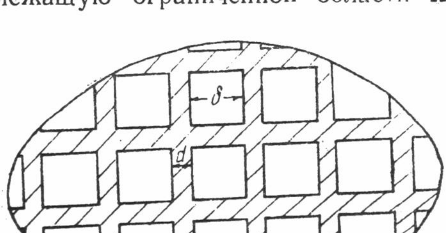
УДК 517.946.9

Е. В. СВИЩЕВА

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ОБЛАСТЯХ МАЛОЙ МЕРЫ

1. Рассмотрим тонкую пластинку $\Omega^{(s)}$ (постоянной толщины, однородную, изотропную), принадлежащую ограниченной области Ω и состоящую из полосок ширины d, образующих периодическую квадратную решетку с периодом $d+\delta$ (рисунок). Будем считать, что при $s \to \infty$ толщина полосок уменьшается, а их густота увеличивается, причем $d = o(\delta)$. Предположим, что пластинка находится под действием вертикальных периодических во времени сил и



края ее свободны Как известно, такая задача о колебаниях пластинки сводится к решению уравнения

$$\Delta^2 u^{(s)}(x, y) + \lambda^2 u^{(s)}(x, y) = f(x, y), \ (x, y) \in \Omega^{(s)}, \tag{1}$$

где $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, с граничными условиями [1]

$$-\frac{\partial \Delta u^{(s)}}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y}\right\} = 0; \tag{2}$$

$$\Delta u^{(s)} + (1-\sigma)\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2}\right\} = 0,$$

$$(x, y) \in \partial\Omega^{(s)}.$$

Здесь θ — угол между осью x и нормалью к $\partial\Omega^{(s)}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial l}$ — производные по направлению нормали и касательной к границе $\partial\Omega^{(s)}$ соответственно. Будем считать, что коэффициент Пуассона $\sigma = 0$. Тогда, учитывая структуру области $\Omega^{(s)}$, можно записать граничные условия в следующем виде:

на вертикальных участках границы

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} = 0, \ 2\frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x^3} = 0;$$

на горизонтальных

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2} = 0, \ 2\frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial y^3} = 0; \tag{2'}$$

в угловых точках границы

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ясно, что при больших s решение такой краевой задачи из-за сильной изрезанности области $\Omega^{(s)}$ представляет определенную трудность. Оказывается, однако, что при больших s данную краевую задачу можно заменить другой краевой задачей, но уже в более простой области Ω. А именно: асимптотика решения $u^{(s)}(x, y)$ задачи (1), (2') при больших s описывается краевой задачей

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \lambda^2 u = f(x, y), \ (x, y) \in \Omega;$$

$$-\frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\cos\theta - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right\} = 0; \tag{3}$$

$$\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\sin\theta\cos\theta = 0, \ (x, y) \in \partial\Omega.$$

Доказательство этого факта проводится вариационным методом на основе исследования функционала

$$F(v) = \int_{\Omega^{(s)}} \left\{\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2 + \lambda^2 |v|^2 - 2fv\right\} dx dy,$$

минимум которого на множестве функций $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega^{(s)})$ совпадает при достаточной гладкости $f(x, y)$ и $\partial\Omega^{(s)}$ с классическим решением задачи (2), (2').

Сформулированный результат, касающийся задачи о колебании пластинки, может быть получен как следствие теоремы, справедливой для краевых задач более общего вида, исследование которых проводится в данной статье.

2. Пусть Ω — произвольная ограниченная область в R^n $(n \geqslant 2)$, $\Omega^{(s)}$ — подмножество Ω, достаточно сильно изрезанное и измельченное. Предположим, что при $s \to \infty$ измельченность множества $\Omega^{(s)}$ увеличивается и при этом $\operatorname{mes}\Omega^{(s)} \to 0$. В области $\Omega^{(s)}$ при каждом фиксированном s будем рассматривать краевую задачу

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}} \Big\{\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha u^{(s)}(x) D^\alpha v(x) + \lambda^2 u^{(s)}(x) v(x)\Big\} dx = \int\limits_{\Omega^{(s)}} f^{(s)}(x) v(x) dx,$$

где $v(x)$ — произвольная функция из $W_2^m(\Omega^{(s)})$, $f^{(s)}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$, α — мультииндекс, т. е. $(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_\alpha^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$. При любом s существует единственное решение этой задачи, принадлежащее пространству $W_2^m(\Omega^{(s)})$. В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$.

