Разложенiе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцiй на частныя дроби и въ безконечныя произведенiя.

М. А. Тихомандрицкаго.

Разложенiе функцiй на частныя дроби или въ безконечныя произведенiя по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса на практикѣ встрѣчаетъ затрудненiе въ опредѣленiи цѣлой функцiи, которая представляется въ первомъ случаѣ придаточною, во второмъ внѣшнимъ множителемъ. Для функцiй двоякоперiодическихъ это затрудненiе устраняется теоремою, что если двоякоперiодическая функцiя не обращается въ безконечность внутри своего параллелограмма перiодовъ, то она есть постоянная; для функцiй съ однимъ перiодомъ такой теоремы нѣтъ, и надобно поэтому опереться на что нибудь другое при выполненiи этого разложенiя. Г. Букрѣевъ *) употребляетъ съ этою цѣлью методъ Коши; но намъ кажется, что это можно сдѣлать на основанiи другихъ теоремъ, болѣе элементарныхъ. Разсмотрѣнiе производныхъ значительно облегчаетъ эти изслѣдованiя. Хотя главный предметъ этой статьи будутъ составлять эллиптическiя функцiи, но какъ двойные ряды частныхъ дробей или двойныя произведенiя, въ которыя разлагаются эти функцiи, могутъ быть преобразованы въ простые ряды и произведенiя при помощи аналогичныхъ разложенiй тригонометрическихъ функцiй, то мы и начнемъ съ этихъ послѣднихъ наши разложенiя; однако самого преобразованiя мы не будемъ здѣсь дѣлать, такъ какъ это можно найти въ книгѣ: *Biermann.* Theorie der analytischen Functionen. Leipzig. 1887. S. 336 u. f.

---

*) *Б. Букрѣевъ.* О разложенiи трансцендентныхъ функцiй на частныя дроби. Кiевъ, 1887 года.

1. Функція

$$\operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

комплексной перемѣнной $z = x + yi$ есть однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости, за исключеніемъ точекъ

$$z = k\pi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ k цѣлое число, положительное, нуль или отрицательное—въ которыхъ она обращается въ ∞^2, и которыя потому суть ея полюсы, — и точки

$$z = \infty, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

которая для нея существенно-особенная, ибо въ ней она можетъ принимать безчисленное множество значеній. Разсмотримъ поближе функцію вблизи тѣхъ и другихъ.

Если во (2) примемъ $k = 0$, то будемъ имѣть точку

$$z = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

вблизи ея функція будетъ разлагаться въ рядъ такого вида:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cosec}^2 z &= \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right)^2} = \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)\right]^{-2} = \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{3} + z^4\,\mathfrak{P}(z^2)\right] = \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + z^2\,\mathfrak{P}(z^2);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

отсюда получимъ:

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2}\right)_{z=0} = \frac{1}{3}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Но функція $\operatorname{cosec}^2 z$ есть періодическая и періодъ ея есть π; слѣдовательно, если

$$z' + k\pi = z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

то будетъ

$$\operatorname{cosec}^2 z' = \operatorname{cosec}^2 z; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

вычитая отсюда тождество:

$$\frac{1}{(z'-k\pi)^2}=\frac{1}{z^2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

и полагая затѣмъ $z=0$, слѣдовательно $z'=k\pi$, получимъ:

$$\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2 z'-\frac{1}{(z'-k\pi)^2}\right]_{z'=k\pi}=\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2 z-\frac{1}{z^2}\right]_{z=0}=\frac{1}{3}. \quad (10)$$

Переходя теперь къ точкѣ $z=\infty$, мы, при помощи соотношенiй между показательными и тригонометрическими функцiями, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec}^2 z=\frac{1}{\sin^2 z}&=-\frac{4}{\left[e^{(x+yi)i}-e^{-(x+yi)i}\right]^2}=\\ &=-\frac{4}{\left[\left(e^{-y}-e^{+y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}+e^{+y}\right)\sin x\right]^2};\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (11)$$

модуль знаменателя этого выраженiя равенъ

$$\left.\begin{aligned}\left(e^{-y}-e^{+y}\right)^2\cos^2 x+\left(e^{-y}+e^{+y}\right)^2\sin^2 x&=\\ =e^{-2y}+e^{+2y}-2\cos 2x&;\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (12)$$

съ увеличенiемъ x и y до ∞ послѣднiй членъ будетъ колебаться въ конечныхъ предѣлахъ -2 и $+2$, тогда какъ изъ первыхъ двухъ, (смотря по знаку y), одинъ будетъ стремиться къ нулю, а другой рости до ∞; слѣдовательно вся сумма будетъ рости до ∞, и потому модуль $\operatorname{cosec}^2 z$ будетъ стремиться къ нулю. Это же будетъ и при x конечномъ, а $y=\infty$.

Наименьшее значенiе функцiи

$$\varphi(y)=\frac{e^{-2y}+e^{+2y}}{2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

будетъ при $y=0$, какъ извѣстно, и будетъ $=1$; а потому при $y>0$ будетъ

$$\varphi(y)>1; \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

слѣдовательно выраженiе (12) при y конечномъ и $x=\infty$ будетъ конечно и отлично отъ нуля; а потому и модуль $(\operatorname{cosec}^2 z)$ будетъ конечная величина; если же $y=0$, то выраженiе (12) принимаетъ видъ:

$$2(1-\cos 2x)=2^2\sin^2 x, \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

и слѣдовательно

$$\text{мод. } \operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{\sin^2 x}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (16)$$

а это будетъ обращаться въ ∞^2 при $x = k\pi$, однако такъ, по (10), что будетъ

$$\text{пред.} \left(\operatorname{cosec}^2 x - \frac{1}{(x-k\pi)^2}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (17)$$

какъ велико бы ни было цѣлое число $|k|$.

2. Составимъ теперь выраженіе:

$$f(z) = \operatorname{cosec}^2 z - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

гдѣ рядъ, какъ извѣстно, есть безусловно-сходящійся; это слѣдовательно будетъ аналитическая функція; она будетъ періодическая функція съ періодомъ π, ибо первый членъ уже имѣетъ этотъ періодъ, а въ рядѣ отъ измѣненія z на $z+\pi$ всѣ члены подвинутся на одинъ рангъ влѣво, отъ чего сумма не измѣнится по безконечности ея предѣловъ. При z конечномъ и отличномъ отъ $l\pi$, функція $f(z)$ будетъ конечна и непрерывна; но тоже будетъ и при $z = l\pi$. Такъ какъ

$$f(z + l\pi) = f(z)\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

то достаточно разсмотрѣть случай $l = 0$. Въ этомъ случаѣ представимъ функцію $f(z)$ такимъ образомъ:

$$f(z) = \operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

гдѣ значекъ у суммы напоминаетъ, что k не должно уже полагать $=0$; полагая здѣсь $z=0$, по (6) пред. §, получимъ:

$$f(0) = \frac{1}{3} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(k\pi)^2}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

что есть величина конечная, ибо сумма, сюда входящая, представляетъ безусловно сходящійся рядъ, какъ и сумма въ (3).

Если $z = x + yi$, гдѣ y конеченъ, но не $=0$, а x стремится къ ∞, то $\operatorname{cosec}^2 z$ будетъ конечная величина, тогда какъ сумма въ (1) будетъ стремиться къ нулю, ибо каждый членъ ея отдѣльно стремится къ 0^2; если x и y оба стремятся къ ∞, то оба члена въ выраженіи (1) порознь стремятся къ нулю, какъ относительно перваго мы видѣли въ пред. §, а относительно второго прямо видно, ибо каждый членъ стремится къ 0^2. Если же $y=0$, а x стремится къ ∞, то всё-таки выраженіе (1) будетъ стремиться къ конечной величинѣ на основаніи (17), ибо остальные члены дадутъ конечную сумму. Стало быть и тутъ постоянно безконечности второго члена нашего выраженія компенсируютъ безконечности перваго. Слѣдовательно $f(z)$ вездѣ конечна; но функція, вездѣ на всей неограниченой плоскости (z) однозначная, конечная и непрерывная, есть постоянная; слѣдовательно:

$$f(z)=C=f(0)\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

но какъ при $z=x+\infty i$ (x какое угодно), мы видѣли, $f(z)=0$, то $C=0$; слѣдовательно:

$$f(z)=f(0)=0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

отсюда во первыхъ:

$$\operatorname{cosec}^2 z=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

во вторыхъ:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(k\pi)^2}=\frac{1}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}=\frac{\pi^3}{6}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

равенство (7) представляетъ искомое разложеніе $\operatorname{cosec}^2 z$.

3. Оно безусловно-сходящееся, а потому можетъ быть интегрировано отъ z_0 до z по пути непроходящему чрезъ $z=l\pi$; помножая на $-dz$ и интегрируя, получимъ, такъ какъ

$$\int_{z_0}^{z} -\operatorname{cosec}^2 z\,dz=\int_{z_0}^{z} -\frac{dz}{\sin^2 z}=\operatorname{cotg} z-\operatorname{cotg} z_0\,, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

слѣдующее:

$$\operatorname{cotg} z-\operatorname{cotg} z_0=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{\frac{1}{z-k\pi}-\frac{1}{z_0-k\pi}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

или

$$\operatorname{cotg} z=\operatorname{cotg} z_0-\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{1}{z-k\pi}-\frac{1}{z_0-k\pi}\right\} \ldots \quad (3)$$

Но по извѣстнымъ правиламъ найдемъ:

$$\text{пред.}\left(\cot g z-\frac{1}{z}\right)_{z=0}=0\,;\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

слѣдовательно: въ (3) можно положить $z_0=0$, и мы получимъ

$$\cot g z=\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left\{\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right\}.\quad\ldots\ldots\ldots(5)$$

Полагая въ (3) $z_0=\frac{\pi}{2}$, и $\frac{\pi}{2}-z$ вмѣсто z, получимъ:

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left\{\frac{1}{-z-(2k-1)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2k-1)\frac{\pi}{2}}\right\}\quad..(6)$$

или, такъ какъ $-k$ пробѣгаетъ тѣже значенія, что и $+k$:

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}-z}-\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\};\quad..(7)$$

