ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

СИНТЕЗ ПЕРЕДАЮЩЕЙ ЛИНИИ ПО ЗАДАННЫМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

М. С. Лившиц, М. Ш. Флексер

§ 1. Постановка задачи

В вопросах синтеза электрических четырехполюсников важную роль играет «реактансная» теорема [1, 2], согласно которой матрица $Z(p) = \begin{pmatrix} z_{11}(p) & z_{12}(p) \\ z_{12}(p) & z_{22}(p) \end{pmatrix}$ может быть физически реализована в виде матрицы полных сопротивлений пассивного четырехполюсника с конечным числом чисто реактивных элементов, если она удовлетворяет условиям:

1) Элементы матрицы $Z(p)$ — нечетные рациональные функции от $p\,(p = -i\omega)$ с вещественными коэффициентами.

2) Реальная часть $\mathrm{Re}Z(p)$ матрицы $Z(p)$ эрмитово-неотрицательна в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}Z(p) \geqslant 0$, если $\mathrm{Re}p \geqslant 0$).

Для построения соответствующего четырехполюсника матрицу $Z(p)$ разлагают на элементарные дроби. Каждую дробь физически реализуют и затем определенным образом соединяют полученные элементарные четырехполюсники.

Однако в вопросах синтеза передающих линий желательна реализация четырехполюсника в виде цепочки простейших четырехполюсников

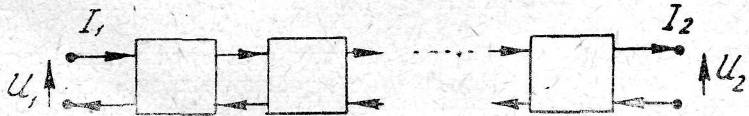


Рис. 1.

с сосредоточенными постоянными и отрезка двухпроводной линии с распределенными постоянными (рис. 1).

Допустим, что напряжения и токи на клеммах четырехполюсника изменяются по закону $E = Ue^{-i\omega t}$, $i = Ie^{-i\omega t}$. Обозначим через $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$ векторы, компоненты которых соответственно равны комплексным амплитудам напряжения и тока на входе и на выходе. Между $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ существует линейная связь $\vec{x}_2 = S(\omega)\vec{x}_1$, где $S(\omega) = \begin{pmatrix} s_{11}(\omega) & s_{12}(\omega) \\ s_{21}(\omega) & s_{22}(\omega) \end{pmatrix}$ — матрица, элементы которой зависят от частоты ω.

Матрицу $S(\omega)$ мы будем называть *передаточной* матрицей четырехполюсника. Цепочечному соединению четырехполюсников соответствует разложение матрицы $S(\omega) = S_n(\omega) \ldots S_1(\omega)$ на множители, где $S_1(\omega)$, $S_2(\omega), \ldots, S_n(\omega)$ — передаточные матрицы отдельных звеньев цепочки.

В § 2—4 мы будем рассматривать лишь пассивные четырехполюсники с конечным числом чисто реактивных элементов.

Передаточные матрицы таких четырехполюсников должны удовлетворять следующим требованиям, вытекающим из реактансной теоремы, если учесть формулы

$$s_{11} = \frac{z_{22}}{z_{12}}, \quad s_{12} = -\frac{\operatorname{Det} Z}{z_{12}}, \quad s_{21} = -\frac{1}{z_{12}}, \quad s_{22} = \frac{z_{11}}{z_{12}}, \tag{1.1}$$

связывающие матрицы S и Z:

а) Элементы матрицы $S(\omega)$ имеют вид

$$s_{11} = p(\omega^2), \quad s_{12} = i\omega q(\omega^2), \quad s_{21} = i\omega r(\omega^2), \quad s_{22} = s(\omega^2), \tag{1.2}$$

где p, q, r, s — рациональные функции с вещественными коэффициентами.

б) Если J обозначает матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица $J - S^*(\omega) JS(\omega) \geqslant 0$ при $Jm\omega \geqslant 0$, причем для вещественных значений ω имеет место равенство $S^*(\omega) JS(\omega) = J$.

Требование б) означает, что мощность, подводимая к зажимам пассивного четырехполюсника, не может быть отрицательной. Пользуясь геометрической терминологией, можно сказать, что матрица $S(\omega)$ — *нерастягивающая*, в метрике, определяемой индефинитной формой $(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^* J\vec{x} = 2\,Re(UI^*)$.

Произвольную матрицу $S(\omega)$, удовлетворяющую условиям а) и б), мы будем называть *реактивной*.

Таким образом, задача о реализации реактивного четырехполюсника в виде цепочки приводит к разложению S — матрицы на простейшие реактивные множители. В более общем случае задача о факторизации J — нерастягивающей матрицы возникла в связи с теорией несамосопряженных операторов * при построении треугольных моделей линейных операторов [3, 4, 5] и была впервые решена в работах В. П. Потапова. Результаты В. П. Потапова были затем усовершенствованы в работах Ю. П. Гинзбурга, который дал простые формулы для отщепления элементарных множителей. В настоящей работе мы существенно основываемся на этих результатах.

Однако на этом пути возникают трудности, связанные с тем, что элементарные множители, отщепляемые в указанных работах, не удовлетворяют условиям (1.2) реактивности и, за исключением некоторых частных случаев, о которых мы скажем ниже, не могут быть физически реализованы.

Пусть ω_0 — полюс порядка ν матрицы $S(\omega)$. В силу теоремы 9, доказанной в статье [3], матрицу $S(\omega)$ можно представить в виде $S(\omega) = \widetilde{S}(\omega) S_0(\omega)$, где $S_0(\omega)$ — множитель вида

$$S_0(\omega) = I - \frac{i}{\omega - \omega_0} \Pi^* \Pi J, \tag{1.3}$$

* Связь теории четырехполюсников с теорией несамосопряженных операторов объясняется тем, что четырехполюсник представляет собой незамкнутую физическую систему, соединенную с внешними источниками при помощи клемм. Можно показать, что распределение токов и напряжений внутри четырехполюсника определяется с помощью несамосопряженного оператора, характеристическая матрица-функция которого совпадает с матрицей $S(\omega)$.

$\Pi = (a,\ b)$ — постоянная однострочная матрица, причем $\Pi J \Pi^* = -2 Jm\,\omega_0$.

