

С.Н. Зиненко

Линейная алгебра

Линейные операторы

(теория к задачам)

2018

11. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Скалярным произведением называется скалярная функция (a, b) двух векторных аргументов, удовлетворяющая условиям

$$1^\circ (a, a) \geq 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow a = 0)$$

$$2^\circ (a, b) = (\overline{b, a})$$

$$3^\circ (\alpha a, b) = \alpha (a, b) \quad \Rightarrow \quad (a, \alpha b) = \overline{\alpha} (a, b)$$

$$4^\circ (a+b, c) = (a, c) + (b, c) \quad \Rightarrow \quad (a, b+c) = (a, b) + (a, c)$$

Замечание. В вещественном пространстве аксиома 2° имеет вид $(x, y) = (\overline{y, x}) = (y, x)$

Замечание. Проверка условий $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ как правило тривиальна. Затруднения обычно вызывает проверка 1° .

Линейное пространство E_n со скалярным произведением называется **евклидовым**

Замечание. Евклидово пространство E_n можно рассматривать как абстрактный аналог геометрического пространства V , в котором кроме операций сложения векторов и умножения на скаляр определены длины векторов и углы между ними (**№ 1.3.а.**) В просто линейном пространстве нельзя представить себе, что один вектор короче другого, или что пара векторов образует прямой угол. Наделение линейного пространства абстрактным скалярным произведением позволяет ввести аналог длины вектора (**№ 11.2.**) и угла между ними, в частности, ортогональность (**№ 11.3.**)

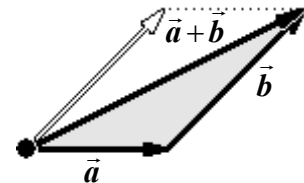
№ 11.2.

Нормой вектора называется скалярная функция $\|a\|$ векторного аргумента, удовлетворяющая условиям

$$1^\circ \|a\| \geq 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow a = 0)$$

$$2^\circ \|\alpha \cdot a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$$

$$3^\circ \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad - \text{неравенство треугольника}$$



Замечание. Если скалярное произведение определено, то норма задается равенством

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)}$$

Тогда имеет место неравенство Коши-Буняковского

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Метрикой называется скалярная функция $\rho(a, b)$ двух векторных аргументов, удовлетворяющая условиям

$$1^\circ \rho(a, b) \geq 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow a = b)$$

$$2^\circ \rho(a, b) = \rho(b, a)$$

$$3^\circ \rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b) \quad - \text{неравенство треугольника}$$

Замечание. Если норма определена, то метрика задается равенством

$$\rho(a, b) = \|a - b\|$$

№ 11.3.

Векторы a, b называются **ортогональными**, если $(a, b) = 0$.

Базис $\{e\} = \{\dots, e_i, \dots, e_j, \dots\}$ называется **ортонормированным**, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

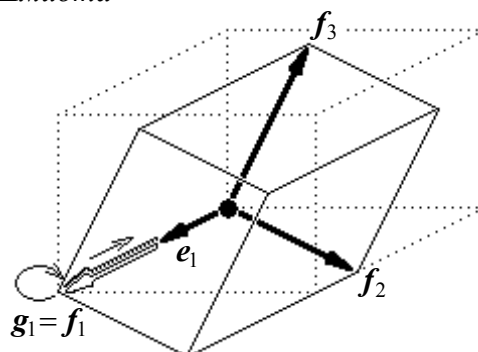
В евклидовом пространстве из произвольного базиса $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта можно получить ортонормированный.

1)

$$g_1 = f_1$$

$\Rightarrow$

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$



2)

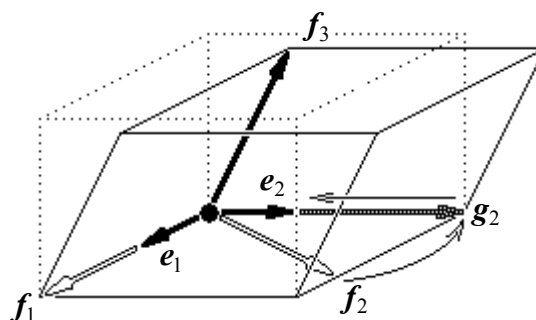
$$g_2 = f_2 - \alpha_{21}e_1$$

$\Rightarrow$

$$[g_2 \perp e_1 \Rightarrow (g_2, e_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = (f_2, e_1)]$$

$\Rightarrow$

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$$



3)

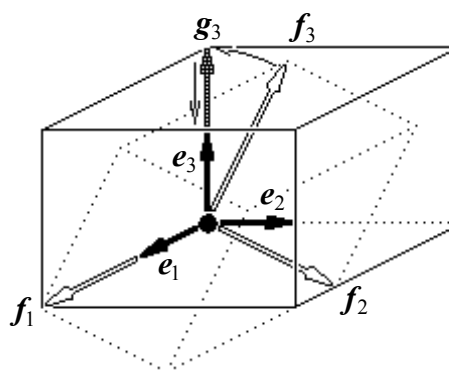
$$g_3 = f_3 - (\alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} g_3 \perp e_1 \\ g_3 \perp e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (g_3, e_1) = 0 \\ (g_3, e_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} = (f_3, e_1) \\ \alpha_{32} = (f_3, e_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}$$



И т.д.