или, подводя первыя два члена подъ знакъ $\sum$, такъ какъ они отвѣчаютъ предположенію $k=0$, и отбрасывая поэтому значекъ ($'$):

$$\operatorname{tg} z=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}-z}-\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}.\quad\ldots\ldots(8)$$

4. Перенося членъ $\frac{1}{z}$ въ (5) пред. § налѣво, получимъ функцію

$$\cot g z-\frac{1}{z}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left\{\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right\},\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

которая при $z=0$ по доказанному въ томъ § обращается въ нуль, слѣдовательно конечна; и какъ во второй части рядъ безусловно-сходящійся, то можно (1) интегрировать отъ 0; сдѣлавъ это, получимъ, такъ какъ:

$$\int_0^z\left(\cot g z-\frac{1}{z}\right)dz=\int_0^z\left(\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)dz=\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)_0^z=\log\frac{\sin z}{z},\quad..(2)$$

$$\left[\text{ибо} \left(\log \frac{\sin z}{z}\right)_{z=0} = \log \left(\frac{\sin z}{z}\right)_{z=0} = \log 1 = 0\right] \ldots \ldots (3)$$

слѣдующее:

$$\log \frac{\sin z}{z} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) + \frac{z}{k\pi} \right\}; \ldots \ldots (4)$$

и переходя отъ log къ числу и умножая на z:

$$\sin z = z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \ldots \ldots \ldots (5)$$

Помножая (8) пред. § на $-dz$ и интегрируя отъ 0, (такъ какъ обѣ части конечны для $z = 0$) и имѣя въ виду, что

$$\int_0^z - \operatorname{tg} z dz = \int_0^z \frac{d\cos z}{\cos z} = \left(\log \cos z\right)_0^z = \log \cos z, \ldots (6)$$

(такъ какъ $\log \cos 0 = \log 1 = 0$), мы получимъ:

$$\log \cos z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right\} \ldots (7)$$

и переходя отъ log къ числу:

$$\cos z = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(1 - \frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}} \ldots \ldots (8)$$

5. Что касается до $\operatorname{cosec} z$ и $\sec z$, то разложеніе перваго легко получается изъ найденнаго, а второго найдется, перемѣняя въ первомъ z на $\frac{\pi}{2} - z$. Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{2}\left\{ \operatorname{cotg}\frac{z}{2} + \operatorname{tg}\frac{z}{2} \right\}; \ldots \ldots (1)$$

вставляя сюда разложенія $\operatorname{cotg}\frac{z}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ по формуламъ (5) и (8) пред. §, будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{2}{z-2k\pi} + \frac{2}{2k\pi}\right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{\frac{2}{z-(2k+1)\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{1}{z-2k\pi} + \frac{1}{2k\pi}\right\} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{1}{z-(2k+1)\pi} + \frac{1}{(2k+1)\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k (-1)^k \left\{\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\};$$

итакъ

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k (-1)^k \left\{\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Перемѣняя здѣсь z на $z - \frac{\pi}{2}$, получимъ:

$$-\sec z = \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k (-1)^k \left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi}\right\}; \ldots (3)$$

полагая здѣсь $z=0$, мы получимъ, умножая всё на -1:

$$1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k (-1)^k \left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k\pi}\right\}; \ldots\ldots (4)$$

складывая это съ (3), получимъ

$$1 - \sec z = \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k (-1)^k \left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; (5)$$

подводя всё направо подъ одну сумму, получимъ:

$$1 - \sec z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}, \ldots\ldots (6)$$

откуда будемъ имѣть:

$$\sec z = 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; \ldots (7)$$

что представляетъ разложенiе $\sec z$ по теоремѣ Миттагъ-Леффлера.

6. Переходимъ теперь къ эллиптическимъ функціямъ Вейерштрасса, и для облегченія пониманія дальнѣйшаго, напомнимъ ихъ опредѣленія и нѣкоторыя свойства.

Четная функція $\wp(u)$, опредѣляемая дифференціальнымъ уравненіемъ

$$\wp'(u) = -\sqrt{4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

и условіемъ обращаться въ ∞ при $u=0$, слѣдовательно представляющаяся обратною интегралу

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_2}} \cdot \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$s = \wp(u), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \wp(u+2\omega) &= \wp(u); \\ \wp(u+2\omega') &= \wp(u), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

выражающимъ ея двоякую періодичность.

Здѣсь, обозначая чрезъ e_1, e_2, e_3 корни полинома

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

стоящаго подъ знакомъ радикала въ интегралѣ (2), величины ω и ω', а также

$$\omega'' = \omega + \omega' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

опредѣляются интегралами:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \int_{e_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} \\ \omega'' &= \int_{e_2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} \\ \omega' &= \int_{e_3}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

при чемъ предполагается, что

$$\Re(e_1) \geqq \Re(e_2) \geqq \Re(e_3), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

обозначая знакомъ $\Re(e)$ вещественную часть e. Подобно равенствамъ (4) имѣется равенство:

$$\wp(u+2\omega'') = \wp(u), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

которое однако въ силу (6) есть слѣдствіе (4), равно какъ и другое, болѣе общее:

$$\wp(u+2\tilde{\omega})=\wp(u)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

гдѣ

$$\tilde{\omega}=m\omega+n\omega'\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(11)$$

при m и n цѣлыхъ числахъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Полагая въ (10)

$$u=0\,,$$

согласно опредѣленію функціи $\wp(u)$, будемъ имѣть:

$$\wp(2\tilde{\omega})=\wp(0)=\infty.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(12)$$

Построивъ точки $+\omega$, $-\omega$; также $+\omega'$, $-\omega'$, проведемъ чрезъ первыя прямыя, параллельныя направленію ω', чрезъ вторыя прямыя, параллельныя направленію ω; мы получимъ первый паралелограмъ періодовъ функціи $\wp(u)$: въ центрѣ его функція $\wp(u)$ обращается въ ∞^2; во всѣхъ же прочихъ точкахъ конечна, однозначна и непрерывна. Проведя прямыя, параллельныя сторонамъ этого перваго паралелограмма въ такихъ же соответственно направленіяхъ и на такихъ же разстояніяхъ одна отъ другой, мы разобьемъ всю плоскость (u) на равныя первому паралелограммы, въ которыхъ картина значеній функціи $\wp(u)$ будетъ повторяться; въ частности, какъ то говоритъ (12), въ центрахъ ихъ функція $\wp(u)$ будетъ $=\infty^2$.

7. Вблизи значенія $u=0$, функція $\wp(u)$ разлагается въ такой рядъ:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

гдѣ $\mathfrak{P}(z)$ есть рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной z. Изъ (1) имѣемъ:

$$\text{пред.}\left\{u^2\wp(u)\right\}_{u=0}=+1.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

$$\text{пред.}\left\{\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}=0.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Полагая въ (10) $u+2\tilde{\omega}=u'$, получимъ:

$$\wp(u')=\wp(u)\,;\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

помножая это на $(u'-2\tilde{\omega})^2=u^2$, и полагая затѣмъ $u=0$, слѣдовательно $u'=2\tilde{\omega}$, по (2) будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})^2\wp(u')\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\text{пред.}\left\{u^2\wp(u)\right\}_{u=0}=+1;\ldots\ldots(5)$$

точно также, вычитая изъ (4)

$$\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}=\frac{1}{u^2},$$

и полагая $u=0$, мы получимъ по (3):

$$\text{пред.}\left\{\wp(u')-\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\text{пред.}\left\{\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}=0.\;\ldots(6)$$

8. Производныя отъ $\wp(u)$ будутъ имѣть тѣже періоды и тѣже безконечности, но только порядковъ на единицу увеличивающихся съ порядкомъ производной. Дифференцируя (1) пред. §, будемъ имѣть:

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+u\mathfrak{P}_1(u^2),\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ $\mathfrak{P}_1(u^2)$ обозначаетъ рядъ расположенный по положительнымъ степенямъ u^2. Полагая здѣсь $u=u'-2\tilde{\omega}$, мы будемъ имѣть:

$$\wp'(u'-2\tilde{\omega})=\wp'(u')=-\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}+(u'-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_1(u'-2\tilde{\omega}),\;.\;(2)$$

откуда получимъ:

$$\text{пред.}\left[\wp'(u')+\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}\right]_{u'=2\tilde{\omega}}=0.\;\ldots\ldots(3)$$

9. Напомнивъ это, составимъ выраженіе:

$$f(u)=\wp'(u)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\frac{2}{(u-w)^3},\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega',\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

при m и n пробѣгающихъ независимо одно отъ другого весь рядъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Двойной безконечный рядъ во второй части (1) есть безусловно-сходящійся рядъ {см. Jordan. Cours d'Analyse de l'Ecole polytechique T. I. § 177 и слѣд. p. 160. Paris Gauthier-Villars. 1882 г.}, и потому представляетъ однозначную, конечную и непрерывную функцію, которая только въ точкахъ

$$u=2\tilde{\omega},$$

обращается въ ∞^3; но въ силу (3) § 10 функція $f'(u)$ не будетъ обращаться въ безконечность, какъ увидимъ далѣе. Функція $f'(u)$ имѣетъ тѣже періоды, какъ и функція $\wp(u)$; дѣйствительно $\wp'(u)$ имѣетъ тѣже періоды, и рядъ тоже, ибо, при перемѣнѣ u на $u+2\omega$, m переходитъ въ $m-1$, которое пробѣгаетъ, при измѣненіи m отъ $-\infty$ до $+\infty$, тотъ же рядъ значеній, какъ и m; точно также перемѣна u на $u+2\omega'$ измѣняетъ n на $n-1$ съ такими же послѣдствіями: въ результатѣ является только передвиженіе всѣхъ членовъ ряда на одинъ рангъ по направленію къ $-\infty$. Итакъ функція $f'(u)$ удовлетворяетъ слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} f'(u+2\omega) &= f'(u) \\ f'(u+2\omega') &= f'(u) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

