,\ 0),$$
$$(0,\ r_3,\ n_3)\,\sigma_M\,(0,\ r_3,\ 0).$$

Обозначим далее через ρ_M стабильно-эквивалентное замыкание (см. п. 1) отношения σ_M, через H_M — фактор-полугруппу H/ρ_M.

Теорема. *Всякая стабильная эквивалентность на полугруппе* H *совпадает с одной из эквивалентностей* ρ_M.

Из теоремы следует, что всякая полугруппа класса Σ изоморфна одной из полугрупп H_M. Доказательство теоремы дано ниже, в леммах пп. 3. 1—3. 4. Метод доказательства в этих леммах тот же, что и в статье [2]. Всюду в пп. 3. 1—3. 4 через ρ обозначена произвольная стабильная эквивалентность на полугруппе H.

---

* Через $\to$ обозначена импликация ($\alpha \to \beta$ — «из α следует β»), через $\leftrightarrow$ — эквивалентность ($\alpha \leftrightarrow \beta$ — означает $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$).

3.1. По определению отношение ρ симметрично. Поэтому в соотношении

$$(k_1,\ c_1,\ m_1)\,\rho\,(k_2,\ c_2,\ m_2) \tag{6}$$

можно считать, что $k_1 \geqslant k_2$.

Лемма. *Если* $m = \max\{m_1,\ m_2\}$, $m_i = \min\{m_1,\ m_2,\}$, *то соотношение (6) эквивалентно системе соотношений:*

$$(0,\ k_1 + c_1 + m,\ 0)\,\rho\,(0,\ k_1 + c_2 + m,\ 0), \tag{7}$$

$$(k_1 - k_2,\ k_2 + c_2 + m_2,\ 0)\,\rho\,(0,\ k_2 + c_2 + m_2,\ 0), \tag{8}$$

$$(0,\ k_i + c_i + m_i,\ m - m_i)\,\rho\,(0,\ k_i + c_i + m_i,\ 0). \tag{9}$$

Доказательство. Если умножить (6) слева на $(0, k_1, 0)$, справа на $(0, m, 0)$ и учесть (3), (4), то получим соотношение (7). Умножив (6) слева на $(k_1,\ 0,\ 0)$, получим в силу (2), (4):

$$(k_1,\ c_1,\ m_1)\,\rho\,(k_1,\ c_2,\ m_2).$$

Отсюда и из (6) следует

$$(k_1,\ c_2,\ m_2)\,\rho\,(k_2,\ c_2,\ m_2).$$

Умножая последнее соотношение слева на $(0,\ k_2,\ 0)$, справа на $(0,\ m_2,\ 0)$ и учитывая (3), (4), получим (8). Аналогично, умножая (6) справа на $(0,\ 0,\ m)$ и сравнивая полученное соотношение с (6), имеем:

$$(k_i,\ c_i,\ m)\,\rho\,(k_i,\ c_i,\ m_i),$$

где $m_i = \min\{m_1,\ m_2\}$. Умножив последнее соотношение слева на $(0, k_i, 0)$, справа на $(0,\ m_i,\ 0)$, получим (9).

Пусть теперь, обратно, справедливы соотношения (7) — (9). Допустим сначала, что $m_1 \geqslant m_2$, т. е. $m = m_1$, $m_i = m_2$. Домножив (7) слева на $(k_1,\ -k_1,\ k_1)$, справа на $(m_1,\ -m_1,\ m_1)$, (8) — слева на $(k_2,\ -k_2,\ k_2)$, справа на $(m_2, -m_2, m_2)$, (9) — слева на $(k_2, -k_2, k_2)$, справа на $(m_2,\ -m_2,\ m_2)$ и используя (3), (4) и транзитивность отношения ρ, получим (6).

Если же $m_2 \geqslant m_1$, то домножив (9) слева на $(k_1,\ -k_1,\ k_1)$, справа на $(m_1,\ -m_1,\ m_1)$, (7) — слева на $(k_1,\ -k_1,\ k_1)$, справа на $(m_2,\ -m_2,\ m_2)$, (8) — слева на $(k_2,\ -k_2,\ k_2)$, справа на $(m_2,\ -m_2,\ m_2)$, опять-таки получим (6).

