УДК 517.9

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ОЦЕНКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ТИПА ВО ВСЕМ R^n

Для эллиптических операторов высших порядков широких классов, самосопряженность которых связана со сходимостью интегралов энергетического типа [1], устанавливаются оценки названных интегралов в норме графика и интерполяционные, а также неравенства типа Гординга для нефинитных функций. Работа инициирована вопросом М. Ш. Бирмана, которому автор искренне признателен. Для операторов второго порядка подобные вопросы рассмотрены в [2]. См. также литературу в [1—8].

§1. *Предварительные сведения.* Рассматриваемое дифференциальное выражение L полагаем представленным в виде суперпозиции одномерных выражений L_η, [1, § 1]:

$$L = \int\limits_{\omega} \mu\,(d\omega_\eta)\, L_\eta, \quad L_\eta = \sum_{k=0}^{2m} l_{\eta,\,k}, \tag{1}$$

где $\omega = \{\eta \in R^n : |\eta| = 1\}$, $\partial_\eta = (\eta,\ \nabla_x)$ $x \in \boldsymbol{R}^n$; μ — неотрицательная мера на ω;

$$\begin{gathered} l_{\eta,\,2j} = (-1)^j \partial_\eta^j p_{\eta,\,2j}(x)\, \partial_\eta^j, \\ l_{\eta,\,2j-1} = \frac{(-1)^{j-1}}{2i} \{\partial_\eta^j p_{\eta,\,2j-1}(x)\, \partial_\eta^{j-1} + \partial_\eta^{j-1} p_{\eta,\,2j-1}(x)\, \partial_\eta^j\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Считаем L сильно эллиптическим, т. е.

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\omega} p_{\eta,\,2m}(x)\,(\eta,\ \xi)^{2m} \mu\,(d\omega_\eta) \geqslant \varepsilon\,(x)\,|\,\xi\,|^{2m}, \tag{3_1}$$

где $\varepsilon(x) > 0$; $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, и с достаточно гладкими коэффициентами, чем обеспечивается [3, с. 381] включение

$$D\,(L_{max}) \subset W_{2,\ \mathrm{loc}}^{2m}\,(\boldsymbol{R}^n). \tag{3_2}$$

Пример. Пусть $x=\{x_1, x_2\}\in \boldsymbol{R}^2$, $\partial_{3,4}=(\partial_1\pm\partial_2)/\sqrt{2}$ — дифференцирование в направлении биссектрис координатных углов, $=$ $=\Delta p(x)\Delta=(\partial_1^2+\partial_2^2)\,p(x_1, x_2)(\partial_1^2+\partial_2^2)$. Тогда

$$L=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{4}\left\{\partial_k^2 p\partial_k^2-\partial_k\left(p''_{kk}-\frac{3}{4}\Delta p\right)\partial_k\right\}$$

есть представление (1) с дискретной мерой μ, сосредоточенной в точках (1, 0), (0, 1), $(1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ на ω. Если же μ — лебегова мера на окружности, то

$$\Delta p\Delta=\frac{4}{3\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\partial_\eta^2 p\partial_\eta^2-\partial_\eta\left(p''_{\eta\eta}-\frac{3}{4}\Delta p\right)\partial_\eta\right\}d\varphi,$$

где $\partial_\eta=\cos\varphi\partial_1+\sin\varphi\partial_2$, $\eta=\{\cos\varphi, \sin\varphi\}\in\omega$. Обозначаем $\langle\cdot, \cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норму в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ — то же в $\boldsymbol{C}^n$. Полагаем $0\cdot\infty=0$.

§ 2. *Леммы об оценках интерполяционного и равномерного типов.* Полагая

$$I_j^2[u, \tau]=\int_{R^n\times\omega}\varphi_{\eta, j}^2(x, \tau)\,|\partial_\eta^j u(x)|^2\mu(d\omega_\eta)\,dx, \quad j=0, 1, \ldots m, \tag{4}$$

где $0\leqslant\varphi_{\eta, j}(x, \tau)\in C_0^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\tau>0$ — параметр,

$$\varphi_{\eta, j}^2\leqslant C\varphi_{\eta, j-1}\varphi_{\eta, j+1}, \ |\partial_\eta\varphi_{\eta, j}|\leqslant C\varphi_{\eta, j-1}, \ j=1, \ldots m-1, \tag{5}$$

имеем при $u\in W_{2,\,\mathrm{loc}}^m$ для $I_j[u, \tau]$ в силу интегрирования по частям систему неравенств [1, лемма 3.3]:

$$I_j^2\leqslant a_j I_{j-1}I_{j+1}+b_j I_{j-1}I_j, \quad j=1, \ldots m-1, \tag{6}$$

где $a_j\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть неотрицательные величины I_j удовлетворяют системе неравенств* (6). *Тогда для них справедливы оценки интерполяционного типа:*

$$0\leqslant I_j\leqslant A_{mj}I_0^{\frac{m-j}{m}}I_m^{\frac{j}{m}}+B_{mj}I_0, \quad j=1, \ldots m-1, \tag{7}$$

где $A_{mj}=A_{mj}(a)\geqslant 0$, $B_{mj}=B_{m,j}(a, b)\geqslant 0$ — *непрерывные от* $a=|\{a_1, \ldots a_{m-1}\}|$, $b=|\{b_1, \ldots b_{m-1}\}|$ *функции степенного роста,* $A_{mj}(0)=0$, $B_{mj}(a, 0)=0$.