Введем необходимые определения. Пусть k — целое неотрицательное число.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $g(x)$, определенная на замкнутом множестве F, принадлежит классу* Lip (k, M, F), *если она k раз непрерывно-дифференцируема и при этом для любых точек x и y, принадлежащих F, справедливы неравенства* $|D^\alpha g(x)| \leqslant M$ $(|\alpha| \leqslant k)$, $|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(y)| \leqslant M|x - y|$ $(|\alpha| = k)$.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $\{u^{(s)}(x) \in W_2^k(\Omega^{(s)}),\ s = 1, 2 \ldots\}$ сходится в $W_2^k(\Omega^{(s)})$ к функции $u(x) \in W_2^k(\Omega)$, если существует аппроксимирующая последовательность функций $\{u_M(x) \in \operatorname{Lip}(k, C_M, \Omega),\ M = 1, 2 \ldots\}$, сходящаяся к $u(x)$ в $W_2^k(\Omega)$ и такая, что*

$$\lim_{M\to\infty} \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega^{(s)}} \| u^{(s)} - u_M \|^2_{W_2^k(\Omega^{(s)})} = 0.$$

Определение 3. *Будем говорить, что области $\Omega^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связности, если для любой последовательности функций $\{u^{(s)}(x) \in C^{2m}(\Omega^{(s)}),\ s = 1, 2 \ldots\}$, удовлетворяющей условию $\|u^{(s)}\|^2_{W_2^m(\Omega^{(s)})} \leqslant C \operatorname{mes}\Omega^{(s)}$, где C от s не зависит, и любого M $(M = 1, 2, \ldots)$ существуют подмножества $\Omega_M^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$ и $G_M^{(s)} = \Omega^{(s)} \setminus \Omega_M^{(s)}$ такие, что* 1) $u^{(s)}(x) \in \operatorname{Lip}(m-1, M, \Omega_M^{(s)})$, *и при*

достаточно больших M, $s \geqslant \bar{s}(M)$ 2) $\operatorname{mes} G_M^{(s)} = o\left(\frac{1}{M^2}\right) \operatorname{mes} \Omega^{(s)}$;
3) $\| u^{(s)} \|_{W_2^{m-1}(G_M^{(s)})} = o(1) \operatorname{mes} \Omega^{(s)}$.

Введем основную характеристику множества $\Omega^{(s)}$, описывающую его влияние на решение задачи (4). Пусть $K_h^0 = K(x^0, h)$ — куб с центром в точке $x^0 \in R^n$ и ребрами длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям. Обозначим через $\vec{R} = \{R_\mu\}_{|\mu|=m}$ совокупность вещественных чисел, занумерованных мультииндексом μ, $\vec{P_0}(x) = \{P_{0\mu}(x)\}_{|\mu|=m}$, где

$$P_{0\mu}(x) = \frac{1}{\mu!}(x - x_0)^\mu = \frac{1}{\mu_1!\,\mu_2! \ldots \mu_n!}(x_1 - x_1^0)^{\mu_1}(x_2 - x_2^0)^{\mu_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{\mu_n}.$$

Положим

$$(R, P_0) = \sum_{|\mu|=m} R_\mu P_{0\mu}.$$

Рассмотрим величину

$$\Phi_R(s, x_0, h) = \inf_{w^{(s)}} \int\limits_{K_h^0 \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} | D^\alpha w^{(s)} |^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \sum_{|\alpha|=k} | D^\alpha (w^{(s)} - (\vec{R}, \vec{P}_0)) |^2 \right\} dx, \tag{5}$$

где $\gamma > 0$, $a^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega^{(s)}}$, а inf ищется в классе функций $W_2^m(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})$. Очевидно, что функция $w_R^{(s)}$, минимизирующая (5), единственна и является решением некоторой линейной краевой задачи. Обозначим через $w_\eta^{(s)}$ функцию, минимизирующую (5), когда $\vec{R} = \{\delta_{\mu\eta}\}_{|\mu|=m}$, где $\delta_{\mu\eta}$ — символы Кронекера ($|\mu| = |\eta| = m$). Тогда из линейности соответствующей (5) краевой задачи получаем [2]

$$\Phi_R(s, x^0, h) = \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta} R_\eta R_\mu, \tag{6}$$

