ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

ВИД ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Краснодембский

1. В настоящей работе некоторые результаты, полученные Гамелем [2], [5] для уравнения Дуффинга [1]

$$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x,$$

обобщаются на случай дифференциальных уравнений высшего порядка, разрешенных относительно старшей производной, с правыми частями определенного вида.

Для дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями такого же вида ряд тонких результатов относительно существования и вида периодических решений получили М. А. Красносельский [3] и И. И. Ворович [4].

2. Введем следующие определения:

Функция $\varphi(x)$ принадлежит классу (P_α), если

$$\varphi(x) \in C, \quad \varphi(x+T) \equiv \varphi(x), \quad \varphi(\alpha - x) \equiv -\varphi(x);$$

$\varphi(x)$ принадлежит классу $(P_\alpha^{(-1)})$, если

$$\varphi(x) \in C, \quad \varphi(x+T) \equiv \varphi(x), \quad \varphi(\alpha - x) \equiv \varphi(x);$$

наконец, $\varphi(x)$ принадлежит классу (R), если

$$\varphi(x) \in C, \quad \varphi(x+T) \equiv \varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{T}{2} + x\right) \equiv -\varphi(x).$$

Функция $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ принадлежит классу (Π_α), если

$$f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) \in C, \; f(x+T, u_0, u_1, \ldots, u_n) \equiv f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n),$$
$$f(\alpha - x, u_0, -u_1, \ldots, (-1)^n u_n) \equiv -f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n);$$

$f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ принадлежит классу $(\Pi_\alpha^{(-1)})$, если

$$f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) \in C, \; f(x+T, u_0, u_1, \ldots, u_n) \equiv f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n),$$
$$f(\alpha - x, -u_0, u_1, \ldots, (-1)^{n+1} u_n) \equiv -f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n);$$

наконец, $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ принадлежит классу (Σ), если

$$f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) \in C, \; f(x+T, u_0, u_1, \ldots, u_n) \equiv f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n),$$
$$f\left(\frac{T}{2} + x, -u_0, -u_1, \ldots, -u_n\right) \equiv -f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n).$$

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n+1)} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C, \quad \varphi(x+T) \equiv \varphi(x) \tag{1}$$

обладает периодическим (периода T) решением в том и только в том случае, если

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = 0.$$

Периодическое (периода T) решение дифференциального уравнения (1)

$$y = \bar{y}(x) \quad (\bar{y}(0) = y_0)$$

запишем в форме

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \varphi(t)\,dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\varphi(t)\,dt\right]x^n + \left[A_2^{(1)}\int_0^T t\varphi(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\varphi(t)\,dt\right]x^{n-1} + \ldots + \left[A_n^{(1)}T^{n-2}\int_0^T t\varphi(t)\,dt + A_n^{(2)}T^{n-3}\int_0^T t^2\varphi(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{A_n^{(n)}}{T}\int_0^T t^n\varphi(t)\,dt\right]x + y_0, \tag{2}$$

где коэффициенты $A_i^{(j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} A_i^{(i)} + A_{i+1}^{(i)} + \ldots + A_n^{(i)} = (-1)^{i+1}\frac{C_n^i}{n!} \; (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (n+1-i)A_i^{(i)} + (n-i)A_{i+1}^{(i)} + \ldots + 2A_{n-1}^{(i)} = \\ = (-1)^{i+1}\frac{C_{n-1}^i}{(n-1)!} \; (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ n!A_1^{(1)} = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Следовательно, периодическое (периода T) решение

$$y = \bar{y}(x) \qquad \left(\int_0^T \bar{y}(t)\,dt = 0\right)$$

дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C, \quad \varphi(x+T) \equiv \varphi(x), \quad \int_0^T \varphi(t)\,dt = 0$$

можно записать в форме

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^n \varphi(t)\,dt + n\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\varphi(t)\,dt\right]x^{n-1} +$$

$$+ (n-1)\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\varphi(t)\,dt + \frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\varphi(t)\,dt\right]x^{n-2} +$$

$$+ \ldots + \left[A_n^{(1)}T^{n-2}\int_0^T t\varphi(t)\,dt + A_n^{(2)}T^{n-3}\int_0^T t^2\varphi(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{A_n^{(n)}}{T}\int_0^T t^n\varphi(t)\,dt\right], \tag{4}$$

где коэффициенты $A_i^{(j)}$ удовлетворяют соотношениям (3).

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* (P_α), *а* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{2n})$ — *классу* (Π_α) *и* $y = \bar{y}(x)$ $(y(0) = y_0)$ — *периодическое (периода* T*) решение уравнения* $y^{(2n+1)} = \varphi(x)$, *то* $\bar{y}(x)$ *принадлежит классу* $(P_\alpha^{(-1)})$ *и* $f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(2n)}(x))$ — *классу* (P_α).