а слѣдовательно и болѣе общему, изъ нихъ выводимому:

$$f'(u+2\varpi) = f'(u). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Функція $f'(u)$ такимъ образомъ есть двояко-періодическая функція, которая внутри своего параллелограмма періодовъ нигдѣ не обращается въ безконечность, какъ было уже замѣчено. На основаніи (5) достаточно провѣрить это для перваго параллелограмма, для котораго представимъ её такъ:

$$f'(u) = \wp'(u) + \frac{2}{u^3} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{2}{(u-\omega)^3}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ знакъ (′) у суммы показываетъ, что комбинація ($m=0$, $n=0$) значеній m и n должна быть исключена изъ числа тѣхъ, на которыя распространяется $\sum$; полагая теперь $u=0$, по (3) § (10) (для $m=0$, $n=0$), будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left(\wp'(u) + \frac{2}{u^3}\right)_{u=0} = 0; \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

въ суммѣ же

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{2}{\omega^3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

въ которую обратится сумма въ (6) при $u=0$, всѣ члены по два сократятся между собою, [именно членъ ($m=\mu$, $n=\nu$) съ членомъ ($m=-\mu$, $n=-\nu$)]. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\text{пред.} f'(u)_{u=0} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Итакъ дѣйствительно въ точкахъ, въ которыхъ выраженіе (1) могло бы обращаться въ ∞, оно имѣетъ конечную величину; слѣдовательно оно есть постоянное, и именно нуль по (9); т. е.

$$f'(u) = \wp'(u) + \frac{2}{u^3} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{2}{(u-w)^3} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

откуда находимъ:

$$\wp'(u) + \frac{2}{u^3} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{-2}{(u-w)^3} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Сумма второй части есть безусловно-сходящійся рядъ, обращающійся въ нуль при $u=0$, равно какъ и лѣвая часть по (7), а потому это равенство можетъ быть интегрировано отъ $u=0$ до u; сдѣлавъ это, получимъ:

$$\wp(u) - \frac{1}{u^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\};$$

отсюда получается такое разложеніе функціи $\wp(u)$ на частныя дроби, отвѣчающія ея безконечностямъ, разложеніе по теоремѣ Миттагъ-Лефлера:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ опять рядъ будетъ безусловно-сходящійся.

10. Нетрудно вывести двоякую періодичность функціи $\wp(u)$ изъ этого ея разложенія. Перемѣняя u одинъ разъ на $u+\omega$, другой на $u-\omega$, и вычитая послѣдній результатъ изъ перваго, будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} \wp(u+\omega) - \wp(u-\omega) &= \frac{1}{(u+\omega)^2} - \frac{1}{(u-\omega)^2} + \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} &\left\{ \frac{1}{[u-(w-\omega)]^2} - \frac{1}{[u-(w+\omega)]^2} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

первый членъ получается изъ стоящаго подъ знакомъ суммы чрезъ положеніе $m=0$ и $n=0$; а потому внеся его подъ этотъ знакъ и отбрасывая слѣдовательно значекъ ($'$), будемъ имѣть:

*

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega)-\wp(u-\omega)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{[u-(w-\omega)]^2}-\frac{1}{[u-(w+\omega)]^2}\right\}=\\ &=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{[u-(2m-1)\omega-2n\omega']^2}-\frac{1}{[u-(2m+1)\omega-2n\omega']^2}\right\}=0\,,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

ибо $2m+1$ получается изъ $2m-1$ чрезъ перемѣну m на $m+1$, слѣдовательно вторые члены, съ $(-)$, будутъ не что иное, какъ первые, передвинутые на одинъ рангъ въ сторону къ $+\infty$. Итакъ

$$\wp(u+\omega)-\wp(u-\omega)=0\,;\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

отсюда, перемѣняя u на $u+\omega$:

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u)\,.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

Точно также выведется равенство:

$$\wp(u+2\omega')=\wp(u)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

и слѣдовательно и

$$\wp(u+2\omega'')=\wp(u)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

такъ какъ

$$\omega''=\omega+\omega',$$

и болѣе общее

$$\wp(u+2\varpi)=\wp(u)\,.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

11. Вычитая равенство (12) § 10 изъ тождества

$$c=c\,,$$

получимъ

$$c-\wp(u)=c-\frac{1}{u^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{-1}{(u-w)^2}+\frac{1}{w^2}\right\}\quad\ldots\quad(1)$$

и такъ какъ рядъ направо есть безусловно-сходящійся, то его можно интегрировать, и какъ резидю каждаго члена $=0$, то путь интегрированія подчиняется только одному условію—не проходить чрезъ точки:

$$u=2\varpi\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

когда интегралъ теряетъ смыслъ. Мы, помноживъ обѣ части равенства на $\frac{1}{2}du$, проинтегрируемъ его отъ $-u$ до $+u$ по пути, подчиненному только этому условію; чрезъ это получимъ функцію, которую означимъ чрезъ $\zeta(u)$, разложенную на частныя дроби:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)&=\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\Big(c-\wp(u)\Big)\,du=\\&=cu+\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{u+w}+\frac{2u}{w^2}\right\};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

это равенство содержитъ заразъ и опредѣленіе функціи $\zeta(u)$ интеграломъ, и ея разложеніе на частныя дроби, которое однако еще не окончательное, на которомъ мы остановимся. Легко видѣть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{u+w}+\frac{2u}{w^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\left[\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right]+\left[\frac{1}{u+w}-\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u+w}-\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\};$$

гдѣ мы раздѣлили сумму второй строки на двѣ въ третьей, ибо каждая изъ нихъ есть безусловно-сходящаяся (*Jordan*, l. c.); вторая же при этомъ оказалась равною первой, ибо выводится изъ нея чрезъ перемѣну m и n на $-m$ и $-n$, но какъ первыя, такъ и вторыя пробѣгаютъ весь рядъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, вторыя только въ обратномъ порядкѣ, когда m и n пробѣгаютъ этотъ рядъ чиселъ. На основаніи этого (3) окончательно такъ перепишется:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)&=\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\Big(c-\wp(u)\Big)\,du=\\&=cu+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(4)$$

гдѣ мы имѣемъ разложеніе функціи $\zeta(u)$ на частныя дроби, отвѣчающія ея безконечностямъ по теоремѣ Миттагъ-Леффлера. Опредѣленіе функціи $\zeta(u)$ опредѣленнымъ интеграломъ было найдено впервые нами; (Вейерштрассъ её опредѣляетъ иначе); оно имѣетъ то достоинство, что изъ формы интеграла прямо видна нечетность функціи; ибо если въ предѣлахъ поставить $-u$ вмѣсто u, то нижній станетъ верхнимъ, а верхній нижнимъ, слѣдовательно будетъ

$$\zeta(-u) = -\zeta(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

по извѣстному свойству опредѣленныхъ интеграловъ мѣнять знакъ отъ перестановки предѣловъ верхняго съ нижнимъ. Изъ этого опредѣленія видна и однозначность функціи $\zeta(u)$, ибо residu функціи $[c-\wp(u)]$ равенъ нулю. Это-же явствуетъ и изъ разложенія функціи на частныя дроби. Относительно нечетности: если перемѣнимъ въ этомъ разложеніи m на $-m$, n на $-n$, то каждый членъ перейдетъ въ другой, для котораго m и n, имѣютъ противоположные знаки, чѣмъ въ этомъ членѣ.

Полагая здѣсь $u=\omega,\ \omega',\ \omega''$ получимъ три формулы, которыя можно обнять въ одной слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(i)} = \zeta(\omega^{(i)}) &= \frac{1}{2}\int_{-\omega^{(i)}}^{+\omega^{(i)}}\Big(c-\wp(u)\Big)du = \\ &= c\omega^{(i)} + \frac{1}{\omega^{(i)}} + \sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{-1}{w-\omega^{(i)}} + \frac{1}{w} + \frac{\omega^{(i)}}{w^2}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

если условиться, что

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \omega\,; & \omega^{(2)} &= \omega''\,; & \omega^{(3)} &= \omega'\,, \\ \eta^{(1)} &= \eta\,; & \eta^{(2)} &= \eta''\,; & \eta^{(3)} &= \eta'\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Эти величины $\eta,\ \eta',\ \eta''$ суть модули періодичности (которая второго рода) функціи $\zeta(u)$: при измѣненіи u на $u+2\omega^{(i)}$ функція $\zeta(u)$ получаетъ конечное приращеніе $2\eta^{(i)}$; т. е.

$$\zeta(u+2\omega^{(i)}) = \zeta(u) + 2\eta^{(i)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Это можно вывести изъ обоихъ опредѣленій функціи $\zeta(u)$, какъ съ помощію опредѣленнаго интеграла, такъ и съ помощію разложенія ея на частныя дроби, какъ то мы покажемъ въ слѣдующихъ §§.

12. Вычтя равенство (3) § 11 изъ тождества:

$$c - c = 0\,,$$

получимъ:

$$c-\wp(u+\omega) - (c-\wp(u-\omega)) = 0\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

помножая это равенство на du и интегрируя отъ 0 по пути, непроходящему чрезъ полюсы функціи $\wp(u)$, т. е. точки 2ϖ, мы получимъ:

$$\int_0^u [c-\wp(u+\omega)]du - \int_0^u [c-\wp(u-\omega)]du = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

или

$$\int_\omega^{u+\omega} [c-\wp(v)]dv - \int_{-\omega}^{u-\omega} [c-\wp(v)]dv = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если положимъ:

$$\int_{u_0}^{u} [c-\wp(u)]du + C = Z(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

какъ опредѣленіе функціи $Z(u)$, то (3) можно такъ представить:

$$Z(u+\omega)-Z(\omega)-Z(u-\omega)+Z(-\omega)=0\,,$$

или

$$Z(u+\omega)-Z(u-\omega)=Z(\omega)-Z(-\omega)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Это равенство будетъ имѣть мѣсто при всякомъ C; но каково-бы ни было u_0, всегда можно C выбрать такъ, что $Z(u)$ обратится въ нашу нечетную функцію $\zeta(u)$. Дѣйствительно, тогда должно быть:

$$Z(-u)=-Z(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

или

$$\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))\,du + C = -\left(\int_{u_0}^{u} (c-\wp(u))du + C\right); \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