Матрица $\widetilde{S}(\omega)$ — J-нерастягивающая в верхней полуплоскости с полюсом порядка $\nu - 1$ в точке ω_0. В случае $\omega_0 = \infty$ отщепляемый множитель имеет вид

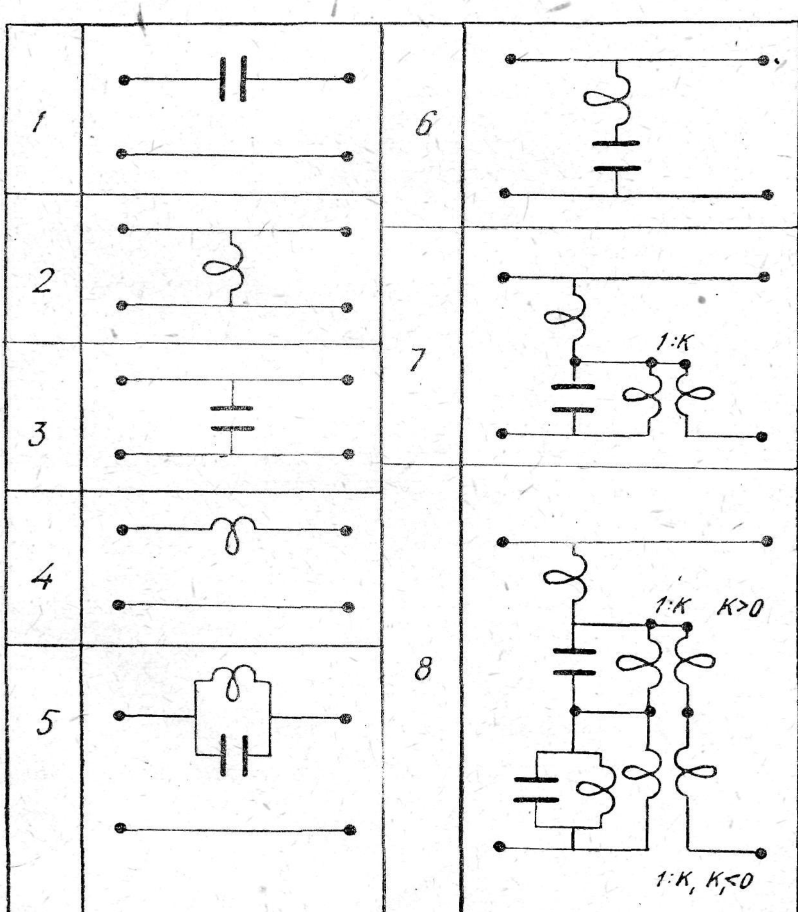
$$S_0(\omega) = \mathrm{I} + i\omega \Pi^* \Pi J,$$

причем $\Pi J \Pi^* = 0$.

Для дальнейшего удобно различать пять случаев: 1) полюс $\omega_0 = 0$; 2) полюс $\omega_0 = \infty$; 3) полюс ω_0 — вещественный, не равный нулю; 4) полюс ω_0 — чисто мнимый; 5) полюс ω_0 удовлетворяет условию $Jm\,\omega_0 \cdot Re\,\omega_0 \neq 0$.

В § 4 доказано, что в случаях 1) и 2) элементарный множитель $S_0(\omega)$ является реактивной матрицей, которая реализуется в виде одного из четырехполюсников, показанных в таблице под номерами 1—4.

Таблица простейших четырехполюсников



Из соотношений (1.2) следует, что в случаях 3) и 4) реактивная матрица, кроме полюса ω_0, имеет полюс — ω_0. Таким образом, множитель $\zeta_0(\omega)$, имеющий лишь один полюс ω_0, не может быть реактивной матрицей.

В этих случаях всегда можно отщепить от матрицы $S(\omega)$ еще один множитель $\bar{\zeta}_0(\omega)$, отвечающий полюсу — ω_0, так, чтобы произведение $\bar{\zeta}_0(\omega)\,\zeta_0(\omega)$ было реактивной матрицей. Соответствующие этой матрице четырехполюсники показаны в таблице под номерами 5—7, причем для вещественного ω_0 в схеме 7 коэффициент трансформации $k > 0$, а для чисто мнимого ω_0 коэффициент $k < 0$.

В случае 5), кроме полюса ω_0, матрица $S(\omega)$ должна, как это следует из (1.2), иметь полюсы $-\omega_0$, $\pm \bar{\omega}_0$. Отщепляя от матрицы $S(\omega)$ группу из четырех элементарных множителей, отвечающих соответственно полюсам $\pm \omega_0$, $\pm \bar{\omega}_0$, можно получить реактивную матрицу, физическая реализация которой указана в таблице под номером 8. Перебирая последовательно все полюсы матрицы $S(\omega)$, мы получим представление $S(\omega)$ в виде

$$S(\omega) = U \prod_{j=1}^{n} S_j(\omega),$$

где $S_j(\omega)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — простейшие реактивные матрицы, каждой из которых соответствует один из четырехполюсников, приведенных в таблице, а U — постоянная матрица вида $\begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Матрице U соответствует идеальный трансформатор.

В случае передающих линий с распределенными постоянными элементы передаточной матрицы уже не будут рациональными функциями от ω. В § 5 мы показываем, что произвольная *реактивная матрица* $S(\omega)$, *элементы которой являются мероморфными функциями от* ω, *может быть физически реализована в виде цепочки* (конечной или бесконечной) *простейших четырехполюсников и отрезка двухпроводной линии с распределенными постоянными.*

Отметим, что для четырехполюсников с конечным числом реактивных элементов (емкостей, самоиндукций) аналогичная задача другим методом была решена A. Talbot'ом [6]. Примененный в настоящей работе метод, основанный на общей теореме о мультипликативном представлении J — нерастягивающей матрицы-функции, позволяет получить решение задачи о синтезе четырехполюсника как с сосредоточенными, так и с непрерывными параметрами. Кроме того, на этом пути открывается возможность распространения теории на $2n$ — полюсные системы.

§ 2. Реактивная матрица

Матрицу $S(\omega)$ мы будем называть реактивной, если она удовлетворяет условиям а) и б), сформулированным во введении. Детерминант реактивной матрицы тождественно равен единице. Действительно, для вещественных значений ω имеет место равенство $S^*(\omega)\, JS(\omega) = J$, т. е. $\begin{pmatrix} 0 & ps + \omega^2 qr \\ ps + \omega^2 qr & 0 \end{pmatrix} = J$, откуда следует, что $\operatorname{Det} S(\omega) = 1$ $(\operatorname{Im}\omega = 0)$.

