П3. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках[1]

Введение

В работах [1 – 4] показано, что задачи дифракции электромагнитных волн как на ограниченных решётках, состоящих из конечного числа тонких идеально проводящих лент, так и на многоэлементных периодических решётках приводят к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) первого рода на системе отрезков

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{F(\xi)\,d\xi}{\xi - x} + \frac{1}{\pi}\int_L K(x,\xi)F(\xi)\,d\xi = f(x), \quad x \in L, \tag{1}$$

где $f(x),\ x\in\overline{L};\ K(x,\xi),\ x\in\overline{L},\ \xi\in\overline{L},$ – гладкие функции; $L = \bigcup_{q=1}^{m}\left(a_q,b_q\right)$, $-\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_m < b_m < +\infty$, а функция $F(\xi),\ \xi\in L$, ищется в классе функций, ограничение которых на интервал $\left(a_q,b_q\right)$: $F_q(\xi)\equiv F(\xi),\ a_q<\xi<b_q,\quad q=\overline{1,m}$, в соответствии с условием на ребре представимо в виде $F_q(\xi)=\upsilon_q(\xi)/\left[\left(\xi-a_q\right)\left(b_q-\xi\right)\right]^{1/2}$, $a_q<\xi<b_q$, где $\upsilon_q(\xi),\xi\in\left[a_q,b_q\right]$, – гладкая функция.

Искомая функция удовлетворяет одному из следующих двух типов дополнительных условий. В случаях *E*-поляризации и *H*-поляризации для периодических решеток, а также *H*-поляризации для ограниченных решёток эти условия имеют вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_p}^{b_p} F(\xi)\,d\xi = 0, \quad p=\overline{1,m}. \tag{2}$$

В случае же *E*-поляризациид для ограниченных решёток имеем условия более общего вида [1]

$$\frac{1}{\pi}\int_L S_p(\xi)F(\xi)\,d\xi = C_p, \quad p=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $S_p(\xi),\ \xi\in\left[a_p,b_p\right]$, – заданная функция, а C_p – заданная константа.

Численное решение уравнения (1) с дополнительными условиями (2) предложено в [5]: СИУ на системе интервалов сводится к системе СИУ на стандартном интервале (–1,1), приближённое решение которой находится с использованием квадратурных формул интерполяционного типа, и устанавливается оценка скорости сходимости приближенного решения к точному в равномерной метрике. Обоснование приближённого решения СИУ первого рода на стандартном отрезке с дополнительным условием (2) при m = 1 с оценкой скорости сходимости приближённого решения к точному в метрике пространства $L_{2,\rho}(-1,1),\ \rho=\left(1-t^2\right)^{-1/2}$, дано в [6]. А оценка скорости сходимости приближенного решения системы СИУ на стандартном отрезке с дополнительными условиями (2) при любом m в метрике соответствующего гильбертова пространства получена в [7].

В настоящей работе граничное интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром на системе интервалов, которое сводится к системе таких уравнений на стандартном отрезке, приведено к эквивалентной системе СИУ с дополнительными условиями (3) на стандартных отрезках и дано строгое обоснование численного метода её решения с использованием квадратурных формул интерполяционного типа. Получена оценка скорости сходимости найденного приближённого решения к точному в метрике соответствующего гильбертова пространства и даны оценки отклонений приближённых значений от точных при

[1] Гандель Ю.В., Полянская Т.С. // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. №9. С. 1229 – 1239.

вычислении функционалов от решений рассматриваемой системы уравнений. Эти функционалы – выражения для физических характеристик дифрагированных полей.

СИУ с ядром Коши на отрезке с простейшим дополнительным условием

Рассматривается СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{F(y)}{y-x}dy+\frac{1}{\pi}\int_L R(x,y)F(y)dy=f(x), \qquad x\in L, \tag{4}$$

где $L=\bigcup_{k=1}^m (a_k,b_k)$, $-\infty<a_1<b_1<...<a_m<b_m<+\infty$, с дополнительными условиями простейшего вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_k}^{b_k} F(y)dy=0, \qquad k=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Здесь $f(x)$, $x\in\overline{L}$, $R(x,y)$, $x\in\overline{L}$, $y\in\overline{L}$, – гладкие функции.

Функция $F(y), y\in L$, ищется в классе функций, ограничение которых на интервал (a_k,b_k) $F_k(y)\equiv F(y)$, $a_k<y<b_k$, $k=\overline{1,m}$, представимо в виде $F_k(y)=u_k(y)/\left[(y-a_k)(b_k-y)\right]^{1/2}$, $a_k<y<b_k$, где $u_k(y)$, $y\in[a_k,b_k]$, - гладкая функция.

Обозначим ограничения функций $f(x)$ и $R(x,y)$: $f_i(x)=f(x)$, $a_i<x<b_i$, $i=\overline{1,m}$, $R_{ik}(x,y)=R(x,y)$, $a_i<x<b_i$, $a_k<y<b_k$, $i,k=\overline{1,m}$.