Замечание. Построенный на k -том шаге вектор g_k

$$g_k = f_k - (\alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{k,k-1}e_{k-1}) = f_k + (*f_1 + \dots + *f_{k-1}) \Rightarrow g_k = \|g_k\| \cdot e_k \perp f_1, \dots, f_{k-1}$$

можно рассматривать, как “высоту” k -мерного “параллелепипеда” $\{f_1, \dots, f_{k-1}, f_k\}$, в основании которого лежит $(k-1)$ -мерный “параллелограмм” $\{f_1, \dots, f_{k-1}\}$. При этом,

$$\|g_1\| = L - \text{длина вектора } g_1 = f_1$$

$$L \cdot \|g_2\| = S - \text{площадь параллелограмма } \{f_1, f_2\} \text{ с основанием } \{f_1\} \text{ и высотой } \{g_2\}$$

$$S \cdot \|g_3\| = V - \text{объем параллелепипеда } \{f_1, f_2, f_3\} \text{ с основанием } \{f_1, f_2\} \text{ и высотой } \{g_3\}$$

И т.д. Отсюда вытекает геометрический смысл определителя

$$\det A = \det [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots] = \det [g_1 \ g_2 \ g_3 \ \dots] = (\|g_1\| \cdot \|g_2\| \cdot \|g_3\| \cdot \dots) \cdot \det [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \dots] = \pm V$$

модуль которого равен “объему” n -мерного параллелепипеда $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, а знак $\pm$ определяет, так называемую, ориентацию базиса (“правого” или “левого”).

№ 11.4.

Замечание. Полиномы, ортогональные на интервале $[a, b]$ с весом $\rho(x)$

называются

ортогональными

многочленами

Лежандра	$P_n(x)$	$[-1, +1]$	1
Чебышева	$T_n(x)$	$(-1, +1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Лагерра	$L_n(x)$	$[0, +\infty)$	e^{-x}
Эрмита	$H_n(x)$	$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}

№ 11.5.

Из формул Эйлера

$$\begin{bmatrix} e^{+ik\varphi} \\ e^{-ik\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{+ik\varphi} \\ e^{-ik\varphi} \end{bmatrix}$$

линейно связывающих экспоненту и тригонометрические функции, вытекает совпадение их линейных оболочек (пространство тригонометрических полиномов)

$$\mathbb{T}_{2n+1} = \text{Lin}\{\dots, \sin k\varphi, \dots, 1, \dots, \cos k\varphi, \dots\} = \text{Lin}\{\dots, e^{-ik\varphi}, \dots, 1, \dots, e^{+ik\varphi}, \dots\} \quad (k=1, \dots, n)$$

В силу попарной ортогональности функций в смысле скалярного произведения

$$(p, q) = \int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi) \cdot \overline{q(\varphi)} d\varphi$$

после нормировки они образуют ортонормированные базисы в $\mathbb{T}_{2n+1}$

Дополнение.

Пусть $y = y(x)$ - функция (**вектор-функция векторного аргумента**), отображающая

$$\mathbb{R}_n \supseteq X \xrightarrow{y} Y \subseteq \mathbb{R}_m \Rightarrow \begin{matrix} \text{//} x \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{//} y \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{//} y(x) \\ \begin{bmatrix} y_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

В частности, если функция y **линейна (линейный оператор)**

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$$

то ее естественной областью **определения** является все **пространство** $X \equiv \mathbb{R}_n$, **действие** сводится к умножению **матрицы** A на вектор-столбец x : $y = A \cdot x$, а областью **значений** является некоторое **подпространство** $Y = \text{Ran } A \subseteq \mathbb{R}_m$.

Функция $y = y(x)$ **дифференцируема** в точке x , если ее приращение допускает выделение **линейной главной части**

$$\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x) = \underbrace{D(x) \cdot \overbrace{\Delta x}^{\text{//}}}_{\text{//} dy(x)} + o(\|\Delta x\|)$$

называемой **дифференциалом** функции.