откуда

$$C = -\frac{1}{2}\left(\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))du + \int_{u_0}^{u} (c-\wp(u))du\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или

$$C = \frac{1}{2}\left(-\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))du + \int_{u}^{u_0} (c-\wp(u))du\right); \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

перемѣняя u на $-u$ въ первомъ интегралѣ, мы получимъ:

$$C = \frac{1}{2}\left\{\int_{-u_0}^{u} [c-\wp(u)]du + \int_{u}^{u_0} [c-\wp(u)]du\right\} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0} [c-\wp(u)]du\,. \quad (10)$$

Внося это въ (4), будемъ имѣть: нечетная функція

$$\left.\begin{aligned} Z(u) &= \int_{u_0}^{u} [c - \wp(u)]du + \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0} [c - \wp(u)]du = \\ &= \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} [c - \wp(u)]du + \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u} [c - \wp(u)]du; \end{aligned}\right\} \quad . \; . (11)$$

мѣняя въ первомъ интегралѣ u на $-u$, мы получимъ: нечетная функція

$$\left.\begin{aligned} Z(u) &= -\frac{1}{2}\int_{-u_0}^{-u} [c - \wp(u)]du + \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u} [c - \wp(u)]du = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-u}^{+u} [c - \wp(u)]du = \zeta(u), \end{aligned}\right\} \; . \; (12)$$

т. е. это и будетъ наша $\zeta(u)$. Слѣдовательно и для $\zeta(u)$ будетъ имѣть мѣсто равенство (5); но какъ по нечетности этой функціи:

$$\zeta(-\omega) = -\zeta(\omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

и $\zeta(\omega) = \eta$, то оно приметъ для нея такой видъ:

$$\zeta(u + \omega) - \zeta(u - \omega) = 2\eta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

откуда, мѣняя u на $u + \omega$:

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Точно также найдемъ и слѣдующія равенства:

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

$$\zeta(u + 2\omega'') = \zeta(u) + 2\eta''. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Если въ (16) перемѣнить u на $u + 2\omega$, и принять во вниманіе, что $\omega + \omega' = \omega''$, то мы будемъ имѣть по (15):

$$\zeta(u + 2\omega'') = \zeta(u) + 2\eta + 2\eta'; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

сличая это съ (17), въ виду однозначности функціи $\zeta(u)$ находимъ

$$\eta'' = \eta + \eta'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

13. Чтобы вывести тоже съ помощію разложенія на частныя дроби, перемѣнимъ въ (4) § 12 u на $u \pm \omega$; получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta(u\pm\omega)=c(u\pm\omega)+\dfrac{1}{u\pm\omega}+\\[2ex] +\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\dfrac{1}{u-(w\mp\omega)}+\dfrac{1}{w}+\dfrac{u}{w^2}\right\};\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

полагая здѣсь $u=0$, получимъ по (6) § 12:

$$\pm\eta=\pm c\omega\pm\frac{1}{\omega}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{-\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{1}{w}\pm\frac{\omega}{w^2}\right\};\quad\ldots\ (2)$$

вычитая это изъ предыдущаго, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=cu+\dfrac{1}{u\pm\omega}\mp\dfrac{1}{\omega}+\\[2ex] +\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\dfrac{1}{u-(w\mp\omega)}+\dfrac{1}{w\mp\omega}+\dfrac{u}{w^2}\right\};\end{array}\right\}\quad\ldots\ (3)$$

придавая и отнимая въ скобкахъ $\{\}$ по $\dfrac{u}{(w\mp\omega)^2}$, мы можемъ этому разложенію дать такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta(u\mp\omega)\mp\eta=cu+\dfrac{1}{u\pm\omega}\mp\dfrac{1}{\omega}+\\[2ex] +\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\dfrac{1}{u-(w\mp\omega)}+\dfrac{1}{w\mp\omega}+\dfrac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}-\\[2ex] \qquad -u\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\dfrac{1}{(w\mp\omega)^2}-\dfrac{1}{w^2}\right\},\end{array}\right\}\quad\ldots\ (4)$$

гдѣ мы могли отдѣлить послѣднюю сумму отъ первой, ибо обѣ безусловно-сходящіяся. Придавая и отнимая $\dfrac{u}{\omega^2}$, мы можемъ, внося членъ:

$$\frac{1}{u\pm\omega}\mp\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}$$

подъ знакъ $\sum'$ и отбрасывая значекъ $(')$ у $\sum$, такъ какъ этотъ членъ получается изъ общаго члена суммы, полагая $m=0$, $n=0$, дать такой видъ этому равенству:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=u\left(c-\frac{1}{\omega^2}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{(w\mp\omega)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}\right)+\\+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (5)$$

Но полагая въ (12) § 10 $u=\pm\omega$ и имѣя въ виду (7) § 8, мы будемъ имѣть:

$$e_1=\wp(\pm\omega)=\frac{1}{\omega^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{(w\mp\omega)^2}-\frac{1}{w^2}\right\};\quad .\ .\ .\ .\ (6)$$

на основаніи этого (5) замѣнится такимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=u(c-e_1)+\\+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (7)$$

Здѣсь $w\mp\omega=(2m\mp1)\omega+2n\omega$; но какъ $2m+1$ пробѣгаетъ тотъ же рядъ нечетныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, какъ и $2m-1$, то вторая часть можетъ быть написана съ однимъ какимъ нибудь знакомъ, напр. съ верхнимъ, и мы будемъ имѣть тогда:

$$\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=u(c-e_1)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w_1}+\frac{1}{w_1}+\frac{u}{w_1{}^2}\right\}\quad .\ .\ (8)$$

гдѣ

$$w_1=w-\omega=(2m-1)\,\omega+2n\omega'.\quad .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

Изъ (8) слѣдуетъ, что

$$\zeta(u+\omega)-\eta=\zeta(u-\omega)+\eta,\quad .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

откуда легко получимъ:

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta.\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

Точь въ точь такимъ-же путемъ придемъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$\zeta(u\pm\omega')\mp\eta'=u(c-e_3)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w_3}+\frac{1}{w_3}+\frac{u}{w_3{}^2}\right\},\quad .\ (12)$$

гдѣ

$$w_3 = 2m\omega + (2n-1)\omega' \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{13}$$

и

$$\zeta(u \pm \omega'') \mp \eta'' = u(c - e_2) + \sum_{m,n}^{+\infty}{}_{-\infty} \left\{ \frac{1}{u - w_2} + \frac{1}{w_2} + \frac{u}{w_2^{\,2}} \right\}, \quad . \quad . \tag{14}$$

гдѣ

$$w_2 = (2m-1)\omega + (2n-1)\omega' \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{15}$$

и ихъ слѣдствіямъ:

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta' \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{16}$$

$$\zeta(u + 2\omega'') = \zeta(u) + 2\eta'' \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{17}$$

Равенства (12), (16) и (17), изъ которыхъ послѣднее есть слѣдствіе первыхъ двухъ, показываютъ измѣненіе $\zeta(u)$ при переходѣ u въ соотвѣтственную точку одного изъ сосѣднихъ параллелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$. Изъ (11) и (16) легко получается болѣе общая:

$$\zeta(u + 2\tilde{\omega}) = \zeta(u) + 2\tilde{\eta} \,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{18}$$

гдѣ

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega' \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{19}$$

и

$$\tilde{\eta} = m\eta + n\eta' \,.$$

Формулы (8), (12) и (14) даютъ разложеніе на частныя дроби по теоремѣ Миттагъ-Леффлера функцій, получающихся изъ $\zeta(u)$ чрезъ измѣненіе u на одинъ изъ полупеpіодовъ.

14. Всѣ эти разложенія, сейчасъ упомянутыя, равно какъ и разложеніе функціи $\zeta(u)$, [(4) § 11], суть безусловно-сходящіяся, а потому могутъ быть интегрированы; это дастъ результаты фундаментальнаго значенія въ теоріи эллиптическихъ функцій. Начнемъ съ функціи $\zeta(u)$. Помножая (4) § 12 на du и интегрируя отъ u_0 до u по пути, непроходящему чрезъ полюсы $\zeta(u)$, получимъ новую функцію, которую означимъ чрезъ $Y_0(u)$, и ея разложеніе въ рядъ:

$$\left.\begin{aligned} Y_0(u) &= \int_{u_0}^{u} \zeta(u)\,du = \\ &= \frac{1}{2}\,c\,(u^2 - u_0^{\,2}) + \log u - \log u_0 + \\ &+ \sum_{m,n}^{+\infty}{}'_{-\infty} \left\{ \log(u - w) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} - \right. \\ &\left. - \left(\log(u_0 - w) + \frac{u_0}{w} + \frac{1}{2}\frac{u_0^{\,2}}{w^2} \right) \right\}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \tag{1}$$

или, придавая и отнимая $\log(-w)$ въ скобкахъ $\{\}$:

$$\left.\begin{aligned}
Y_0(u) = \int_{u_0}^{u} \zeta(u)du = \frac{1}{2}\, c\,(u^2 - u_0{}^2) + \log u - \log u_0 + \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{w^2}\right\} - \\
- \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{\log\left(1 - \frac{u_0}{w}\right) + \frac{u_0}{w} + \frac{1}{2}\,\frac{u_0{}^2}{w^2}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

гдѣ мы могли выдѣлить въ особую сумму зависящее отъ u_0 на томъ основаніи, что обѣ суммы безусловно-сходящіяся. Дѣйствительно, по формулѣ Маклореня имѣемъ:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\,\frac{(1-\theta)^2}{1+\theta x}, \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

перемѣняя x на $-x$ и перенося первыя два члена налѣво, будемъ имѣть:

$$\log(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = -\,x^3\,\frac{(1-\theta)^2}{1-\theta x}, \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

полагая здѣсь $x = \dfrac{u}{w}$, получимъ:

$$\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{w^2} = -\left(\frac{u}{w}\right)^3 \frac{(1-\theta)^2}{1 - \theta\,\dfrac{u}{w}}; \quad . \; . \; . \; (5)$$

модуль этого выраженія будетъ:

$$< \left(\frac{\text{мод.}\,u}{\sqrt{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}}\right)^3 \frac{1}{1 - \dfrac{\text{мод.}\,u}{\sqrt{(2ma+2ma')^2+(2mb+2nb')^2}}}; (6)$$