Очевидно, уравнение (4) с дополнительными условиями (5) эквивалентно системе СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_i}^{b_i}\frac{u_i(y)}{y-x}\frac{dy}{\sqrt{(y-a_i)(b_i-y)}} +$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\pi}\int_{a_k}^{b_k}\left[R_{ik}(x,y)+\frac{1-\delta_{ik}}{y-x}\right]u_k(y)\frac{dy}{\sqrt{(y-a_k)(b_k-y)}}=f_i(x),\ x\in(a_i,b_i),\ i=\overline{1,m} \tag{6}$$

(δ_{ik} - символ Кронекера), с дополнительными условиями

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k\frac{dy}{\left[(y-a_k)(b_k-y)\right]^{1/2}}=0,\ k=\overline{1,m}. \tag{7}$$

Обозначим $\varphi_k(t)=\left((b_k-a_k)t+b_k+a_k\right)/2$.

Проводя в каждом из интегралов системы (6) и в дополнительных условиях (7) замену $y=\varphi_k(\tau)$ при $y\in(a_k,b_k)$ и $x=\varphi_i(t)$ при $x\in(a_i,b_i)$ и вводя обозначения

$\upsilon_k(\tau)=u_k(\varphi_k(\tau))$,

$K_{ik}(t,\tau)=\left[R_{ik}(\varphi_i(t),\varphi_k(\tau))+(1-\delta_{ik})/(\varphi_k(\tau)-\varphi_i(t))\right](b_i-a_i)/2$,

$g_i(t)=f(\varphi_i(t))(b_i-a_i)/2$, получаем систему СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_i(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\sum_{k=1}^m\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{ik}(t,\tau)\upsilon_i(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=g_i(t),\ i=\overline{1,m},\ |t|<1, \tag{8}$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^{1}\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\ k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Предполагается, что $g_i(t),K_{ik}(t,\tau)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной. Здесь $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ – класс функций на $[-1,1]$ μ раз непрерывно дифференцируемых, μ-е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ $(\mu \ge 0,\ 0 < \gamma \le 1)$.

Предполагается, что задача (8), (9) является однозначно разрешимой.

Перейдём к дискретизации задачи (8), (9). Пусть $\left(F_n^{(1)} f\right)(t)$ – интерполяционный полином Лагранжа степени n-1 для функции f(t) с узлами интерполирования $t_k^{(1,n)} = \cos\left((2k-1)/(2n)\right)\pi$, $k = \overline{1,n}$; $\left(F_{n-1}^{(2)} f\right)(t)$ – интерполяционный полином Лагранжа степени n-2 с узлами $t_j^{(2,n)} = \cos\left(j/n\right)\pi$, $j = \overline{1,n-1}$. Приближённое решение задачи (8), (9) ищем в виде вектор-функции $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}(\tau) \equiv \left(\upsilon_{kn_k}(\tau)\right)_{k=1}^{m}$, где $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$, $n_k \in N$; $\upsilon_{kn_k}(\tau)$ – интерполяционный полином Лагранжа степени $n_k - 1$ с узлами $\left\{t_{r_k}^{(1,n_k)}\right\}$, $r_k = \overline{1,n_k}$, из системы СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_{in_i}(\tau)}{\tau - t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \sum_{k=-1}^{m}\frac{1}{\pi}\left(F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}K_{ik}\right)(t,\tau)\upsilon_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \left(F_{n_i-1}^{(2)} g_i\right)(t),\, i = \overline{1,m},\, |t| < 1 \quad (10)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^{1}\upsilon_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0,\ i = \overline{1,m}. \quad (11)$$

Подставляя в i-е ($i = \overline{1,m}$) уравнение системы (10) вместо t последовательно $t_{j_i}^{(2,n_i)}$, $j_i = \overline{1,n_i - 1}$, приходим к системе, содержащей $\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)$ уравнений. Вычисляя в этой системе, а также в дополнительных условиях (11) интегралы с помощью квадратурных формул интерполяционного типа, получаем эквивалентную задаче (10), (11) систему линейный алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений искомой вектор-функции в узлах интерполирования

$$\frac{1}{n_i}\sum_{r_i=1}^{n_i}\left[\frac{1}{t_{r_i}^{(1,n_i)} - t_{j_i}^{(2,n_i)}} + K_{ik}\left(t_{j_i}^{(2,n_i)}, t_{r_i}^{(1,n_i)}\right)\right]\upsilon_{in_i}\left(t_{r_i}^{(1,n_i)}\right) +$$

$$+\sum_{k=1,\,k\ne i}^{m}\frac{1}{n_k}\sum_{r_k=1}^{n_k}K_{ik}\left(t_{j_i}^{(2,n_i)}, t_{r_k}^{(1,n_k)}\right)\upsilon_{kn_k}\left(t_{r_k}^{(1,n_k)}\right) = g_i\left(t_{j_i}^{(2,n_i)}\right),\quad j_i = \overline{1,n_i-1};\ i = \overline{1,m}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{n_k}\sum_{r_k=1}^{n_k}\upsilon_{kn_k}\left(t_{r_k}^{(1,n_k)}\right) = 0,\ k = \overline{1,m}. \quad (13)$$

Однозначная разрешимость СЛАУ (12), (13) будет установлена, если мы докажем однозначную разрешимость системы (10) с дополнительными условиями (11). Для этого введём в рассмотрение соответствующие пары гильбертовых пространств и операторы, действующие в них.