3.2. **Лемма.** *Если* $r,\ n,\ s,\ t,\ \lambda,\ s + t - r$ — *целые неотрицательные числа, то из*

$$(0,\ r,\ n)\ \rho\ (0,\ r,\ 0)$$

следует

$$(0,\ s,\ \lambda n + t)\,\rho\,(0,\ s,\ t).$$

Для доказательства достаточно последовательно умножить (10) слева на $(0,\ s + t - r + \mu n,\ 0)$, справа на $(\mu n + t,\ -\mu n - t,\ \mu n + t)$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \lambda - 1)$ и воспользоваться транзитивностью отношения ρ.

3.3. **Лемма.** *Пусть* n', n'', r', r'' — *любые натуральные числа,* n — *общий наибольший делитель чисел* n', n'', $r = \min\{r',\ r''\}$. *Тогда*

$$\left.\begin{array}{l}(0,\ n' + r',\ 0)\,\rho\,(0,\ r',\ 0)\\ (0,\ n'' + r'',\ 0)\,\rho\,(0,\ r'',\ 0)\end{array}\right\} \leftrightarrow (0,\ n + r,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ 0),$$

$$\left.\begin{array}{l}(n',\ r',\ 0)\,\rho\,(0,\ r',\ 0)\\ (n'',\ r'',\ 0)\,\rho\,(0,\ r'',\ 0)\end{array}\right\} \leftrightarrow (n,\ r,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ 0),$$

$$\left.\begin{array}{l}(0,\ r',\ n')\,\rho\,(0,\ r',\ 0)\\ (0,\ r'',\ n'')\,\rho\,(0,\ r'',\ 0)\end{array}\right\} \leftrightarrow (0,\ r,\ n)\,\rho\,(0,\ r,\ 0).$$

Доказательство. Пусть, например,

$$\begin{array}{l}(0,\ r',\ n')\,\rho\,(0,\ r',\ 0),\\ (0,\ r'',\ n'')\,\rho\,(0,\ r'',\ 0).\end{array} \tag{11}$$

Допустим для определенности, что $r' \leqslant r''$, т. е. $r = r'$. Пусть λ — такое целое неотрицательное число, что $r'' \leqslant r' + \lambda n'$. Из (11) и леммы 3.2 имеем:

$$(0,\ r',\ n'')\,\rho\,(0,\ r',\ n'' + \lambda n')\,\rho\,(0,\ r',\ \lambda n')\,\rho\,(0,\ r',\ 0).$$

Отсюда и из (11) следует:

$$\begin{gathered}(0,\ r,\ n')\,\rho\,(0,\ r,\ 0),\\ (0,\ r,\ n'')\,\rho\,(0,\ r,\ 0).\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть, например, $n' \geqslant n''$. Если n' делится на n'', то $n = n''$, и второе соотношение (12) можно переписать в виде:

$$(0,\ r,\ n)\,\rho\,(0,\ r,\ 0). \tag{13}$$

Если же n' не делится на n'', то пусть $n' = n''q_2 + n^{(3)}$, $n'' = n^{(3)}q_3 + n^{(4)}$ и т. д., $n^{(k)} = (n',\ n'') = n$. Из (12) и леммы 3.2 следует:

$$(0,\ r,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ n') = (0,\ r,\ n''q_2 + n^{(3)})\,\rho\,(0,\ r,\ n^{(3)});$$

точно так же получим

$$(0,\ r,\ n^{(4)})\,\rho\,(0,\ r,\ 0)$$

и т. д. В конце концов придем опять-таки к соотношению (13). Обратно, из (13) и леммы 3.2 вытекают оба соотношения (11).

Аналогично доказываются и остальные два соотношения леммы.