(если $\omega = a + b\sqrt{-1}$, $\omega' = a' + b'\sqrt{-1}$), или

$$< \frac{L}{\left[(2ma+2na')^2 + (2mb+2nb')^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

гдѣ L такая конечная величина, что

$$\frac{(\text{мод. } u)^3}{1-\dfrac{(\text{мод. } u)}{\sqrt{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}}} < L, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

что всегда будетъ возможно сдѣлать, такъ какъ лѣвая часть конечная для всякихъ цѣлыхъ значеній m и n, если только u не совпадаетъ ни съ одною изъ точекъ 2ϖ, что мы и не можемъ предположить; а отсюда по Jordan (l. c.) выведемъ сходимость ряда модулей членовъ нашего ряда:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

а слѣдовательно и безусловную сходимость этого ряда.—На основаніи этого мы можемъ собрать въ одно цѣлое всѣ члены, содержащіе u_0, и положивъ по придачѣ къ обѣимъ частямъ (2) по c' и перенесеніи зависящаго отъ u_0 налѣво:

$$C_1=\frac{c}{2}u_0{}^2+c'+\log u_0+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u_0}{w}\right)+\frac{u_0}{w}+\frac{1}{2}\frac{u_0{}^2}{w^2}\right\}, \; . \; . \quad (10)$$

мы будемъ имѣть новую функцію $Y(u)$, отличающуюся на эту постоянную отъ $Y_0(u)$, разложенную въ рядъ такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} Y(u)=Y_0(u)+C_1=\frac{c}{2}u^2+c'+\log u+\\ +\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Изъ обоихъ опредѣленій $Y_0(u)$, а слѣдовательно и $Y(u)$, вытекаетъ безчисленная многозначность этой функціи: такъ какъ резидю функціи $\zeta(u)$ есть 1, то $Y(u)$ имѣетъ безчисленное множество значеній, разнящихся на $2k\pi i$, гдѣ k цѣлое число, положительное или отрицательное; это слѣдуетъ и изъ разложенія (11), ибо $\log z$ многозначная функція, безчисленное множество значеній которой для каждаго значенія аргумента разнятся между собою на $2k\pi i$. Эта функція логариѳмически обращается въ безконечность въ точкахъ $u=2\varpi$.

15. Если теперь мы возьмемъ обѣ части равенства (11) предыдущаго § показателемъ числа e (основанія Неперовыхъ логариѳмовъ), то получимъ однозначную функцію, ибо

$$e^{2k\pi i}=1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

и вездѣ конечную и непрерывную, которую означимъ чрезъ $\Theta(u)$, разложенную на множители, отвѣчающіе ея нулямъ:

$$\Theta(u)=e^{Y(u)}=e^{\frac{c}{2}u^2+c'}u\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Эта функція нечетная, какъ то вытекаетъ изъ разложенія (2): перемѣна u на $-u$ измѣнитъ только знакъ одного множителя; остальные множители въ произведеніи перейдутъ попарно одинъ въ другой: множитель $(m=\mu,\ n=\nu)$ перейдетъ въ множитель $(m=-\mu,\ u=-\nu)$ и наоборотъ. Тоже самое можно вывести и изъ свойствъ функціи $Y_0(u)$, опредѣляемой интеграломъ (1) § 15, отъ которой $Y(u)$ разнится на постоянную C_1[(11) предыдущаго §]. Построимъ эллипсъ, для котораго вершинами большой оси были-бы точки $-u$ и $+u$, и который не заключалъ бы внутри себя никакого полюса, кромѣ одного $u=0$, который будетъ центромъ этого эллипса (назовемъ его E). Тогда интегралъ, взятый по эллипсу въ положительномъ направленіи, отъ функціи $\zeta(u)$ будетъ $=2\pi i$:

$$\int_{(E)}\zeta(u)du=2\pi i, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ибо эллипсъ можетъ быть стянутъ въ одну точку—его центръ, не переходя чрезъ полюсы функціи $\zeta(u)$.— Интегралъ отъ $-u$ до $+u$ отъ этой функціи будетъ $=+\pi i$ или $-\pi i$, смотря потому, по которой части эллипса будетъ идти интегрированіе, по той-ли, относительно которой центръ лежитъ слѣва, или по той, относительно которой онъ лежитъ справа. Дѣйствительно, элементы интеграла

$$\int\zeta(u)du,$$

въ каждыхъ двухъ точкахъ эллипса, симметричныхъ относительно его центра, равны, и потому интегралъ по правой сторонѣ

$$\int_{-u}^{+u}{}_{(\text{п})}\ \zeta(u)du=\int_{+u}^{-u}{}_{(\text{л})}\ \zeta(u)du, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

— интегралу по лѣвой сторонѣ; а такъ какъ полный интегралъ, т. е. по всему элипсу, $=2\pi i$, то половина его

$$\int_{-u}^{+u}{}_{(\text{п})}\ \zeta(u)du=\pi i. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Если интегрированіе идетъ въ отрицательномъ направленіи, т. е. такъ что центръ справа, то будетъ:

$$\int_{-u}^{+u} (л)\, \zeta(u)du = -\pi i\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

какъ половина интеграла, который теперь $= -2\pi i$. Соединимъ теперь точку u_0 съ какой либо точкой u_1 нашего эллипса линіей, непроходящей ни черезъ который изъ полюсовъ функціи $\zeta(u)$, и отъ этой точки пойдемъ уже по нашему эллипсу разъ къ одной, разъ къ другой его вершинѣ: полученныя значенія интеграловъ:

$$Y_0(-u) = \int_{u_0}^{-u} \zeta(u)du \quad \text{и} \quad Y_0(u) = \int_{u_0}^{u} \zeta(u)du\,, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

будутъ различаться лишь въ этихъ послѣднихъ частяхъ пути интегрированія, и мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} Y_0(-u) - Y_0(+u) &= \int_{u_1}^{-u} \zeta(u)du - \int_{u_1}^{u} \zeta(u)du = \\ = -\int_{-u}^{u_1} \zeta(u)du - \int_{u_1}^{+u} \zeta(u)du &= -\int_{-u}^{+u} \zeta(u)du\,; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

а этотъ интегралъ будетъ $= +\pi i$ или $-\pi i$, смотря потому, гдѣ лежитъ точка u_1, на лѣвой или на правой половинѣ элипса; слѣдовательно:

$$Y_0(-u) = Y_0(u) \mp \pi i\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Если мы возьмемъ пути интегрированія отличные отъ описанныхъ, то получимъ для нашихъ интеграловъ другія значенія, отличающіяся отъ написанныхъ здѣсь на кратное $2\pi i$; слѣдовательно вообще будетъ:

$$Y_0(-u) = Y_0(+u) + (2k \mp 1)\pi i\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ уже пути интегрированія какіе угодно, только непроходящіе черезъ полюсы функціи $\zeta(u)$. Отсюда, взявъ обѣ части (10) показателемъ числа e, получимъ:

$$e^{Y_0(-u)} = e^{Y_0(+u) + (2k \mp 1)\pi i} = -e^{Y_0(+u)}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

[такъ какъ

$$e^{(2k \mp 1)\pi i} = -1]\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

или

$$\Theta(-u) = -\Theta(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

что и доказываетъ нечетность функціи $\Theta(u)$.— Формула (2) даетъ безусловно-сходящееся разложеніе этой функціи на простые множители, отвѣчающіе ея корнямъ. Эта формула найдена Вейерштрассомъ для частного вида этихъ функцій, когда $c=0$ и $c'=0$; этотъ частный видъ Θ— функцій онъ обозначаетъ чрезъ $\mathfrak{S}(u)$, такъ что слѣд.

$$\mathfrak{S}(u)=u\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \ldots\ldots (15)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega' \ldots\ldots\ldots (16)$$

Общая $\Theta(u)$ тогда такъ выразится чрезъ $\mathfrak{S}(u)$ по (2) настоящаго §:

$$\Theta(u)=e^{\frac{c}{2}u^2+c'}\mathfrak{S}(u) \ldots\ldots\ldots (17)$$

Отсюда можно выразить и $\mathfrak{S}(u)$ чрезъ $\Theta(u)$.

16. Формулы (8), (12) и (14) § 13 можно обнять въ одной слѣдующей:

$$\zeta(u\pm\omega^{(i)})\mp\eta^{(i)}=u(c-e_i)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w_i}+\frac{1}{w_i}+\frac{u}{w_i^2}\right\}, \ldots (1)$$

гдѣ

$$w_i=2m\omega+2n\omega'-\omega^{(i)}, \ldots\ldots\ldots (2)$$

когда будемъ принимать $i=1, 2, 3$, помня соглашеніе (7) § 13. Такъ какъ входящій сюда рядъ есть безусловно-сходящійся, и при $u=0$ обращается въ нуль, какъ и лѣвая часть, то можно интегрировать равенство (1) отъ 0 до u, и мы тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u\zeta(u\pm\omega^{(i)})du\mp\eta^{(i)}u=\frac{u^2}{2}(c-e_i)+\\&+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u}{w_i}\right)+\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Но

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u\zeta(u\pm\omega^{(i)})du=\int_{\pm\omega^{(i)}}^{u\pm\omega^{(i)}}\zeta(u)du=\\&=Y(u\pm\omega^{(i)})-Y(\pm\omega^{(i)});\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

внося это въ предыдущее, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\Upsilon(u \pm \omega^{(i)}) - \Upsilon(\pm \omega^{(i)}) \mp \eta^{(i)} u = \frac{u^2}{2}(c - e_i) + \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left\{ \log\left(1 - \frac{u}{w^{(i)}}\right) + \frac{u}{w^{(i)}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^{(i)2}} \right\}. \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

Беря обѣ части равенства показателями числа e и обозначая имѣющуюся получиться налѣво функцію чрезъ $\Theta_i(u) : \Theta'(0)$, мы получимъ такое равенство:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta'(0)} = \frac{\Theta(u \pm \omega^{(i)}) e^{\mp \eta^{(i)} u}}{\Theta(\pm \omega^{(i)})} = e^{(c-e_i)\frac{u^2}{2}} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w^{(i)}}\right) e^{\frac{u}{w^{(i)}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^{(i)2}}}, \,. (6)$$