где

$$a_{\mu\eta}(s, x^0, h) = \int\limits_{K_h^0 \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^{(s)} D^\alpha w_\mu^{(s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha (w_\eta^{(s)} - P_{0\eta})] [D^\alpha (w_\mu^{(s)} - P_{0\mu})] \right\} dx. \tag{7}$$

Тензор $\{a_{\mu\eta}(s, x^0, h)\}_{|\mu|=|\eta|=m}$ и меру области $\Omega^{(s)} \cap K_h^0$ примем за основные количественные характеристики множества $\Omega^{(s)}$ в кубе K_h^0.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть последовательность областей* $\Omega^{(s)}$ *удовлетворяет условию сильной связности в смысле определения 3 и в каждой точке* $x \in \Omega$ *выполняются условия:*

1) $$\lim_{h\to\infty}\lim_{s\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(K(x,h)\cap\Omega^{(s)})}{h^n\operatorname{mes}\Omega^{(s)}}=b(x);$$

2) *для некоторого* $\gamma>0$

$$\lim_{h\to\infty}\underline{\lim}_{s\to\infty}\frac{a_{\mu\eta}(s,x,h)}{h^n}\lim_{h\to\infty}\overline{\lim}_{s\to\infty}\frac{a_{\mu\eta}(s,x,h)}{h^n}=a_{\mu\eta}(x),$$

где $b(x)$, $a_{\mu\eta}(x)$ *— непрерывные в* Ω *функции,* $b(x)>b_0>0$, $a_{\mu\eta}(x)$ *— положительно определенная форма:*

$$\sum_{|\eta|=|\mu|=m}a_{\mu\eta}(x)\xi_\eta\xi_\mu\geqslant a_0\sum_{|\mu|=m}|\xi_\mu|^2,\ a_0>0;$$

3) *последовательность функций* $f^{(s)}(x)$ *сходится в* $\hat{\overset{0}{W}}{}_2^0(\Omega^{(s)})$ *к функции* $f(x)\in L_2(\Omega)$ *в смысле определения 2.*

Тогда решение $u^{(s)}(x)$ *задачи 4 сходится в* $\hat{W}_2^{m-1}(\Omega^{(s)})$ *к функции* $u(x)$, *являющейся решением осредненной задачи*

$$\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u(x)D^\beta v(x)+\lambda^2b(x)u(x)v(x)\Big\}dx=$$

$$=\int_\Omega f(x)b(x)v(x)\,dx, \tag{8}$$

где $v(x)$ *— произвольная функция из* $W_2^m(\Omega)$.

3. Доказательство. Решение $u^{(s)}(x)$ задачи (4) минимизирует функционал

$$J(u^{(s)})=\int_{\Omega^{(s)}}\Big\{a^{(s)}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}|D^\alpha u^{(s)}|^2+\lambda^{(s)}|u^{(s)}|^2-2f_1^{(s)}u^{(s)}\Big\}dx, \tag{9}$$

где $\lambda^{(s)}=\dfrac{\lambda^2}{\operatorname{mes}\Omega^{(s)}}$, $f_1^{(s)}=\dfrac{f^{(s)}(x)}{\operatorname{mes}\Omega^{(s)}}$, в классе функций $W_2^m(\Omega^{(s)})$. Отсюда, учитывая, что $J(u^{(s)})\leqslant J(0)=0$, нетрудно получить неравенство $\|u^{(s)}\|^2_{W_2^m(\Omega^{(s)})}\leqslant C\operatorname{mes}\Omega^{(s)}$, где C от s не зависит.

Так как области $\Omega^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связности, согласно определению 3 $u^{(s)}\in\operatorname{Lip}(m-1,M,\Omega_M^{(s)})$, а значит, по теореме Уитни [3] $u^{(s)}(x)$ можно продолжить с $\Omega_M^{(s)}$ на всю область Ω так, что продолжение $u_M^{(s)}$ удовлетворяет в Ω неравенствам

$$|D^\alpha u_M^{(s)}|\leqslant CM\ (|\alpha|\leqslant m-1),\quad |D^\alpha u_M^{(s)}(x)-D^\alpha u_M^{(s)}(y)|\leqslant$$