Пусть $L_2^{(i)}$ – гильбертово пространство функций на [-1,1] со скалярным произведением $(x,y)_i = \int_{-1}^{1} x(t)\bar{y}(t)\rho_i(t)dt$, i = 1,2, где $\rho_1(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$, $\rho_2(t) = \sqrt{1-t^2}$; $H_2^{(i)}$, i = 1,2, – гильбертово пространство вектор-функций $\vec{x}(t) = \left(x_k(t)\right)_{k=1}^{m}$, $x_k(t) \in L_2^{(i)}$, $k = \overline{1,m}$, со скалярным произведением $(\vec{x},\vec{y})_i = \sum_{k=1}^{m}(x_k, y_k)_i$; $H_{2,0}^{(1)} \subset H_2^{(1)}$ состоит из вектор-функций, удовлетворяющих условиям (9); Φ_n – множество всех полиномов, степень которых не превосходит n-1; $\Pi_{\bar{n}}^{(1)} \subset H_2^{(1)}$ состоит из вектор-функций $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}(\tau) = \left(\upsilon_{kn_k}(\tau)\right)_{k=1}^{m}$, где $\upsilon_{kn_k}(\tau) \in \Phi_{n_k}$; $\Pi_{\bar{n}}^{(2)} \subset H_2^{(2)}$ – из вектор-функций $\vec{\omega}_{\bar{n}}(t) = \left(\omega_{kn_k}(t)\right)_{k=1}^{m}$, где $\omega_{kn_k}(t) \in \Phi_{n_k-1}$; $\Pi_{\bar{n},0}^{(1)} = \Pi_{\bar{n}}^{(1)} \cap H_{2,0}^{(1)}$.

Для $\vec{\upsilon} \in H_2^{(1)}$ введём операторы: $A\vec{\upsilon} = \left(\Gamma\upsilon_i\right)_{i=1}^m$, $K\vec{\upsilon} = \left(\sum_{k=1}^m K_{ik}\upsilon_k\right)_{i=1}^m$, $K_{\bar{n}}\vec{\upsilon} = \left(\sum_{k=1}^m K_{ikn_in_k}\upsilon_k\right)_{i=1}^m$, где

$$\left(\Gamma_{\upsilon_i}\right)(t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_i}{\tau - t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \left(K_{ik}\upsilon_k\right)(t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{ik}(t,\tau)\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\left(K_{ik_in_k}\upsilon_k\right)(t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}K_{ik}\right)(t,\tau)\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Введём также вектор-функции $\vec{g} = \left(g_i(t)\right)_{i=1}^m \in H_2^{(2)}$ и $\vec{g}_{\bar{n}} = \left(\left(F_{n_i-1}^{(2)}g_i\right)(t)\right)_{i=1}^m \in H_{\bar{n}}^{(2)}$.

В операторных обозначениях система СИУ (8) и дополнительные условия (9) принимают соответственно вид

$$\left(A+K\right)\vec{\upsilon} = \vec{g}, \tag{14}$$

$$\left(\vec{\upsilon},\vec{e}_k\right)_1 = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{15}$$

где $\vec{e}_k = \left(\delta_{ik}\right)_{i=1}^m$ (т.е. $\vec{\upsilon} \in H_{2,0}^{(1)}$), а система (10) и дополнительные условия (11) – вид

$$\left(A+K_{\bar{n}}\right)\vec{\upsilon}_{\bar{n}} = \vec{g}_{\bar{n}}, \tag{16}$$

$$\left(\vec{\upsilon}_{\bar{n}},\vec{e}_k\right)_1 = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{17}$$

т.е. $\vec{\upsilon}_{\bar{n}} \in \Pi_{\bar{n},0}^{(1)}$.

В силу условий (15) уравнение (14) действует из пространства $H_{2,0}^{(1)}$ в пространство $H_2^{(2)}$. Оператор А непрерывно обратим в паре пространств ($H_{2,0}^{(1)}$, $H_2^{(2)}$), а оператор К является вполне непрерывным. Поэтому из однозначной разрешимости задачи (8), (9) следует, что оператор А+К также непрерывно обратим в паре пространств ($H_{2,0}^{(1)}$, $H_2^{(2)}$). В силу условий (17) оператор $A+K_{\bar{n}}$ действует из пространства $\Pi_{2,0}^{(1)}$ в пространство $\Pi_2^{(2)}$.

Используя оценку (при $n > \mu+1$) $\|(A+K)-(A+K_{\bar{n}})\|_{\Pi_{2,0}^{(1)}\to H_2^{(2)}} \le R/(n-2)^{\mu+\gamma}$ (R – константа, зависящая от функций K_{ik}), которую легко поучить с помощью теорем Джексона [10], заключаем [11, с.19], что при достаточно больших $n = \min\left\{n_1,n_2,...,n_m\right\}$ оператор $A+K_{\bar{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств ($\Pi_{2,0}^{(1)}$, $\Pi_2^{(2)}$), т.е. уравнение (16) с дополнительными условиями (17) однозначно разрешимо.