Так как $\operatorname{Det} S(\omega)$ — рациональная функция от ω, то $\operatorname{Det} S(\omega) = 1$ при всех значениях ω.

Нетрудно проверить, что условие а) реактивности матрицы $S(\omega)$, элементы которой — рациональные функции от ω, эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} S(-\omega) &= LS(\omega)L, \\ \overline{S(\bar{\omega})} &= LS(\omega)L, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В общей теории четырехполюсника важное значение имеет проблема физической реализации заданной реактивной матрицы $S(\omega)$, т. е. определения вида четырехполюсника, передаточная матрица которого равна

$S(\omega)$. Рассмотрим сначала случай, когда один из элементов реактивной матрицы тождественно равен нулю.

Пусть $S_A(\omega)$ — реактивная матрица, элемент $s_{21}(\omega)$ которой тождественно равен нулю, т. е. $S_A(\omega) = \begin{pmatrix} s_{11}(\omega), & s_{12}(\omega) \\ 0 & s_{22}(\omega) \end{pmatrix}$.

Определим четырехполюсник, передаточная матрица которого равна $S_A(\omega)$. С этой целью заметим, что из второго условия реактивности вытекают соотношения

$$1 - s_{11}\bar{s}_{22} = 0, \tag{2.2}$$

$$-(s_{12}\bar{s}_{22} + \bar{s}_{12}s_{22}) \geqslant 0, \tag{2.3}$$

а так как $\operatorname{Det} S_A = 1$, то

$$s_{11}(\omega)\, s_{22}(\omega) = 1. \tag{2.4}$$

Из (2.2) и (2.4) следует, что $s_{22}(\omega) = \overline{s_{22}(\omega)}$, т. е. рациональная функция $s_{22}(\omega)$ принимает в верхней полуплоскости только вещественные значения, стало быть, $s_{22}(\omega) = k$, где k — вещественная постоянная и $s_{11}(\omega) = k^{-1}$. Соотношение (2.3) можно теперь переписать в виде

$$-k \operatorname{Re} s_{12}(\omega) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, реактивная матрица $S_A(\omega)$, подчиненная условию $s_{21}(\omega) \equiv 0$, имеет вид

$$S_A(\omega) = \begin{pmatrix} k^{-1} & s_{12}(\omega) \\ 0 & k \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

причем элемент $s_{12} = i\omega q(\omega^2)$ удовлетворяет соотношению (2.5). Функция $z(p) = -ks_{12}(\omega)\ (\omega = ip)$, в силу соотношения (2.5), удовлетворяет условию $\operatorname{Re} z(p) \geqslant 0$ $(\operatorname{Re} p \geqslant 0)$, следовательно, она может быть физически реализована в виде двухполюсника, изображенного на рис. 2.

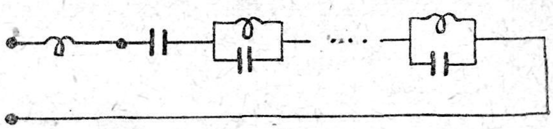


Рис. 2.

Если четырехполюсник содержит только один двухполюсный элемент, то он называется одноэлементным. На рис. 3 и 4 изображены два одноэлементных четырехполюсника, где $z(p)$ — полное сопротивление переменному току двухполюсного элемента. Передаточные матрицы этих четырехполюсников, как нетрудно проверить, имеют соответственно вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -z(p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{z(p)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу (2.6) можно представить в виде произведения двух матриц: $S_A = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ks_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; матрица $\begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ реализуется в виде идеаль-

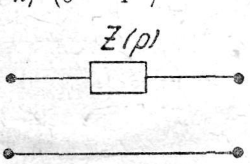


Рис. 3.

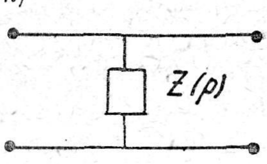


Рис. 4.

ного трансформатора, а матрица $\begin{pmatrix} 1 & ks_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — в виде четырехполюсника, изображенного на рис. 3, где $z(p) = -ks_{12}(\omega)$.

Итак, получен следующий результат.

Реактивная матрица $S_A(\omega)$, элемент $s_{21}(\omega)$ которой тождественно равен нулю, может быть физически осуществлена в виде цепочечного соединения четырехполюсника, изображенного на рис. 2, и идеального трансформатора.

Аналогично предыдущему можно убедиться, что реактивная матрица $S_B(\omega)$, у которой элемент $s_{12}(\omega)$ тождественно равен нулю, может быть физически реализована в виде цепочки, приведенной на рис. 5.

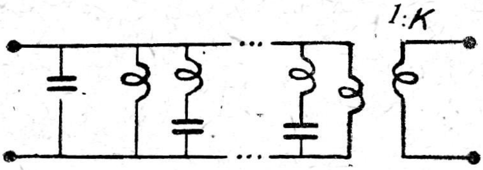


Рис. 5.

Пусть $S(\omega)$ — реактивная матрица, подчиненная условию $s_{21}(\omega) \not\equiv 0$.

По элементам матрицы S можно, согласно формулам (1.1), построить матрицу $Z(p)$ $(\omega = ip)$. Покажем, что матрица $Z(p)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) реактансной теоремы. С этой целью заметим, что матрицу $Z(p)$ можно представить в виде

$$Z(p) = -(S(\omega)e_1 - e_2)^{-1}(S(\omega)e_3 + e_4), \quad (\omega = ip) \tag{2.7}$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение (2.7) относительно $S(\omega)$, получим

$$S(\omega) = (e_2 Z(p) - e_4)(e_1 Z(p) + e_3)^{-1}. \quad (p = -i\omega)$$

Непосредственно проверяется, что имеет место соотношение

$$2\operatorname{Re} Z(p) = (Z^* e_1 + e_2)(J - S^*(\omega) J S(\omega))(e_1 Z + e_3). \tag{2.8}$$

Так как матрицы $Z^* e_1 + e_2$ и $e_1 Z + e_3$ взаимно сопряженные, а $J - S^* J S$ — эрмитово неотрицательная матрица, то из (2.8) следует, что $\operatorname{Re} Z(p) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$. Выполнение условия 1) очевидно.