$$\leqslant CM|x-y|\ (|\alpha|=m-1),$$

где C от s и M не зависит. Применяя теорему Арцелла, убеждаемся, что $u_M^{(s)}$ сходятся к u_M в $C^{m-1}(\Omega)$ по некоторой подпоследовательности, причем $u_M\in\operatorname{Lip}(m-1,CM,\Omega)$. Пользуясь определением 3 можно показать, что последовательность $\{u_M(x),\ M=1,2,\ldots\}$ фундаментальна в $W_2^{m-1}(\Omega)$, а значит, сходится в $W_2^{m-1}(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in W^{m-1}(\Omega)$. При этом последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ сходится по некоторой подпоследовательности к $u(x)$ в $\hat{W}_2^{m-1}(\Omega)$ в смысле определения 2.

Покажем, что если выполняются условия теоремы, то $u(x)$ является решением задачи (8). Поскольку эта задача имеет единственное решение, отсюда будет следовать, что вся последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $u(x)$ в $\hat{W}_2^{m-1}(\Omega)$.

Покроем Ω кубами K_h^j с центрами в x^j, образующими пространственную периодическую решетку с периодом $h - r$, $r > 0$, $r = o(h)$. С данным покрытием стандартным образом свяжем разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}: 0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$, $\varphi_j(x) = 0$ при $x \notin K_h^j$, $\varphi_j(x) = 1$ при $x \in K_h^j \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} K_h^i$, $\Sigma \varphi_j(x) \equiv 1$, $|D^\alpha \varphi_j| \leqslant C r^{-|\alpha|}$ $(|\alpha| \leqslant m)$.

Пусть $w(x)$ — произвольная функция из $C^{2m}(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$w^{(s)}(x) = w(x) + \sum_j \sum_{|\eta|=m} D^\eta w(x) [w_\eta^j(x) - P_{j\eta}(x)] \varphi_j(x), \tag{10}$$

где $P_{j\eta}(x) = \frac{1}{\eta!}(x - x^j)^\eta$, w_η^j — функция, минимизирующая (5), когда K_h^j — куб $K(x^j, h) \equiv K_h^j$. Так как $w^{(s)} \in W_2^m(\Omega^{(s)})$, то $J(u^{(s)}) \leqslant J(w^{(s)})$.

Оценим правую часть неравенства. Из условия 2) теоремы аналогично [2] можно получить оценки, справедливые при достаточно больших s:

$$\int\limits_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha w_\eta^j|^2 dx = O(h^n) \operatorname{mes} \Omega^{(s)} \quad (|\alpha| = m); \tag{11}$$

$$\int\limits_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha (w_\eta^j - P_{j\eta})|^2 dx = O(h^{2(m-|\alpha|+\gamma)}) \operatorname{mes}(K_h^j \cap \Omega^{(s)}) \quad (|\alpha| \leqslant m - 1); \tag{12}$$

$$\int\limits_{(K_h^j \setminus K_{h_1}^j) \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha w_\eta^j|^2 dx = o(h^n) \operatorname{mes} \Omega^{(s)} \quad (|\alpha| = m), \tag{13}$$

где $K_{h_1}^j = K(x^j, h_1)$, $h_1 = h - 2r$, $r = o(h)$. Подставляя $w^{(s)}(x)$ в функционал (9), после несложных преобразований получаем

$$J(w^{(s)}) = \sum_j \sum_{|\eta|=|\mu|=m} \int\limits_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j D_w^\eta D_w^\mu dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^{(s)}} \{\lambda^{(s)} w^2 - 2 f_1^{(s)} w\} dx + \sum_j \sum_{|\mu|=|\eta|=m} \int\limits_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j \times$$

$$\times D^\eta w D^\mu w (\varphi_j^2 - 1) dx + \sum_j \sum_{|\mu|=|\eta|=m} \sum_{i \neq j} \int\limits_{K_h^j \cap K_h^i \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j \times$$

$$\times D^\alpha w_\mu^j D^\eta w D^\mu w \, \varphi_j \varphi_i dx + E(s, h, r, w), \tag{14}$$

где $E(s, h, r, w)$ — остальные слагаемые.

