ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ

П. Б. Найман

Симметрические периодические якобиевы матрицы и ассоциированные с ними непрерывные дроби в течение длительного времени являлись предметом ряда исследований (см. [1] и приведённую там библиографию).

Настоящая статья посвящена спектральному анализу несимметрических периодических якобиевых матриц T.

В параграфе 1 устанавливаются некоторые алгебраические предложения о перестановочных якобиевых матрицах любого порядка. Первое из этих предложений является дискретным аналогом теоремы Берчнелла—Чаунди (см. [2]) о линейных дифференциальных операторах. Далее, в параграфе 2 с помощью теорем параграфа 1 находится спектр матрицы T. Результаты первых двух параграфов без доказательств опубликованы в первой части заметки автора [3]. Параграф 3 содержит вспомогательные сведения из абстрактной спектральной теории. Некоторыми указаниями, относящимися к этому параграфу, автор обязан И. М. Глазману. Наконец, в параграфе 4 строятся треугольные и диагональные спектральные разложения матрицы T. Для получения этих разложений используется метод, аналогичный методу И. М. Гельфанда [4] вывода равенства Парсеваля для дифференциального оператора Шредингера с вещественным периодическим потенциалом.

§ 1. Некоторые теоремы о перестановочных якобиевых матрицах любого порядка

1. Назовём якобиевой матрицей порядка $2m$ матрицу $A = (a_{jk})$ $(j, k = \pm 0, 1, 2, \ldots)$ с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям

$$a_{jk} = 0 \quad \text{при} \, |j - k| > m$$
$$a_{jk} \neq 0 \quad \text{при} \, |j - k| = m.$$

При $m = 1$ матрица A является обычной якобиевой и в этом случае указание о её порядке опускается.

Обозначим через L линейное многообразие всех векторов $\vec{y} = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Через $l_2(-\infty, \infty)$, как обычно, обозначим гильбертово пространство всех тех векторов $\vec{y} \in L$, для которых сходится ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2$. На протяжении этого параграфа под вектором всегда подразумевается любой элемент многообразия L.

Очевидно, имеет место следующая

Лемма 1. *Если якобиевы матрицы A и B порядков $2m$ и $2n$, соответственно, перестановочны, то любому комплексному λ отвечает по* *крайней мере одно* μ *и один ненулевой вектор* $\vec{y} = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, *который является общим решением уравнений*

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y}\,, \quad B\vec{y} = \mu\vec{y}\,. \tag{1}$$

Следующее предложение является дискретным аналогом упомянутой выше теоремы Берчнелла—Чаунди (см. [2]).

Теорема 1. *Если якобиевы матрицы* $A = (a_{jk})$ *и* $B = (b_{jk})$ $(j, k = \pm 0, 1, 2, \ldots)$ *порядков* $2m$ *и* $2n$, *соответственно, перестановочны, то они удовлетворяют алгебраическому уравнению*

$$D(A, B) = 0 \tag{2}$$

степени $2n$ *относительно* A *и степени* $2m$ *относительно* B.

Доказательство. Предположим для определенности, что $m > n$, и пусть $\vec{y} \neq 0$ — вектор, удовлетворяющий системе уравнений (1). Существование такого вектора вытекает из леммы 1. Таким образом, при $\vec{y} = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ имеют место равенства

$$\sum_{k=j-n}^{j+n} b_{jk}y_k = \mu y_j, \qquad \sum_{k=j-m}^{j+m} a_{jk}y_k = \lambda y_j, \qquad (j = \pm 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Из (3) следует, что конечная система $2n + 2m$ уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=j-m}^{j+m} a_{jk}y_k = \lambda y_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots 2n-1) \\ \displaystyle\sum_{k=j-n}^{j+n} b_{jk}y_k = \mu y_j \quad (j = n-m, n-m+1, \ldots, n+m-1) \end{cases} \tag{4}$$

имеет нетривиальное решение. Если бы это было не так, то, переходя от j-го к $(j+1)$-му уравнению, получили бы, что система (3) имеет лишь тривиальное решение.

Таким образом, для определителя $D(\lambda, \mu)$ системы (4) имеем

$$D(\lambda, \mu) = 0$$

и, следовательно,

$$D(A, B)\vec{y} = D(\lambda, \mu)\vec{y} = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, определитель $D(\lambda, \mu)$ системы (4) является, очевидно, полиномом степени $2n$ относительно λ и $2m$ относительно μ. Поэтому, соотношение

$$D(A, B)\vec{y} = 0$$

есть конечно-разностное уравнение относительно $\vec{y}$ порядка не выше $4mn$. В силу (5) это уравнение удовлетворяется построенным по заданному λ с помощью леммы 1 вектором $\vec{y}$, но требуется доказать, что оно удовлетворяется тождественно. Для этого достаточно установить существование более $4mn$ линейно-независимых решений этого уравнения в L. Но, в действительности, таких решений можно построить сколько угодно, определяя по произвольной последовательности различных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ с помощью леммы 1 векторы $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \ldots$. Теорема доказана.