§ 3. Факторизация реактивной матрицы

Передаточная матрица четырехполюсника, полученного цепочечным соединением n четырехполюсников, равна произведению их передаточных матриц $S(\omega) = S_n(\omega) \ldots S_1(\omega)$.

Отсюда видно, что проблема физической реализации произвольной реактивной матрицы $S(\omega)$ $(s_{21} \not\equiv 0,\ s_{12} \not\equiv 0)$ в виде цепочки простейших четырехполюсников будет решена, если удастся представить ее в виде произведения некоторых простейших реактивных матриц. С этой целью мы воспользуемся указанной во введении теоремой о факторизации J — нерастягивающей матрицы $S(\omega)$. Для вычисления матрицы $\Pi^*\Pi J$, входящей в отщепленный множитель, могут служить следующие формулы, полученные Ю. П. Гинзбургом [5]. Пусть H — особенная эрмитовая матрица, отличная от нулевой. Как известно, существует такая унитарная матрица U, что имеет место соотношение $H = U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$, где λ — собственное значение матрицы H. Условимся матрицу $U \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$ обозначать через $H^{[-1]}$.

Теорема 1. Пусть J — нерастягивающаяся матрица $S(\omega)$ $(\operatorname{Im}\omega \geqslant 0)$ имеет в окрестности комплексного полюса ω_0 $(\operatorname{Im}\omega_0 \cdot \operatorname{Re}\omega_0' \neq 0)$ разложение $S(\omega) = (\omega - \omega_0)^{-\nu} C + \ldots$

Тогда матрица $\Pi^*\Pi J$, фигурирующая в (1.3), вычисляется по формуле

$$\Pi^*\Pi J = -2\operatorname{Im}\omega_0 JC^*(CJC^*)^{[-1]}C.$$

Теорема 2. Пусть J — нерастягивающаяся матрица $S(\omega)$ имеет в окрестности вещественного полюса ω_0 разложение

$$S(\omega) = (\omega-\omega_0)^{-\nu}C + (\omega-\omega_0)^{-\nu+1}D + \ldots$$

Тогда матрица $\Pi^*\Pi J$, входящая в первую часть равенства (1.3), вычисляется по формуле

$$\Pi^*\Pi J = JC^*(-iDJC^*)^{[-1]}C. \tag{3.1}$$

Если $\omega_0 = \infty$, то в (3.1) знак минус надо опустить.

§ 4. Физическая осуществимость реактивной матрицы

Пусть реактивная матрица имеет в точке $\omega = \omega_0$ полюс. Тогда, в силу (1.2), она имеет полюсы и в точках $-\omega_0$, $\pm\overline{\omega}_0$, т. е. полюсы всякой реактивной матрицы симметричны относительно осей координат, расположенных в ω-плоскости. Согласно теореме факторизации, реактивную матрицу можно представить в виде произведения простейших отщепленных множителей, отвечающих различным ее полюсам. Но так как любая из простейших отщепленных матриц имеет только один полюс, то она не является, вообще говоря, реактивной и, стало быть, не может быть физически реализована.

В дальнейшем удобно рассмотреть пять случаев в зависимости от того, будет ли полюс ω_0 реактивной матрицы в нуле, на бесконечности, вещественным, чисто мнимым или комплексным.

Случай полюса в нуле. Пусть реактивная матрица $S(\omega)$ имеет в точке $\omega = 0$ полюс порядка ν. Тогда, согласно (1.3), от матрицы $S(\omega)$ можно отщепить множитель

$$S_0(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\Pi^*\Pi J. \tag{4.1}$$

Покажем, что отщепленный множитель является реактивной матрицей. Разложим $S(\omega)$ в окрестности полюса $\omega = 0$ в ряд Лорана

$$S(\omega) = \omega^{-\nu}C + \omega^{-\nu+1}D + \ldots \tag{4.2}$$

Так как, согласно (1.2), элементы матрицы $S(i\tau)$, где τ — вещественное число, суть вещественные функции, то, как следует из (4.2), матрицы $i^{-\nu}C$ и $i^{-\nu+1}D$ состоят из вещественных элементов и, в силу (3.1), элементы матрицы $\Pi^*\Pi J$ вещественны. С другой стороны, $\Pi^*\Pi J = \begin{pmatrix}\overline{a}b & |a|^2\\ |b|^2 & a\overline{b}\end{pmatrix}$ и $\Pi J\Pi^* = \overline{a}b + a\overline{b} = 0$. Поскольку элементы матрицы $\Pi^*\Pi J$ — вещественны, то $\overline{a}b = 0$, т. е. либо $a = 0$, либо $b = 0$.

Итак, матрица $\Pi^*\Pi J$, фигурирующая, в (4.1) имеет один из двух видов: $\Pi^*\Pi J = \rho\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\rho > 0$ или $\Pi^*\Pi J = \rho'\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\rho' > 0$, и, стало быть, отщепленный множитель $\zeta_0(\omega)$, отвечающий полюсу $\omega = 0$, имеет один из двух видов: $\zeta_0(\omega) = \begin{pmatrix}1 & -\frac{i\rho}{\omega}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ или $S_0'(\omega) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{i\rho'}{\omega} & 1\end{pmatrix}$. Эти матрицы, очевидно, реактивные и могут быть реализованы в виде простейших четырехполюсников, изображенных на рисунках 1 и 2 таблицы. Таким образом, отколотая матрица

$$S_0(\omega) = \zeta_{0\nu}(\omega)\zeta_{0\nu}'(\omega)\zeta_{0,\nu-1}(\omega)\zeta_{0,\nu-1}'(\omega)\ \ldots,$$

отвечающая полюсу $\omega=0$ кратности ν, может быть физически реализована в виде цепочки четырехполюсников, показанных в таблице под номерами 1, 2.

Полюс на бесконечности. Пусть реактивная матрица $S(\omega)$ имеет в точке $\omega=\infty$ полюс порядка ν. Аналогично предыдущему можно доказать, что полюсу $\omega=\infty$ отвечают отщепленные множители

$$S_\infty(\omega)=\begin{pmatrix}1 & i\rho\omega\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \rho>0 \text{ или } \zeta'_\infty(\omega)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i\rho'\omega & 1\end{pmatrix},\ \rho'>0,$$

которые могут быть осуществлены в виде простейших четырехполюсников, показанных в таблице под номерами 3, 4.