3.4. **Лемма.** *Если* $n \neq 0$ *и*

$$(0,\ r + n,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ 0), \tag{14}$$

то

$$\begin{gathered}(0,\ r,\ 1)\,\rho\,(0,\ r,\ 0),\\ (1,\ r,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ 0).\end{gathered}$$

Доказательство. Обозначим через K подполугруппу полугруппы H/ρ, состоящую из классов u^r, u^{r+1}, ... u^{r+n-1}, где u — класс отношения ρ, содержащий тройку (0, 1, 0). Из (14) следует, что $u^{r+n} = u^r$. Как известно [7], K является группой с единицей $u^{\lambda n}$, где $r \leqslant \lambda n < r + n$. Допустим сначала, что $r \neq \lambda n$. Элемент u^r является, очевидно, обратным для элемента $u^{\lambda n - r}$. С другой стороны, обобщенно обратным для элемента $(0,\ \lambda n - r,\ 0) \in u^{\lambda n - r}$ является элемент $(\lambda n - r,\ r - \lambda n,\ \lambda n - r)$ (см. п. 2). Из единственности обобщенно обратного элемента для каждого элемента обобщенной группы H/ρ [1] следует, что

$$(0,\ r,\ 0)\,\rho\,(\lambda n - r,\ r - \lambda n,\ \lambda n - r). \tag{15}$$

Из (15) имеем теперь

$$\begin{gathered}(0, r, 1) = (0, r, 0)\,(0, 0, 1)\,\rho\,(\lambda n - r, r - \lambda n, \lambda n - r)\,(0, 0, 1) =\\ = (\lambda n - r,\ r - \lambda n,\ \lambda n - r)\,\rho\,(0, r, 0)\end{gathered}$$

и точно так же

$$(1, r, 0)\,\rho\,(0, r, 0).$$

Если же $r = \lambda n$, то $(u^r)^2 = u^r$; тогда, как и выше, заключаем, что $(0,\ r,\ 0)\,\rho\,(r,\ -r,\ r)$; дальнейшее доказательство проводится аналогично.

§ 4. Пусть

$$M = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} —$$

матрица с целыми неотрицательными элементами, подчиненная условиям (15). Обозначим

$$M^* = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 & r_2 \\ n_1 & n_3 & n_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица M^*, очевидно, также удовлетворяет условиям (15).

Теорема. *Пусть*

$$M = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} r_1' & r_2' & r_3' \\ n_1' & n_2' & n_3' \end{bmatrix} —$$

целочисленные матрицы, удовлетворяющие условиям (15). *Полугруппы* H_M *и* $H_{M'}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $M' = M$ *или* $M' = M^*$.

Доказательство теоремы дано в пп. 4.1 —4.3.

4.1. **Лемма.** *Полугруппы* H_M и H_{M^*} *изоморфны.*

Доказательство. Отображение

$$\varphi(k, c, m) = (m + c, -c, k + c)$$

является в силу (2) и (4) автоморфизмом полугруппы H (см. п. 3). Пусть σ_M и σ_{M^*} — бинарные отношения в полугруппе H, определенные матрицами M и M^* (см. п. 3), ρ_M и ρ_{M^*} — их стабильно-эквивалентные замыкания. Обозначим через $\varphi\rho_M$ следующее бинарное отношение в полугруппе H: при любых $a, b \in H$

$$a(\varphi\rho_M) b \leftrightarrow \{a = \varphi a', \ b = \varphi b', \ a'\rho_M b'\}.$$

$\varphi\rho_M$ является, как легко проверить, стабильной эквивалентностью. При этом

$$(n_2, r_2, 0)\rho_M(0, r_2, 0) \to \varphi(n_2, r_2, 0)(\varphi\rho_M)\varphi(0, r_2, 0) \to$$
$$\to (r_2, -r_2, n_2 + r_2)\varphi\rho_M(0, -r_2, 0).$$

Из единственности обобщенно обратного элемента для каждого элемента инверсной полугруппы $H/\varphi\rho_M$ вытекает теперь, что

$$(r_2, -r_2, n_2 + r_2)\varphi\rho_M(0, -r_2, 0) \to (r_2, -r_2, n_2 + r_2)^{-1}\varphi\rho_M(0, -r_2, 0)^{-1} \to$$
$$\to (0, r_2, n_2)\varphi\rho_M(0, r_2, 0).$$

Аналогично покажем, что $(0, r_1 + n_1, 0)\varphi\rho_M(0, r_1, 0)$ и $(n_3, r_3, 0) \times \times \varphi\rho_M(0, r_3, 0)$. Таким образом, $\sigma_{M^*} \subseteq \varphi\rho_M$ и по определению стабильно-эквивалентного замыкания $\rho_{M^*} \subseteq \varphi\rho_M$. Точно так же можно показать, что $\varphi\rho_M \subseteq \rho_{M^*}$. Вместе с противоположным включением это дает $\rho_{M^*} = \varphi\rho_M$. Так как φ — автоморфизм полугруппы H, то фактор-полугруппы $H_M = H/\rho_M$ и $H_{M^*} = H/\rho_{M^*} = \varphi H/\varphi\rho_M$, очевидно, изоморфны.