2. Пусть $T = (t_{jk})$ $(j, k = \pm 0, 1, 2, \ldots)$ есть n-периодическая якобиева матрица порядка $2m$ с комплексными элементами

$$t_{jk} = t_{j+n,\, k+n} \qquad (j, k = \pm 0, 1, 2 \ldots).$$

Через $E_n = (e_{jk})$ $(j, k = \pm 0, 1, 2, \ldots)$ обозначим специальную якобиеву матрицу порядка $2n$ с элементами

$$e_{jk} = \begin{cases} \alpha & (j - k = n) \\ \beta & (j - k = -n) \\ 0 & (|j - k| \neq n), \end{cases} \tag{6}$$

где α и β отличные от нуля комплексные числа. Легко проверить, что имеет место следующая простая лемма.

Лемма 2. *Для того чтобы якобиева матрица T порядка $2m$ была n-периодической, необходимо и достаточно, чтобы она была перестановочна с матрицей E_n.*

Из этой леммы и теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Любая n-периодическая якобиева матрица T порядка $2m$ удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$D(T, E_n) = 0 \tag{7}$$

степени $2n$ относительно T и степени $2m$ относительно E_n.

3. В простейшем случае обычной n-периодической якобиевой матрицы степень полинома $D(T, E_n)$ относительно E_n равна двум. Однако, выбрав элементы α и β матрицы E_n специальным образом, можно вдвое уменьшить степень полинома $D(T, E_n)$.

Введём следующие обозначения для элементов обычной n-периодической якобиевой матрицы

$$\begin{gathered} T = (t_{jk}) \\ t_{j,j} = a_k, \quad t_{j,j-1} = b_k, \quad t_{j,j+1} = c_k, \\ k \equiv j \pmod n; \ j = \pm 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{8}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Любая n-периодическая якобиева матрица $T = (t_{jk})$ с элементами (8) удовлетворяет алгебраическому уравнению n-ой степени*

$$P(T) = E_n, \tag{9}$$

где $E_n = (e_{jk})$ есть матрица с элементами (6) *при* $\alpha = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\beta = \prod\limits_{k=1}^{n} c_k$.

Доказательство. В обозначениях (8) уравнения

$$\begin{cases} T\vec{y} = \lambda\vec{y} \\ E_n\vec{y} = \mu\vec{y} \end{cases} \tag{10}$$

равносильны бесконечной системе уравнений

$$\begin{cases} b_k y_{j-1} + (a_k - \lambda) y_j + c_k y_{j+1} = 0 \quad (j = \pm 0, 1, 2, \ldots) \\ \alpha y_{j-n} - \mu y_j + \beta y_{j+n} = 0 \quad k \equiv j \pmod n. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) в силу леммы 1 имеет нетривиальное решение. Предположим для определенности, что $y_n \neq 0$, и выделим из системы (11) $2n$ уравнений

$$\begin{cases} b_k y_{j-1} + (a_k - \lambda) y_j + c_k y_{j+1} = 0 \quad k \equiv j \pmod n \\ \alpha y_0 - \mu y_n + \beta y_{2n} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 2n-1. \end{cases} \tag{12}$$

Полученную систему (12) считаем неоднородной линейной системой уравнений для определения $2n$ величин $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n+1}, \ldots y_{2n}$. Свободные члены этих уравнений при $j = n - 1$, $j = n$ и $j = n + 1$ равны, соответственно, $-c_{n-1}y_n$, $-(a_n-\lambda)y_n$ и $-b_1y_n$, а свободный член последнего уравнения равен μy_n. Остальные уравнения системы (12) однородны.

Разлагая определитель Δ системы (11) по элементам последней строки, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & c_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2-\lambda & c_2 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} \left(\beta\prod_{k=1}^{n} b_k - \alpha\prod_{k=1}^{n} c_k\right),$$

откуда, в силу специального выбора чисел α и β, вытекает, что $\Delta=0$. Поскольку система (12) неоднородна, то все присоединенные определители равны нулю. Приравнивая нулю присоединенный определитель, образованный из Δ заменой n-го столбца свободными членами, получаем следующее соотношение между λ и μ:

$$\mu = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1-\lambda & c_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2-\lambda & c_2 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & b_n & a_n-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n-1} b_1 c_n \begin{vmatrix} a_2-\lambda & c_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ b_3 & a_3-\lambda & c_3 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Обозначая правую часть последнего соотношения (13) через $P(\lambda)$, получаем

$$\mu = P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ — полином* степени n.