Далее, используя оценку (при $n > \mu+1$) $\|\vec{g}-\vec{g}_{\bar{n}}\|_{H_2^{(2)}} \le G/\left(n-2\right)^{\mu+\gamma}$, где G – константа, зависящая от функций $g_i(t)$, получаем [11] окончательный результат.

Теорема 1. *При достаточно больших n задача (16), (17), а следовательно, и система (12), (13) имеет единственное решение $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}(\tau)$, причём справедлива оценка*

$\|\vec{\upsilon}_{\bar{n}} - \vec{\upsilon}\|_{H_2^{(1)}} \le S/\left(n-2\right)^{\mu+\gamma}$,

где $\vec{\upsilon}(\tau)$ – точное решение задачи (14), (15), S – константа, не зависящая от $\bar{n}$.

СИУ с ядром Коши на отрезке с дополнительным условием общего вида

Рассматривается уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|\frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)u(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = g(t), \quad |t|=1, \tag{18}$$

относительно неизвестной фыункции $u(\tau)$. Заданные функции $g(t)$ и $Q(t,\tau)$ принадлежат $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ ($Q(t,\tau)$ – по каждой из переменных равномерно относительно другой), $\mu \ge 1$; кроме того,

$$J \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-\tau^2}} \ne \ln 2 .$$

В соответствии со сказанным выше уравнение (18) предполагается однозначно разрешимым.

Проведём в уравнении (18) замену $u(\tau)=\upsilon(\tau)+C$, где

$$C=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Big/ (J-\ln 2),$$

после чего с учётом того ,что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|\frac{dt}{\sqrt{1-\tau^2}}=-\ln 2, \tag{19}$$

получим эквивалентное ему уравнение относительно неизвестной функции $\upsilon(\tau)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|\frac{\upsilon(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\upsilon(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=g(t)+C\left(\ln 2-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right). \tag{20}$$

Дифференцируя уравнение (20) по t, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q(t,\tau)\frac{\upsilon(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g'(t),\ |t|\ <\ 1. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (20) по t с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ по отрезку [-1,1], получаем дополнительное условие

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right\}\upsilon(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0. \tag{22}$$

Уравнение (21) с дополнительным условием (22) эквивалентно исходному уравнению (18).

Приближённое решение $\upsilon_n(\tau)$ задачи (21), (22) ищем в виде $\upsilon_n(\tau)\equiv\left(F_n^{(1)}\upsilon_n\right)(\tau)$ из уравнения

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_n(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}\partial_t Q\right)(t,\tau)\frac{\upsilon_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=\\ =\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}\partial_t Q\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\left(F_{n-1}^{(2)}g'\right)(t),\ |t|\ <\ 1,\end{aligned} \tag{23}$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{nt}^{(1)}F_{n\tau}^{(1)}Q\right)(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]\upsilon_n(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0. \tag{24}$$

Рассматривая уравнение (23) в точках $t=t_j^{(2,n)}$, $j=\overline{1,n-1}$, получаем систему n-1 уравнений. Вычисляя в них, а также в дополнительном условии (24) интегралы с помощью квадратурных формул интерполяционного типа, приходим к системе n линейных алгебраических уравнений относительно значений $\upsilon_n(\tau)$ в узлах интерполирования:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{t_k^{(1,n)}-t_j^{(2,n)}}-\partial_t Q\left(t_j^{(2,n)},t_k^{(1,n)}\right)\right]\upsilon_n\left(t_k^{(1,n)}\right)=\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_t Q\left(t_j^{(2,n)},t_k^{(1,n)}\right)-g'\left(t_j^{(2,n)}\right),\ j=\overline{1,n-1}, \tag{25}$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Q\left(t_l^{(1,n)},t_k^{(1,n)}\right)-\ln 2\right]\upsilon_n\left(t_k^{(1,n)}\right)=0\text{, (j = n).} \qquad (26)$$

Очевидно, что система (25), (26) эквивалентна уравнению (23) с дополнительным условием (24).

Переходя к доказательству однозначной разрешимости задачи (23), (24), введём в рассмотрение пары гильбертовых пространств и операторы, действующие в них. (Отметим, что для частного случая – дополнительного условия простейшего вида – доказательство приведено в работе [6].)

Пусть $\Lambda(Q)\subset L_2^{(1)}$ состоит из функций, удовлетворяющих условию (22); $\Lambda(Q_n)\subset L_2^{(1)}$ состоит из функций, удовлетворяющих условию (24); $\Lambda_n\left(Q_n\right)=\Lambda\left(Q_n\right)\cap\Phi_n$. Для $\upsilon\left(\tau\right)\in L_2^{(1)}$ введём функционалы

$$\widehat{Q}\upsilon\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]\upsilon\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\widehat{Q}_n\upsilon\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{nt}^{(1)}F_{nt}^{(1)}Q\right)\left(t,\tau\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]\upsilon\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