Доказательство. Обозначим

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) = \psi(x).$$

Тогда

$$\psi(-x) = -\psi(x, \quad \int_0^T \psi(t)\,dt = \int_0^T \varphi\left(\frac{\alpha}{2} + t\right) dt = \int_0^T \varphi(t)\,dt = 0.$$

Пусть $y = \bar{y}(x)$ $(\bar{y}(0) = y_0)$ — периодическое (периода T) решение уравнения

$$y^{(2n+1)} = \varphi(x).$$

Имеем

$$\bar{y}^{(2n+1)}\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \equiv \varphi\left(\frac{\alpha}{2} + x\right), \quad -\bar{y}^{(2n+1)}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) \equiv -\varphi\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) \equiv \varphi\left(\frac{\alpha}{2} + x\right).$$

Обозначая

$$u(x) = \bar{y}\left(\frac{\alpha}{2} + x\right), \quad v(x) = \bar{y}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right),$$

имеем

$$u^{(2n+1)} \equiv \psi(x), \quad v^{(2n+1)} \equiv \psi(x).$$

Следовательно,

$$\bar{y}\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \equiv \bar{y}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* (P_α), *а* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{2n-1})$ — *классу* $(\Pi_\alpha^{(-1)})$ *и* $y = \bar{y}(x)$ $\left(\int_0^T \bar{y}(t)\,dt = 0\right)$ — *периодическое (периода* T*) решение уравнения* $y^{(2n)} = \varphi(x)$, *то* $\bar{y}(x)$ *и* $f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(2n-1)}(x))$ *принадлежат классу* (P_α).

Доказательство. Пусть

$$y = \bar{y}(x) \qquad \left(\int_0^T \bar{y}(t)\,dt = 0\right)$$

периодическое (периода T) решение уравнения

$$y^{(2n)} = \varphi(x).$$

Сохраняя обозначения предыдущей леммы, имеем

$$u^{(2n)}(x) \equiv \psi(x), \quad -v^{(2n)}(x) \equiv \psi(x).$$

Так как

$$\int_0^T u(t)\,dt = \int_0^T -v(t)\,dt = \int_0^T \bar{y}(t)\,dt,$$

то

$$\bar{y}\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)\equiv-\bar{y}\left(\frac{\alpha}{2}+x\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* (R), *а* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ — *классу* (Σ) *и* $y=\bar{y}(x)$ $\left(\int_0^T \bar{y}(t)\,dt=0\right)$ — *периодическое (периода* T*) решение уравнения* $y^{(n+1)}=\varphi(x)$, *то* $\bar{y}(x)$ *и* $f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(n)}(x))$ *принадлежат классу* (R).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы, если заметить, что

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt=0.$$

3. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n+1)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{5}$$

где функция $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)\in C,\quad f(x+T, u_0, u_1, \ldots, u_n)\equiv f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n).$$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что правая часть уравнения (5) удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, u_{02}, u_{12}, \ldots, u_{n2})-f(x, u_{01}, u_{11}, \ldots, u_{n1})|\leqslant L\{|u_{02}-u_{01}|+ \\ +|u_{12}-u_{11}|+\ldots+|u_{n2}-u_{n1}|\}. \tag{6}$$

Функция

$$y=\bar{y}(x)\quad(\bar{y}(x+T)\equiv\bar{y}(x),\quad \bar{y}(0)=y_0)$$

будет решением уравнения (5) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению (2), где

$$\varphi(x)=f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(n)}(x)).$$

Функция

$$y=\bar{y}(x)\quad(\bar{y}(x+T)\equiv\bar{y}(x),\quad \int_0^T \bar{y}(t)\,dt=0)$$

будет решением уравнения (5) с $n=k-1$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению (4), где

$$\varphi(x)=f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(k-1)}(x)).$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении (5)* $n=2k$ *и функция* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{2k})$ *принадлежит классу* (Π_α). *Тогда при достаточно малом* L *уравнение* (5) *обладает однопараметрическим семейством периодических решений (периода* T*), причем эти решения принадлежат классу* $(P_\alpha^{(-1)})$; *если* $y=\bar{y}(x)$, $z=\bar{z}(x)$ — *два периодические (периода* T*) решения уравнения* (5), *такие, что* $\bar{y}(0)=\bar{z}(0)$, *то* $\bar{y}(x)\equiv\bar{z}(x)$.