Для оценки $E(s, h, r, w)$ воспользуемся условиями 1) и 3) теоремы, оценками (11) и (12), а также тем, что суммирование по j идет от 1 до $N = O(h^{-n})$, а по i при фиксированном j — по пересекающимся с K_h^j кубами K_h^i, число которых не превышает 3^n. Получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |E(s, h, r, w)| = O\left(h^{m+\frac{\gamma}{2}}\right) + O(h^{2m+\gamma}) + O\left(h^{m-|\alpha^2|+\frac{\gamma}{2}}\right) r^{-|\alpha^3|} +$$
$$+ O(h^{2(m-|\alpha^2|)+\gamma}) r^{-2|\alpha^3|}, \ |\alpha^2| + |\alpha^3| \leqslant m, \ h \to 0, \ r = o(h).$$

Полагая $r = h^{1+\frac{\gamma_1}{2m}}$, где $0 < \gamma_1 < \gamma$, находим $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} |E(s, h, r, w)| = 0$.

Аналогично, с помощью оценки (13) получаем, что два последних слагаемых в (14) дают в пределе 0.

Так как

$$\sum_{|\eta|=|\mu|=m} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j D^\eta w D^\mu w dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\eta,\mu} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_\alpha \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j + \sum_{k=0}^{m-1} + \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\operatorname{mes}(K_h^j \cap \Omega^{(s)})} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha (w_\mu^j - P_{j\mu})] [D^\alpha (w_\eta^j - P_{j\eta})] \right\} D^\alpha w(x) D^\mu w(x) dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\eta,\mu} a_{\mu\eta}(s, x^j, h) D^\eta w(x^j) D^\mu w(x^j) + O(h^{n+1}),$$

то, воспользовавшись условиями теоремы, окончательно получаем из (14)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} J(u^{(s)}) = I(w), \tag{15}$$

где

$$I(w) = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta}(x) D^\eta w D^\mu w + \lambda^2 b(x) w^2 - 2f(x) b(x) w \right\} dx. \tag{16}$$

Так как класс $C^{2m}(\Omega)$ плотен в $W_2^m(\Omega)$, неравенству (15) удовлетворяет любая функция $w \in W_2^m(\Omega)$.

Ранее были построены функции $u_M^{(s)}$ и u_M такие, что

$$u_M^{(s)}(x) \xrightarrow[s=s_k\to\infty]{} u_M(x) \text{ в } C^{m-1}(\Omega),$$
$$u_M(x) \xrightarrow[M\to\infty]{} u(x) \text{ в } W_2^{m-1}(\Omega),$$
$$u_M^{(s)}(x), \ u_M(x) \in \operatorname{Lip}(m-1, CM, \Omega).$$

Покажем, что для построенной таким образом функции $u(x)$ справедливо обратное неравенство

$$\underline{\lim_{s=s_k\to\infty}} J(u^{(s)}) \geqslant I(u), \tag{17}$$

а также $u(x) \in W_2^m(\Omega)$.

Построим функцию $u_M^\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$, такую, что

$$\| u_M^\varepsilon - u_M \|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Пользуясь условием 1) теоремы, можно построить последовательность бесконечно-дифференцируемых на Ω функций $w_M^{(s\varepsilon)}$, таких, что

$$w_M^{(s\varepsilon)}(x) \xrightarrow[s=s_k\to\infty]{} u_M^\varepsilon - u_M(x) \text{ в } C^{m-1}(\Omega);$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \varlimsup_{s=s_k\to\infty} \int_{\Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} | D^\alpha w_M^{(s\varepsilon)} |^2 dx = 0. \tag{19}$$

Введем функцию $u_M^{(s\varepsilon)}$ по формуле

$$u_M^{(s\varepsilon)}(x) = u_M^{(s)}(x) + w_M^{(s\varepsilon)}(x).$$

Тогда $u_M^{(s\varepsilon)}(x) \xrightarrow[s=s_k\to\infty]{} u_M^{(\varepsilon)}(x)$ в $C^{m-1}(\Omega)$. Покроем область Ω непересекающимися во внутренних точках кубами K_h^j с центрами x^j. В пересечении каждого из кубов с областью $\Omega^{(s)}$ рассмотрим функцию (для простоты полагаем $0<\gamma<2$)

$$v_M^{(s\varepsilon j)}(x) = u_M^{(s\varepsilon)}(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u_M^\varepsilon(x^j)(x-x^j)^\alpha. \tag{20}$$

