УДК 517.982

К. Э. КАИБХАНОВ

О ВОЗМУЩЕНИИ ω-ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ СВОЙ КВАДРАТ

Последовательность $(x_n)_1^\infty$ элементов банахова пространства X над полем действительных или комплексных чисел называется ω-линейно независимой, если сходимость ряда $\sum_1^\infty a_n x_n$ к нулю влечет обращение в нуль всех коэффициентов a_n [1, с. 50]. Понятие линейной независимости тесно связано с понятием обычной (алгебраической) линейной независимости. Так, каждая ω-линейно независимая система является линейно независимой; в банаховом пространстве каждая линейно независимая последовательность содержит ω-линейно независимую последовательность [2, с. 162, 858; 3].

Цель настоящей статьи — исследование устойчивости ω-линейной независимости по отношению к возмущениям ограниченных последовательностей элементов банахова пространства.

Все рассматриваемые банаховы пространства считаются бесконечномерными, над полем комплексных чисел, однако результаты переносятся и на вещественный случай. Обозначения: S_X — единичная сфера пространства X; $d(X, Y)$ — дистанция Банаха — Мазура между изоморфными пространствами X и Y, т. е. $d(X, Y) = \inf\{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| : A : X \to Y$ — изоморфизм$\}$; $X \sim Y$ — пространства X и Y изоморфны между собой.

Введем необходимые определения.

Определение 1. *Для банахова пространства X обозначим через $\Gamma(X)$ множество всех числовых последовательностей $c = (\nu_n)_1^\infty$ с таким свойством: для последовательности $(\nu_n)_1^\infty$ найдется ограниченная система $(x_n)_1^\infty \subset X$ такая, что любая система $(y_n)_1^\infty \subset X$, подчиненная условию $\|x_n - y_n\| \leqslant |\nu_n|\ \forall n$, оказывается ω-линейно независимой. В этом случае будем говорить, что система $(x_n)_1^\infty$ соответствует системе $c = (\nu_n)_1^\infty$.*

Определение 2. *Для введения топологической структуры на множестве* $\Gamma(X)$ *определим функционал:* $\rho_X(c) = \inf\{h$: *существует система* $(x_n)_1^\infty \subset X$ *соответствующая* c *и такая, что* $\|x_n\| \leqslant \leqslant h \ \forall n\}$.

Легко доказывается, что в определении 2 знак неравенства ($\leqslant h$) можно заменить равенством. Индекс X будем опускать, если ясно о каком пространстве идет речь.

Предложение 1. *Если в определениях 1, 2 условие* ω-*линейной независимости заменить условием линейной независимости, то от этого не изменяется ни множество* $\Gamma(X)$, *ни функционал* ρ_X.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma'(X)$, ρ' множество и функционал в определениях 1, 2 с заменой условия ω-линейной независимости на линейную независимость. Тогда, очевидно, $\Gamma(X) \subset \Gamma'(X)$ и $\rho'(c) \leqslant \rho(c)\ \forall c \in \Gamma(X)$. Пусть, не ограничивая общности, $(x_n)_1^\infty \subset S_X$ и $(\nu_n)_1^\infty$ обладают тем свойством, что любая система $(y_n)_1^\infty$ с условием $\|y_n - x\| \leqslant |\nu_n\ \forall_n$ является линейно независимой. Достаточно доказать, что для любого $\alpha > 1$ найдется система $(z_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$, соответствующая $(\nu_n)_1^\infty$ (отсюда будет следовать $\Gamma'(X) \subset \Gamma(X)$ и $\rho\left((\nu_n)_1^\infty\right) \leqslant \rho'\left((\nu_n)_1^\infty\right)$. Пусть $\alpha > 1$ задано. Разобьем множество натуральных чисел N на два подмножества: $M_1 = \{n \in N;\ \nu_n \neq 0\}$ и $M_2 = \{n \in N : \nu_n = 0\}$. Из системы $(x_n)_{n \in M_2}$, которая линейно независима, выберем ω-линейно независимую подсистему $(u_n)_{n \in M_2}$ [3]. Ясно, что система $((1/\alpha)\, z_n)_1^\infty$, где

$$z_n = \begin{cases} \alpha x_n, & n \in M_1, \\ \alpha u_n, & n \in M_2, \end{cases}$$

обладает тем же свойством, что и $(x_n)_1^\infty$: при возмущении на величины $(|\nu_n|)_1^\infty$ сохраняется линейная независимость. Покажем, что $(z_n)_1^\infty$ соответствует $(\nu_n)_1^\infty$. Допустим обратное, пусть существует система $(y_n)_1^\infty$, такая что

$$\|y_n - z_n\| \leqslant |\nu_n| \quad \forall_n, \ \sum_1^\infty a_n y_n = 0, \ \sum_1^\infty |a_n| \neq 0.$$