Доказательство. Из (6) следует $I_j^2\leqslant a_j I_{j-1}I_{j+1}+\frac{1}{2}b_j^2 I_{j-1}^2+\frac{1}{2}I_j^2$, откуда

$$I_j\leqslant(2a_j)^{1/2}I_{j-1}^{1/2}I_{j+1}^{1/2}+b_j I_{j-1}, \tag{8}$$

что при $j=1$ означает справедливость леммы для $m=2$. Проведем индукцию по m. Допуская справедливость леммы вплоть до некоторого $m \geqslant 2$, установим ее справедливость и для $m+1$, когда (6) и (8) справедливы вплоть до $j=m$. Полагая в (8) $j=m$, подставим туда оценку для I_{m-1} из (7). Получаем, с использованием неравенства Юнга:

$$I_m \leqslant (2a_m)^{1/2}\left(A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_m^{\frac{m-1}{m}} + B_{m,\,m-1} I_0\right)^{1/2} I_{m+1}^{1/2} +$$
$$+ b_m\left(A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_m^{\frac{m-1}{m}} + B_{m,\,m-1} I_0\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(2^{\frac{2m-1}{m}} a_m A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_{m+1}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2} I_m\right)^{\frac{m-1}{2m}} +$$
$$+\left(2a_m I_0^{\frac{1}{m}} I_{m+1}\right)^{1/2}\left(B_{m,\,m-1} I_0^{\frac{m-1}{m}}\right)^{1/2} +$$
$$+\left(2^{\frac{2(m-1)}{m}} b_m A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(2^{-2} I_m\right)^{\frac{m-1}{m}} + b_m B_{m,\,m-1} I_0 \leqslant$$
$$\leqslant I_0^{\frac{1}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{m}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m} 2^{\frac{m-2}{m+1}} a_m^{\frac{m}{m+1}} \left(A_{m,m-1}^{\frac{m}{m+1}} + 2^{\frac{1-m}{m+1}}\right) +$$
$$+ I_0 \cdot \left(b_m B_{m,\,m-1} + \frac{1}{m} 2^{2m-2} b_m^m A_{m,\,m-1}^m + \frac{m-1}{2m} B_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m-1}}\right) +$$
$$+ \frac{m-1}{2m} I_m,$$

откуда следует, что

$$I_m \leqslant A_{m+1,\,m} I_0^{\frac{1}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{m}{m+1}} + B_{m+1,\,m} I_0, \tag{9}$$

где

$$A_{m+1,\,m} = 2^{\frac{m}{m+1}} a_m^{\frac{m}{m+1}} \left(2^{\frac{m-1}{m+1}} A_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m+1}} + 1\right),$$
$$B_{m+1,\,m} = \frac{1}{m+1} 2^{2m-1} b_m^m A_{m,\,m-1}^m + \frac{2m}{m+1} b_m B_{m,\,m-1} +$$
$$+ \frac{m-1}{m+1} B_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m-1}}. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (7) и замечая, что $(\alpha+\beta)^{j/m} \leqslant \alpha^{j/m} + \beta^{j/m}$ при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, получаем

$$I_j \leqslant A_{m+1,\,j} I_0^{\frac{m+1-j}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{j}{m+1}} + B_{m+1,\,j} I_0, \tag{11}$$

где

$$A_{m+1,\,j} = A_{m,\,j} A_{m+1,\,m}^{\frac{j}{m}}, \tag{12}$$

$$B_{m+1,\,j} = A_{m,\,j} B_{m+1,\,m}^{\frac{j}{m}} + B_{m,\,j}; \quad j = 1, \ldots m-1.$$

таким образом, (7) доказано в силу (9), (11), а утверждения леммы о свойствах коэффициентов $A_{m,j}$, $B_{m,j}$ следуют из (10), (12). Лемма доказана.

Следствие 1. *При условиях леммы для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_m(\varepsilon;\ a,\ b) > 0$ такое, что*

$$0 \leqslant I_j \leqslant \varepsilon I_m + C_m(\varepsilon;\ a,\ b)\, I_0, \quad j = 1, \ldots m-1. \tag{13}$$

Доказательство. В силу неравенства Юнга

$$I_0^{\frac{m-j}{m}} I_m^{\frac{j}{m}} = (\gamma^{-\frac{j}{m-j}} I_0)^{\frac{m-j}{m}} (\gamma I_m)^{\frac{j}{m}} \leqslant \frac{j}{m}\gamma I_m + \frac{m-j}{m}\gamma^{-\frac{j}{m-j}} I_0,$$

а потому из (7) следует (13) при достаточно малом $\gamma(\varepsilon) > 0$.