Для любого вектора $\vec{R} = \{R_\mu\}_{|\mu|=m}$ и целого неотрицательного $k \leqslant m-1$ справедливо неравенство

$$\int_{K_h^j\cap\Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha (v_M^{(s\varepsilon j)}(x) - (\vec{R}, \vec{P}_j))|^2 dx \leqslant 2 \int_{K_h^j\cap\Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} | D^\alpha (u_M^{(s\varepsilon)}(x) -$$

$$- u_M^\varepsilon(x))|^2 dx + 2 \int_{K_h^j\cap\Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} \Big| D^\alpha \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\beta!} D^\beta u_M^\varepsilon(x^j)(x-x^j)^\beta +$$

$$+ \sum_{|\beta|=m+1} \frac{1}{\beta!} D^\beta u_M^\varepsilon(\tilde{x}^j)(x-\tilde{x}^j)^\beta - (\vec{R}, \vec{P}_j)\Big)\Big|^2 dx.$$

Положим $R = \{D^\alpha u_\mu^\varepsilon(x^j)\}_{|\alpha|=m}$ и воспользуемся тем, что $u_M^{(s\varepsilon)}(x) \xrightarrow[s\to\infty]{} u_M^\varepsilon$ в $C^{m-1}(\Omega)$. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \int_{K_h^j\cap\Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} | D^\alpha (v_M^{(s\varepsilon j)} - (\vec{R}, \vec{P}_j)) |^2 dx \leqslant O(h^{2(m+1-k)}) \operatorname{mes}(K_h^j \cap \Omega^{(s)}),$$

откуда, воспользовавшись (6), (7), получаем

$$\int_{K_h^j\cap\Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} | D^\alpha v_M^{(s\varepsilon j)} |^2 dx \geqslant \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta}(s, x^j, h) D^\mu u_M^\varepsilon(x^j) \times$$

$$\times D^\eta u_M^\varepsilon(x^j) + O(h^{n+2-\gamma}).$$

Суммируем по j, используя (20):

$$J(u_M^{(s\varepsilon)}) \geqslant \sum_j \sum_{\mu,\eta} a_{\mu\eta}(s, x^j, h) D^\mu u_M^\varepsilon(x^j) D^\eta u_M^\varepsilon(x^j) +$$

$$+ \int_{\Omega^{(s)}} (\lambda^{(s)} | u_M^{(s\varepsilon)} |^2 - 2 f_1^{(s)} u_M^{(s\varepsilon)})\, dx + O(h^{2-\gamma}).$$

Так как $u_M^{(s\varepsilon)} \xrightarrow[s=s_k\to\infty]{} u_M^\varepsilon$ равномерно, то, переходя в полученном неравенстве к пределу по $s = s_k \to \infty$, а затем по $h \to 0$, получаем

$$\varliminf_{s=s_k\to\infty} J(u_M^{(s\varepsilon)}) \geqslant I(u_M^\varepsilon). \tag{21}$$

Перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$. Для перехода в правой части неравенства (21) заметим, что в силу ограниченности и положительной определенности тензора $\{a_{\mu\eta}(x)\}$, а также ограниченности снизу $b(x)$ справедливо представление

$$I(v) = \| v \|^{(1)^2}_{W_2^m(\Omega)} - 2(bf, v)_{L_2(\Omega)}, \tag{22}$$

где $\| \cdot \|^{(1)}_{W_2^m(\Omega)}$ — норма, эквивалентная стандартной в $W_2^m(\Omega)$. Так как $u_M^\varepsilon \to u_M$ в $W_2^m(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ (а следовательно, $u_M^\varepsilon \to u_M$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$), из (22) следует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(u_M^\varepsilon) = I(u_M)$ Для перехода к пределу по $\varepsilon \to 0$ в левой части (21) воспользуемся (18), (19), тем, что $u_M \in \mathrm{Lip}(m-1, CM, \Omega)$, а также равномерной сходимостью $w_M^{(s\varepsilon)}$ к $u_M^\varepsilon - u_M$, $u_M^{(s)}$ к u_M при $s \to \infty$. Таким образом, после предельного перехода по $\varepsilon \to 0$ в неравенстве (21) получаем

$$\varliminf_{s=s_k\to\infty} J(u_M^{(s)}) \geqslant I(u_M). \tag{23}$$

Осуществим предельный переход по $M \to \infty$. Для перехода к пределу в левой части (23) воспользуемся тем, что $u_M^{(s)} = u^{(s)}$ на $\Omega^{(s)}$, и определением 3. Получаем