Для рассмотрения других случаев нам необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. Пусть реактивная матрица $S(\omega)$ имеет комплексный полюс $\omega_0\,(\operatorname{Im}\omega_0\cdot\operatorname{Re}\omega\neq 0)$ порядка ν. Тогда $S(\omega)$ может быть представлена в виде произведения двух реактивных матриц, из которых одна имеет только четыре полюса $\omega_1=\omega_0$, $\omega_2=\overline{\omega}_0$, $\omega_3=-\overline{\omega}_0$, $\omega_4=-\omega_0$ порядка ν, а другая — регулярна в точках $\omega_k\ (k=1,\,2,\,3,\,4)$.

Доказательство. По условию $S(\omega)$ — реактивная матрица, следовательно, кроме полюса $\omega_1=\omega_0$ порядка ν, она имеет еще три полюса: $\omega_2=\overline{\omega}_0$, $\omega_3=-\overline{\omega}_0$, $\omega_4=-\omega_0$ порядка ν. Согласно теореме факторизации, матрицу $S(\omega)$ можно представить в виде

$$S(\omega)=S_2(\omega)\,S_1(\omega), \tag{4.3}$$

где $S_1(\omega)$ имеет полюсы только в точках $\pm\omega_0$, $\pm\overline{\omega}_0$, а $S_2(\omega)$ — регулярна в этих точках.

Так как детерминант отщепленного множителя $I-\dfrac{i}{\omega-\omega_0}\Pi^*\Pi J$, в силу соотношения $\Pi J\Pi^*=-2\operatorname{Im}\omega_0$, равен $\dfrac{\omega-\overline{\omega}_0}{\omega-\omega_0}$, то $\operatorname{Det}S_1(\omega)=1$, но тогда, как следует из (4.3), и $\operatorname{Det}S_2(\omega)=1$.

Так как матрица $S(\omega)$ — реактивная, то, в силу (2.1), $LS_2(\omega)S_1(\omega)L=S_2(-\omega)\,S_1(\omega)$, откуда получаем соотношение

$$LS_2^{-1}(\omega)\,LS_2(-\omega)=LS_1(\omega)\,LS_1^{-1}(-\omega).$$

Первая часть последнего равенства регулярна в замкнутой плоскости, кроме, быть может, точек $\omega_k\ (k=1,\,2,\,3,\,4)$, в которых левая часть регулярна. Следовательно, матрица $LS_1(\omega)\,LS_1^{-1}(-\omega)$ регулярна во всей замкнутой плоскости и, стало быть, она постоянна. Поскольку $\lim\limits_{\omega\to\infty}S_1(\omega)=I$, то $S_1(-\omega)=LS_1(\omega)\,L$. Аналогично доказывается, что $\overline{S(\overline{\omega})}=LS_1(\omega)\,L$.

Итак, в силу (2.1), отколотая матрица $S_1(\omega)$ — реактивная, но тогда, как вытекает из (4.3), и матрица $S_2(\omega)$ — реактивная. Лемма доказана. Доказанная лемма имеет место и в случае вещественного или чисто мнимого полюса реактивной матрицы. В этих случаях отколотая матрица $S_1(\omega)$ будет иметь только два вещественных полюса $\pm\sigma\ (\sigma>0)$ или два чисто мнимых полюса $\pm i\tau\ (\tau\geqslant 0)$.

Пусть $S(\omega)$ — реактивная матрица, имеющая в точке ω_0 простой полюс, отличный от нуля и бесконечности. В зависимости от того, является ли полюс ω_0 комплексным, чисто мнимым или вещественным, от матрицы $S(\omega)$, согласно лемме, можно отколоть реактивную матрицу $S_1(\omega)$, содержащую четыре или два простейших множителя. Найдем физическую реализацию этих отколотых матриц.

Вещественный полюс. Пусть реактивная матрица $S(\omega)$ имеет в точке $\omega=\sigma\ (\sigma>0)$ простой полюс. Тогда и $\omega=-\sigma$ будет простым полюсом

$S(\omega)$. Согласно доказанной лемме, отколотая матрица

$$S_1(\omega) = \left(I - \frac{i}{\omega + \sigma} \Pi_2^* \Pi_2 J\right)\left(I - \frac{i}{\omega - \sigma} \Pi_1^* \Pi_1 J\right)$$

является реактивной. Если элемент $s_{21}(\omega)$ этой матрицы равен тождественно нулю, то, в соответствии с (2.6), $S_1(\omega)$ имеет вид

$$S_1(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -i\omega \frac{a}{\omega^2 - \sigma^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a > 0$. Матрица $S_1(\omega)$ реализуется в виде четырехполюсника, изображенного в таблице под номером 5. Если же элемент $s_{12}(\omega) \equiv 0$, то матрица $S_1(\omega)$ имеет вид $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\omega \frac{b}{\omega^2 - \sigma^2} & 1 \end{pmatrix}$, где $b > 0$, и она может быть физически реализована в виде четырехполюсника, представленного в таблице под номером 6.

Предположим теперь, что $s_{12}(\omega) \not\equiv 0$ и $s_{21}(\omega) \not\equiv 0$. Тогда по реактивной матрице $S_1(\omega)$ можно построить по формуле (2.7) матрицу $Z(p)$ $(p = -i\omega)$. Эта матрица, в силу реактансной теоремы, имеет представление

$$Z(p) = Ap + Bp^{-1} + \sum_k \frac{C^{(k)} p}{p^2 + \tau_k^2}, \ \operatorname{Re} p \geqslant 0, \tag{4.4}$$

где A, B, $C^{(k)}$ — эрмитово-неотрицательные матрицы с вещественными элементами, а τ_k — вещественные числа, отличные от нуля,

Элементы $s_{ik}(\omega)$ матрицы $S_1(\omega)$ связаны с элементами $z_{ik}(p)$ матрицы $Z(p)$ по формулам (1.1). Определим вид матриц A, B и $C^{(k)}$.

С этой целью заметим, что элементы A_{12} и B_{12} матриц A и B отличны от нуля. Действительно, в противном случае элемент $z_{12}(p)$ матрицы (4.4) имел бы нуль при $p = 0$ или $p = \infty$. Но тогда, как следует из (1.1), элемент $s_{21}(\omega)$ отколотой матрицы имел бы полюс в бесконечности или нуле, что противоречит условию.

Элемент $A_{11} = A_{12}$. В самом деле, так как $\lim\limits_{\omega \to \infty} s_{22}(\omega) = 1$, то из равенства $s_{22} = z_{11} z_{12}^{-1}$ вытекает, что $A_{11} = A_{12}$. Аналогично проверяется, что $A_{22} = A_{12}$. Следовательно, матрица $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, где $a > 0$.