Для любого вектора $\vec{y} \in L$, удовлетворяющего системе уравнений (10), имеет место равенство

$$E_n\vec{y} = P(T)\vec{y},$$

откуда, как и в конце доказательства теоремы 1, получаем (9), что и требовалось доказать.

Примечание. Очевидно, что соотношение (9) не только необходимо, но и достаточно для n-периодичности якобиевой матрицы T.

§ 2. Спектр периодических якобиевых матриц

1. Соотношения (7) и (9) параграфа 1 дают ключи к локализации спектра матрицы T в $l_2(-\infty, \infty)$. Для использования этих соотношений мы найдем сначала спектр матрицы E_n, а затем воспользуемся теоремами об отображении спектров.

При изометрическом отображении $l_2(-\infty, \infty)$ на $L_2(0, 2\pi)$ по формуле

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikt}, \quad \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2(-\infty, \infty), \; y(t) \in L_2(0,2\pi)$$

оператор E_n в $l_2(-\infty, \infty)$ переходит в оператор умножения на функцию $\alpha e^{int} + \beta e^{-int}$ в $L_2(0,2\pi)$. Следовательно, оператор E_n нормален и его спектр $S(E_n)$ есть эллипс с центром в начале координат. При $|\alpha| = |\beta|$ этот эллипс

* Этот полином встречался ранее в исследовании Я. Л. Геронимуса[1].

вырождается в отрезок комплексной плоскости. В случае вещественных α и β оси симметрии эллипса совпадают с вещественной и мнимой осью, а если дополнительно, $\alpha = \beta$, то эллипс вырождается в отрезок $(-2\alpha, 2\alpha)$ вещественной оси.

2. Начнем с исследования спектра обычной якобиевой матрицы. Обозначим через Γ полный λ-прообраз μ-эллипса $S(E_n)$ при отображении (14) и установим предварительно следующую лемму.

Лемма 3. *Каждой точке $\lambda \in \Gamma$ отвечает решение $\vec{y} \in L$ уравнения*

$$T\vec{y} = \lambda\vec{y} \tag{15}$$

с ограниченными в совокупности координатами.

Доказательство. Будем искать решение $\vec{y} = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ уравнения (15), обладающее свойством

$$y_n = \rho y_0, \quad y_{n+1} = \rho y_1. \tag{16}$$

Очевидно, в силу периодичности матрицы T будет

$$y_{kn+r} = \rho^k y_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1; \ k = \pm 0, 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

то есть определению подлежат n проекций y_r $(r = 0, 1, \ldots n-1)$, которые могут быть получены из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1 y_0 + (a_1 - \lambda) y_1 + c_1 y_2 = 0 \\ \quad b_2 y_1 + (a_2 - \lambda) y_2 + c_2 y_3 = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad b_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} - \lambda) y_{n-1} + c_{n-1} \rho y_0 = 0 \\ \quad\quad\quad b_n y_{n-1} + (a_n - \lambda) \rho y_0 + c_n \rho y_1 = 0. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости этой системы является равенство нулю ее определителя, что, как легко видеть, равносильно соотношению

$$P(\lambda) = \alpha\rho^{-n} + \beta\rho^n, \tag{18}$$

где многочлен $P(\lambda)$ есть правая часть равенства (13) параграфа 1.

С другой стороны, если $\lambda \in \Gamma$, то согласно (14) и $n^\circ 1$ будет при некотором вещественном t

$$P(\lambda) = \alpha e^{int} + \beta e^{-int}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что при $\rho = e^{-int}$ уравнение (15) имеет в L решение, удовлетворяющее условиям (16). В силу (17) это решение имеет ограниченные в совокупности координаты, и лемма доказана.

Лемма 4. *Если для некоторого значения λ уравнение* (15) *имеет решение $\vec{y}$ с ограниченными в совокупности координатами, то $\lambda \in S(T)$.*

Доказательство. Если $\vec{y} \in l_2(-\infty, \infty)$, то λ есть собственное значение и, следовательно, принадлежит $S(T)$. Если же $\vec{y} \overline{\in} l_2(-\infty, \infty)$, то построим последовательность финитных векторов $\vec{y}^{(r)} = \{y_k^{(r)}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где

$$y_k^{(r)} = y_k \theta_k^{(r)}, \quad \theta_k^{(r)} = \begin{cases} 0, & k < r \\ 1, & -r \leqslant k \leqslant r \\ 0, & k > r, \end{cases}$$
$$(k = \pm 0, 1, 2, \ldots; \ r = 1, 2, \ldots).$$

Так как вектор $\vec{y}$ есть решение уравнения (15), то для координат вектора

$$\vec{z}^{(r)} = T\vec{y}^{(r)} - \lambda\vec{y}^{(r)}$$

будет

$$z^{(r)}_{-(r+1)} = c_{-(r+1)}y_r,\quad z^{(r)}_{-r} = -b_r y_{-(r+1)},\quad z^{(r)}_r = -c_r y_{r+1},\quad z^{(r)}_{r+1} = b_{r+1}y_r,$$

а остальные координаты вектора $\vec{z}^{(r)}$ равны нулю.