Найдем компоненты матрицы-функции (Якоби) $D(x) = [d_{ij}]$: $d_{ij} = (e_i, D(x) \cdot e_j)$

Выбирая приращение аргумента $\Delta x = e \cdot \Delta t$ вдоль некоторого единичного направления e ($\|e\|=1$), приходим к производной вектор-функции y в точке x по направлению e

$$y'_e(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_e y(x)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D(x) \cdot e \cdot \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = D(x) \cdot e$$

В частности, взяв один из векторов ортонормированного базиса $\{\dots, e_j, \dots\} \Rightarrow e = e_j$, получим вектор частной производной вектор-функции $y(\dots, x_j, \dots)$ по переменной x_j

$$y'_{x_j}(x) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{y(\dots, x_j + \Delta x_j, \dots) - y(\dots, x_j, \dots)}{\Delta x_j} = D(x) \cdot e_j$$

Отсюда вытекает, что элементами матрицы Якоби D являются частные производные

$$d_{ij} = (e_i, D \cdot e_j) = (e_i, y'_{x_j}) = y'_{i x_j}$$

компонент $y_i(\dots, x_j, \dots)$ вектор-функции $y(x)$ по переменным x_j . Поэтому матрица Якоби называется еще **матрицей-производной** вектор-функции $y(x)$ и обозначается

$$D(x) = Y'_x(x) = \begin{bmatrix} y'_{1x_1} \dots y'_{1x_j} \dots y'_{1x_n} \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ y'_{ix_1} \dots y'_{ix_j} \dots y'_{ix_n} \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ y'_{mx_1} \dots y'_{mx_j} \dots y'_{mx_n} \end{bmatrix}$$

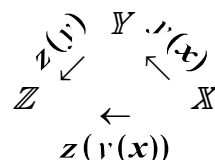
Тогда,

$$dy = Y'_x \cdot dx \Rightarrow y'_e = Y'_x \cdot e \Rightarrow y'_{x_j} = Y'_x \cdot e_j \Rightarrow y'_{i x_j} = (e_i, Y'_x \cdot e_j)$$

Пусть, далее, $z = z(y)$, $y = y(x)$ две функции, отображающие соответственно

$$\mathbb{R}_n \supseteq X \xrightarrow{y} Y \xrightarrow{z} Z \subseteq \mathbb{R}_m$$

$$\cap \mathbb{R}_l$$



так что можно построить сложную функцию $z = z(y(x))$.

Из дифференцируемости каждой функции

$$\begin{cases} \Delta z = z(y + \Delta y) - z(y) = Z'_y \cdot \Delta y + o(\|\Delta y\|) \\ \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = Y'_x \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|) \end{cases}$$

вытекает дифференцируемость сложной

$$\Delta z = z(y(x + \Delta x)) - z(y(x)) = z(y + \Delta y) - z(y) = Z'_y \cdot \Delta y + o(\|\Delta y\|) =$$

$$= Z'_y \cdot (Y'_x \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|)) + o(\|\Delta x\|) = \underbrace{Z'_y \cdot Y'_x}_{//} \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

откуда следует

$$Z'_x = Z'_y \cdot Y'_x$$

Из покомпонентной записи полученного матричного равенства получаем формулы для частных производных сложной функции нескольких переменных

$$z'_{i_{xj}} = z'_{i_{y1}} \cdot y'_{1_{xj}} + \dots + z'_{i_{yk}} \cdot y'_{k_{xj}} + \dots + z'_{i_{yl}} \cdot y'_{l_{xj}} = \sum_{k=1}^l z'_{i_{yk}} \cdot y'_{k_{xj}}$$

Сравнить. Если $z = By$, $y = Ax$ - линейные операторы, задаваемые матрицами B , A , то сложная функция $z = B(Ax)$ также линейна и задается произведением матриц: $z = (B \cdot A)x$

В случае **квадратных** матриц-производных $m=l=n$ можно говорить об их **определителях (якобианах)**, которые, очевидно, связаны равенством

$$\frac{D(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)}{D(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)} = \det Z'_x = \det Z'_y \cdot \det Y'_x = \frac{D(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)}{D(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}$$

Наконец, если $y = y(x)$, $z = z(y) = x \Rightarrow x = x(y)$ две взаимно обратные функции

$$\mathbb{R}_n \supseteq X \xleftrightarrow[x]{y} Y \subseteq \mathbb{R}_n : \begin{cases} x = x(y(x)), & \forall x \in X \\ y = y(x(y)), & \forall y \in Y \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} X'_x = X'_y \cdot Y'_x \\ Y'_y = Y'_x \cdot X'_y \end{cases} \quad (X'_x = Y'_y = I) \Rightarrow X'_y = Y'_x{}^{-1}$$

так что матрицы Якоби Y'_x и X'_y взаимно обратные.