и операторы

$$\left(\Gamma\upsilon\right)\left(t\right)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon\left(\tau\right)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},\quad \left(\mathrm{K}\upsilon\right)\left(t\right)\equiv-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q\left(t,\tau\right)\upsilon\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\left(\mathrm{K}_n\upsilon\right)\left(t\right)\equiv-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}\partial_t Q\right)\left(t,\tau\right)\upsilon\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Кроме того, введём функции

$$f(t)=\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g'(t)\in L_2^{(2)},$$

$$f_n(t)=\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}Q\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\left(F_{n-1}^{(2)}g'\right)\left(t\right)\in\Phi_{n-1}.$$

В операторных обозначениях уравнение (21) и дополнительное условие (22) принимают соответственно вид

$$(\Gamma+\mathrm{K})\upsilon=f \qquad (27)$$

$$\widehat{Q}\upsilon=0$$

(т.е. $\upsilon(\tau)\in\Lambda(Q)$), а уравнение (23) с дополнительным условием (24) – вид

$$(\Gamma+\mathrm{K}_n)\upsilon_n=f_n$$

$$\widehat{Q}_n\upsilon_n=0$$

(т.е. $\upsilon_n(\tau)\in\Lambda_n(Q_n)$).

Оператор Γ + K действует из пространства $L_2^{(1)}$ в пространство $L_2^{(2)}$, причём в паре пространств $\left(\Lambda\left(Q\right),L_2^{(2)}\right)$ оператор Γ непрерывно обратим. Отсюда, а также из однозначной разрешимости задачи (21), (22) следует, что оператор Γ + K имеет в указанной паре пространств ограниченный обратный оператор $(\Gamma+\mathrm{K})^{-1}$ [9].

Для доказательства обратимости оператора $\Gamma+\mathrm{K}_n$ в паре пространств $\left(\Lambda_n\left(Q_n\right),\Phi_{n-1}\right)$ мы не можем, как в предыдущем пункте, непосредственно воспользоваться результатами работы [11], так как, вообще говоря, $\Lambda_n\left(Q_n\right)$ не является подпространством пространства $\Lambda(Q)$. Поэтому рассмотрим сначала вспомогательную задачу: уравнение

$$(\Gamma+\mathrm{K})\upsilon^{(n)}=f \qquad (28)$$

в паре пространств $\left(\Lambda\left(Q_n\right),L_2^{(2)}\right)$.

Лемма 1. *В паре пространств* $\left(\Lambda\left(Q_n\right), L_2^{(2)}\right)$ *оператор* Г + К *имеет (при достаточно большом n) непрерывный обратный оператор* $\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)_n^{-1}$ *[12].*

Доказательство следует из оценки

$$\left|\widehat{Q}\upsilon-\widehat{Q}_n\upsilon\right|\le\left(d/\left(n-1\right)^{\mu+\gamma}\right)\left\|\upsilon\right\|_{L_2^{(1)}},$$

которую получаем, используя теоремы Джексона [10] и свойства гладкости функции $Q\left(t,\tau\right)$. Здесь d – константа, зависящая от функции $Q\left(t,\tau\right)$ и не зависящая от n.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть* $f(t)\in L_2^{(2)}$ *и* $f(t)\not\equiv 0$, $\upsilon^{(n)}\left(\tau\right)$ *– решение уравнения (28) в паре пространств* $\left(\Lambda\left(Q_n\right), L_2^{(2)}\right)$, *а* $\upsilon\left(\tau\right)$ *– решение уравнения (27) в паре пространств* $\left(\Lambda\left(Q\right), L_2^{(2)}\right)$, *тогда при достаточно больших n имеет место оценка*

$$\left\|\upsilon-\upsilon^{(n)}\right\|_{L_2^{(1)}}=\left\|\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)^{-1}f-\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)_n^{-1}f\right\|_{L_2^{(1)}}\le\left(H/\left(n-1\right)^{\mu+\gamma}\right)\left\|f\right\|_{L_2^{(2)}}\left\|\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)^{-1}\right\|_{L_2^{(2)}\to\Lambda(Q)},$$

где H – константа, зависящая от f.

Следствие. Операторы $\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)_n^{-1}$ ограничены в совокупности, т.е. существует константа D > 0 такая, что $\left\|\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)_n^{-1}\right\|_{L_2^{(2)}\to\Lambda(Q_n)}\le D$.

Теперь, поскольку $\Lambda_n\left(Q_n\right)\subset\Lambda\left(Q_n\right)$, можно воспользоваться результатом работы [11]. Для этого сначала с помощью теорем Джексона получаем оценки (при $n>\mu+1$)

$$\left\|\left(\Gamma+\mathrm{K}\right)-\left(\Gamma+\mathrm{K}_n\right)\right\|_{\Lambda_n(Q_n)\to L_2^{(2)}}\le B/\left(n-2\right)^{\mu+\gamma-1},\quad \left\|f-f_n\right\|_{L_2^{(2)}}\le b/\left(n-2\right)^{\mu+\gamma-1},$$

где B, b – константы, не зависящие от n. Пользуясь леммами 1, 2 и полученными выше оценками, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *При достаточно большом n уравнение (23) с дополнительным условием (24), а следовательно, и система (25), (26) имеет единственное решение* $\upsilon_n\left(\tau\right)$, *при этом справедлива оценка* $\left\|\upsilon-\upsilon_n\right\|_{L_2^{(1)}}\le S/\left(n-2\right)^{\mu+\gamma-1}$, *где S – константа, не зависящая от n.*

Приближённое решение $u_n\left(\tau\right)$, уравнения (18) получаем из равенства $u_n(\tau)=\upsilon_n(\tau)+C$.