заключающее какъ опредѣленіе новой функціи (*союзной* съ главною Θ — функціей), такъ и ея разложеніе на множители, отвѣчающіе ея нулямъ:

$$u = 2m\omega + 2n\omega' - \omega^{(i)} \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, . (7)$$

Отсюда между прочимъ получимъ:

$$\frac{\Theta(u + \omega^{(i)}) e^{-\eta^{(i)} u}}{\Theta(\omega^{(i)})} = \frac{\Theta(u - \omega^{(i)}) e^{+\eta^{(i)} u}}{\Theta(-\omega^{(i)})}, \,.\, .\, .\, .\, .\, . (8)$$

откуда умножая на $\Theta(\omega^{(i)})$ и имѣя въ виду нечетность $\Theta(u)$, получимъ:

$$\Theta(u + \omega^{(i)}) e^{-\eta^{(i)} u} = -\Theta(u - \omega^{(i)}) e^{+\eta^{(i)} u}, \,.\, .\, .\, .\, . (9)$$

откуда легко получимъ мѣняя u на $u + \omega^{(i)}$:

$$\Theta(u + 2\omega^{(i)}) = -e^{2\eta^{(i)}(u + \omega^{(i)})} \Theta(u) \,.\, .\, .\, .\, .\, . (10)$$

Эти уравненія, изъ которыхъ впрочемъ только два независимыхъ, именно:

$$\Theta(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \Theta(u); \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, . (11)$$

$$\Theta(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \Theta(u), \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, . (12)$$

имѣютъ фундаментальное значеніе въ теоріи Θ-функцій: они показываютъ какъ измѣняется ея значеніе при переходѣ въ соотвѣтственную точку того или другого изъ смежныхъ паралелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$. — Такъ какъ $\sigma(u)$ есть частный видъ Θ-функцій, то и она удовлетворяетъ подобнымъ уравненіямъ, въ которыхъ однако η и η' имѣютъ другія значенія, именно:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= \eta - c\omega\,; \\ \eta'_0 &= \eta' - c\omega'\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

такъ что

$$\mathfrak{S}(u + 2\omega) = -e^{2\eta_0(u+\omega)}\,\mathfrak{S}(u)\,; \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$\mathfrak{S}(u + 2\omega') = -e^{2\eta'_0(u+\omega)}\,\mathfrak{S}(u)\,. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Вейерштрассъ, разсматривая только эту функцію, обозначаетъ чрезъ η и η', то что мы обозначаемъ чрезъ η_0 и η'_0.

17. Эти уравненія можно обобщить. Перемѣняя въ (11) предыдущаго § u на $u + 2\omega$, и повторяя эту операцію $m - 1$ разъ, по перемноженіи полученныхъ результатовъ и сокращеніи, получимъ:

$$\Theta(u + 2m\omega) = (-1)^m e^{2\eta\left(mu + \sum\limits_1^m (2k-1)\omega\right)}\,\Theta(u)\,; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

но

$$\sum_1^m (2k - 1) = \frac{1 + 2m - 1}{1}\,m = m^2\,; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

потому (1) окончательно такъ напишется:

$$\Theta(u + 2m\omega) = (-1)^m e^{2m\eta(u+m\omega)}\,\Theta(u)\,; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

точно также изъ (12) получимъ:

$$\Theta(u + 2n\omega') = (-1)^n e^{2n\eta'(u+n\omega')}\,\Theta(u)\,. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Если въ послѣднемъ равенствѣ перемѣнить u на $u + 2m\omega$, то съ помощію (3) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(u + 2m\omega + 2n\omega') = \\ &= (-1)^{m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')+2mn(\omega\eta'-\omega'\eta)}\,\Theta(u)\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

или полагая

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\tilde{\eta} = m\eta + n\eta' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

и

$$\varepsilon = e^{(\omega\eta' - \omega'\eta)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

короче:

$$\Theta(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n}\,\varepsilon^{mn}\,e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,\Theta(u)\,. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Чтобы найти чему $=\omega\eta'-\omega'\eta$, проинтегрируемъ функцію $\zeta(u)$, которая внутри перваго паралелограмма періодовъ функціи $\wp(u)$ обращается въ безконечность, и при томъ перваго порядка, только въ его центрѣ $(u=0)$, по периметру этого паралелограмма въ положительномъ направленіи; тогда, такъ какъ этотъ путь можетъ быть стянутъ въ одну точку, именно центръ, не переходя черезъ полюсы функціи $\zeta(u)$, величина этого интеграла будетъ $=2\pi i$; но съ другой стороны его можно разбить на четыре части по сторонамъ этого паралелограмма. Въ случаѣ, когда

$$\text{аргументъ } \omega' > \text{аргумента } \omega\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

что можно выразить по Вейерштрассу и такъ: если вещественная часть отношенія $\dfrac{\omega'}{\omega i}$:

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

мы будемъ имѣть по предыдущему такое равенство:

$$\int_{-\omega-\omega'}^{+\omega-\omega'} \zeta(u)du + \int_{+\omega-\omega'}^{+\omega+\omega'} \zeta(u)du + \int_{+\omega+\omega'}^{-\omega+\omega'} \zeta(u)du + \int_{-\omega+\omega'}^{-\omega-\omega'} \zeta(u)du = 2\pi i\,, \quad (12)$$

или

$$\int_{-\omega}^{+\omega} [\zeta(u-\omega')-\zeta(u+\omega')]du + \int_{-\omega}^{+\omega'} [\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)]du = 2\pi i\,, \ . \ . \quad (13)$$

но по (10) § 13 имѣемъ:

$$\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega) = 2\eta\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

точно также изъ (16) легко получимъ:

$$\zeta(u+\omega')-\zeta(u-\omega') = 2\eta'\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

на основаніи этого предыдущее такъ представится:

$$-2\eta'\int_{-\omega}^{+\omega} du + 2\eta\int_{-\omega'}^{+\omega'} du = 2\pi i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

или

$$-2\eta'.2\omega + 2\eta.2\omega' = 2\pi i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

откуда

$$\eta\omega'-\eta'\omega = \frac{\pi}{2}i\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

*

Въ случаѣ

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

принятый нами въ (12) порядокъ обхода сторонъ отвѣчалъ бы отрицательному направленію интегрированія; слѣдовательно вторая часть была бы $= -2\pi i$, а слѣдовательно и въ (18) нужно было бы поставить знакъ — предъ $\frac{\pi}{2}i$. Итакъ вообше

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi}{2}i, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

гдѣ верхній знакъ берется въ случаѣ (11), нижній въ случаѣ (19). Отсюда

$$2(\eta\omega' - \eta'\omega) = \pm\pi i, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon = e^{2(\eta'\omega - \eta\omega')} = e^{\mp\pi i} = -1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

а потому (9) принимаетъ окончательно такой видъ:

$$\Theta(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\Theta(u). \quad \ldots \ldots (23)$$

Отсюда, полагая $c = 0$ и $c' = 0$, получимъ соотвѣтствующую формулу для $\sigma(u)$:

$$\sigma(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\tilde{\eta}_0(u+\tilde{\omega})}\sigma(u), \quad \ldots \ldots (24)$$

гдѣ

$$\tilde{\eta}_0 = m\eta_0 + n\eta'_0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

18. Союзныя $\Theta_i(u)$ суть тѣ функціи, чрезъ которыя вмѣстѣ съ основною $\Theta(u)$ выражаются функціи $\sqrt{\wp(u) - e_i}$, какъ то было нами показано въ статьѣ нашей: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale". 2. Note, помѣщенной въ XXV томѣ Mathematischer Annalen, или въ статьѣ: „Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ", помѣщенной въ III книжкѣ Сообщеній и протоколовъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1884 годъ. Тамъ мы получили такую формулу:

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = C\frac{\Theta(u - \omega^{(i)})e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(u)}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

помножая обѣ части этого равенства на u и полагая затѣмъ $u=0$, получимъ:

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_i}\right]_{u=0}=C\,\frac{\Theta(-\omega^{(i)})}{\Theta'(0)}\,;\;\ldots\ldots\;(2)$$

[ибо пред. $\left(\frac{\Theta(u)}{u}\right)_{u=0}=\Theta'(0)$, такъ какъ $\Theta(0)=0$]; но

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_i}\right]_{u=0}=\text{пред.}\left[\sqrt{u^2\wp(u)-u^2e_i}\right]_{u=0}=+1\,;\;.\;(3)$$

слѣдовательно

$$C=-\frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega^{(i)})}\,;\;\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

внося это въ (1), получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u-\omega^{(i)})\,e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})\,\Theta(u)}\,;\;\ldots\;(5)$$

но по (6) § 16:

$$-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u-\omega^{(i)})\,e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}=\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+\omega^{(i)})\,e^{-\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}=\Theta_i(u),\;\ldots\;(6)$$

а потому окончательно:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}.\;\ldots\ldots\ldots\;(7)$$

Такъ какъ для функціи $\sigma(u)$ по (14) § 16:

$$\text{пред.}\left(\frac{\sigma(u)}{u}\right)_{u=0}=\sigma'(0)=1\,,\;\ldots\ldots\ldots\;(8)$$

то (6), опредѣляющее въ этомъ случаѣ союзную $\sigma_i(u)$, принимаетъ болѣе простой видъ:

$$\pm\frac{\sigma(u\pm\omega^{(i)})\,e^{\mp\eta_0^{(i)}}}{\sigma(\omega^{(i)})}=\sigma_i(u);\;\ldots\ldots\ldots\;(9)$$

формула же (7) сохраняетъ свой видъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}.\;\ldots\ldots\ldots\;(10)$$

[Союзныя $\sigma_i(u)$ получаются изъ $\Theta_i(u)$, полагая $c=0$ и $c'=0$, подобно тому, какъ и $\sigma(u)$ изъ $\Theta(u)$.] Изъ (2) § 15, видно, что

$$\Theta'(0)=e^{c'}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

если принять $c'=0$, то подобно (7) будетъ

$$\overline{\Theta}(0)=1\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

означая чрезъ $\overline{\Theta}(u)$ функцію, получающуюся изъ $\Theta(u)$ чрезъ положеніе $c'=0$; тогда (6) замѣнится такимъ:

$$\pm\frac{\overline{\Theta}(u\pm\omega^{(i)})e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\overline{\Theta}(\omega^{(i)})}=\overline{\Theta}_i(u)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

— равенство совершенно подобное (8), однако $\overline{\Theta}(u)$ будетъ отличаться отъ $\sigma(u)$ множителемъ $e^{\frac{c}{2}u^2}$. — Очевидно, что между $\Theta(u)$ и $\overline{\Theta}(u)$ и ихъ союзными, соотвѣтственно, будутъ имѣть мѣсто такія соотношенія:

$$\Theta(u)=e^{c'}\,\overline{\Theta}(u)=\Theta'(0)\overline{\Theta}(u)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\Theta_i(u)=e^{c'}\,\overline{\Theta}_i(u)=\Theta'(0)\overline{\Theta}_i(u)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

если внести это въ (7), то множитель $\Theta'(0)$ сократится, и мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\overline{\Theta}_i(u)}{\overline{\Theta}(u)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

откуда видно, что мы могли бы съ самаго начала принять $c'=0$, (или лучше не вводить его) если только эту цѣль имѣть въ виду.