Следовательно, их якобианы связаны соотношением

$$\frac{D(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)} = \det Y'_x = (\det X'_y)^{-1} = \left(\frac{D(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)} \right)^{-1}$$

12. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО И УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Оператор A^* называется **сопряженным** к оператору A , если

$$(Aa, b) = (a, A^*b), \quad \forall a, b \in E_n$$

Наиболее важными являются случаи, когда роль сопряженного играет или сам оператор, или его обратный. Соответственно операторы называются **самосопряженным** | **унитарным**

$$(Aa, b) = (a, Ab), \quad \forall a, b \in E_n$$

$$A = A^*$$

$$(Ua, Ub) = (a, b), \quad \forall a, b \in E_n$$

$$U^* \cdot U = I \Leftrightarrow U^{-1} = U^*$$

Собственные значения операторов

$$Af = \lambda f$$

$$Uf = \lambda f$$

вещественны

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

$$\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$$

по модулю равны единице

собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям - **ортogonalны**

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow f \perp g \Leftrightarrow (f, g) = 0$$

Теорема (спектральная теорема)

Всякий самосопряженный $A = A^*$ (унитарный $U^{-1} = U^*$) оператор обладает ортонормированным базисом из собственных векторов

$$A f_k = \lambda_k f_k \Leftrightarrow (f_i, f_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

Аналогичные понятия вводятся для матриц.

Матрицы называются **сопряженной, самосопряженной, унитарной**, если порождаемые ими операторы в евклидовом пространстве C_n с каноническим скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

соответствующие

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad (Ax, y) = (x, Ay), \quad (Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in C_n$$

Канонический базис $\{e\}$ в C_n - ортонормирован, так что компоненты матрицы равны

$$A = [a_{ij}] \Leftrightarrow a_{ij} = (Ae_j, e_i)$$

В таком случае,

- **сопряженная матрица**

$$A^* = [a_{ij}^*] \Leftrightarrow a_{ij}^* = (A^*e_j, e_i) = (\overline{Ae_i}, e_j) = \bar{a}_{ji}$$

- **самосопряженная матрица**

$$A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

- **унитарная матрица**

$$U \cdot U^* = U^* \cdot U = I \Leftrightarrow U^{-1} = U^* \Leftrightarrow U = [\dots u_i \dots u_j \dots], \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

Столбцы унитарной матрицы составляют некоторый ортонормированный базис в C_n

В вещественном случае имеем

- сопряженная = транспонированная матрица

$$A^* = A' \Rightarrow a_{ij}^* = a_{ji}$$

- самосопряженная = симметричная матрица

$$A = A' \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

- унитарная = ортогональная матрица

$$U \cdot U' = U' \cdot U = I \Leftrightarrow U^{-1} = U'$$

Пусть

$$\{ \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_m \}$$

все различные собственные значения самосопряженного $\mathbf{A}$ (унитарного $\mathbf{V}$) оператора, соответствующие собственным подпространствам

$$\{ \mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k, \dots, \mathbb{F}_m \}$$

Обозначим ортонормированные базисы собственных подпространств через

$$\{ \{ \mathbf{f}_{1_1}, \dots, \mathbf{f}_{1_{n_1}} \}, \dots, \{ \mathbf{f}_{k_1}, \dots, \mathbf{f}_{k_{n_k}} \}, \dots, \{ \mathbf{f}_{m_1}, \dots, \mathbf{f}_{m_{n_m}} \} \}$$

Объединенная система подбазисов образует не просто ортонормированную систему, а, как следует из спектральной теоремы для самосопряженных (унитарных) операторов, ортонормированный базис $\{ \mathbf{f} \}$ из собственных векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$

Следовательно, самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ (унитарный оператор $\mathbf{V}$), имеющий в некотором ортонормированном (старом) базисе $\{ \mathbf{e} \}$ самосопряженную матрицу $\mathbf{A}$ (унитарную матрицу $\mathbf{V}$), в новом ортонормированном базисе $\{ \mathbf{f} \}$ из собственных векторов имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \lambda_m & 0 \\ 0 & \lambda_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_k \mathbf{I}_{n_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_m \mathbf{I}_{n_m} \end{bmatrix}$$

(любой самосопряженный или унитарный операторы – диагонализуются).

Обозначим через $\mathbf{u}_{k_i}$ столбец координат собственного вектора $\mathbf{f}_{k_i}$, соответствующим собственному значению λ_k , в старом базисе $\{ \mathbf{e} \}$. Тогда матрица перехода от старого ортонормированного базиса $\{ \mathbf{e} \}$ к новому ортонормированному $\{ \mathbf{f} \}$ базису из собственных векторов является унитарной

$$\mathbf{U} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1_1} & \dots & \mathbf{u}_{1_{n_1}} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k_1} & \dots & \mathbf{u}_{k_{n_k}} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{m_1} & \dots & \mathbf{u}_{m_{n_m}} \end{bmatrix} \right]$$

так что, спектральное разложение самосопряженной (унитарной) матрицы имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^* \quad (\mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^*)$$

13. ОРТОПРОЕКТОРЫ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО И УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\{e\}$ некоторый произвольный ортонормированный базис в евклидовом пространстве E . Разобьем его на две ортонормированные (в частности, линейно независимые) подсистемы

$$\{e\} = \{\{f_1, \dots, f_m\}, \{g_1, \dots, g_{n-m}\}\} = \{f\} \cup \{g\}$$

и построим подпространства (линейные оболочки)

$$F = \text{Lin}\{f_1, \dots, f_m\}, \quad G = \text{Lin}\{g_1, \dots, g_{n-m}\} \Rightarrow F \perp G$$