4.2. Обозначим через H^+ (соответственно, H°, H^-) подмножество всех элементов $(k, c, m) \in H$ (см. п. 3) таких, что $c > 0$ (соответственно $c = 0$, $c < 0$). Из (2) следует, что H^+, H°, H^- являются попарно непересекающимися подполугруппами полуполугруппы H и что H является их объединением. Если элемент $(k, c, m) \in H$ содержится в одной из полугрупп H^+ или H^-, то обобщенно обратный к нему элемент $(k, c, m)^{-1} = (k + c, -c, m + c)$ содержится в другой из этих полугрупп.

Пусть $M = \begin{bmatrix} r_1, & r_2, & r_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{bmatrix}$ — любая целочисленная матрица, удовлетворяющая условиям (5). Напомним, что элементами полугруппы $H_M = H/\rho_M$ являются классы a эквивалентности ρ_M (см. пп. 1 и 3).

Лемма. *Пусть a — любой элемент полугруппы H_M. Если $a \subseteq H^-$, то*

$$\begin{aligned} a^{r_1+n_1} &= a^{r_1}, \\ (a^{-1})^{n_2}a^{r_2+n_2} &= a^{r_2}, \\ a^{r_3+n_3}(a^{-1})^{n_3} &= a^{r_3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Докажем, например, справедливость последнего соотношения (16) — доказательство первых двух проводится точно так же.

Пусть $n_3 = n$, $r_3 = r$, a — любой класс отношения ρ_M, (k, c, m) — произвольный элемент из a, $c \geqslant 0$. Из (2) следует:

$$(k, c, m)^r = (k, rc, m),$$

$$(k, c, m)^{r+n} (k + c, -c, m + c)^n = (k, rc, m + nc).$$

Отсюда имеем:

$$a^{n+r} (a^{-1})^n = a^r \leftrightarrow (k, rc, m + nc) \rho_M (k, rc, m). \qquad (17)$$

Из леммы 3.1 вытекает:

$$(k, rc, m + nc) \rho_M (k, rc, m) \leftrightarrow (0, k + rc + m, nc) \rho_M (0, k + rc + m, 0). \qquad (18)$$

Положив в лемме 3.2 $\lambda = c$, $t = 0$, $s = k + rc + m$, получим в силу $k + m + r(c - 1) \geqslant 0$ ($k + m \geqslant 0$ по условию (4), $r \geqslant 0$, $c > 0$):

$$(0, k + rc + m, nc) \rho_M (0, k + rc + m, 0). \qquad (19)$$

Из (17) — (19) вытекает справедливость доказываемого третьего соотношения (16). Если же $c = 0$, то соотношения (18) — (19) становятся тривиальными.

4.3. Приступим к непосредственному доказательству теоремы п. 4. Пусть M и M' — две матрицы с целыми неотрицательными элементами, удовлетворяющие условиям (5). Если $M' = M$ или $M' = M^*$, то полугруппы H_M и $H_{M'}$ изоморфны по лемме 4.1.

Обратно, пусть φ — произвольный изоморфизм полугруппы H_M на полугруппу $H_{M'}$. Обозначим через a тот класс эквивалентности ρ_M, который содержит элемент $(0, 1, 0)$; пусть $\varphi a = a'$.