19. Функція $\Theta_i(u)$ удовлетворяетъ подобнымъ же функціональнымъ уравненіямъ, какъ и основная $\Theta(u)$. Перемѣняя въ равенствѣ опредѣляющемъ эту функцію (6) § 16 (или пред.):

$$\Theta_i(u)=\pm\frac{\Theta'(0)\Theta(u\pm\omega^{(i)})e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

u на $u+2\tilde{\omega}$, мы будемъ имѣть:

$$\Theta_i(u+2\tilde{\omega})=\pm\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u\pm\omega^{(i)}+2\tilde{\omega})}{\Theta(\omega^{(i)})}\,e^{\mp\eta^{(i)}(u+2\tilde{\omega})}\,; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

но перемѣняя въ (23) § 18 u на $u \pm \omega^{(i)}$, будемъ имѣть:

$$\Theta(u \pm \omega^{(i)} + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} \Theta(u \pm \omega^{(i)}) e^{2\tilde{\eta}(u \pm \omega^{(i)} + \omega)}; \quad . \quad . \quad (3)$$

внося это въ (2), получимъ:

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} \frac{\Theta'(0)\Theta(u \pm \omega^{(i)}) e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\tilde{\varepsilon}_i, \quad . \quad . \quad (4)$$

— гдѣ

$$\tilde{\varepsilon}_i = e^{\pm(\tilde{\eta}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\tilde{\omega})}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

или по (1):

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} \tilde{\varepsilon}_i \Theta_i(u) e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Но

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega' \quad \text{и} \quad \tilde{\eta} = m\eta + n\eta'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

слѣдовательно

$$\tilde{\eta}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\tilde{\omega} = m(\eta\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega) + n(\eta'\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega'); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

если теперь $i = 1$, то это приведется къ

$$n(\eta'\omega - \eta\omega') = \pm n \frac{\pi}{2} i; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

если $i = 2$, то къ такому:

$$\left.\begin{aligned} &m(\eta(\omega + \omega') - \omega(\eta + \eta')) + n(\eta'(\omega + \omega') - \omega'(\eta + \eta')) = \\ &= m(\eta\omega' - \omega\eta') + n(\eta'\omega - \eta\omega') = (m - n)(\eta'\omega - \omega'\eta) = \\ &\qquad = \pm(n - m)\frac{\pi}{2} i; \end{aligned}\right\} . \quad (10)$$

если $i = 3$, то оно приведется къ

$$m(\eta\omega' - \omega\eta') = \mp \frac{\pi}{2} i; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

слѣдовательно въ первомъ случаѣ будетъ

$$\tilde{\varepsilon}_1 = e^{\pm n\pi i} = (-1)^n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

во второмъ

$$\tilde{\varepsilon}_2 = e^{\pm(n-m)\pi i} = (-1)^{m-n} = (-1)^{m+n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

въ послѣднемъ

$$\tilde{\varepsilon}_3 = e^{\pm m\pi i} = (-1)^m; \qquad (14)$$

слѣдовательно (6) примемъ окончательно такой видъ:

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = \varepsilon_i e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\Theta_i(u), \qquad (15)$$

гдѣ ε_i имѣетъ такія значенія для $i = 1, 2, 3$:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{m(n+1)}; \quad \varepsilon_2 = (-1)^{mn}; \quad \varepsilon_3 = (-1)^{(m+1)n}. \qquad (16)$$

Полагая въ (1) $u = \mp\omega^{(i)}$, получимъ:

$$\Theta_i(\mp\omega^{(i)}) = 0; \qquad (17)$$

дѣлая тоже въ (14), будемъ имѣть:

$$\Theta_i(2\tilde{\omega} \mp \omega^{(i)}) = \varepsilon_i e^{2\tilde{\eta}(\tilde{\omega}\mp\omega^{(i)})}\Theta_i(\mp\omega^i) = 0, \qquad (18)$$

т. е.

$$\Theta_i(2\tilde{\omega} \mp \omega^{(i)}) = 0; \qquad (19)$$

полагая здѣсь $i = 1, 2, 3$, будемъ имѣть:

$$\Theta_1((2m-1)\omega + 2n\omega') = 0, \qquad (20)$$

$$\Theta_2((2m-1)\omega + (2n-1)\omega') = 0, \qquad (21)$$

$$\Theta_3(2m\omega + (2n-1)\omega') = 0, \qquad (22)$$

тогда какъ изъ (23) § 17 слѣдуетъ, что

$$\Theta(2m\omega + 2n\omega') = 0 \qquad (23)$$

Равенство (1), опредѣляющее $\Theta_i(u)$ можетъ быть еще такъ написапо:

$$\Theta_i(u) = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega^{(i)} \pm u)e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}, \qquad (24)$$

откуда прямо видна четность этой функціи. Если здѣсь положимъ $u = 0$, то получимъ:

$$\Theta_i(0) = \Theta'(0), \qquad (25)$$

что полезно замѣтить. Отсюда слѣдуетъ по (12) § 18, что

$$\overline{\Theta}_i(0) = \overline{\Theta}'(0) = +1, \qquad (26)$$

и въ частности [то (8) того же §]:

$$\mathfrak{S}_i(0) = \mathfrak{S}'(0) = +1 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

20. Если въ общей формулѣ (15) предыдущаго § принять $\tilde{\omega} = \omega^{(j)}$ то получимъ:

$$\Theta_i(u + 2\omega^{(j)}) = \pm e^{2\eta^{(j)}(u+\omega^{(j)})} \Theta_i(u) \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ нужно взять знакъ $+$ или $-$, смотря потому будетъ-ли j не $= i$, или $= i$, ибо въ (4) предыдущаго § множитель

$$(-1)^{m+n+mn} = -1 \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

когда одно изъ m и n равно нулю, а другое $= 1$, или ни одно не равно нулю (случай $i = 2$), а оба $= 1$; множитель же

$$\varepsilon = e^{\pm 2(\eta^{(j)}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega^{(j)})} = \pm 1 \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

смотря потому будетъ-ли $j = i$ или не $= i$. Отсюда получаемъ на основанiи (7) § 17:

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega_j) - e} = \pm \sqrt{\wp(u) - e_i} \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

гдѣ нужно взять $+$, когда $j = i$, и $-$, когда j не $= i$; слѣдовательно функцiя

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

будемъ имѣть перiодами $2\omega_i$ и $4\omega_j$.

Итакъ эта функцiя [(5)] есть однозначная, непрерывная и конечная за исключенiемъ точекъ

$$u = 2m\omega + 2n\omega' \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

гдѣ она обращается въ ∞^1, двоякоперiодическая съ перiодами $2\omega_i$ и $4\omega_j$, и нулями въ точкахъ

$$u = \omega_i + 2m\omega + 2n\omega' . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Будучи дробнаго характера, она должна допускать разложенiе на частныя дроби по теоремѣ Миттагъ-Леффлера, аналогическое разложенiю функцiи $\zeta(u)$, ибо обращается въ ∞^1 въ тѣхъ же точкахъ какъ и эта послѣдняя. Однако прямое построенiе этого разложенiя представляетъ затрудненіе, которое легко обходится, если станемъ искать разложеніе на частныя дроби ея производной второго порядка, подобно тому, какъ то нами было сдѣлано, можно сказать, для функціи $\zeta(u)$, [ибо

$$c - \wp(u) = \frac{d^2\zeta(u)}{du^2} \Bigg] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

21. Чтобы имѣть дѣло съ хорошо опредѣленнымъ предметомъ (pour fixer les idées), примемъ $i = 1$; тогда наша функція будетъ

$$\sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

изъ (4) предыдущаго § будетъ слѣдовать что

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega) - e_1} = \sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega') - e_1} = -\sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

т. е. что періодами ея будутъ 2ω и $4\omega'$. Вообще будетъ:

$$\sqrt{\wp(u + 2\tilde{\omega}) - e_1} = (-1)^n \sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad \ldots\ldots (4)$$

гдѣ $\tilde{\omega}$ имѣетъ прежнее значеніе. Нулями этой функціи будутъ значенія

$$u = (2m + 1)\omega + 2n\omega', \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

безконечностями [перваго порядка притомъ]

$$u = 2m\omega + 2n\omega'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Производныя ея будутъ имѣть тѣже періоды и тѣже безконечности повышающихся на единицу порядковъ съ таковымъ же повышеніемъ порядка производной. Дифференцируя, будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt{\wp(u) - e_1}\right)' = \frac{\wp'(u)}{2\sqrt{\wp(u) - e_1}} = -\sqrt{\wp(u) - e_2} \cdot \sqrt{\wp(u) - e_3}; \; . (7)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''&=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}+\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}\right\}\wp'(u)=\\&=-\frac{1}{2}\left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\frac{\wp'(u)}{\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}}=\\&=\left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\sqrt{\wp(u)-e_1};\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)'''&=2\sqrt{\wp(u)-e_1}\,\wp'(u)+\left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'=\\&=-\left\{6\wp(u)-4e_1-e_2-e_3\right\}\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}=\\&=-3\left\{2\wp(u)-e_1\right\}\sqrt{\wp(u)-e_2}\,\sqrt{\wp(u)-e_3},\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ибо $e_1+e_2+e_3=0$. Итд.