Поэтому ограниченность координат вектора $\vec{y}$ влечёт равномерную по r ограниченность норм $\|\vec{z}^{(r)}\|$ и, поскольку $\vec{y} \bar{\in} l_2(-\infty, \infty)$, будет

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\|T\vec{y}^{(r)} - \lambda\vec{y}^{(r)}\|}{\|\vec{y}^{(r)}\|} = \lim_{r\to\infty} \frac{\|\vec{z}^{(r)}\|}{\|\vec{y}^{(r)}\|} = 0,$$

так что $\lambda \in S(T)$.

Теорема 4. *Спектр* $S(T)$ *n-периодической якобиевой матрицы* T *совпадает с полным λ-прообразом* Γ *эллипса*

$$\mu(t) = \alpha e^{int} + \beta e^{-int} \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}\right) \tag{20}$$

при отображении (14), *где числа* α *и* β *определены в условии теоремы 3.*

Доказательство. Включение $S(T) \subset \Gamma$ следует из теоремы Денфорда (см. [5]) об отображении спектров. Обратное включение вытекает из лемм 3 и 4.

Из теоремы (4) следует, что спектр $S(T)$ состоит не более чем из n алгебраических дуг с конечным числом общих точек. В самосопряженном случае спектр $S(T)$ состоит из n отрезков вещественной оси, могущих иметь общие концы.

Последний результат, относящийся к самосопряженному случаю, хорошо известен. В общем случае якобиевой матрицы T любого порядка из теоремы 1 параграфа 1 также можно вывести некоторое заключение о спектре.

§ 3. Некоторые вспомогательные предложения из спектральной теории в абстрактном гильбертовом пространстве

1. Пусть T есть ограниченный, вообще говоря, несимметрический линейный оператор, определяемый на всём гильбертовом пространстве H.

Имея в виду дальнейшие применения, предположим, что его спектр $S(T)$ есть замыкание Γ конечной системы $\dot{\Gamma}$ открытых гладких дуг, не имеющих точек пересечения. Перенумеровав эти дуги и выбрав на каждой из них определенное направление движения, превратим $\dot{\Gamma}$ в упорядоченное множество точек. При этом для любых точек λ' и λ'' из $\dot{\Gamma}$ соотношение $\lambda' \prec \lambda''$ будет означать, что λ' принадлежит дуге с меньшим номером, чем λ'', либо λ' и λ'' лежат на одной дуге, но λ' предшествует точке λ'' по ходу движения. Через α и β обозначим левый конец первой и, соответственно, правый конец последней дуги.

Семейство ортопроекторов E_λ $(\lambda \in \dot{\Gamma})$ назовём *ортогональным разложением единицы* на Γ, если $E_{\lambda'}H \subset E_{\lambda''}H$ при $\lambda' \prec \lambda''$ и

$$\lim_{\lambda\downarrow\alpha} E_\lambda = 0,\quad \lim_{\lambda\uparrow\beta} E_\lambda = I.$$

Ортогональное разложение единицы E_λ на $\Gamma = S(T)$ будем называть *спектральной функцией треугольного представления* оператора T, если при каждом $\mu \in \dot{\Gamma}$ оператор T инвариантен в $E_\mu H$ и спектр его части в $E_\mu H$ состоит из замыкания множества всех точек $\lambda \in \dot{\Gamma}$, предшествующих μ, а спектр оператора $(I - E_\mu)T$ в $(I - E_\mu)H$ состоит из замыкания всех $\lambda \in \dot{\Gamma}$, следующих за μ.

Существование спектральной функции E_λ треугольного представления не является обязательным для a priori заданного ограниченного оператора T в H. Пример оператора, который заведомо не обладает спектральной функцией треугольного представления, см. в [6]. Наличие спектральной функции E_λ означает приводимость оператора T к треугольному виду с помощью унитарного преобразования.