Система СИУ с ядром Коши с дополнительным условием общего вида

Рассматривается система СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\tau-t\right|u_i\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}\left(t,\tau\right)u_k\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=g_i\left(t\right),\quad \left|t\right|<1,\ j=\overline{1,n-1},\quad (30)$$

относительно неизвестной вектор-функции $\vec{u}\left(\tau\right)=\left(u_i\left(\tau\right)\right)_{i=1}^{m}$. Заданные функции $g_i(t)$ и $Q_{ik}\left(t,\tau\right)$ обладают свойствами гладкости, сформулированными в п. 3.

В силу сказанного выше система (30) предполагается однозначно разрешимой.

Проведём в системе (30) замену $\vec{u}=\vec{\upsilon}+\vec{C}$, где $\vec{C}=\left(C_i\right)_{i=1}^{m}$ – решение СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[Q_{ik}\left(t,\tau\right)-\delta_{ik}\ln 2\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_i\left(t\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ i=\overline{1,m}.$$

Предполагается, что функции $Q_{ik}\left(t,\tau\right)$ таковы, что определитель этой системы не равен нулю.

В результате указанной замены получаем с учётом (19) систему

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|\upsilon_i(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$
$$=g_i(t)+C_i\ln 2-\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},\ |t|<1,\ i=\overline{1,m}. \tag{31}$$

Дифференцируя каждое уравнение этой системы по t, приходим к системе

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_i(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g_i'(t),\ |t|<1,\ i=\overline{1,m}. \tag{32}$$

Интегрируя все уравнения системы (31) по t с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ по отрезку [-1,1], получаем (с учётом (19)) при выбранных C_i дополнительные условия

$$\widehat{Q}_i\vec{\upsilon}\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\delta_{ik}\ln 2\right]\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\ \ i=\overline{1,m}. \tag{33}$$

Очевидно, система (32) с дополнительными условиями (33) эквивалентна системе (31) и поэтому является однозначно разрешимой.

Приближённое решение задачи (32), (33) ищется, как и в п.2, в виде вектор-функции $\vec{\upsilon}_{\overline{n}}(\tau)=\left(\upsilon_{kn_k}(\tau)\right)_{k=1}^{m}$ из СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_{in_i}}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\upsilon_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\left(F^{(2)}_{n_i-1}g_i'\right)(t),\ |t|<1,\ i=\overline{1,m}, \tag{34}$$

с дополнительными условиями

$$\widehat{Q}_{i\overline{n}}\vec{\upsilon}_{\overline{n}}\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(1)}_{n_it}F^{(1)}_{n_k\tau}Q_{ik}\right)(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\delta_{ik}\ln 2\right]\upsilon_{kn_k}(t)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\ i=\overline{1,m}. \tag{35}$$

Действуя так же, как в п. 2, получаем эквивалентную задаче (34), (35) СЛАУ относительно значений искомой вектор-функции в узлах интерполирования. Однозначная разрешимость полученной СЛАУ будет установлена, если мы докажем однозначную разрешимость системы (34) с дополнительными условиями (35).

Для этого, как и выше, перейдём к операторным обозначениям. Пусть $\overline{\Lambda}(Q)\subset H_2^{(1)}$ – из вектор-функций, удовлетворяющих условиям (35); $\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}})=\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})\cap\Pi^{(1)}_{\overline{n}}$. Для $\vec{\upsilon}\in H_2^{(1)}$ введём функционалы $\widehat{Q}\vec{\upsilon}=\left(\widehat{Q}_i\vec{\upsilon}\right)_{i=1}^{m}$, $\widehat{Q}_{\overline{n}}\vec{\upsilon}=\left(\widehat{Q}_{in}\vec{\upsilon}\right)_{i=1}^{m}$ и операторы $\mathrm{A}\vec{\upsilon}$, $\mathrm{K}\vec{\upsilon}$, $\mathrm{K}_{\overline{n}}\vec{\upsilon}$ (см. п. 2), где

$$\left(K_{ik}\upsilon_k\right)(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\upsilon_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},\ k=\overline{1,m}.$$

Кроме того, введём вектор-функции $\vec{f}(t)=\left(f_i(t)\right)_{i=1}^{m}\in H_2^{(2)}$, где

$$f_i(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g_i'(t),$$

и $\vec{f}_{\overline{n}}(t)=\left(f_{in_i}(t)\right)_{i=1}^{m}\in\Pi^{(2)}_{\overline{n}}$, где

$$f_{in_i}(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\left(F^{(2)}_{n_i-1}g_i'\right)(t).$$

В операторных обозначениях система СИУ (32) м дополнительные условия (33) принимают соответственный вид

$$\left(\mathrm{A}+\mathrm{K}\right)\vec{\upsilon}=\vec{f}\,, \tag{36}$$

$$\widehat{Q}\vec{\upsilon}=\vec{0} \tag{37}$$

(т.е. $\vec{\upsilon}\in\overline{\Lambda}\left(Q\right)$), а система СИУ (34) и дополнительные условия (35) – вид

$$\left(\mathrm{A}+\mathrm{K}_{\bar{n}}\right)\vec{\upsilon}_{\bar{n}}=\vec{f}_{\bar{n}}\,, \tag{38}$$

$$\widehat{Q}_{\bar{n}}\vec{\upsilon}_{\bar{n}}=\vec{0}$$

(т.е. $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}\in\overline{\Lambda}_{\bar{n}}\left(Q_{\bar{n}}\right)$).