Тем самым, получим разбиение всего пространства в ортогональную сумму $E = F \oplus G$

Замечание. Ортогональное дополнение $G \perp F$ в отличие от “косого” – единственное, поэтому для него корректно введение соответствующего обозначения (ортогональная разность)

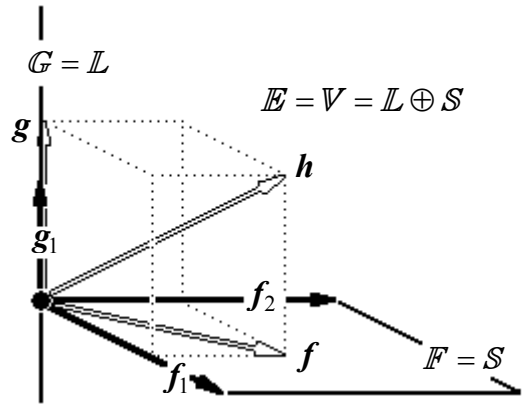
$$G = E \ominus F$$

Далее, разлагая произвольный вектор $\forall h \in E$

$$h = (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m) + (\beta_1 g_1 + \dots + \beta_{n-m} g_{n-m})$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{f}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g}$



получим его разложение (однозначное) на ортогональные составляющие $F \ni f \perp g \in G$, получившие названия **ортонпроекций** вектора h на подпространства F и G (уточнять, параллельно какому подпространству в силу его единственности – излишне)

Тем самым определяются **ортонпроекторы** P, Q на подпространства F и $G = E \ominus F$

$$\overset{P}{h \rightarrow f = Ph}, \quad \overset{Q}{h \rightarrow g = Qh}$$

Очевидно,

$$I = P + Q, \quad \begin{bmatrix} P^2 = P & P^* = P \\ Q^2 = Q & Q^* = Q \end{bmatrix}, \quad P \cdot Q = Q \cdot P = 0$$

при этом

$$F = \text{Ran } P, \quad G = \text{Ker } P \qquad G = \text{Ran } Q, \quad F = \text{Ker } Q$$

Нетрудно видеть, что матрицы $\tilde{P}, \tilde{Q}$ операторов проектирования P, Q в “естественном” ортонормированном базисе $\{e\} = \{f\} \cup \{g\}$ равны

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

В матричном представлении свойства операторов проектирования – очевидны

№ 13.2.

Пусть

$$\{ \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_m \}$$

все различные собственные значения самосопряженного $\mathbf{A}$ (унитарного $\mathbf{V}$) оператора, соответствующие собственным подпространствам

$$\{ \mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k, \dots, \mathbb{F}_m \}$$

Обозначим ортонормированные базисы собственных подпространств через

$$\{ \{ \mathbf{f}_{1_1}, \dots, \mathbf{f}_{1_{n_1}} \}, \dots, \{ \mathbf{f}_{k_1}, \dots, \mathbf{f}_{k_{n_k}} \}, \dots, \{ \mathbf{f}_{m_1}, \dots, \mathbf{f}_{m_{n_m}} \} \}$$

Из спектральной теоремы для самосопряженных (унитарных) операторов вытекает, что объединенная система подбазисов образует в целом ортонормированный базис $\{ \mathbf{f} \}$ из собственных векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$.

Далее, произвольный вектор пространства может быть однозначно разложен по базису

$$\mathbf{h} = \underbrace{(x_{1_1} \mathbf{f}_{1_1} + \dots + x_{1_{n_1}} \mathbf{f}_{1_{n_1}})}_{\mathbf{f}_1 \in \mathbb{F}_1} + \dots + \underbrace{(x_{k_1} \mathbf{f}_{k_1} + \dots + x_{k_{n_k}} \mathbf{f}_{k_{n_k}})}_{\mathbf{f}_k \in \mathbb{F}_k} + \dots + \underbrace{(x_{m_1} \mathbf{f}_{m_1} + \dots + x_{m_{n_m}} \mathbf{f}_{m_{n_m}})}_{\mathbf{f}_m \in \mathbb{F}_m}$$

т.е. в данном случае в ортогональную сумму собственных векторов $\mathbf{f}_k$

$$\mathbf{h} = \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_k + \dots + \mathbf{f}_m \Leftrightarrow \mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_k \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_m$$

получивших название **ортогональных проекций** вектора $\mathbf{h}$ на собственные подпространства $\mathbb{F}_k$.