Доказательство. Для упрощения записи ограничимся рассмотрением уравнения 3-го порядка

$$y'''=f(x, y, y', y'').$$

Построим последовательности

$$y_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt +$$

$$+\frac{x^2}{2T}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t), y''_{n-1}(t))\,dt +$$

$$+\frac{x}{2}\int_0^T tf(t, y_{n-1}(t), y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt -$$

$$-\frac{x}{2T}\int_0^T t^2 f(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt + y_0\ (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

$$y'_n(x) = \int_0^x (x-t) f(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt +$$

$$+\frac{x}{T}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt -$$

$$-\frac{1}{2T}\int_0^T t^2 f(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt\ \ (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{8}$$

$$y''_n(x) = \int_0^T f(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y'_{n-1}(t),\ y''_{n-1}(t))\,dt\ \ (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

В силу леммы 1 y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат классу $(P_\alpha^{(-1)})$. Используя (6), (7), (8), (9) и периодичность (периода T) последовательностей y_n, y'_n, y''_n $(n = 1, 2, \ldots)$, легко доказать по индукции, что ряд

$$|y_0| + |y_1 - y_0| + \ldots + |y_n - y_{n-1}| + \ldots$$

мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = \left(\frac{5}{6} LT^3 + \frac{17}{12} LT^2 + \frac{3}{2} LT\right).$$

Следовательно, при достаточно малом L последовательность (7) сходится равномерно. Переходя в (7) к пределу, получаем

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t,\ \bar{y}(t),\ \bar{y}'(t),\ \bar{y}''(t))\,dt +$$

$$+\frac{x^2}{2T}\int_0^T tf(t,\ \bar{y}(t),\ \bar{y}'(t),\ \bar{y}''(t))\,dt +$$

$$+\frac{x}{2}\int_0^T tf(t,\ \bar{y}(t),\ \bar{y}'(t),\ \bar{y}''(t))\,dt -$$

$$-\frac{x}{2T}\int_0^T t^2 f(t,\ \bar{y}(t),\ \bar{y}'(t),\ \bar{y}''(t))\,dt + y_0,$$

$$\bar{y}(x) \in C,\ \bar{y}(x+T) \equiv \bar{y}(x), \quad \bar{y}(\alpha - x) \equiv \bar{y}(x).$$

Обозначим

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant T}\{|\bar{z}(x) - y_0| + |\bar{z}'(x)| + |\bar{z}''(x)|\}.$$

Легко доказать по индукции, что

$$\{|\bar{z}(x) - y_n(x)| + |\bar{z}'(x) - y_n'(x)| + |\bar{z}''(x) - y_n''(x)|\} \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{5}{6}LT^3 + \frac{17}{12}LT^2 + \frac{3}{2}LT\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, при $q < 1$

$$\lim_{n\to\infty}|\bar{z}(x) - y_n(x)| = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (5) $n = 2k - 1$ *и функция* $f(x,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{2k-1})$ *принадлежит классу* $(\Pi_\alpha^{(-1)})$. *Тогда при достаточно малом* L *уравнение* (5) *имеет периодическое (периода* T*) решение, причем это решение принадлежит классу* (P_α); *если* $y = \bar{y}(x)$, $z = \bar{z}(x)$ — *два периодические (периода* T*) решения уравнения* (5) *такие, что* $\int_0^T \bar{y}(t)\,dt = \int_0^T \bar{z}(t)\,dt = 0$, то $\bar{y}(x) \equiv \bar{z}(x)$.

Доказательство. Для упрощения записи ограничимся рассмотрением уравнения 2-го порядка

$$y'' = f(x,\ y,\ y').$$

Построим последовательности

$$y_n(x) = \int_0^x (x-t) f(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt + \frac{x}{T}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt -$$

$$-\frac{1}{2T}\int_0^T t^2 f(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

$$y_n'(x) = \int_0^x f(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T tf(t,\ y_{n-1}(t),\ y_{n-1}'(t))\,dt \ (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{11}$$

где $y_0(x)$ — любая функция из класса (P_α).

В силу леммы 2, y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат классу (P_α).

Используя (6), (10), (11) и периодичность (периода T) последовательностей y_n, y'_n $(n = 1, 2, \ldots)$, легко доказать по индукции, что ряд

$$|y_0| + |y_1 - y_0| + \ldots + |y_n - y_{n-1}| + \ldots$$

мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = \left(\frac{17}{12} LT^2 + \frac{3}{2} LT\right).$$

Следовательно, при достаточно малом L последовательность (10) сходится равномерно.