Если $a' \cap (H^+ \cup H^\circ) = \varnothing$ (см. 4.2), то по лемме 4.2

$$(a')^{r'_3 + n'_3} (a'^{-1})^{n'_3} = (a')^{r'_3}.$$

Отсюда, учитывая, что φ — изоморфизм H_M на $H_{M'}$, имеем:

$$a^{r'_3 + n'_3} (a^{-1})^{n'_3} = a^{r'_3}$$

и, вследствие (17),

$$(0, r'_3, n'_3) \rho_M (0, r'_3, 0).$$

Из лемм 3.3 и 3.2 следует теперь: если $n_3 = 0$, то и $n'_3 = 0$, и тогда по определению (см. п. 3) $r_3 = r'_3 = 1$; если $n_3 \neq 0$, то $n'_3 \vdots n_3$, $r'_3 \geqslant r_3$. Рассматривая обратный изоморфизм φ^{-1}, получим:

$$n'_3 = 0 \to n_3 = 0,$$

$$n'_3 \neq 0 \to \{n_3 \vdots n'_3, \ r_3 \geqslant r'_3\}.$$

Мы показали, таким образом, что $r_3 = r'_3$, $n_3 = n'_3$. Аналогично можно показать, что $r_1 = r'_1$, $n_1 = n'_1$; $r_2 = r'_2$, $n_2 = n'_2$.

Пусть теперь $a' \subseteq H^-$. Тогда $(a')^{-1} \subseteq H^+$ (см. п. 4.2). Как и выше, заключаем, что

$$(a'^{-1})^{r'_3 + n'_3} (a')^{n'_3} = (a'^{-1})^{r'_3},$$

$$(a^{-1})^{r'_3 + n'_3} a^{n'_3} = (a^{-1})^{r'_3}. \qquad (20)$$

Из единственности обобщенно обратного элемента для каждого элемента $a \in H_M$ и из $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ (см. [1], [2]) следует теперь, в силу (20),

$$(a^{-1})^{n'_3} a^{r'_3 + n'_3} = a^{r'_3},$$

а отсюда

$$\{(1, -1, 1)^{n'_3} (0, 1, 0)^{r'_3 + n'_3}\} \rho_M (0, 1, 0)^{r'_3}.$$

и, вследствие (2),

$$(n'_3,\ r'_3,\ 0)\,\rho_M\,(0,\ r'_3,\ 0).$$

Снова воспользуемся леммой 3.3:

$$n_2 = 0 \to \{n'_3 = 0,\ r_2 = r'_3 = 1\},$$
$$n_2 \neq 0 \to \{n'_3 \vdots n_2,\ r'_3 \geqslant r_2\}.$$

Продолжая доказательство, как и в случае $a \cap (H^+ \cup H^\circ) \neq \varnothing$, получим: $n_2 = n'_3,\ r_2 = r'_3,\ n_3 = n'_2,\ r_3 = r'_2,\ n_1 = n'_1,\ r_1 = r'_1$.

§ 5. Обозначим через $A(u, v)$ подполугруппу произвольной инверсной полугруппы S, порожденную ее некоторым элементом u и обобщенно обратным к u элементом v.

Теорема. $A(u, v) \in \Sigma$ (см. п. 3).

Доказательство. В статье [2] показано, что всякий элемент x полугруппы $A(u, v)$ можно представить при некоторых натуральных k, l, m в виде $x = v^k u^l v^m$ * и что при любых натуральных α, β, γ

$$u^\alpha v^\beta u^\gamma = \begin{cases} u^{\alpha+\gamma-\beta}, & \text{если } \beta \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant \gamma, \\ u^\alpha v^{\beta-\gamma}, & \text{если } \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma, \\ v^{\beta-\alpha} u^\gamma, & \text{если } \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma, \\ v^{\beta-\alpha} u^\beta v^{\beta-\gamma}, & \text{если } \beta \geqslant \alpha,\ \beta \geqslant \gamma. \end{cases} \qquad (21)$$

Пусть φ — следующее однозначное отображение полугруппы H п. 3 на полугруппу $A(u, v)$: для любого $(k, c, m) \in H$

$$\varphi(k, c, m) = v^k u^{k+c+m} v^m.$$

Из (2), (21) следует:

$$\varphi(k, c, m) \cdot \varphi(k', c', m') = v^k u^{k+c+m} v^m \cdot v^{k'} u^{k'+c'+m'} v^{m'} =$$
$$= v^{\max\{k,\ k'-c\}} u^{c+c'} v^{\max\{m',\ m-c'\}} = \varphi\{(k,\ c,\ m)(k'\ c'\ m')\}.$$

Таким образом, φ является гомоморфизмом и $A(u, v) \in \Sigma$.