Тогда найдется $m \in M_1$ с $|a_m| \cdot |\nu_m| > 0$, иначе система $(u_n)_{n \in M_2}$ оказалась бы ω-линейно зависимой. Выбрав $n_0 > m$ настолько большим, чтобы $\left\| \sum_1^{n_0} a_n y_n \right\| < (\alpha - 1)\,|a_m|\,|\nu_m|$ и положив $y_m' = y_m - a_m^{-1} \sum_1^{n_0} a_n y_n$, $y' = y_n$ для остальных n, получим

$$\left\| \frac{y_n'}{\alpha} - \frac{z_n}{\alpha} \right\| \leqslant |\nu_n|\, \forall n, \ \sum_1^{n_0} a_n y_n' = 0,$$

что противоречит сказанному выше.

Предложение 2. *Пусть X — банахово пространство. Тогда а) если $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$ и $(\nu'_n) \subset C$ такова, что $|\nu'_n \leqslant \alpha|\nu_n|$ $\forall n$, $\alpha \geqslant 0$, то $(\nu'_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$, и $\rho((\nu'_n)_1^\infty) \leqslant \alpha\rho((\nu_n)_1^\infty)$; б) если банаховы пространства X и Y изоморфны, то $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$ и $\forall (\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$,*

$$\frac{1}{d(X, Y)} \rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \leqslant \rho_X((\nu_n)_1^\infty) \leqslant d(X, Y)\rho_Y((\nu_n)_1^\infty).$$

Доказательство. Поскольку а) очевидно, докажем б). Пусть $A: X \to Y$ — изоморфизм, $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X)$ и ей соответствует $(x_n)_1^\infty \subset X$. Для любой системы $(y_n)_1^\infty \subset Y$, такой что $\| y_n - Ax_n \| \leqslant A^{-1}\|^{-1}|\nu_n|$ $\forall n$, имеем $\| A^{-1}(y_n - Ax_n \| \leqslant |\nu_n|$, т. е. система $(A^{-1}y_n)_1^\infty$ ω-линейно независима. Так как A — изоморфизм, то и $(y_n)_1^\infty$ ω-линейно независима, $(\| A^{-1}\|^{-1}\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y)$ и ей соответствует $(Ax_n)_1^\infty$. Из а) следует

$$(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y), \text{ и } \rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \leqslant \| A^{-1} \| \sup_n \| Ax_n \| \leqslant$$
$$\leqslant A^{-1} \| \cdot \| A \| \sup_n \| x_n \|.$$

Лемма. *Для любого банахова пространства*

$$\Gamma(X) = \left\{ (\nu_n)_1^\infty \subset C: \inf_{(x_n) \subset S_X} \sup_{(\alpha_n) \subset C} \frac{\Sigma |\alpha_n| |\nu_n|}{\| \Sigma \alpha_n x_n \|} < \infty \right\},$$

при этом

$$\rho((\nu_n)_1^\infty) = \inf_{(x_n) \subset S_X} \sup_{(\alpha_n) \subset C} \frac{\Sigma |\alpha_n| |\nu_n|}{\| \Sigma \alpha_n x_n \|}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть правая часть в (1) больше, чем α и $(y_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$ — произвольная система. Покажем, что $(y_n)_1^\infty$ не может соответствовать $(\nu_n)_1^\infty$. Согласно (1), существует система $(\alpha_n^0) \subset C$, такая что

$$\sup_{(\alpha_n) \subset C} \frac{\sum |\alpha_n| |\nu_n|}{\| \sum \alpha_n y_n \|} \geqslant \frac{\sum |\alpha_n^0| |\nu_n|}{\| \sum \alpha_n^0 y_n \|} > 1.$$

Положим $z_n = y_n - \frac{\sigma\theta_n| \nu_n|}{\| \sum \alpha_n^0 y_n \|}(\sum \alpha_n^0 y_n)$, где

$$\sigma = \frac{\| \sum \alpha_n^0 y_n \|}{\sum |\alpha_n^0| |\nu_n|} < 1, \quad \theta_n \alpha_n^0 = |\alpha_n^0| \forall_n.$$