Все матрицы $C^{(k)}$ равны нулю. Действительно, из равенства

$$z_{12}(p) = A_{12} p + Bp^{-1} + \sum_k \frac{C_{12}^{(k)} p}{p^2 + r_k^2}$$

следует, что в случае $C_{12}^{(k)} \neq 0$ функция $z_{12}(p)$ имеет больше двух нулей и, стало быть, $s_{21}(\omega)$ имеет более двух полюсов, что невозможно. Далее, если $C_{11}^{(k)} \neq 0$, то $z_{11}(p)$ имеет в ω-плоскости полюсы $\omega = \pm \tau_k$, но тогда элемент $s_{22}(\omega)$ имеет более двух полюсов, так как полюсами $S_1(\omega)$ являются нули $z_{12}(p) = A_{12} p + B_{12} p^{-1}$. Аналогично доказывается, что $C_{22}^{(k)} = 0$. Итак, матрица (4.4) имеет вид

$$Z(p) = Ap + Bp^{-1}. \tag{4.5}$$

Покажем еще, что $\operatorname{Det} B = 0$. В самом деле, из равенства (4.5) вытекает, что

$$\operatorname{Det} Z = \text{const} + \frac{\operatorname{Det} B}{p^2}. \tag{4.6}$$

Если $\operatorname{Det} B$ отличен от нуля, то $s_{12} = \dfrac{-\operatorname{Det} Z}{A_{12} p + B_{12} p^{-1}}$, в силу (4.6), имеет полюс в нуле, что противоречит условию.

Заметим еще, что уравнение $z_{12} = A_{12}p + B_{12}p^{-1} = 0$ имеет вещественные корни $\pm\sigma$, следовательно, $B_{12} > 0$. Таким образом, матрица (4.4) имеет вид

$$Z(p) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p^{-1}, \tag{4.7}$$

где $a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 b_3 = b_2^2$.

Соединяя последовательно четырехполюсники, соответствующие слагаемым (4.7), получим простейший четырехполюсник, реализующий отколотую реактивную матрицу $S_1(\omega)$, отвечающую двум вещественным полюсам. Этот четырехполюсник приведен в таблице под номером 7 $(k > 0)$.

Чисто мнимые полюсы. Пусть реактивная матрица $S(\omega)$ имеет в точке $\omega = i\tau$ $(\tau > 0)$ простой полюс. Тогда, очевидно, $S(\omega)$ имеет симметричный простой полюс $\omega = -i\tau$.

Отколотая матрица

$$S_1(\omega) = \left(\mathrm{I} - \frac{i}{\omega + i\tau}\Pi_2^*\Pi_2 J\right)\left(\mathrm{I} - \frac{i}{\omega - i\tau}\Pi_1^*\Pi_1 J\right),$$

согласно доказанной лемме, — реактивная. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что $S_1(\omega)$ может быть физически реализована в виде четырехполюсника, изображенного в таблице под номером 7, причем в отличие от предыдущего случая коэффициент трансформации k будет отрицательным. Заметим, что в случае чисто мнимых полюсов, отколотая матрица $S_1(\omega)$ не может иметь тождественно равные нулю элементы $s_{21}(\omega)$ или $s_{12}(\omega)$. В самом деле, если, скажем, $s_{21}(\omega) \equiv 0$, то $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & s_{12}(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $s_{12}(\omega) = -z(p)$. Но импеданс $z(p)$ имеет в p-плоскости чисто мнимые полюсы, следовательно, $s_{12}(\omega)$ имеет в ω-плоскости вещественные полюсы, что противоречит условию.

Комплексные полюсы. Предположим, что реактивная матрица $S(\omega)$ имеет простой комплексный полюс ω_0 $(\operatorname{Im}\omega_0 \cdot \operatorname{Re}\omega_0 \neq 0)$. Тогда она имеет четыре простых полюса $\pm\omega_0$, $\pm\bar{\omega}_0$. Отвечающая этим полюсам отколотая матрица $S_1(\omega) = \prod_{k=1}^{4}\left(\mathrm{I} - \frac{i}{\omega - \omega_k}\Pi_k^*\Pi_k J\right)$, где $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \bar{\omega}_0$, $\omega_3 = -\bar{\omega}_0$, $\omega_4 = -\omega_0$, будет реактивной. По матрице $S_1(\omega)$, согласно формуле (2.7) построим матрицу

$$Z(p) = Ap + Bp^{-1} + \sum_k \frac{C^{(k)}p}{p^2 + \tau_k^2}. \quad (p = -i\omega). \tag{4.8}$$

Как и в случае вещественных полюсов, доказывается, что

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} (a > 0), \quad B_{12} \neq 0, \quad \operatorname{Det} B = 0.$$

Элементы $C_{12}^{(k)}$ матриц $C^{(k)}$ отличны от нуля. Действительно, если $C_{12}^{(s)} = 0$, то $C_{11}^{(s)} = C_{22}^{(s)} = 0$, ибо в противном случае один из элементов $z_{kk}(p)$ матрицы (4.8) имел бы полюс $i\tau_s$ и, стало быть, один из элементов $s_{kk}(\omega)$, в силу (1.1), имел бы вещественный полюс, что невозможно.

Так как нули элемента $z_{12}(p)$ суть полюсы $S_1(\omega)$, то сумма в правой части (4.8) состоит из одного слагаемого, скажем, $\frac{C^{(1)}p}{p^2 + \tau_1^2}$. Итак, матрица (4.8) имеет вид

$$Z(p) = Ap + Bp^{-1} + \frac{C^{(1)}p}{p^2 + \tau_1^2}. \tag{4.9}$$

Из последнего равенства следует, что $\operatorname{Det} C^{(1)} = 0$, так как в противном случае $\operatorname{Det} Z$ имел бы чисто мнимый полюс $i\tau_1$ и, следовательно, элемент $s_{12}(\omega)$ — вещественный полюс, что противоречит условию. Таким образом, матрица (4.9) имеет вид:

$$Z(p) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} p^{-1} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} \frac{p}{p^2 + \tau_2^1}, \tag{4.10}$$

где $a > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 \neq 0, \quad b_1 b_3 = b_2^2, \quad c_1 > 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_1 c_3 = c_2^2.$

Так как полюсы $\pm\omega_0$, $\pm\omega_0$ являются корнями уравнения $z_{12}(p) = a\omega^4 - (b_2 + a\tau_1^2 + c_2)\omega^2 + b_2\tau_1^2 = 0$, то имеем соотношения: $\omega_0^2 \bar{\omega}_0^{2} = \frac{b_2 \tau_1^2}{a}$, $\omega_0^2 + \bar{\omega}_0^2 = \frac{b_2 + a\tau_1^2 + c_2}{a}$, откуда следует, что $b_2 > 0$, $(\tau_1^2 - \omega_0^2)(\tau_1^2 - \bar{\omega}_0^2) = -\frac{c_2 \tau_1^2}{a}$, и, стало быть, $c_2 < 0$.