§ 6. Пусть Σ_1, Σ_2, Σ_3 — три класса полугрупп, причем $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$. Класс Σ_1 называется базисным классом класса Σ_2 относительно класса Σ_3 [6], если

а) Всякая полугруппа из Σ_2 представима в виде объединения полугрупп, изоморфных полугруппам класса Σ_1.

б) Всякая полугруппа из Σ_3, являющаяся объединением полугрупп, изоморфных полугруппам класса Σ_1, принадлежит Σ_2.

в) Никакая часть Σ' класса Σ_1 не удовлетворяет условию (а).

§ 7. Обозначим через Σ_1 класс всех полугрупп H_M (см. п. 3), матрицы которых удовлетворяют, кроме условий (5), условиям:

$$n_2 \geqslant n_3,$$
$$n_2 = n_3 \to r_2 \geqslant r_3.$$

Теорема. *Σ_1 является базисным классом для класса Σ_2 всех инверсных полугрупп относительно класса Σ_3 всех идемпотентно-коммутативных полугрупп* (см. [2]).

Доказательство. Из теоремы п. 5 следует, что всякая инверсная полугруппа является объединением полугрупп класса Σ. Из пп. 3 и 4 вытекает, что всякая полугруппа класса Σ изоморфна какой-либо полугруппе класса Σ_1. Таким образом, условие (а) п. 6 для класса Σ_1 выполнено. Из леммы 1.1 статьи [2] следует выполнение условия (б).

---

* Если $k = 0$ или $m = 0$, то условимся не читать соответствующей степени элемента u.

Допустим теперь, что какая-либо часть Σ' класса Σ_1 удовлетворяет условию (a) п. 6. Тогда всякую полугруппу $H_M \in \Sigma_1$ можно представить в виде объединения полугрупп S_ν, изоморфных полугруппам класса Σ'. Обозначим через φ гомоморфизм полугруппы H на H_M (см. п. 3), через H' — ту подполугруппу S_ν, которая содержит элемент $u = \varphi(0, 1, 0)$. Будучи инверсной полугруппой, H' содержит и обобщенно обратный к u элемент $v = \varphi(1, -1, 1)$. Так как $(0, 1, 0)$ и $(1, -1, 1)$ в силу п. 5 порождают всю полугруппу H, то $H_M = \varphi H \subseteq H'$ и, следовательно, $H_M = H'$.

Из теоремы п. 4 следует, что в Σ_1 нет полугруппы, отличной от H_M и изоморфной H_M. Значит, $H_M \in \Sigma'$, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma'$; отсюда вытекает, что $\Sigma' = \Sigma_1$, и условие (в) п. 6 выполнено.

7.1. Полугруппы, изоморфные полугруппам класса Σ, исследованы автором в [2], где они названы элементарными обобщенными группами. В указанной статье можно найти ряд дальнейших свойств полугрупп класса Σ. Заметим, что базисный класс в определении п. 6 настоящей статьи несколько отличается от соответствующего определения статьи [2] (он здесь является более узким).

При выполнении настоящей работы мы воспользовались советами проф. Е. С. Ляпина и проф. В. В. Вагнера, которым выражаем нашу глубокую признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Вагнер. Теория обобщенных групп. «Матем. сб.», 1953, 32, № 3, 545—632.
2. Л. М. Глускин. Элементарные обобщенные группы. «Матем. сб.», 1957, 41, № 1, 23—36.
3. А. Е. Либер. К теории обобщенных групп, ДАН СССР, 1954, 97, № 1, 25—28.
4. G. B. Preston. Inverse semigroups. J. London Math. Soc. 1954, 29, № 4, 396—403.
5. Г. Биркгоф. Теория структур. Изд-во иностр. лит., М., 1952.
6. Е. С. Ляпин. Теория полугрупп, М., Физматгиз, 1960.
7. А. К. Сушкевич. Теория обобщенных групп. Харьков—Киев, 1937.