Замечание 1. (13) доказано* в [4, лемма 3] и является в то же время следствием [1, формула (3.6)], как уже отмечалось [5]. Отметим также, что (7) является в определенном смысле обобщением известных неравенств для норм производных различных порядков (см., например, [7, п. 26]) и переходит в эти неравенства (но без точных констант) при $B_{mj} = 0$, т. е. при $b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$ в (6).

Лемма 2. *Пусть в некотором гильбертовом пространстве H заданы выпуклые функционалы $I_j = I_j[u,\ \tau]$, $j = 0, 1, \ldots m$, $F[u,\ \tau]$, $u \in H$, неубывающие по параметру $\tau \in (0,\ \infty)$, причем $I_0[u,\ \tau]$ непрерывен по $u \in H$ при каждом τ. И пусть они удовлетворяют системе неравенств* (6) *и при некотором* $\theta \in (0,\ 1)$

$$F^2[u,\ \tau] + I_m^2[u,\ \tau] \leqslant CS_\theta[u,\ \tau] + \Phi[u,\ \tau], \tag{14}$$

где

$$S_\theta[u,\ \tau] = \sum_{j=0}^{m-1} I_j^2[u,\ \tau] + (\sum_{j=0}^{m-1} I_j^2[u,\ \tau])^\theta (I_m^2[u,\ \tau] + \alpha F^2[u,\ \tau])^{1-\theta},$$

$\alpha \geqslant 0$, $\Phi[u,\ \tau]$ — *квадратичный, непрерывный в H функционал***, *для которого существует конечный предел:*

$$\lim_{\tau\to\infty} \Phi[u,\ \tau] \equiv \Phi[u], \quad \forall u \in H. \tag{15}$$

Если, кроме того, выполнены условия либо 1°:

$$\sup_\tau I_0[u,\ \tau] < \infty, \quad \forall u \in H, \tag{16}$$

либо 2°:

$$F^2[u,\ \tau_k] + I_m^2[u,\ \tau_k] + I_0^2[u,\ \tau_k] \leqslant o_u(S_\theta[u,\ \tau_k]) + \Phi[u,\ \tau_k], \tag{17}$$

---

* При a_j, b_j специального вида.

** Знакоопределенность Φ не требуется. Можно допустить иные функционалы Φ, например, квадрат выпуклого функционала.

где при каждом $u \in H$ *имеем* $\tau_k = \tau_k[u] \to \infty$ $(k \to \infty)$ *и*

$$o_u(s)/s \to 0, \quad (s \to \infty), \tag{18}$$

то являются непрерывными выпуклыми функционалами $I_j[u, \tau]$, $F[u, \tau]$ *и их пределы по* τ: $F[u] = \lim\limits_{\tau\to\infty} F[u, \tau] \leqslant K_F \| u \|_H$,

$$I_j[u] = \lim_{\tau\to\infty} I_j[u, \tau] \leqslant K_j \| u \|_H, \quad j = 0, 1, \ldots m, \tag{19}$$

и для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ *найдется* $C(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\Phi[u] \geqslant \varepsilon I_m^2[u] - C(\varepsilon) I_0^2[u] + (1 - \alpha + \alpha\varepsilon) F^2[u], \tag{20}$$

$$\varepsilon(1 - \alpha\gamma) F^2[u] + I_j^2[u] \leqslant \varepsilon\Phi[u] + C_j(\varepsilon) I_0^2]u], \quad j = 1, \ldots m-1;$$
$$\gamma \in (0, 1). \tag{20_1}$$

Константы допускают явные выражения (или оценки) через коэффициенты (14) *и* (6): $C(\varepsilon) = C(\varepsilon, \theta, C, a_1, \ldots b_{m-1})$, $K_j = K_j(K_0, K_m, a_1, \ldots b_{m-1})$, $j = 1, \ldots m-1$, $K_m^2 \leqslant 2\left\{K_\Phi^2 + C\left(\frac{1}{2}\right) K_0^2\right\}$, *где* $K_\Phi^2 = \sup\limits_{\|u\|\leqslant 1} |\Phi[u]|$.

Таким образом, в отличие от условия (17), где $o = o_u$, оценки (19), (20) равномерны в H. При близких условиях, но без рассмотрения зависимости от u конечность величин F, I_j доказана в [1, лемма 3.2].