Соединяя последовательно четырехполюсники, соответствующие отдельным слагаемым (4.10), получим простейший четырехполюсник, реализующий отколотую реактивную матрицу $S_1(\omega)$, отвечающую четырем простым комплексным полюсам (таблица № 8).

Таким образом, любая реактивная матрица с простыми полюсами, может быть физически реализована в виде цепочечного соединения простейших четырехполюсников, приведенных в таблице. Такой же результат имеет место и в том случае, когда реактивная матрица имеет кратные полюсы. В самом деле, с помощью малого возмущения элементов матриц A, B, $C^{(k)}$ можно сделать полюсы простыми и воспользоваться ранее полученным результатом. За недостатком места мы опускаем соответствующие выкладки.

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема. Произвольная реактивная матрица может быть физически реализована в виде цепочки простейших четырехполюсников, перечисленных в таблице, причем в последнем звене может понадобиться идеальный трансформатор.

Заметим, что если реактивная матрица $S(\omega)$ имеет полюс только в нуле, то для ее реализации достаточно образовать цепочку из элементов 1, 2 таблицы; если $S(\omega)$ имеет полюс только в бесконечности, т. е. элементы $S_{jk}(\omega)$ являются полиномами, то она реализуется в виде цепочки элементов 3, 4 таблицы; если реактивная матрица имеет только вещественные полюсы, отличные от нуля и бесконечности, то реализация достигается в виде цепочечного соединения элементов 5, 6, 7 таблицы; если же $S(\omega)$ имеет только чисто мнимые полюсы, то она реализуется в виде цепочки элементов 7 таблицы, при условии, что коэффициент трансформации $k < 0$. И, наконец, если реактивная матрица имеет комплексные полюсы, не лежащие на осях координат, то ее можно физически реализовать в виде цепочечного соединения элементов 8 таблицы.

§ 5. Физическое осуществление реактивной матрицы $S(\omega)$, элементы которой мероморфные функции частоты

В этом случае [3] матрицу $S(\omega)$ можно представить в виде произведения $S(\omega) = UP(\omega)Q(\omega)$,

где
$$Q(\omega) = \prod_{k=1}^{N} \left(\mathrm{I} - \frac{i}{\omega - \omega_k} \Pi_k^* \Pi_k J \right), \quad (N \leqslant \infty)$$

$$P(\omega) = \overset{\curvearrowleft}{\int_0^l} e^{i\omega dE(t) J}, \quad U = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Здесь $P(\omega)$ — мультипликативный интеграл, а $E(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — неубывающая ограниченная матричная функция. Применяя лемму, легко проверить, что $Q(\omega)$ и $P(\omega)$ — реактивные матрицы. Произведение $Q(\omega)$ может быть физически осуществлено в виде цепочки (конечной или бесконечной) простейших четырехполюсников. Остается найти реализацию матрицы $P(\omega)$. Для этой цели мы сперва построим последовательность реактивных матриц $P^{(n)}(\omega) \to P(\omega)$ так, чтобы элементами матриц $P^{(n)}(\omega)$ были многочлены. Пусть $Z(\omega)$ — матрица полных сопротивлений, соответствующая матрице $P(\omega)$. Для $Z(\omega)$ имеет место известное разложение

$$Z(\omega) = Ap + Bp^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^{(k)}p}{p^2 + \tau_k^2}, \quad (p = -i\omega)$$

причем $\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} C^{(k)} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.
В частности,

$$z_{12} = -i\omega\left(A_{12} - B_{12}\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{12}^{(k)}}{\lambda_k - \lambda}\right). \quad (\lambda = \omega^2, \ \lambda_k = \tau_k^2)$$

Так как $z_{12} = \overset{-1}{p_{21}}(\omega)$, где $p_{21}(\omega)$ — целая функция *, то

$$p_{21}(\omega) = i\gamma\omega \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega^2}{\tau_k^2}\right) = i\gamma\omega \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Таким образом,

$$z_{12} = \frac{i\omega}{\gamma} \cdot \frac{1}{T(\lambda)} = \frac{i\omega}{\gamma}\left[\frac{1}{\lambda T'(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)\, T'(\lambda_k)}\right],$$

где

$$T(\lambda) = \lambda \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Положим

$$z_{12}^{(n)} = z_{21}^{(n)} = -[P_{21}^{(n)}]^{-1} = \frac{i\omega}{\gamma}[T_n(\lambda)]^{-1} = \frac{i\omega}{\gamma}\left[\frac{1}{\lambda T_n'(0)} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)\, T_n'(\lambda_k)}\right], \quad (5.2)$$

где

$$T_n(\lambda) = \gamma\lambda \prod_{1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Легко проверить, что $\dfrac{1}{|T_n'(\lambda_k)|} < \dfrac{1}{|T'(\lambda_k)|}$. $(k = 1, 2, \ldots, n)$

Так как $T_n'(\lambda_k) \to T'(\lambda_k)$ при $n \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то, переходя к пределу под знаком суммы (5.2), получим, что

$$z_{12}^{(n)}(\omega) \to z_{12}(\omega) \text{ при } n \to \infty.$$

Построим теперь матрицы

$$Z^{(n)} = A_n^{(p)} + B_{p-1}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^{(k)}p}{p^2 + \tau_k^2},$$

* Из представления (5.1) следует, что элементы P_{jk} — целые функции, не выше первого порядка роста, экспоненциального типа.