$$\varliminf_{s=s_k\to\infty} J(u^{(s)}) \geqslant \lim I(u_M). \tag{24}$$

Из данного неравенства следует, что $\| u_M \|^{(1)}_{W_2^m(\Omega)} \leqslant C$, а значит, из $\{u_M\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^m(\Omega)$ к $\tilde{u}(x) \in W_2^m(\Omega)$, а следовательно, сильно в $W_2^{m-1}(\Omega)$. Но $u_M(x) \to u(x)$ в $W_2^{m-1}(\Omega)$ при $M \to \infty$. Поэтому в силу единственности предела $u(x) = \tilde{u}(x)$, откуда следует, что $u(x) \in W_2^m(\Omega)$ и $u_M(x) \to u(x)$ слабо в $W_2^m(\Omega)$ при $M \to \infty$. Так как для слабого предела последовательности справедливо неравенство

$$\| u \|^{(1)}_{W_2^m(\Omega)} \leqslant \varliminf_{M\to\infty} \| u_M \|^{(1)}_{W_2^m(\Omega)},$$

в силу (22)

$$\lim_{M\to\infty} I(u_M) \geqslant I(u).$$

Таким образом, из (24) получили неравенство $\varliminf_{s=s_k\to\infty} J(u^{(s)}) \geqslant I(u)$, которое вместе с (15) дает $I(u) \leqslant (w)$ для любой функции $w \in W_2^m(\Omega)$. Это значит, что функция $u(x)$ минимизирует функционал (16) в классе функций $W_2^m(\Omega)$, откуда следует, что $u(x)$ является решением задачи (8). Теорема доказана.

4. Рассмотрим типичный случай, когда удается найти явное выражение для коэффициентов осредненного уравнения.

Пример. Вернемся к задаче о колебании тонкой пластинки, сформулированной в начале статьи. Согласно доказанной теореме для нахождения асимптотики решения $u^{(s)}(x, y)$ краевой задачи (1), (2′) при больших s необходимо отыскать функцию $b(x, y)$ и тензор $\{a_{\mu\eta}(x, y)\}_{|\mu|=|\eta|=2}$.

Пусть K_h^0 — квадрат с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами длины h, ориентированными по координатным осям.
Так как

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}\Omega^{(s)} \sim 2\operatorname{mes}\Omega\,\frac{d}{\delta} \text{ при } s\to\infty;\\ \operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)}) \sim 2h^2\,\frac{d}{\delta} \text{ при } s\to\infty,\end{gathered} \tag{25}$$

получаем $b(x, y) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}$.

Для нахождения тензора $\{a_{\mu\eta}(x, y)\}$ нужно построить функции $w_\eta^{(s)}(x, y)$, где мультииндекс $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ принимает значения (2, 0), (0, 2) и (1, 1), минимизирующие функционал

$$\Phi_\eta(s, x_0, y_0, h) = \int\limits_{K_h^0\cap\Omega^{(s)}} \Big\{a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}|D^\alpha w_\eta^{(s)}|^2 + \frac{h^{-2-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0\cap\Omega^{(s)})}\times$$

$$\times\left|w_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2}\right|^2 + \frac{h^{-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0\cap\Omega^{(s)})}\times$$

$$\times\left|\nabla\left(w_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2}\right)\right|^2\Big\}\,dx \tag{26}$$

в классе функций $W_2^2(K_h^0\cap\Omega^{(s)})$. Будем искать $w_\eta^{(s)}(x, y)$ в виде

$$w_\eta^{(s)}(x, y) = v_\eta^{(s)}(x, y) + u_\eta^{(s)}(x, y), \tag{27}$$

где $v_{(1,1)}^{(s)}(x, y) = (x-x_0)(y-y_0)$; $v_{(2,0)}^{(s)}(x, y)$ — разрывная функция, равная $\frac{1}{2}(x-x_0)^2$ в полосках, расположенных вдоль оси Ox, и $(x_i-x_0)x + \frac{1}{2}(x_0^2-x_i^2)$ — в остальных участках i-й полоски, расположенной вдоль оси Oy, где x_i — абсцисса произвольной точки этой полоски; $v_{(0,2)}^{(s)}(x, y)$ — разрывная функция, равная $\frac{1}{2}(y-y_0)^2$ в полосках, расположенных вдоль оси Oy, и $(y_i-y_0)y + \frac{1}{2}(y_0^2-y_i^2)$ —

остальных участках j-й полоски, расположенной вдоль оси Ox, где y_j — ордината произвольной точки этой полоски.