Доказательство. В силу леммы 1 и неравенства Юнга при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется $K(\varepsilon_1; a, b) > 0$ такое, что

$$S_\theta[u, \tau] \leqslant \varepsilon_1 (I_m^2[u, \tau] + \alpha F^2[u, \tau]) + K(\varepsilon_1) I_0^2[u, \tau]. \tag{21}$$

Отсюда и из (14) при достаточно малом $\varepsilon_1(\varepsilon, C)$ имеем

$$(1 - \alpha + \alpha\varepsilon) F^2[u, \tau] + \varepsilon I_m^2[u, \tau] \leqslant C(\varepsilon) I_0^2[u, \tau] + \Phi[u, \tau]. \tag{22}$$

Это означает ограниченность в единичном шаре, а потому и непрерывность выпуклого по условию функционала $(F + I_m)[u, \tau]$. Затем получаем (20), переходя в (22) к пределу при $\tau \to \infty$, который конечен в случае 1° в силу (15) и (16), а в случае 2° — в силу неравенства $\lim\limits_{\tau\to\infty} (F^2[u, \tau] + I_m^2[u, \tau] + I_0^2[u, \tau]) < \infty$, которое вытекает из (17) с учетом (15), (18), (21). В обоих случаях $I_0[u]$, $I_m[u]$, $F[u]$ оказываются непрерывными выпуклыми функционалами по лемме И. М. Гельфанда [6, п. 21, следствие], и по той же лемме, в силу (13), все $I_j[u]$ — непрерывные выпуклые функционалы. Оценка K_m^2 следует из (20), конечность K_Φ — из теоремы о сходящейся последовательности билинейных функционалов [6, с. 99], (20_1) следует из (20) и (13).

Ниже в качестве H будем рассматривать $D(L_{\max})$ с нормой графика или пространство с метрикой интеграла Дирихле (см. § 5).

§ 3. *Основные теоремы.* (Ср. [1]). Рассматриваются операторы L вида (1), (2), подчиненные условию

$$\mathrm{Re}\langle Lf,\ f\rangle \geqslant \langle (L_c + G^2) f,\ f\rangle,\ f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{23}$$

где L_c — оператор сравнения

$$L_c = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s c_s \int_\omega \mu(\partial\omega_\eta)\, \partial_\eta^s V_{\eta,s}(x) \partial_\eta^s, \tag{24}$$

$$c_s \in \boldsymbol{R}^1,\ V_{\eta,s}(x) \geqslant 0,\ s = 0, \ldots m;\quad c_m > 0,\ c_0 V_0(x) \geqslant -KQ(x),$$
$$(V_{\eta,0}(x) \equiv V_0(x)),\ 0 \leqslant G(x) \in C,$$

$1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty$, равенство $Q(x) = \infty$ на множестве положительной меры не исключается. Коэффициенты оператора L (1), (2) подчинены, кроме младшего $p_{\eta,0}(x) \equiv p_0(x)$, оценкам

$$|p_{\eta,\nu}(x)| \leqslant C V^{1/2}_{\eta,\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}(x)\, V^{1/2}_{\eta,\left[\frac{\nu}{2}\right]}(x),\ \nu = 1, \ldots 2m. \tag{25}$$

Теорема А. *При перечисленных выше условиях порождаемые выражением* L (1), (2) *с комплекснозначными коэффициентами* $p_{\eta,\nu}(x)$ *минимальный и максимальный* $L_{\max} \overset{\text{def}}{=} (L^+_{\min})^*$ *операторы совпадают* (L^+ — *формально сопряженное к* L *выражение*):

$$L_{\max} = L_{\min},\quad L^+_{\max} = L^+_{\min}, \tag{26}$$

для $u \in D(L_{\max})$ *сходятся интегралы энергетического типа* $J_j[u]$, $\| Q^{-1/2} G u \| < \infty$ *и допускают оценку в норме графика* ($j = 0, \ldots m$):

$$J_j^2[u] \equiv \int_{R^n \times \omega} Q^{-1}(x) V_{\eta,j}(x) |\partial_\eta^j u|^2 \mu(d\omega_\eta)\, \partial x \leqslant K_j^2 (\| Lu \|^2 + \| u \|^2), \tag{27}$$

если L_c *принадлежит одному из классов, описываемых ниже теоремами* 1 — 3. *При условиях теорем* 1 *или* 2 *справедливы неравенства типа Гординга с любым* $\varepsilon \in (0,\ 1)$:

$$\mathrm{Re}\langle Q^{-1} L u,\ u\rangle \geqslant \varepsilon c_m J_m^2[u] + \langle Q^{-1} G^2 u,\ u\rangle - C(\varepsilon) J_0^2[u], \tag{28}$$

и оценки интерполяционного типа (7), (13) *для* $J_j[u]$, *а потому и*

$$J_j^2[u] \leqslant \varepsilon\, \mathrm{Re}\langle Q^{-1}(L - G^2) u,\ u\rangle + C_j(\varepsilon) J_0^2[u],\ j = 1, \ldots m-1. \tag{29}$$

При условиях теоремы 3 *имеем вместо* (28) при $Q(x) \equiv 1$, $\varepsilon \in (0,\ 1)$:

$$\mathrm{Re}\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{m} c_j J_j^2[u] + \| Gu \|^2 - C(\varepsilon) \| u \|^2. \tag{28_3}$$

При тех же условиях, но с заменой в утверждениях теоремы А L *на* L^+, *она остается в силе для* $u \in D(L^+_{\max})$.

Замечание 2. Неравенства вида (28), (29), (28_3) (возможно, с другими $C(\varepsilon)$, $C_j(\varepsilon)$) верны также с заменой в них $\langle Q^{-1}Lu, u\rangle$ на $A_L[u, u]$ (60), $\langle Lu, u\rangle$ на $D_L[u, u]$ (54), (55) (см. § 5).