Непосредственно проверяется, что $\| z_n - y_n \| \leqslant |\nu_n|$ и $\sum \alpha_n^0 z_n = 0$. Тем самым доказано, что $\rho((\nu_n)_1^\infty) \geqslant \alpha$. В обратную сторону. Пусть $\inf \sup$ (выражение в (1)) $< \alpha < \infty$. Тогда найдется система $(\bar{x}_n)_1^\infty \subset S_X$ такая, что

$$\sup_{(\alpha_n) \subset C} \frac{\Sigma |\alpha_n| |\nu_n|}{\| \Sigma \alpha_n \bar{x}_n \|} < \alpha.$$

Пусть $(y_n)_1^\infty$ — произвольная система с условием $\| y_n - \alpha \bar{x}_n \| \leqslant |\nu_n|$. Тогда для любой нетривиальной системы $(a_n)_1^m \subset C$ имеем

$$\left\| \sum_1^m a_n y_n \right\| = \left\| \alpha \sum_1^m a_n \bar{x}_n + \sum_1^m a_n (y_n - \alpha \bar{x}_n) \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \left\| \sum_1^m a_n \bar{x}_n \right\| - \sum_1^m |a_n| |\nu_n| > 0,$$

т. е. система $(y_n)_1^\infty$ оказывается линейно независимой и по предложению 1 $\rho((\nu_n)_1^\infty \leqslant \alpha$.

Следствие 1. *Пусть Y — бесконечномерное подпространство банахова пространства X. Тогда $\Gamma(Y) \subset \Gamma(X)$ и $\rho_Y((\nu_n)_1^\infty) \geqslant \geqslant \rho_X((\nu_n)_1^\infty \forall (\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(Y)$.*

Напомним, что функция $f: X \to R$, заданная на векторном пространстве X, называется квазинормой, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) $f(x) \geqslant 0 \forall x \in X$, и $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $f(\lambda x) = |\lambda| f(x) \forall \lambda \in C$, $x \in X$ 3) существует $K \geqslant 1$, такое что $\forall x$, $y \in X f(x+y) \leqslant K(f(x) + f(y))$. Квазинорма f на X порождает линейную топологию, которую обозначим (X, f).

Теперь перейдем к основному результату.

Теорема. *Пусть банахово пространство X содержит подпространство, изоморфное его квадрату: $X_1 \oplus X_2 \subset X$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда $\Gamma(X)$ — векторное пространство относительно операций покоординатного сложения и умножения на скаляр, а функционал ρ_X — квазинорма на $\Gamma(X)$.*

Доказательство. Фактически в доказательстве нуждается лишь то, что, если $(\nu_n)_1^\infty$, $(\nu_n^1)_1^\infty \in \Gamma(X)$, то $(\nu_n + \nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X)$ и существует постоянная $K \geqslant 1$, такая, что $\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty \leqslant K \times \times (\rho_X((\nu_n)_1^\infty) + \rho_X((\nu_n')_1^\infty))$. Остальные аксиомы векторного пространства и квазинормы очевидны. Пусть $(\nu_n)_1^\infty$, $(\nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X)$, $\alpha > > \rho_X((\nu_n)_1^\infty)$, $\beta > \rho_X((\nu_n')_1^\infty)$ произвольны. Тогда найдутся соответствующие им $(x_n)_1^\infty \subset \alpha S_X$, $(y_n)_1^\infty \subset \beta S_X$. По предложению 2, $(\nu_n)_1^\infty \in \Gamma(X_1)$, $(\nu_n^1)_1^\infty \in \Gamma(X_2)$ и им соответствуют некоторые $(x_n')_1^\infty \subset \subset \alpha d(X, X_1) S_{X_1}$, $(y_n')_1^\infty \subset \beta d(X, X_2) S_{X_2}$. Пусть P_i: $X_1 \oplus X_2 \to X_i$ — естественные проекторы и $\|P\| = \max\limits_{i=1,2} \|P_i\|$. Покажем, что система $(z_n)_1^\infty = (2\|P\|(x_n', y_n'))_1^\infty \subset X_1 \oplus X_2$ соответствует $(|\nu_n| + + |\nu_n'|)_1^\infty$ в пространстве $X_1 \oplus X_2$. Допустим противное. Тогда найдется система $(u_n)_1^\infty = ((u_n', u_n''))_1^\infty$, такая что

$$|\nu_n| + |\nu_n'| \geqslant \|u_n - z_n\| \geqslant \frac{1}{2\|P\|}(\|u_n' - 2\|P\| x_n'\| +$$

$$+ \|u_n'' - 2\|P\| y_n'\|) \qquad (2)$$

и $(u_n)_1^\infty$ линейно зависимы, т. е. существует нетривиальная система $(a_n)_1^m \subset C$, для которой

$$\sum_1^m a_n u_n = \sum_1^m a_n (u_n', u_n'') = 0.$$

Из (2) следует, что хотя бы одна из следующих сумм:

$$\sum_{n=1}^m |a|_n \left(|\nu_n| - \frac{1}{2\|P\|} \|u_n' - 2\|P\| x_n'\|\right),$$

$$\sum_{n=1}^m |a_n| \left(|\nu_n'| - \frac{1}{2\|P\|} \|u_n' - 2\|P\| y_n'\|\right),$$