2. Введём еще *косоугольное разложение единицы* F_λ на Γ, подчинив его следующим требованиям:

1°) F_λ при $\lambda \in \Gamma^{\cdot}$ есть оператор проектирования (вообще говоря, неортогонального);

2°) если $\lambda' \prec \lambda''$, то $F_{\lambda'}H \subset F_{\lambda''}H$ и

$$(I - F_{\lambda''})H \subset (I - F_{\lambda'})H;$$

3°) существуют такие постоянные $m > 0$ и $M < \infty$, что при любом $g \in H$ и любом разбиении Γ на непересекающиеся части Δ_k имеет место двойное неравенство

$$m\sum \| F(\Delta_k) g \|^2 \leqslant \| g \|^2 \leqslant M \sum \| F(\Delta_k) g \|^2; \tag{21}$$

4°) $\lim\limits_{\lambda \downarrow \alpha} F_\lambda = 0, \ \lim\limits_{\lambda \uparrow \beta} F_\lambda = I.$

Из 2° при $\lambda \prec \mu$ легко следует соотношение

$$F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\lambda, \tag{22}$$

откуда вытекает, что для любой дуги $\Delta = (\lambda', \lambda'')$ разность $F(\Delta) = F_{\lambda''} - F_{\lambda'}$ является оператором проектирования. При этом $F(\Delta)$ проектирует на $F_{\lambda''}H \cap (I - F_{\lambda'})H$, а $(I - F(\Delta))$ — на $F_{\lambda'}H + (I - F_{\lambda''})H$. Из (22) также следует, что при $\Delta' \cap \Delta'' = 0$ будет $F(\Delta')F(\Delta'') = 0$.

Условие 3° является континуальным аналогом соответствующего условия для базисов Рисса. Это условие позволяет, в частности, установить следующую теорему, из которой вытекает существование пределов, указанных в 4°.

Теорема 5. *Для любой точки* λ_0, *принадлежащей замыканию* Γ *множества* $\dot{\Gamma}$, *при любом* $f \in H$ *существуют односторонние пределы*

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_0} F_\lambda f \ \text{и} \ \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} F_\lambda f.$$

Доказательство. Пусть, например, $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \ldots$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda_0$. Полагая $\Delta_k = (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, имеем, в силу левой части неравенства (21), при любом n

$$\sum_{k=1}^{n-1} \| F(\Delta_k) f \|^2 \leqslant \frac{1}{m} \| f \|^2,$$

откуда вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| F(\Delta_k) f \|^2$. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что при любых $r > N$, $s > N$ будет

$$\sum_{k=r}^{s} \| F(\Delta_k) \|^2 < \varepsilon.$$

Теперь, применяя правую часть неравенства (21) к вектору $g = \sum_{k=r}^{s} F(\Delta_k) f$, получаем

$$\| \sum_{k=r}^{s} F(\Delta_k) f \|^2 \leqslant M \sum_{k=r}^{s} \| F(\Delta_k) f \|^2 \leqslant M\varepsilon$$

или

$$\| F_{\lambda_{s+1}} f - F_{\lambda_r} f \| < \sqrt{M\varepsilon},$$

откуда вытекает справедливость теоремы.

Косоугольное разложение единицы F_λ на $\Gamma = S(T)$ будем называть *спектральной функцией диагонального представления* оператора T, если выполняются следующие условия:

1°) при каждом $\mu \in \dot{\Gamma}$ оператор T инвариантен в $F_\mu H$ и $(I - F_\mu) H$ и спектр его частей в этих подпространствах состоит из замыкания множества всех λ, предшествующих и, соответственно, следующих за точкой μ;

2°) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой дуги $\Delta \subset \dot{\Gamma}$ длины, меньшей δ, оператор T в инвариантном подпространстве $F(\Delta) H$ отличается по норме от λI $(\lambda \in \Delta)$ меньше, чем на ε.

Следующая теорема показывает, что существование спектральной функции диагонального представления позволяет получить спектральное разложение соответствующего оператора, аналогичное спектральному разложению самосопряжённых операторов.

Теорема 6. *Если F_λ есть спектральная функция диагонального представления ограниченного оператора T, то для каждого $f \in H$ имеет место формула*

$$Tf = \int_{\Gamma} \lambda dF_\lambda f, \tag{23}$$

где интеграл справа есть сильный предел интегральных сумм $\sum \lambda_k F(\Delta_k) f$.

Доказательство. По данному $\varepsilon > 0$ разобьем Γ на конечное число дуг Δ_k таких, чтобы при любом $f \in H$ выполнялось неравенство

$$\| TF(\Delta_k) f - \lambda F(\Delta_k) f \| < \varepsilon \| F(\Delta_k) f \|, \tag{24}$$

где $\lambda_k \in \Delta_k$. При этом, поскольку $TF(\Delta_k) f \in F(\Delta_k) H$, можно положить

$$TF(\Delta_k) f - \lambda_k F(\Delta_k) f = F(\Delta_k) h_k.$$

Суммируя обе части этого равенства, получим

$$Tf - \sum \lambda_k F(\Delta_k) f = \sum F(\Delta_k) h_k,$$

откуда

$$\| Tf - \sum \lambda_k F(\Delta_k) f \| = \| \sum F(\Delta_k) h_k \|. \tag{25}$$

Теперь воспользуемся правой частью неравенства (21), полагая $g = \sum F(\Delta_k) h_k$. Таким образом получаем

$$\| \sum F(\Delta_k) h_k \|^2 \leqslant M \sum \| F(\Delta_k) h_k \|^2, \tag{26}$$