Всюду ниже полагаем

$$1 \leqslant P(x) \in C^{2m}, \quad P(x) \to \infty \ (|x| \to \infty). \tag{30}$$

Теорема 1. *Если*

$$V_{\eta, s}(x) = a_\eta^{2s}(x)\, q^{2m-2s}(x), \ s = 0, \dots m, \tag{31}$$

где $0 < a_\eta(x) \in C^m$,

$$1 \leqslant q(x) \leqslant \infty, \ q^{-m}(x) \in C^{2m}, \tag{32}$$

$$|\partial_\eta (a_\eta(x)\, q^{-1}(x))| \leqslant C, \ (\textit{только при } m > 1) \tag{33_1}$$

$$|\partial_\eta^j q^{-m}(x)| \leqslant C a_\eta^{-j}(x)\, q^{j-m}(x), \ j = 1, \dots m, \tag{33_2}$$

$$|\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C P(x)\, a_\eta^{-j}(x)\, q^j(x), \ j = 1, \dots m, \tag{34}$$

то все утверждения теоремы **А**, *кроме* (26), *выполнены при* $Q(x) = q^{2m}(x)$, $c_m > 0$, $c_s > -\infty$ $(s = 0, \dots m-1)$, *причем* (23) *требуется лишь при*

$$\operatorname{supp} f(x) \subset U_q \equiv \{x \in \boldsymbol{R}^n : q(x) \neq \infty\}. \tag{35}$$

При тех же условиях, но с заменой (34) *более жестким*

$$|\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C P(x)\, a_\eta^{-j}(x)\, q^{j-2m}(x), \ j = 1, \dots m, \tag{36}$$

обеспечено и выполнение (26).

Теорема 2. *Если*

$$V_{\eta, s}(x) = h_\eta^{2s}(x)\, g^{2m-2s}(x), \ s = 0, \dots m, \tag{37}$$

где $0 < h_\eta(x)$, $g(x)$; $h_\eta(x)$, $g(x) \in C^m$,

$$|\partial_\eta (g^{m-s} h_\eta^s)| \leqslant C g^{m-s+1} h_\eta^{s-1}, \ s = 1, \dots m-1, \tag{38}$$

$$|\partial_\eta^j P(x)| = o(P(x)\, h_\eta^{-j}(x)\, g^j(x)), \ j = 1, \dots m, \tag{39}$$

$$P(x) \geqslant g^\varepsilon(x), \quad (\varepsilon > 0), \tag{40}$$

то теорема **А** *верна при* $Q(x) \equiv 1$, c_0, $c_m > 0$, $c_s = 0$ $(0 < s < m)$; операторы (26) максимально аккретивны.

Теорема 3. *Если* $V_{\eta, s}(x) \geqslant \delta > 0$,

$$\gamma^2(x)\, V_{\eta, k+1}(x) \leqslant C V_{\eta, k}^{1 - \frac{1}{m-k}}(x), \ k = 0, \dots m-1, \tag{41}$$

где

$$0 \leqslant \gamma(x) \leqslant 1; \quad |\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C \gamma^j(x), \ j = 1, \dots m, \tag{42}$$

то теорема **А** *выполнена при* $c_s > 0$ $(s = 0, \dots m)$, $Q(x) \equiv 1$; *операторы* (26) *максимально аккретивны.*

Доказательства теорем 1—3 аналогичны доказательствам соответствующих теорем из [1] об условиях существенной самосопряженности симметрического оператора L и сходимости интегралов (27) (при $G(x) \equiv 0$). Условия теорем 1—3 (без (36)) обеспечивают применимость леммы 1 к величинам $I_j[u, \tau]$ (4) соответственно при

$$\varphi_{\eta, j}(x, \tau) = \begin{cases} q^{-j}(x)\, a_\eta^j(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 1)}, \\ g^{m-j}(x)\, h_\eta^j(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 2)}, \\ (1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 3)}. \end{cases}$$

Применимость леммы 2, — вариант 1°, в случае теорем A и 1 (без (36)) или 3, и вариант 2° в случае теорем A и 2, — также обеспечена, если положить в (14)

$$\Phi[u, \tau] = \operatorname{Re}\langle \psi^2(\cdot, \tau)\, Lu, u\rangle, \tag{43}$$

где $\psi(x, \tau) = Q^{-1/2}(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{2m}$, и, в случае теорем 1 или 2, $F^2[u, \tau] = \langle \psi^2(\cdot, \tau)\, G^2 u, u\rangle$, а в случае теоремы 3 $F^2[u, \tau] = \langle \psi^2(\cdot, \tau)\, G^2 u, u\rangle + \sum\limits_{j=0}^{m} \int \psi^2(x, \tau)\, V_{\eta, j}(x)\, |\partial_\eta^j u(x)|^2 \mu(\partial\omega_\eta)\, dx$, и учесть, что при заданных $\varphi_{\eta, j}$ в случае теорем 1, 2 $J_j[u] = I_j[u]$, $j = 0, \ldots m$, в силу (27) и (4), (19), а в случае теоремы 3 $J_m[u] \geqslant \delta \cdot I_m[u]$, $\delta > 0$. В силу лемм 1 и 2 получаем все утверждения теоремы A, кроме (26), которое следует из (27), и из теоремы 5 (см. ниже, § 5).