определяя элементы матриц $C_n^{(k)}$, $B^{(n)}$, $A^{(n)}$ равенствами:

$$C_{n,11}^{(k)} = C_{11}^{(k)},\ C_{n,22}^{(k)} = \frac{[C_{n,12}^{(k)}]^2}{C_{11}^{(k)}},\ B_{22}^{(n)} = \frac{[B_{12}^{(n)}]^2}{B_{11}},\ B_{11}^{(n)} = B_{11},\ A^{(n)} = A.$$

Элементы $C_{n,12}^{(k)}$, $B_{12}^{(n)}$ и $A_{12}^{(n)}$ однозначно определяются из разложения (5.2) для $z_{12}^{(n)}$. Матрица $z^{(n)}\,\omega \to z(\omega)$ при $n \to \infty$. Кроме того, как видно из формул (1.1), соответствующие передаточные матрицы $P^{(n)}(\omega) \to P(\omega)$ при $n \to \infty$. Элементы матриц $P^{(n)}(\omega)$ — рациональные функции, не имеющие особых точек в конечной части плоскости, и являются, следовательно, полиномами от ω. Как было показано выше, матрицу $P^{(n)}(\omega)$ можно разложить в произведение

$$P^{(n)}(\omega) = (\mathrm{I} + i\omega\eta_n^{(n)})(\mathrm{I} + i\omega\varepsilon_n^{(n)}) \ldots (\mathrm{I} + i\omega\eta_1^{(n)})(\mathrm{I} + i\omega\varepsilon_1^{(n)}) = \\ = e^{i\omega\eta_n^{(n)}} \cdot e^{i\omega\varepsilon_n^{(n)}} \ldots e^{i\omega\eta_1^{(n)}} \cdot e^{i\omega\varepsilon_1^{(n)}},$$

где

$$\varepsilon_k^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & a_k^{(n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \eta_k^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_k^{(n)} & 0 \end{pmatrix},\ a_k^{(n)} > 0,\ b_k^{(n)} > 0,\ [\varepsilon_k^{(n)}]^2 = [\eta_k^{(n)}]^2 = 0.$$

Заметим, что из соотношений

$$P^{(n)}(\omega) = \mathrm{I} + i\omega\left(\sum_1^n \varepsilon_k^{(n)} + \sum_1^n \eta_k^{(n)}\right) + \ldots$$

и $P(\omega) = \mathrm{I} + i\omega M + \ldots$ следует, что

$$\sum_1^n \varepsilon_k^{(n)} + \sum_1^n \eta_k^{(n)} \to M.$$

Отсюда вытекает, что величина $l_n = (a_1^{(n)} + b_1^{(n)}) + \ldots + (a_n^{(n)} + b_n^{(n)})$ стремится к некоторой ограниченной величине $l\ (0 \leqslant l < \infty)$. Положим $t_0 = 0$, $t_1 = a_1^{(n)}$, $t_2 = a_1^{(n)} + b_1^{(n)}$, $t_3 = a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + b_1^{(n)}$, $\ldots$, $t_{2n} = l_n$ и определим матричную функцию

$$F_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t_1}\begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1^{(n)} & 0 \end{pmatrix}, & t_2 \leqslant t \leqslant t_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_1^n a_k^{(n)} \\ \sum\limits_1^n b_k^{(n)} & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{t - t_{2n-1}}{t_{2n} - t_{2n-1}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_n^{(n)} & 0 \end{pmatrix}, & t_{2n-1} \leqslant t \leqslant t_{2n} = l_n. \end{cases}$$

Матрица $P^{(n)}(\omega)$ может быть записана в виде

$$P^{(n)}(\omega) = \overset{l_n}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} e^{i\omega dF_n(t)},$$

причем $F_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_n(t) \\ B_n(t) & 0 \end{pmatrix}$, где $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие условию $A_n(t) + B_n(t) = t$, $0 \leqslant t \leqslant l_n$. Выделим подпоследовательности $A_{n_k}(t)$ и $B_{n_k}(t)$, сходящиеся соответственно к неубывающим функциям $A(t)$ и $B(t)$.

Тогда

$$\lim \overset{l_n}{\underset{0}{\overset{\leftarrow}{\int}}} e^{i\omega dF_{n_k}(t)} = \overset{l}{\underset{0}{\overset{\leftarrow}{\int}}} e^{i\omega dF(t)},$$

где $F(t) = \begin{pmatrix} 0 & A(t) \\ B(t) & 0 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $P(\omega) = \overset{l}{\underset{0}{\overset{\leftarrow}{\int}}} e^{i\omega dF(t)}$.

Из условий $\Delta A(t) \leqslant \Delta t$, $\Delta B(t) \leqslant \Delta t$ следует, что производные $A'(t)$ и $B'(t)$ существуют почти всюду и что интеграл $P_x(\omega) = \overset{x}{\underset{0}{\overset{\leftarrow}{\int}}} e^{i\omega dF(t)}$ с переменным верхним пределом удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP_x}{dx} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & A'(x) \\ B'(x) & 0 \end{pmatrix} P_x,\ P_0 = \mathrm{I}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим теперь двухпроводную линию с распределенными емкостями $C(x)$ и самоиндукциями $L(x)$. Как известно, комплексные амплитуды тока и напряжения такой линии связаны соотношениями

$$\frac{dU}{dx} = i\omega L(x)\,\mathrm{I},$$

$$\frac{d\mathrm{I}}{dx} = i\omega\, C(x)\, U$$

или в матричном виде

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & L(x) \\ C(x) & 0 \end{pmatrix} \vec{y}, \tag{5.4}$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} U \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}$. Сравнивая соотношения (5.3) и (5.4), мы получим физическую реализацию матрицы $P(\omega)$, выбирая $L(x) = A'(x)$ и $C(x) = B'(x) \cdot$ $\cdot\ (0 \leqslant x \leqslant l)$.

Таким образом, показано, что произвольная реактивная матрица, элементами которой являются мероморфные функции от ω, может быть физически осуществлена в виде цепочки простейших четырехполюсников и отрезка двухпроводной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц и М. Ш. Флексер, ДАН, 135, № 3, 542—544 (1960).
2. W. Cauer. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Academie — Verlag Berlin, (1954).
3. М. С. Бродский и М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, т. XIII вып. 1 (79), стр. 3—35, (1958).
4. В. П. Потапов. Труды Моск. матем. о-ва, 4, стр. 125—236. (1955).
5. Ю. П. Гинзбург. ДАН, 117, № 2, стр. 171—173, (1957).
6. A. Tolbot. A new method of synthesis of react. networks, The Proc. of Institution of Electrical Engineers, V. 101, p. IV, (1954).