но, в силу (4),

$$\| F(\Delta_k) h_k \| \leqslant \varepsilon \| F(\Delta_k) f \|,$$

так что неравенство (6) приобретает вид

$$\| \sum F(\Delta_k) h_k \|^2 \leqslant M\varepsilon^2 \sum \| F(\Delta_k) f \|^2. \tag{27}$$

Теперь, пользуясь левой частью неравенства (21) при $g=f$, получаем

$$\sum \| F(\Delta_k) f \|^2 \leqslant \frac{1}{m} \| f \|^2. \tag{28}$$

Из (25), (27) и (28) следует оценка

$$\| Tf - \sum \lambda_k F(\Delta_k) f \| < \sqrt{\frac{M}{m}} \varepsilon \| f \|,$$

и теорема доказана.

В соответствии с (23) существование спектральной функции F_λ означает приводимость оператора T к диагональной форме с помощью некоторого линейного преобразования V, ограниченного вместе V^{-1}.

§ 4. Треугольное и диагональное представление периодических якобиевых матриц

1. Возвращаясь к обозначениям (8) параграфа 1, введем в n-мерном эвклидовом пространстве $\mathscr{E}$ семейство операторов T_t, определяемых в естественном базисе матрицей

$$T_t = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & b_1 e^{-int} \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n e^{int} & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}\right). \tag{29}$$

Оператор T_t возникает при решении следующей задачи: найти вектор $\vec{y} \in L$, удовлетворяющий уравнению (15) и условиям

$$y_n = y_0 e^{int}, \quad y_{n+1} = y_1 e^{int}, \tag{30}$$

где $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$. Очевидно, что координаты искомого вектора удовлетворяют соотношениям

$$y_{kn+r} = y_r e^{inkt} \quad (r = 1, 2, \dots, n; \ k = \pm 0, 1, 2, \dots) \tag{31}$$

и поэтому искомый вектор $\vec{y} \in L$ однозначно определяется n-мерным вектором $\vec{\varphi} = \{y_r\}_{r=1}^n$, удовлетворяющим уравнению

$$T_t \vec{\varphi} = \lambda \vec{\varphi}.$$

Таким образом, решение уравнения (15) сводится к определению собственных значений и векторов оператора T_t в $\mathscr{E}$.

Простая выкладка приводит к равенству:

$$\mathrm{Det}\,(T_t - \lambda \mathrm{I}) = (-1)^n P(\lambda) - \alpha e^{-int} - \beta e^{int}, \tag{32}$$

где α и β имеют смысл, указанный в параграфе 1. На основании параграфа 2 соотношение (32) показывает, что спектр $S(T)$ совпадает с траекториями собственных значений оператора T_t при возрастании t от 0 до $\frac{2\pi}{n}$.

2. Пусть $\vec{\varphi}^{(1)}(t), \vec{\varphi}^{(2)}(t), \dots, \vec{\varphi}^{(n)}(t)$ есть ортонормированный базис Шура оператора T_t в $\mathscr{E}$, так что

$$T_t \vec{\varphi}^{(s)} = \lambda_s \vec{\varphi}^{(s)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mu_{sj} \vec{\varphi}^{(j)} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \tag{33}$$

По векторам $\vec{\varphi}^{(j)}(t) \in \mathscr{E}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ построим векторы $\vec{z}^{(j)}(t) \in L$ с координатами

$$z_{kn+r}^{(s)}(t) = \varphi_r^{(s)}(t)\, e^{inkt} \quad (r,\ s = 1, 2, \ldots, n;\ k = \pm 0, 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

Из (33) и (34) получаем

$$T\vec{z}^{(s)} = \lambda_s \vec{z}^{(s)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mu_{sj} \vec{z}^{(j)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Введём теперь пространство $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ n-компонентных вектор-функций и оператор ϑ умножения вектор-функций из $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ на матрицу

$$\vartheta(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{21}(t) & \lambda_2(t) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{n1}(t) & \mu_{n2}(t) & \ldots & \lambda_n(t) \end{pmatrix} \tag{35}$$

справа.