§ 4. *Ограничения на слоях.* Пусть $\{\Omega_k\}_0^\infty$ — последовательность конечных односвязных областей, $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup \Omega_k = \boldsymbol{R}^n$, h_k есть минимальная ширина телесного слоя $T_k = \Omega_{2k+1} \setminus \Omega_{2k}$. Строим C^∞ или C^{2m} — гладкие функции $P_k(x)$, $q_k^{-1}(x)$ такие, что $0 \leqslant P_k, q_k^{-1} \leqslant 1$,

$$P_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{2k}, \\ 1, & x \notin \Omega_{2k+1}, \end{cases}; \quad q_k^{-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin T_k. \\ 1, & x \in \operatorname{supp} |\nabla P_k|. \end{cases}$$

Положим при $0 < \delta < 1/2$ $T_k(\delta) = \{x \in T_k : \operatorname{dist}(x, \partial T_k) \geqslant \delta h_k\}$ $q_k^{-1}(x) = q_{k\delta}^{-1}(x)$ — осреднение с C^∞ или C^{2m} — ядром радиуса $\delta h_k/2$ функции

$$r_{k\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_k(\delta/2). \\ 0, & x \in \boldsymbol{R}^n \setminus T_k(\delta/2), \end{cases}$$

$P_k(x) = P_{k\rho}(x)$ — осреднение с ядром радиуса ρh_k функции

$$s_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\{\operatorname{dist}(x, \Omega_{2k}) - \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}^n \setminus \Omega_{2k+1})\}.$$

Так построенные $P_k(x)$, $q_k^{-1}(x)$ удовлетворяют при $\delta+\rho<1/2$ всем перечисленным условиям и, кроме того,

$$|\partial_\eta^j P_{k\rho}(x)| \leqslant C(\rho h_k)^{-j}, \quad |\partial_\eta^j q_{k\delta}^{-1}(x)| \leqslant C(\delta h_k)^{-j}, \quad j=1, \ldots 2m.$$

Теорема 4. *Если при* $f \in C_0^\infty(T_k)$, $k=0, 1, \ldots,$

$$\operatorname{Re}\langle Lf, f\rangle \geqslant \sum_{j=0}^{m} c_j V_{kj} \int_{T_k\times\omega} |\partial_\eta^j f(x)|^2 \mu(\partial\omega_\eta)\,\partial x, \tag{44}$$

где $c_m>0$, $c_j \leqslant 0$, $j=0, \ldots m-1$ — *не зависят от* k,

$$V_{kj} = \alpha_k^{2j}\left(\max\{\alpha_k h_k^{-1};\quad \gamma_k^{\frac{1}{2m}}\}\right)^{2m-2j}, \tag{45}$$

$\alpha_k>0$, $\gamma_k \geqslant 1$ — *константы, а для коэффициентов оператора* L, *кроме младшего, выполнены на слоях оценки*

$$|p_{\eta\nu}(x)| \leqslant C\alpha_k^\nu\left(\max\{\alpha_k h_k^{-1};\quad \gamma_k^{\frac{1}{2m}}\}\right)^{2m-\nu}, \quad x\in T_k, \quad \nu=1, \ldots 2m, \tag{46}$$

то независимо от поведения коэффициентов между слоями (но с *сохранением ими гладкости) для любого* $u \in D(L_{\max})$ *сходятся суммы интегралов энергетического типа по слоям* $\forall\, \delta \in (0, 1/2)$:

$$J_{j\delta}^2[u] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2j} a_k^{2j} \int_{T_k\times\omega} q_{k\delta}^{-2j}(x)\, |\partial_\eta^j u(x)|^2 \mu(d\omega_\eta)\,dx, \quad j=0, 1, \ldots m, \tag{47}$$

и допускают оценку в норме графика (27), *а также удовлетворяют неравенству Гординга* (28) *с* $F\equiv 0$ *и* $Q_\delta^{-1}(x) = q_\delta^{-2m}(x)$,

$$q_\delta^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_{k\delta}^{-1}(x), \quad a_k = \min\left\{\frac{h_k}{\alpha_k},\ \gamma_k^{-\frac{1}{2m}}\right\}, \tag{48}$$

т. е. при любом $\varepsilon \in (0, c_m)$, $\delta \in (0, 1/2)$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{2m} \int_{T_k} q_{k\delta}^{-2m}(x)\,\bar{u} Lu\,dx \geqslant \varepsilon J_{m\delta}^2[u] - C_\delta(\varepsilon)\, J_{0,\,\delta}^2[u], \tag{49}$$

а также интерполяционным оценкам (7), (13), *а потому и* (29):

$$J_{j\delta}^2[u] \leqslant \varepsilon \operatorname{Re}\langle Q_\delta^{-1} Lu, u\rangle + C_{j\delta}(\varepsilon)\, J_{0\delta}^2[u], \quad j=1, \ldots m-1. \tag{50}$$

Если дополнительно

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{\left(\frac{h_k}{\alpha_k}\right)^{2m},\ \frac{h_k}{\alpha_k}\gamma_k^{-1+\frac{1}{2m}}\right\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{\alpha_k} V_{k0}^{-1+\frac{1}{2m}} = \infty, \tag{51}$$

то выполнено и (26) : $L_{\max} = L_{\min}$, $L_{\max}^+ = L_{\min}^+$.