Действие оператора $\mathbf{A}$ сводится к умножению каждого слагаемого на соответствующее собственное значение

$$\mathbf{A} \mathbf{h} = \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{f}_k + \dots + \lambda_m \mathbf{f}_m$$

Определим операторы ортогонального проектирования (**ортонпроекторы**)

$$\mathbf{P}_k \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{f}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij} \mathbf{P}_j$$

Полученным выше разложением произвольного вектора $\mathbf{h}$ и действием оператора $\mathbf{A}$ с помощью ортонпроекторов можно придать вид

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_k \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_m \\ \left. \mathbf{A} \right|_{\mathbb{F}_k} = \lambda_k \mathbf{I}_{n_k} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{h} = \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_k + \dots + \mathbf{f}_m \\ \mathbf{A} \mathbf{h} = \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{f}_k + \dots + \lambda_m \mathbf{f}_m \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{I} = \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_k + \dots + \mathbf{P}_m \\ \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k + \dots + \lambda_m \mathbf{P}_m \end{array} \right]$$

Замечание. Самосопряженные (унитарные) операторы являются частными случаями диагонализируемых операторов, с уточнением, что базис из собственных векторов можно выбрать ортонормированным, а собственные значения вещественны (единичны по модулю)

Замечание. Для того, чтобы вещественные матрицы имели вещественное спектральное разложение, очевидно необходимо, чтобы корни их характеристических полиномов были вещественны. Для симметричных матриц $A' = A$ это выполнено всегда. В то же время ортогональные матрицы $U' = U^{-1}$ имеют вещественное разложение, если корни их характеристических полиномов (всегда единичные по модулю) равны ± 1 . Это выполнено, если ортогональная матрица одновременно симметрична.

В частности, характеристические полиномы ортогональных матриц $2^{\text{го}}$ порядка, описывающих повороты плоскости, могут не иметь вещественных корней (соответственно нет собственных векторов). Геометрически это почти очевидно: после поворота вектор останется коллинеарным самому себе только при углах кратных π .

В то же время при поворотах пространства, описываемых ортогональными матрицами $3^{\text{го}}$ порядка, имеется хотя бы одна неподвижная ось (собственное подпространство), поскольку полиномы $3^{\text{го}}$ порядка обязаны иметь хотя бы один вещественный корень (!)

№ 13.3.

Пусть $\{e\}$ некоторый произвольный ортонормированный базис в евклидовом пространстве E

$$\{e\} = \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$$

Построив линейные оболочки

$$F_k = \text{Lin}\{e_k\} \Rightarrow F_i \perp F_j$$

получим разбиение пространства в ортогональную сумму одномерных подпространств

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k \oplus \dots \oplus F_n$$

(аналог трех осей координат Ox, Oy, Oz в геометрическом пространстве V с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$).

Разложим произвольный вектор $\forall h \in E$ по ортонормированному базису $\{e\}$ (конечномерный аналог ряда Фурье)

$$h = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + \dots + x_n e_n$$

Координаты x_k (коэффициенты Фурье) в ортонормированном базисе равны

$$x_k = (h, e_k)$$

Тем самым, получим вид ортогональных проекций вектора h и, соответственно, одномерных операторов проектирования на “координатные оси” F_k

$$P_k h \rightarrow f_k = x_k e_k = e_k (h, e_k) \Rightarrow P_k h = e_k (h, e_k)$$

Замечание. Имеет место равенства Парсеваля (аналог теоремы Пифагора)

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \sum_{k=1}^n (h, e_k)^2$$

Дополнение. Шарик на пружинке

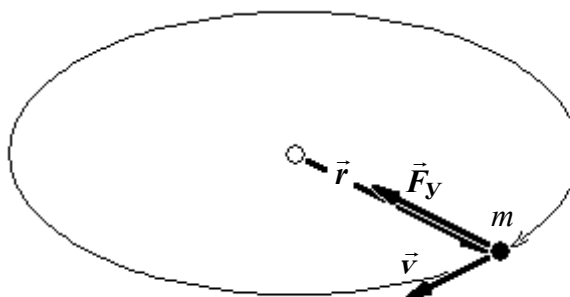
1° Движение материальной точки в потенциальном поле силы упругости

Согласно 2^м закону Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_Y = -k\vec{r}$$

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = \vec{0}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$



Решая полученное дифференциальное уравнение, найдем

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_1 \cos \omega t + \vec{c}_2 \sin \omega t$$

где произвольные const определим из начальных условий

$$\begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{r}'(0) = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{c}_1 = \vec{r}_0 \\ \vec{r}'(0) = \omega \vec{c}_2 = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \vec{v}_0 \sin \omega t \\ \vec{v} = \vec{r}'(t) = -\omega \vec{r}_0 \sin \omega t + \vec{v}_0 \cos \omega t \end{cases}$$

Замечание. Траектория

$$\vec{r}(t) = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$$

представляет собой эллипс, лежащий в плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ с центром в начале координат. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ - полуоси эллипса. Найти полуоси в общем случае.