22. Мы имѣемъ вблизи $u=0$ такого вида разложеніе по степенямъ u для функціи $\wp(u)$:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2);\ ^{*)}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

отсюда

$$\wp(u)-e_1=\frac{1}{u^2}-e_1+u^2\mathfrak{P}(u^2),\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}&=\frac{1}{u}\left\{1-e_1u^2+u^4\mathfrak{P}(u^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}=\\&=\frac{1}{u}\left\{1+\frac{e_1}{2}u^2+u^4\mathfrak{P}_1(u^2)\right\}=\\&=\frac{1}{u}+\frac{e_1}{2}u+u^3\mathfrak{P}_1(u^2);\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (3)$$

дифференцируя это разъ, другой, третій, получимъ:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'=-\frac{1}{u^2}+\frac{e_2}{2}+u^2\mathfrak{P}_2(u^2),\ \ldots\ldots\ (4)$$

*) Гдѣ $\mathfrak{P}(z)$ обозначаетъ рядъ, расположенный по возрастающимъ положительнымъ степенямъ z, какъ и раньше было уже. Подобное же значеніе имѣютъ дальше $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ и т. д.

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)'' = \frac{2}{u^3} + u\mathfrak{P}_3(u^2)\,; \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_3}\right)''' = -\frac{6}{u^4} + \mathfrak{P}_4(u^2). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Изъ (3), (4), (5) находимъ:

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_1}\right]_{u=0} = +1\,; \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\text{пред.}\left[u^2\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'\right]_{u=0} = -1\,; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\text{пред.}\left[u^3\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''\right]_{u=0} = +2\,; \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

далѣе:

$$\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u)-e_1} - \frac{1}{u}\right\}_{u=0} = 0\,; \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)' + \frac{1}{u^2}\right\}_{u=0} = \frac{e_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)'' - \frac{2}{u^3}\right\}_{u=0} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Полагая въ (4) предыдущаго §:

$$u + 2\tilde{\omega} = u', \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

будемъ имѣть:

$$\sqrt{\wp(u')-e_1} = (-1)^n \sqrt{\wp(u)-e_1}\,; \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

помножая на $u' - 2\omega = u$, и полагая $u = 0$ будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})\sqrt{\wp(u')-e_1}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}} = (-1)^n\ \text{пред.}\left\{u\sqrt{\wp(u)-e_1}\right\}_{u=0}, \quad (15)$$

т. е. по (7):

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})\sqrt{\wp(u')-e_1}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}} = (-1)^n. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Далѣе по (14) для u очень малыхъ, слѣдовательно u' очень близкихъ къ $2\tilde{\omega}$, будемъ имѣть изъ (3), (4) и (5) вводя туда $u'-2\tilde{\omega}$ вмѣсто u:

$$\sqrt{\wp(u')-e_1}=(-1)^n\left\{\frac{1}{u'-2\tilde{\omega}}+\frac{e_1}{2}(u'-2\tilde{\omega})+(u'-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}_1((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};(17)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)'=(-1)^n\left\{-\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}+\frac{e_1}{2}+(u'-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}_2((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};(18)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)''=(-1)^n\left\{\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}+(u'-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_3((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};\quad \ldots \quad (19)$$

отсюда получимъ перенося первые члены налѣво и полагая $u'=2\tilde{\omega}$, что

$$\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u')-e_1}-\frac{(-1)^n}{u'-2\tilde{\omega}}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0,\quad \ldots \ldots \quad (20)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u')-e^1}\right)'+\frac{(-1)^n}{(u'-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\frac{e_1}{2};\quad \ldots \quad (21)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)''-\frac{(-1)^n 2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0.\quad \ldots \quad (22)$$

23. Составимъ теперь функцію:

$$f(u)=\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3},\quad \ldots \ldots \quad (1)$$

гдѣ по прежнему

$$w=2m\omega+2n\omega'.\quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Входящая сюда сумма

$$\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}\quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

есть рядъ безусловно-сходящійся [рядъ изъ модулей его членовъ тотъ же самый, какъ и для ряда, входящаго въ (1) § 11], а потому представляетъ аналитическую функцію, которая есть двоякоперіодическая съ періодами 2ω и $4\omega'$, ибо перемѣна u на $u+2\omega$ переводитъ всѣ члены въ предшествующіе съ ихъ знаками, а перемѣна u на $u+2\omega'$ переводимъ ихъ въ предшествующіе, взятые съ противнымъ знакомъ;

такъ какъ и первый членъ въ (1) обладаетъ по предыдущему § тѣми же свойствами, то будетъ:

$$f(u+2\omega)=f(u)\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$f(u+2\omega')=-f(u)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

откуда слѣдуетъ, что $f(u)$ имѣетъ періодами 2ω и $4\omega'$. Ея параллелограмъ періодовъ будетъ состоять изъ двухъ параллелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$, рядомъ взятыхъ по направленію ω', при чемъ во второмъ изъ нихъ по (5) значенія $f(u)$ будутъ отличаться знакомъ отъ значеній въ соотвѣтственныхъ точкахъ перваго. Въ центрѣ перваго параллелограмма функціи $\wp(u)$, т. е. въ точкѣ $u=0$, будетъ

$$f(0)=0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

дѣйствительно, (1) можно такъ представить:

$$f(u)=\left[\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\frac{2}{u^3}\right]-\sum_{m,n}{}'_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}\,. \quad \ldots \quad (7)$$

гдѣ значекъ $(')$ указываетъ на то, что изъ суммы исключенъ членъ, для котораго $m=0$ и $n=0$ заразъ; полагая въ (7) $u=0$, по (12) предыдущаго § будемъ имѣть:

$$f(0)=\sum_{m,n}{}'_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{w^3}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

въ этой суммѣ члены $(m=\mu\,,\ n=\nu)$ и $(m=-\mu\,,\ n=-\nu)$ взаимно сокращаются, и мы получимъ (6). Итакъ $f(u)$ есть однозначная, конечная и непрерывная двоякоперіодическая функція во всѣхъ точкахъ внутри своего параллелограмма періодовъ; но такая двоякоперіодическая функція есть постоянное C, которая по (6) равна нулю. Слѣдовательно вмѣсто (1) мы теперь получаемъ такое:

$$0=\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\sum_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}\,, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

откуда

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''=\sum_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}\,. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Перенося членъ $(m=0\,,\ n=0)$ налѣво, мы будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'' - \frac{2}{u^3} = \sum_{m,n}^{+\infty}{}' (-1)^n \frac{2}{(u-w)^3}, \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$
$$-\infty$$

гдѣ правая часть остается безусловно-сходящимся рядомъ и для $u=0$, но и лѣвая по (12) предыдущаго § есть конечная величина, именно 0; а потому это равенство можно интегрировать отъ 0, и мы получимъ, имѣя въ виду (11) предыдущаго §, слѣдующее:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)' + \frac{1}{u^2} - \frac{e_1}{2} = \sum_{-\infty\; m,n}^{+\infty}{}' (-1)^n \left\{\frac{-1}{(u-w)^2} + \frac{1}{w^2}\right\}. \; . \quad (12)$$

Полученный здѣсь направо рядъ есть опять безусловно-сходящійся, а потому можетъ быть опять интегрированъ и опять отъ 0, (ибо по (11) предыдущаго § лѣвая часть $=0$ для $u=0$). Итакъ интегрируя, и замѣчая, что по (3) и (10) предыдущаго § лѣвая часть обратится въ нуль для нижняго предѣла интеграла $u=0$, мы получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1} - \frac{1}{u} - \frac{e_1}{2} u = \sum_{-\infty\; m,n}^{+\infty}{}' (-1)^n \left\{\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right\}, \; . \quad (13)$$

откуда найдемъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1} = \frac{e_1}{2} u + \frac{1}{u} + \sum_{-\infty\; m,n}^{+\infty}{}' (-1)^n \left\{\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right\}. \; . \quad (14)$$

Точно также получится:

$$\sqrt{\wp(u)-e_3} = \frac{e_3}{2} u + \frac{1}{u} + \sum_{-\infty\; m,n}^{+\infty}{}' (-1)^m \left\{\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right\}. \; . \quad (15)$$

Для функціи $\sqrt{\wp(u)-e_2}$ имѣемъ, такъ какъ ω и ω' отвѣчаютъ значеніямъ $i=1$, и $i=3$, отличнымъ оба отъ 2, слѣдующіе два равенства:

$$\sqrt{\wp(u+2\omega)-e_2} = -\sqrt{\wp(u)-e_2}; \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$\sqrt{\wp(u+2\omega')-e_2} = -\sqrt{\wp(u)-e_2}; \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

откуда получится и болѣе общее:

$$\sqrt{\wp(u+2\varpi)-e_2} = (-1)^{m+n} \sqrt{\wp(u)-e_2}; \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

на основаніи этого тѣмъ же путемъ придемъ къ такому разложенію этой функціи на частныя дроби:

$$\sqrt{\wp(u)-e_2}=\frac{e_2}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{m+n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}. \quad (19)$$

Послѣднія три разложенія заключаются всѣ въ слѣдующей формулѣ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{e_i}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}, \quad (20)$$

гдѣ $\lambda=n,\ m+n,\ m$, смотря потому, будетъ ли $i=1,\ 2,\ 3$.

Такимъ же точно образомъ можно получить разложеніе на частныя дроби и функцій

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\sin\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)}, \quad (21)$$

$$\cos\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{\Theta_1(u)}{\Theta_3(u)}; \quad (22)$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)}, \quad (23)$$

гдѣ

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad (24)$$

что будетъ сдѣлано въ приготовляемой нами къ печати: „Теоріи эллиптическихъ функцій“.

7-го іюня 1890 г.