Доказательство основано на применении теоремы 1. Положим в (31) $a_\eta(x) \equiv a(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, где $a(x) \equiv \alpha_k$, $x \in T_k$, пусть $q^{-1}(x) \equiv q_\delta^{-1}(x)$ задано (48). Тогда $V_{\eta s}(x) \geqslant V_{ks}$, $V_{\eta m}^{(x)} \equiv V_{km}$, $x \in T_k$, и поэтому, учитывая знаки c_s, имеем (23) с $F \equiv 0$ в силу (44), а (25) — в силу (45), (46). Непосредственно проверяется, что, кроме (36), выполнены и остальные условия теорем A и 1 при

$$P(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x), \tag{52}$$

если положить $b_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, а потому выполнена теорема A кроме (26). Условием (51) обеспечивается возможность, соблюдая, (30), положить в (52) $b_k = \alpha_k^{-1} h_k a_k^{2m-1}$, чем обеспечивается (36). Действительно, при $x \in \operatorname{supp} |\nabla P_k|$ имеем $|\partial_\eta^j P(x)| = |b_k \partial_\eta^j P_k(x)| \leqslant \leqslant C b_k (\rho h_k)^{-j} = C(\rho)\,\alpha_k^{-j} (h_k/\alpha_k)^{1-j} a_k^{2m-1} \leqslant C(\rho)\,\alpha_k^{-j} a_k^{2m-j} \leqslant C(\rho) \times \times P(x)\, a^{-j}(x)\, q_\delta^{j-2m}(x)$, т. е. (36) выполнено, а потому и (26) доказано. Отметим, что существенная самосопряженность симметрического оператора L с ограничениями на его коэффициенты, заданными на слоях, при $\alpha_k = 1$, установлена в [1], а в одномерном случае для двучленных операторов установлена Р. С. Исмагиловым (1962 г.). Случай $\gamma_k = 1$ рассмотрен в [4] при $n = 1$.

§ 5. *Интеграл Дирихле и примыкающие вопросы.* Обозначим в соответствии с (1), (2)

$$L[u, v] = \int_\omega \mu(d\omega_\eta) \sum_{k=0}^{2m} l_{\eta, k}[u, v],$$

$$l_{\eta, 2j}[u, v] = p_{\eta, 2j}(x)\, (\partial_\eta^j u(x))\, (\partial_\eta^j \bar{v}(x)),$$

$$l_{\eta, 2j-1}[u, v] = \frac{1}{2i}\, p_{\eta, 2j-1} \{(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^{j-1} \bar{v}) - (\partial_\eta^{j-1} u)(\partial_\eta^j \bar{v})\},$$

Теорема 5. *При условиях теорем A и 1 (включая (36)), 2 или 3 и при любой $u \in D(L_{\max})$ и любой такой $v \in W_{2,\,\mathrm{loc}}^m \cap L_2(\boldsymbol{R}^n)$, что заданные в (27)*

$$J_j[v] < \infty, \quad j = 0, 1, \ldots m-1, \tag{53}$$

существует D_L, — интеграл Дирихле в смысле суммирования с ядром $\varphi_\gamma(x, \tau) = \left(1 - \left(\frac{P(x)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln \tau}}}\right)_+^\gamma$ при любом $\gamma \geqslant m$:

$$D_L[u, v] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau \to \infty} \int \varphi_\gamma(x, \tau)\, L[u, v]\, dx \tag{54}$$

и справедливы равенства, из которых второе — при $v \in D(L_{\max}^+)$:

$$\langle Lu, v\rangle = D_L[u, v] = \overline{D_{L^+}[v, u]}. \tag{55}$$

Доказательство. Так как $\bar{v}Lu \in L_1(R^n)$, то достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \int \varphi_\gamma(x, \tau)(L[u, v] - \bar{v}Lu)\,dx = 0. \tag{56}$$

Рассмотрим интеграл от типичного слагаемого ($j = 1, \ldots m$):

$$\begin{aligned} S_{2j}(\tau) \equiv \int\limits_{R^n\times\omega} \varphi_\gamma(x, \tau)\{p_{\eta,2j}\cdot(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^j \bar{v}) - \\ -(-1)^j \partial_\eta^j (p_{\eta,2j}\partial^j u)\bar{v}\}\,\mu(d\omega_\eta)\,dx = \\ = -\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}\int(\partial_\eta^k \varphi_\gamma(x, \tau))\,p_{\eta,2j}\cdot(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^{j-k}\bar{v})\,\mu(d\omega_\eta)\,dx. \end{aligned} \tag{57}$$