Проверим сохранение полной энергии

$$E = E_{\Pi} + E_K = \text{const}$$

Замечая, что силовое поле $\vec{F} = \vec{F}_Y$ потенциально

$$\vec{F}_Y = -k\vec{r} = -\text{grad} \left(\frac{k}{2} (\vec{r}, \vec{r}) \right)$$

получим

$$E_{\Pi} = \frac{k}{2} (\vec{r}, \vec{r}), \quad E_K = \frac{m}{2} (\vec{v}, \vec{v})$$

Введем обобщенные векторы координат и импульса

$$\vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r}, \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

и построим вектор $\vec{h}$, называемый **вектором состояния** физической системы, **скалярный квадрат** которого и есть **полная энергия**

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

Имеем

$$\begin{cases} \vec{h}_r = \cos \omega t \vec{h}_{r0} + \sin \omega t \vec{h}_{v0} \\ \vec{h}_v = -\sin \omega t \vec{h}_{r0} + \cos \omega t \vec{h}_{v0} \end{cases} \Rightarrow \vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cos \omega t & I \sin \omega t \\ -I \sin \omega t & I \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{r0} \\ \vec{h}_{v0} \end{bmatrix} = U_t \vec{h}_0$$

Из унитарности матрицы U_t вытекает сохранение скалярного квадрата $\vec{h}$

Преобразуем уравнение для $\vec{r}$ в уравнение для вектора состояния $\vec{h}$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{v} \\ \vec{v}' = \vec{r}'' = -\omega^2 \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r}' = \omega \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v} \\ \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v}' = -\omega \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \omega \mathbf{I} \\ -\omega \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

откуда

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -i\omega \mathbf{I} \\ i\omega \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = A^*$$

Учитывая начальное условие, получим решение

$$\vec{h} = e^{iAt} \vec{h}_0$$

Проверим, что

$$e^{iAt} = U_t$$

Имеем

$$e^{iAt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iAt)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i^2)^m (A^2)^m t^{2m}}{(2m)!} + iA \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i^2)^m (A^2)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} =$$

Замечая, что

$$A^2 = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -i\mathbf{I} \\ i\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -i\mathbf{I} \\ i\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \omega^2 \mathbf{I}$$

продолжим

$$= \mathbf{I} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^m (\omega t)^{2m}}{(2m)!}}_{\cos \omega t} + \frac{i}{\omega} A \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^m (\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\sin \omega t} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cos \omega t + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sin \omega t = U_t$$

Итак, поведение физической системы описывается вектором состояния $\vec{h}$, удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h}$$

скалярный квадрат которого есть полная энергия

$$E = (\vec{h}, \vec{h})$$

В случае замкнутой (консервативной) системы матрица уравнения

$$A = A^*$$

самосопряженная, так что эволюция состояния задается унитарной матрицей

$$\vec{h} = e^{iAt} \vec{h}_0 = U_t \vec{h}_0$$

что и обеспечивает сохранение энергии

$$E = (\vec{h}, \vec{h}) = (U_t \vec{h}_0, U_t \vec{h}_0) = (\vec{h}_0, \vec{h}_0) = \text{const}$$

2° Движение с учетом потенциального однородного поля силы тяжести

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T = -k\vec{r} + m\vec{g}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -k(\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

После замены переменной

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \omega^{-2}\vec{g} \Rightarrow \vec{\rho}' = \vec{r}' = \vec{v} \Rightarrow \vec{\rho}'' = \vec{v}' = \vec{w}$$

задача сводится к предыдущей

$$\vec{\rho}'' + \omega^2 \vec{\rho} = \vec{0}$$

Проверим сохранение полной энергии

$$E = E_{\Pi} + E_K = \text{const}$$

Замечая, что силовое поле $\vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T$, как и раньше, потенциально

$$\vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T = -k\vec{r} + m\vec{g} = -\text{grad}\left(\frac{k}{2}(\vec{r}, \vec{r})\right) - \text{grad}\left(-(\vec{r}, m\vec{g})\right) =$$

$$= -\text{grad}\frac{k}{2}\left((\vec{r}, \vec{r}) - 2(\vec{r}, \omega^{-2}\vec{g})\right) = -\text{grad}\left(\frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho})\right)$$

получим

$$E_{\Pi} = \frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho}), \quad E_K = \frac{m}{2}(\vec{v}, \vec{v})$$

Следовательно, роль вектора состояния играет вектор

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{\rho} = \sqrt{\frac{k}{2}} (\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v}$$