Оператор А + К в силу условий (37) действует из пространства $\overline{\Lambda}\left(Q\right)$ в пространство $H_2^{(2)}$. Из однозначной разрешимости задачи (32), (33) следует, что оператор А + К имеет в паре пространств $\left(\overline{\Lambda}\left(Q\right),H_2^{(2)}\right)$ ограниченный обратный оператор $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}$.

Если мы докажем, что оператор $\mathrm{A}+\mathrm{K}_{\bar{n}}$ при достаточно больших n непрерывно обратим в паре пространств $\left(\overline{\Lambda}_{\bar{n}}\left(Q_{\bar{n}}\right),\Pi_{\bar{n}}^{(2)}\right)$, то тем самым докажем однозначную разрешимость задачи (34), (35).

Доказательство проводится точно так же, как в п.3, на основании оценок (при $n>\mu+1$):

$$\left\|Q_{ik}-F_{n_it}^{(1)}F_{n_k\tau}^{(1)}Q_{ik}\right\|_{L_2^{(1)}\cdot L_2^{(1)}}\le\frac{M}{(n-1)^{\mu+\gamma}}\,,$$

$$\left\|\left(A+K\right)-\left(A+K_{\bar{n}}\right)\right\|_{\overline{\Lambda}_{\bar{n}}\left(Q_{\bar{n}}\right)\to H_2^{(2)}}\le\frac{1}{\pi}\sum_{i,k=1}^{m}\left\|\partial_tQ_{ik}-F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}\partial_tQ_{ik}\right\|_{L_2^{(2)}\cdot L_2^{(1)}}\le\frac{R}{\left(n-2\right)^{\mu-1+\gamma}}\,,$$

$$\left\|\vec{f}-\vec{f}_{\bar{n}}\right\|_{H_2^{(2)}}\le\frac{C}{\sqrt{\pi}}\sum_{i,k=1}^{m}\left\|\partial_tQ_{ik}-F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}\partial_tQ_{ik}\right\|_{L_2^{(2)}\cdot L_2^{(1)}}+\sum_{i=1}^{m}\left\|g_i'-F_{n_i-1}^{(2)}g_i'\right\|_{L_2^{(2)}}\le\frac{G}{(n-2)^{\mu-2+\gamma}}\,,$$

где $C=\max\limits_{1\le k\le m}\left|C_k\right|$, M, R и G – константы, зависящие от функций $f_i\left(t\right)$ и $Q_{ik}\left(t,\tau\right)$, $i,k=\overline{1,m}$, соответственно.

Окончательно получаем утверждение.

Теорема 3. *Существует N такое, что при всех* $\bar{n}$*, у которых n>N, уравнение (38) имеет в паре пространств* $\left(\overline{\Lambda}\left(Q\right),H_2^{(2)}\right)$ *единственное решение* $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}\left(\tau\right)$*, причё1м справедлива оценка* $\left\|\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_{\bar{n}}\right\|_{H_2^{(1)}}\le P/\left(n-2\right)^{\mu-1+\gamma}$*, где* $\vec{\upsilon}$ *- точное решение уравнения (36) в паре пространств* $\left(\overline{\Lambda}\left(Q\right),H_2^{(2)}\right)$*. Здесь P – константа, не зависящая от* $\bar{n}$.

Приближённое решение $\vec{u}_{\bar{n}}\left(\tau\right)$ уравнения (30) получаем из равенства $\vec{u}_{\bar{n}}\left(\tau\right)=\vec{u}_{\bar{n}}\left(\tau\right)+C$.

Оценка скорости сходимости функционалов

Диаграммы направленности поля в дальней зоне и комплексные амплитуды распространяющихся волн [6], а также другие величины, описывающие рассеянное электромагнитное поле, выражаются через решение $\vec{\upsilon}\left(\tau\right)=\left\{\upsilon_k\left(\tau\right)\right\}_{k=1}^{m}$ системы СИУ (32) с дополнительными условиями (33) в форме функционалов вида

$$\Phi=\sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}\Phi_k\left(\tau\right)\upsilon_k\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,, \tag{39}$$

где $\Phi_k\left(\tau\right)\in C_{[-1,1]}^{\mu-1,\gamma}$, $k=\overline{1,m}$. Оценим отклонение приближённого значения этого функционала

$$\Phi_{\bar{n}} = \sum_{k=1}^{m} \int_{-1}^{1} F_{n_k \tau} \Phi_k(\tau) \upsilon_{kn_k}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \tag{40}$$