Переходя к пределу в (10), получаем

$$\bar{y}(x) = \int_0^x (x - t) f(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\, dt + \frac{x}{T} \int_0^T t f(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T t f(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\, dt - \frac{1}{2T} \int_0^T t^2 f(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\, dt,$$

$$\bar{y}(x) \in C, \ \bar{y}(x + T) \equiv \bar{y}(x), \ \bar{y}(\alpha - x) \equiv -\bar{y}(x).$$

Обозначим

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant T} \{ |\bar{z}(x) - y_0(x)| + |\bar{z}'(x) - y'_0(x)| \}.$$

Легко доказать по индукции, что

$$\{ |\bar{z}(x) - y_n(x)| + |\bar{z}'(x) - y'_n(x)| \} \leqslant M \left(\frac{17}{12} LT^2 + \frac{3}{2} LT\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно, при $q < 1$

$$\lim_{n \to \infty} |\bar{z}(x) - y_n(x)| = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *принадлежит классу* (Σ). *Тогда при достаточно малом* L *уравнение* (5) *имеет периодическое (периода* T*) решение, причем это решение принадлежит классу* (R); *если* $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ — *два периодические (периода* T*) решения уравнения* (5) *такие, что* $\int_0^x \bar{y}(t)\, dt = \int_0^T \bar{z}(t)\, dt = 0$, *то* $\bar{y}(x) \equiv \bar{z}(x)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с тем изменением, что вместо леммы 2 применяется лемма 3.

4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y_i^{(m_i+1)} = f_i(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(m_1)}; \ldots; y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(m_n)})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

где функции

$$f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{m_1}^{(1)}; \ldots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)}) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяют условиям:

$$|f_i(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, \ldots, u_{m_n 2}^{(n)}) - f_i(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, \ldots, u_{m_n 1}^{(n)})| \leqslant$$

$$\leqslant L \{ |u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}| + |u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}| + \ldots + |u_{m_n 2}^{(n)} - u_{m_n 1}^{(n)}| \} \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Используя изложенное выше, легко доказать следующие теоремы:

Теорема 4. *Пусть в системе* (12) $m_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и функции* $f_i(x, u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_0^{(n)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат классу* (Π_α) *(здесь и в дальнейшем принадлежность к классу определяется с учетом только нижних индексов). Тогда при любом* L *все компоненты каждого решения системы* (12) *будут принадлежать классу* $(P_\alpha^{(-1)})$.

Теорема 5. *Пусть в системе* (12) $m_i = 2k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $m_i = 2k_i - 1$ $(i = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ *и функции* $f_i(x, v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_{2k_n}^{(1)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $v_j^{(i)} = u_j^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; $v_{j+1}^{(i)} = u_j^{(i)}$ $(i = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ *принадлежат классу* (Π_α). *Тогда при достаточно малом* L *система* (12) *обладает* m*-параметрическим семейством решений,* m *первых компонент которых принадлежат классу* $(P_\alpha^{(-1)})$, *остальные — классу* (P_α); *если* $\bar{y}_i(x)$, $\bar{z}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *— два периодические (периода* T*) решения системы* (12) *такие, что*

$$\bar{y}_i(0) = \bar{z}_i(0)\ (i=1, 2, \ldots, m),\ \int_0^T \bar{y}_i(t)\,dt = \int_0^T \bar{z}_i(t)\,dt = 0\ \ (i = m + 1,\ m + 2,\ \ldots,\ n),$$

то

$$\bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x)\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Теорема 6. *Пусть в системе* (12) *функции* $f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат классу* (Σ). *Тогда при достаточно малом* L *система* (12) *имеет решение, все компоненты которого принадлежат классу* (R); *если* $\bar{y}_i(x)$, $\bar{z}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *— два периодические (периода* T*) решения системы* (12) *такие, что*

$$\int_0^T \bar{y}_i(t)\,dt = \int_0^T \bar{z}_i(t)\,dt = 0\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то

$$\bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x)\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

5. Для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_{i1}(x)\,y_1 + f_{i2}(x)\,y_2 + \ldots + f_{in}(x)\,y_n\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{13}$$

имеет место обратная теорема.

Теорема 7. *Если каждая компонента любого решения системы* (13) *принадлежит классу* $(P_\alpha^{(-1)})$, *то функции* $f_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат классу* (P_α).

Доказательство. Пусть $D = D(x)$ — определитель фундаментальной системы решений системы (13). Тогда

$$f_{ij}(x) = \frac{D_{ij}(x)}{D(x)}\ \ (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так как функция $D(x)$ принадлежит классу $(P_\alpha^{(-1)})$ и отлична от нуля, а функции $D_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат классу (P_α), то функции $f_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат классу (P_α).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Duffing. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz, Braunschweig, 1918.

2. G. Hamel. Math. Ann, **86**, № 1, 1922.

3. М. А. Красносельский, «Докл. АН СССР», **111**, № 2 (1956).

4. И. И. Ворович. «Докл. АН СССР», **110**, № 2 (1956).

5. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, М., Изд-во иностр. лит., 1954.