неотрицательна. Пусть для определенности $\sum_{n=1}^m |a_n| \left(|\nu_n| - \frac{1}{2\|P\|} \times \right.$ $\left. \times \|u_n' - 2\|P\| x_n'\| \geqslant 0\right.$. Положим

$$\bar{u}_k' = 2\|P\| x_k' + \frac{\theta_k |\nu_k|}{\sum_1^m |a_n\| \nu_n|} \left(\sum_1^m a_n (u_n' - 2\|P\| x_n'), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,\right.$$

где $(\theta_k)_1^m$ таковы, что $\theta_k a_k = |a_k|$. Непосредственно проверяется, что $\|\bar{u}_n' - 2\|P\| x_n'\| \leqslant 2\|P\| |\nu_n|$. Имеем

$$\sum_1^m a_n \bar{u}_n' = 2\|P\| \sum_1^m a_n x_n' + \frac{\sum_1^m |a_n\| \nu_n|}{\sum_1^m |a_n\| \nu_n|} \left(\sum_1^m a_n u_n' - \right.$$

$$\left. - 2\|P\| \sum_1^m a_n x_n'\right) = \sum_1^m a_n u_n' = 0,$$

в то время как

$$\left\| \frac{\bar{u}_n'}{2\|P\|} - x_n' \right\| \leqslant |\nu_n|, \quad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

противоречит тому, что $(x_n')_1^\infty$ соответствует $(\nu_n)_1^\infty$. Итак, мы установили, что $(2\|P\|(x_n', y_n')_1^\infty$ соответствует системе $(|\nu_n| + |\nu_n'|)_1^\infty$ в пространстве $X_1 \oplus X_2$. Используя предложение 2 и следствие 1, имеем

$$(\nu_n + \nu_n')_1^\infty \in \Gamma(X),$$

$$\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty) \leqslant \rho_X((|\nu_n| + |\nu_n'|)_1^\infty \leqslant \rho_{X_1 \oplus X_2}((|\nu_n| + |\nu_n'|))_1^\infty) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|P\| \sup_n \|(x_n', y_n')\| \leqslant 2\|P\| \sup_n (\|x_n'\| + \|y_n'\|) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|P\| (\alpha d(X, X_1) + \beta d(X, X_2)).$$

Так как $\alpha > \rho_X((\nu_n)_1^\infty)$, $\beta > \rho_X((\nu_n')_1^\infty)$ выбраны произвольно, то окончательно получаем

$$\rho_X((\nu_n + \nu_n')_1^\infty) \leqslant 2\|P\|\left(\max_{i=1,2} d(X, X_i)\right)\left(\rho_X((\nu_n)_1^\infty) + \rho_X((\nu_n')_1^\infty)\right),$$

т. е. ρ_X — квазинорма на $\Gamma(X)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если банахово пространство X содержит подпространство, изоморфное его квадрату, то $(\Gamma(X), \rho_X)$ — квазинормированное пространство.*

Следствие 3. *Для того, чтобы банахово пространство X не содержало своего квадрата, достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:* 1) $\Gamma(X)$ *не векторно;* 2) ρ_X — *не квазинорма.*

Было бы интересно знать, справедлива ли теорема для всех банаховых пространств. Похоже, что ответ отрицательный и примером может служить пространство Фигеля $X = \left(\sum_{i=1}^\infty \oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2$ при некоторых ограничениях на $p_i \uparrow 2$ и $n_i \uparrow \infty$ [4]. Отметим, что в данном случае для X^* теорема верна, хотя X^* тоже не содержит своего квадрата, т. е. содержание своего квадрата не является необходимым условием.

Список литературы: 1. *Singer J.* Bases in Banach Spaces. I. — Berlin: Springer, 1970.—668 p. 2. *Singer J.* Bases in Banach Spaces. II. — Berlin: Springer, 1981.—880 p. 3. *Гурарий В. И.* Счетно-линейно независимые последовательности в банаховых пространствах. — Усп. мат. наук, 1981, **36**, вып. 5, с. 171—172. 4. *Figiel T.* On example of an infinitedimensional Banach space non isomorphic to its Cartesian squre.— Studia Math, 1972,-42.—P. 295—306.

Поступила в редколлегию 05.09.85.