Теорема 7. *Оператор T в $l_2(-\infty, \infty)$ унитарно эквивалентен оператору ϑ умножения на $\vartheta(t)$ в $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$.*

Доказательство. Положим для любой вектор-функции $\vec{\psi}(t) \in \vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$

$$U\vec{\psi} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \psi_s(t)\, \vec{z}_*^{(s)}(t)\, dt, \tag{36}$$

где звездочка заменяет знак комплексного сопряжения. Для проекций вектора $\vec{f} = U\vec{\psi}$ имеем

$$f_{kn+r} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} F(t;\ r)\, e^{-inkt}\, dt \quad \begin{pmatrix} k = \pm 0, 1, 2, \ldots \\ r = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{37}$$

где

$$F(t;\ r) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sum_{s=1}^{n} \psi_s(t)\, \overline{\varphi_r^{(s)}(t)} \quad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{38}$$

В силу нормированности в $\mathscr{E}$ базиса Шура $\vec{\varphi}^{(s)}(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ будет $|\varphi_r^{(s)}(t)| \leqslant 1$ $(r,\ s = 1, 2, \ldots, n)$, так что из $\vec{\psi}(t) \in \vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ следует принадлежность к $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ вектора $\vec{F}(t) = \{F(t;\ r)\}_{r=1}^{n}$.

Из (37) с помощью равенства Парсеваля получаем

$$\|\vec{f}\|^2 = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_{kn+r}|^2 = \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} |F(t;\ r)|^2\, dt. \tag{39}$$

Пользуясь выражением (38) для $F(t; r)$ и учитывая ортонормированность базиса Шура, получаем из (39)

$$\|\vec{f}\|_{l_2} = \|\vec{\psi}\|_{\vec{L}_2}.$$

Из этого соотношения и линейности оператора U следует его изометричность.

Легко видеть, что оператор U отображает $\vec{L}\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ на всё $l_2(-\infty, \infty)$. Действительно, построив для произвольного вектора $\vec{f} \in l_2(-\infty, \infty)$ вектор-функцию $\vec{F}(t) \in \vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ с координатами

$$F(t, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{nk+r} e^{inkt} \quad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

и разрешая систему (38) относительно $\psi_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, получаем

$$\psi_s(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{r=1}^{n} F(t; r)\, \varphi_r^{(s)}(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{41}$$

откуда следует, что вектор $\vec{\psi}(t) = \{\psi_s(t)\}_{s=1}^{n}$ принадлежит $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$.

Для оператора U^{-1} из (34), (40) и (41) получаем

$$\vec{\psi}(t) = U^{-1}\vec{f} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \{(\vec{f}, \vec{z}_*^{(s)})\}_{s=1}^{n}. \tag{42}$$

Из формул (35), (36) и (42) следует

$$T = U\vartheta U^{-1},$$

и теорема доказана. Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Теорема 8. *Любая комплексная периодическая якобиева матрица обладает ортогональной функцией E_λ треугольного представления.*

Для построения E_λ достаточно определить спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$ оператора умножения на $\vartheta(t)$ в $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, а затем положить $E_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^*$. Чтобы определить $\mathcal{E}_\lambda$, следует при данном λ решить относительно j и t уравнение $\lambda_j(t) = \lambda$. Если $j = s$ и $t = \tau$ найденные значения неизвестных, то

$$\mathcal{E}_\lambda \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\} = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\},$$

где

$$g_k(t) = \begin{cases} f_k(t) & (k < s) \\ 0 & (k > s) \end{cases} \qquad g_s(t) = \begin{cases} f_s(t) & (t < \tau) \\ 0 & (t > \tau). \end{cases}$$

При этом предполагается, что выбранное направление движения на Γ соответствует возрастанию параметра t. Если при данном λ уравнение $\lambda_j(t) = \lambda$ разрешимо неоднозначно (например, в случае $|\alpha| = |\beta|$), то приведенное построение требует некоторой модификации.

3. Рассмотрим случай, когда оператор T_t при $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$ имеет простой спектр, то есть многочлен (32) не имеет кратных корней.

Введем вместе с T_t сопряженный оператор T_t^* с собственными значениями $\bar{\lambda}_s(t)$ и собственными векторами $\vec{\Phi}^{(s)}(t)(s = 1, 2, \ldots, n)$. Эти векторы выберем так, чтобы вместе с нормированной системой $\vec{\varphi}^{(s)}(t)$ ($s = 1, 2, \ldots$) собственных векторов оператора T_t они образовывали биортонормированную систему, то есть, чтобы было

$$\sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(j)}(t)\,\overline{\Phi_r^{(i)}(t)} = \delta_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Остающиеся после этого неопределенные множители, равные по модулю единице, выберем так, чтобы проекции каждого собственного вектора $\vec{\Phi}^{(s)}(t)$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) были непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$. Возможность такого выбора этих множителей нетрудно установить, пользуясь простотой спектра оператора T_t^* в интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$.

Далее введем оператор Λ умножения вектор-функций пространства $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ на диагональную матрицу

$$\Lambda(t) = (\lambda_k(t)\,\delta_{ik})_{i,\,k=1}^{n} \tag{43}$$

и покажем, что имеет место следующая

Теорема 9. *Если корни многочлена* (32) *при* $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$ *простые, то существует ограниченный вместе с обратным оператор* V, *отображающий всё* $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ *на всё* $l_2(-\infty, \infty)$ *такой, что* $T = V\Lambda V^{-1}$.