Подставляя (27) в функционал (26), получаем, что функции $u_\eta^{(s)}(x, y)$ должны минимизировать функционал

$$F_\eta(u_\eta^{(s)}) = 2 \int\limits_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \Big\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha v_\eta^{(s)} D^\alpha u_\eta^{(s)} + \frac{h^{-2-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times$$

$$\times \left(v_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2} \right) u_\eta^{(s)} + \frac{h^{-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times$$

$$\times \nabla \left(v_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2} \right) \nabla u_\eta^{(s)} \Big\} \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \Big\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} | D^\alpha u_\eta^{(s)} |^2 + \frac{h^{-2-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} | u_\eta^{(s)} |^2 +$$

$$+ \frac{h^{-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} | \nabla u_\eta^{(s)} |^2 \Big\} \, dx, \qquad (28)$$

где $\Omega_i^{(s)}$ — области непрерывности $v_\eta^{(s)}(x, y)$, а min ищется в классе функций $W_2^2(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})$ в случае $\eta = (1, 1)$, либо в классе функций, разрывных вместе со своими нормальными производными в местах разрыва $v_\eta^{(s)}(x, y)$ и ее нормальной производной и компенсирующих эти разрывы. Непосредственно из вида функций $v_\eta^{(s)}(x, y)$ получаем, что при $s \to \infty$

$$\left| v_\eta^{(s)}(x, y) - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2} \right| = O(d^2);$$

$$\left| \nabla \left(v_\eta^{(s)}(x, y) - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2} \right) \right| = O(d). \qquad (29)$$

Пользуясь этими оценками, а также асимптотиками (25), можно показать, что добавки $u_\eta^{(s)}(x, y)$ малы, а именно

$$\int\limits_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \Big\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} | D^\alpha u_\eta^{(s)} |^2 + \frac{h^{-2-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} | u_\eta^{(s)} |^2 +$$

$$+ \frac{h^{-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} | \nabla u_\eta^{(s)} |^2 \Big\} \, dx \leqslant O(h^2). \qquad (30)$$

Вычислим коэффициенты $a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h)$ по формуле

$$a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h) = \int\limits_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \Big\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^{(s)} D^\alpha w_\mu^{(s)} + \frac{h^{-2-\nu}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times$$

$$\times \left[w_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1\eta_2}(x-x_0)^{\eta_1}(y-y_0)^{\eta_2} \right] \left[w_\mu^{(s)} - \frac{1}{\mu_1\mu_2}(x-x_0)^{\mu_1}(y-y_0)^{\mu_2} \right] +$$

$$+\frac{h^{-\gamma}}{\operatorname{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \nabla\left(w_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2}(x - x_0)^{\eta_1}(y - y_0)^{\eta_2}\right) \times$$

$$\times \nabla\left(w_\mu^{(s)} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2}(x - x_0)^{\mu_2}(y - y_0)^{\mu_2}\right) dx.$$

Воспользовавшись (25), (29) и (30), получаем при $s \to \infty$

$$a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h) = \int\limits_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha v_\mu^{(s)} D^\alpha v_\eta^{(s)} dx + o(h^2).$$

Из этой формулы, используя вид функций $v_\eta^{(s)}(x, y)$, находим

$$a_{\eta\eta}(x, y) = \frac{1}{2 \operatorname{mes} \Omega} \text{ при } \eta = (2, 0), \ \eta = (0, 2);$$

$$a_{\eta\eta}(x, y) = \frac{2}{\operatorname{mes} \Omega} \text{ при } \eta = (1, 1);$$

$$a_{\mu\eta}(x, y) = 0 \text{ при } \eta \neq \mu.$$

Коэффициенты осредненного уравнения найдены. Краевые условия получаем как естественные при варьировании функционала (16), рассматриваемого на множестве функций $W_2^2(\Omega)$, где $a_{\mu\eta}(x, y)$ и $b(x, y)$ — найденные выше функции.

Таким образом, приходим к краевой задаче (3).

Список литературы: 1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Теория упругости. М., 1987. Т. 7. 248 с. 2. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сборник. 1987. 106. № 4. С. 604—621. 3. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.

Поступила в редколлегию 05.08.91