от точного

$$\Phi_{\bar{n}} - \Phi = \sum_{k=1}^{m} \int_{-1}^{1} \Phi_k(\tau)\left(\upsilon_{kn_k}(\tau) - \upsilon_k(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \int_{-1}^{1} \left(F_{n_k \tau}\Phi_k(\tau) - \Phi_k(\tau)\right) \upsilon_{kn_k}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \equiv S_1 + S_2 . \tag{41}$$

Имеем

$$\left|S_1\right| \le m \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \int_{-1}^{1} \Phi_k(\tau)\left(\upsilon_{kn_k}(\tau) - \upsilon_k(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{-1}^{1} \left|\Phi_k(\tau)\right|^2 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^{1} \left|\upsilon_{kn_k}(\tau) - \upsilon_k(\tau)\right|^2 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{n^{\mu-1+\gamma}}\right).$$

Аналогично оценивается и второе слагаемое S_2. Таким образом, $\Phi_{\bar{n}} - \Phi = O\left(1/n^{\mu-1+\gamma}\right)$. Здесь, как и выше, $n = \min\left\{n1,...,n_m\right\}$.

Дискретная математическая модель

СИУ на системе отрезков (см. введение) (1) с дополнительными условиями (3) с помощью отображений

$$g_q: \quad (-1,1) \to \left(a_q, b_q\right): \quad \tau \to \xi_q = \left(b_q - a_q\right)\tau/2 + \left(b_q + a_q\right)/2,$$

$$g_p: \quad (-1,1) \to \left(a_p, b_p\right): \quad \mathrm{t} \to x_p = \left(b_p - a_p\right)t/2 + \left(b_p + a_p\right)/2$$

сводится к системе СИУ на стандартном отрезке с m дополнительными условиями. Метод приближённого решения этой системы строго обоснован в п.4 настоящей работы.

В заключение проведём непосредственно дискретизацию уравнения (1) с дополнительными условиями (3) в том виде, в котором эта дискретная математическая модель используется при проведении численных экспериментов.

Обозначим $F(\xi)|_{L_p} = \upsilon_q(\xi)/\left(\left(\xi - a_q\right)\left(b_q - \xi\right)\right)^{1/2}$ (см. введение) при $a_q < \xi < b_q$, $q = \overline{1,m}$, $\xi_{qi}^{n_q} = g_q\left(t_i^{(1,n_q)}\right)$, $i = \overline{1,n_q}$; $x_{pj}^{n_p} = g_p\left(t_j^{(2,n_p)}\right)$, $j = \overline{1,n_p-1}$; $p = \overline{1,m}$. Для определения приближённых значений $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}(\xi) = \left\{\upsilon_{qn_q}\right\}_{q=1}^{n_q}$ искомой вектор-функции в узловых точках квадратурных формул интерполяционного типа имеем СЛАУ

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_q} R\left(x_{pj}^{n_p}, \xi_{qi}^{n_q}\right)\upsilon_{qn_q}\left(\xi_{qi}^{n_q}\right)\frac{1}{n_q} = f\left(x_{pj}^{n_p}\right), \ j = \overline{1,n_p-1}, \ p = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{n_p} S_p\left(\xi_{qi}^{n_p}\right)\upsilon_{pn_p}\left(\xi_{pi}^{n_p}\right)\frac{1}{n_q} = C_p, \ \left(j = n_p\right), \ p = \overline{1,m}.$$

Через компоненты $\vec{\upsilon}_{\bar{n}}(\xi)$ выражаются приближённые значения функционалов – физических характеристик рассеянного поля

$$H = \int_L H(\xi)F(\xi)d\xi = \sum_{q=1}^{m}\int_{a_q}^{b_q} H_q(\xi)\upsilon_q(\xi)\left(\left(\xi - a_q\right)\left(b_q - \xi\right)\right)^{-1/2} d\xi .$$

В численных экспериментах вычисляются приближённые значения таких функционалов:

$$H_{\bar{n}} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_q} H_q \left(\xi_{qi}^{n_q} \right) \upsilon_{qn_q} \left(\xi_{qi}^{n_q} \right) \frac{\pi}{n} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гандель Ю.В. // Электромагнитные явления. 1998. Т. 1. №2. С. 220–232.
2. Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. // Электромагнитные явления. 1988. Т. 1. №4. С.447–464.
3. Гандель Ю.В., Лифанов И.К. // Дифференц. Уравнения. 1998. Т. 34. №9. С. 1246–1253.
4. Гандель Ю.В. // Вопросы кибернетики. 1986. Т. 124. С. 166–183.
5. Лифанов И.К., Матвеев А. Ф. // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1983. Вып. 40. С. 104–110.
6. Junghanns P., Silbermann B. // Math. Nachrichten. 1981. № 103. S. 199–244.
7. Полянская Т.С. // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1985. Вып. 44. С. 84–88.
8. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. // Вестн. Харьк. национал. ун-та. 2001. № 514. С. 156–163.
9. Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Полянская Т.С. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1536–1541.
10. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
11. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
12. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. // Математические фопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч. 2. Харьков, 1992.
13. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. // Электромагнитные явления. 2001. Т. 3. № 3(7). С. 293–301.
14. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков; Херсон, 2001.