Доказательство. Введем векторы $\vec{y}^{(s)} = \{y_j^{(s)}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ формулами

$$y_{r+nk}^{(s)} = \varphi_r^{(s)} e^{inkt}\ (r,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k = \pm 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и положим для любой вектор-функции $\vec{\psi}(t) \in \vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$

$$V\vec{\psi} = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sum_{s=1}^{n} \psi_s(t)\,\vec{y}^{(s)}(t)\,dt. \tag{44}$$

Легко видеть, что для проекций вектора $\vec{f} = V\vec{\psi}$ будет

$$f_{r+nk} = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} F(t;\ r)\,e^{itkn}dt\ (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k = \pm 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{45}$$

где

$$F(t;\ r) = \sum_{s=1}^{n} \psi_s(t)\,\varphi_r^{(s)}(t) \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{46}$$

Далее, из нормированности $\vec{\varphi}^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) следует, что вектор-функция $\vec{F}(t) = \{F(t;\ r)\}_{r=1}^{n}$ принадлежит $\vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, а значит, из (45) следует, что $\vec{f} \in l_2(-\infty, \infty)$. Равенство Парсеваля для (45) дает

$$\|\vec{f}\|_{l_2} = \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\pi}} \sum_{r=1}^{n} |F(t;\ r)|^2\,dt. \tag{47}$$

С другой стороны, очевидное неравенство $|\sum_{k=1}^{n} x_k|^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$, применённое к (46) с учетом нормированности векторов $\vec{\varphi}^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ даёт

$$|F(t;\ r)|^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} |\psi_k(t)|^2.$$

Из (47) с помощью последнего неравенства получаем соотношение

$$\| V\vec{\psi} \|_{l_2} \leqslant M \| \vec{\psi} \|_{L_2} \quad \left(M = \frac{n^3}{\pi}\right),$$

так что оператор V ограничен.

Найдем теперь обратный оператор и установим его ограниченность. С этой целью для произвольного $\vec{f} \in l_2(-\infty, \infty)$ определим вектор-функцию $\vec{F}(t) \in \vec{L}_2\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ с проекциями

$$F(t;\ r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{r+nk} e^{-intk} \ (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Разрешая систему (45) относительно $\psi_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ и воспользовавшись биортонормированностью системы $\vec{\varphi}^{(s)}(t)$, $\vec{\Phi}^{(s)}(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, получаем

$$\psi_s(t) = \sum_{r=1}^{n} F(t;\ r) \overline{\Phi_r^{(s)}(t)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этого равенства в силу непрерывности компонент собственных векторов следует включение $\vec{\psi}(t) \in L_2\left(0; \frac{2\pi}{n}\right)$.

Далее, если $\| \vec{\Phi}^{(s)}(t) \| \leqslant \nu$, то

$$\| V^{-1} \vec{f} \| \leqslant n\nu^2 \sum_{r=1}^{n} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} |F(t;\ r)|^2 \, dt$$

или, в силу (46),

$$\| V^{-1} \vec{f} \|_{\vec{L}_2} \leqslant N \| f \|_{l_2}.$$

Если ввести векторы $\vec{Y}^{(s)} = \{Y_j^{(s)}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ формулами

$$Y_{r+nk}^{(s)} = \Phi_r^{(s)} e^{inkt} \ (r,\ s = 1, 2, \ldots, n;\ k = \pm 0, 1, 2, \ldots),$$

то оператор V^{-1} может быть записан в виде

$$V^{-1}\vec{f} = \{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k Y_k^{(s)} \}_{s=1}^{n}. \tag{48}$$

Из формул (44), (43) и (48) следует соотношение

$$T = V\Lambda V^{-1},$$

и теорема доказана.

Из теоремы 9 непосредственно вытекает

Теорема 10. *Если все корни многочлена* (32) *при* $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$ *простые, то n-периодическая якобиева матрица T с комплексными элементами обладает спектральной функцией F_λ диагонального представления.*

Доказательство. Достаточно положить

$$F_\lambda = VF_\lambda V^{-1},$$

где F_λ есть спектральная функция диагонального представления оператора Λ. Легко видеть, что F_λ совпадает со спектральной функцией E_λ, введенной в $n^\circ 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов. «Изв. АН СССР, серия матем.», 5, 203 (1943).

2. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ГОНТИ — ДНТВУ, Харьков, 1939.

3. П. Б. Найман. К теории периодических и предельно-периодических якобиевых матриц. «Докл. АН СССР», **143**, 277 (1962).

4. И. М. Гельфанд. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами. «Докл. АН СССР», **73**, 1117 (1950).

5. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, Изд-во иностр. лит., 1954.

6. Ю. И. Любич и В. И. Мацаев. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве. «Докл. АН СССР», **131**, 21 (1960).