В силу неравенства

$$|(\partial_\eta^k \varphi_\gamma(x, \tau))\,p_{\eta,2j}(x)| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}Q^{-1}(x)\,V_{\eta,j}^{1/2}(x)\,V_{\eta,j-k}^{1/2}(x) \tag{58}$$

$S_{2j}(\tau)$ каждый интеграл оценивается* по неравенству Буняковского—Шварца величиною $C\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}J_j[u]\,J_{j-k}[v] \to 0$, а потому (56) и (55) доказаны. Близкие рассуждения применялись при доказательстве леммы 3.1 в [1]. $(55) \Rightarrow (26)$, так как $\overline{D_{L^+}[v, u]} = \langle u, L^+v\rangle$.

Замечание 3. Отбросить суммирующее ядро в (54) в общем случае нельзя, как видно из построенного в [8] примера самосопряженного оператора Штурма—Лиувилля $My = -y'' + q(x)\,y$ с $q(x) \geqslant -Kx^2$, для которого не при всех $y \in D(M_{\max})$ существует $\lim\limits_{\tau\to\infty}\int\limits_1^\tau(|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx$ и тем более $\int^\infty$ не сходится абсолютно.

Теорема 6. *При условиях теоремы* 5 *существуют и не зависят от* γ

$$A_0[u, v] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to\infty}\int \varphi_\gamma(x, \tau)\,Q^{-1}(x)\,p_0(x)\,u(x)\,\overline{v(x)}\,dx, \tag{59}$$

$$A_L[u, v] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to\infty}\int \varphi_\gamma(x, \tau)\,Q^{-1}(x)\,L[u, v]\,dx, \tag{60}$$

и если $\operatorname{Re} p_0(x) \geqslant -KQ(x)$, $\operatorname{Jm} p_0(x) \geqslant -CQ(x)$ *(или* $\leqslant CQ(x)$*), то абсолютно сходятся интегралы по всему* R^n:

$$\int Q^{-1}(x)\,|p_0(x)\,u(x)\,\bar{v}(x)|\,dx < \infty, \quad \int Q^{-1}(x)\,|L[u, v]|\,dx < \infty. \tag{61}$$

Доказательство. Так как

$$A_0[u, v] = A_L[u, v] - \sum_{k=1}^{2m}\int\limits_{R^n\times\omega} Q^{-1}(x)\,l_{\eta,k}[u, v]\,\mu(d\omega_\eta)\,dx,$$

---

* Аналогично оценивается $S_{2j-1}(\tau)$.

где интегралы под знаком суммы сходятся абсолютно в силу (25 и (27), (53), то утверждения о существовании величин (59) и (60) (и их независимости от γ) эквивалентны. Но при условиях теоре 2 или 3 $Q(x)=1$ и $A_L[u, v] = \langle Lu, v\rangle$ по теореме 5. А при усл виях теоремы 1

$$A_L[u, v] = \langle Q^{-1}Lu, v\rangle + \lim_{\tau\to\infty}\int \varphi_\gamma(x, \tau)\, Q^{-1}\cdot(L[u, v] - \bar{v}Lu)\,dx,$$

где существование и независимость от $\gamma \geqslant m$ конечного предела (в отличие от (56) не обязательно равного 0) следует из справедливости (57) с заменой φ_γ на $\varphi_\gamma Q^{-1}$ и из оценок $|p_{\eta, 2j}\partial_\eta^k(Q^{-1}\times$ $\times\varphi_\gamma)| \leqslant |p_{\eta, 2j}\varphi_\gamma\partial_\eta^k Q^{-1}| + \sum_{s=1}^{k}\left|\binom{k}{s} p_{\eta, 2j}(\partial_\eta^s\varphi_\gamma)\,\partial_\eta^{k-s}Q^{-1}\right| \leqslant (C\varphi_\gamma(x, \tau) +$ $+ C_\gamma/\sqrt{\ln\tau})\,Q^{-1}(x)\,V_{\eta, j}^{1/2}(x)\,V_{\eta, j-k}^{1/2}(x)$, справедливых в силу (25), (31), (33_2) и (58). (Для оператора Штурма—Лиувилля из замечания 3 (61) с $Q(x) = x^2$ доказано в [8]).

Список литературы: 1. *Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. 95, № 1 (9). С. 108—129. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем R^n. 1. Второй порядок // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1990. Вып. 54. С. 3—16. 3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 4. *Atkinson F. V.* Limit-*n* criteria of integral type // Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A). 1975. **73**. P. 167—198. 5. *Брусенцев А. Г.* О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов высших порядков // Диф. уравнения. 1985. **21**, № 4. С. 668—677. 6. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963. 340 с. 7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. 1. Х., 1977. 316 с. 8. *Everitt W. N., Giertz M., Mc Leod J. B.* On the strong and weak limit-point classification of second-order differential expressions // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. **29**. P. 142—158.

Поступила в редколлегию 07.03.90