скалярный квадрат которого равен полной энергии

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

Вектор состояния удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h}$$

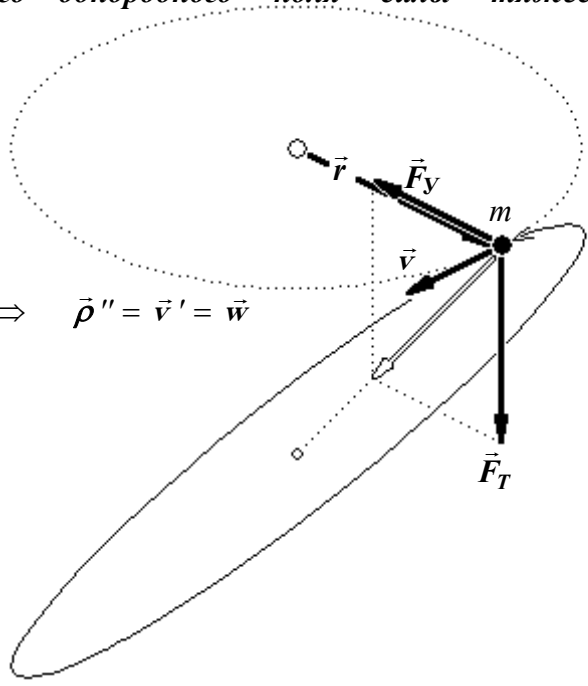
с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega I \\ i\omega I & 0 \end{bmatrix} = A^*$$

самосопряженность которой обеспечивает сохранение энергии

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{h}, \vec{h}\right) + \left(\vec{h}, \frac{d}{dt} \vec{h}\right) =$$

$$= (iA \vec{h}, \vec{h}) + (\vec{h}, iA \vec{h}) = -\left(\frac{A-A^*}{i} \vec{h}, \vec{h}\right) = 0 \Rightarrow E = \text{const}$$



3° Движение с учетом сопротивления среды

При движении тела в вязкой среде происходит диссипация (рассеяние, убывание) полной механической энергии, переходящей в другие формы (например, теплоту)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T + \vec{F}_C = -k\vec{r} + m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \beta\dot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = \vec{g}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\alpha}{m}$$

После замены переменной

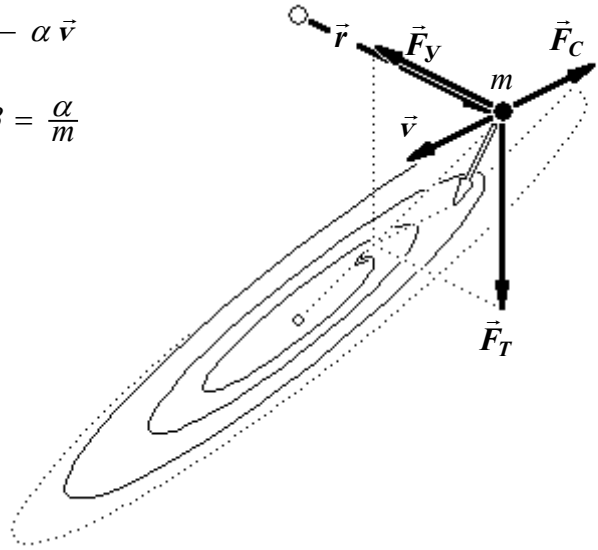
$$\vec{\rho} = \vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}$$

получим

$$\ddot{\vec{\rho}} + \beta\dot{\vec{\rho}} + \omega^2\vec{\rho} = \vec{0}$$

Как и раньше

$$E_{\Pi} = \frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho}), \quad E_K = \frac{m}{2}(\vec{v}, \vec{v})$$



так что вектор состояния, скалярный квадрат которого равен полной энергии, прежний

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{\rho} = \sqrt{\frac{k}{2}} (\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v}$$

Построим дифференциальное уравнение для вектора состояния $\vec{h}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\rho}}' = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}}' = -\omega^2\vec{\rho} - \beta\vec{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k}{2}}\dot{\vec{\rho}}' = \omega\sqrt{\frac{m}{2}}\vec{v} \\ \sqrt{\frac{m}{2}}\dot{\vec{v}}' = -\omega\sqrt{\frac{k}{2}}\vec{\rho} - \beta\sqrt{\frac{m}{2}}\vec{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \omega\mathbf{I} \\ -\omega\mathbf{I} & -\beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

откуда

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -i\omega\mathbf{I} \\ i\omega\mathbf{I} & i\beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -i\omega\mathbf{I} \\ i\omega\mathbf{I} & -i\beta\mathbf{I} \end{bmatrix} = A^*$$

Несамосопряженность матрицы (точнее **диссипативность**)

$$\frac{A - A^*}{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

равносильна **потере** энергии

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{h}, \vec{h} \right) + \left(\vec{h}, \frac{d}{dt} \vec{h} \right) =$$

$$= (iA \vec{h}, \vec{h}) + (\vec{h}, iA \vec{h}) = - \left(\frac{A - A^*}{i} \vec{h}, \vec{h} \right) =$$

$$= - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \right) = -\alpha (\vec{v}, \vec{v}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E \searrow$$

14. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Матрица A квадратичной формы

$$K(x) = (Ax, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{kk}x_k^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \dots + \underbrace{(a_{ij} + a_{ji})}_{2a_{ij}} x_i x_j + \dots$$

для однозначного определения предполагается симметричной

$$A' = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow (a_{ij} + a_{ji}) = 2a_{ij}$$

так что существует ортогональная матрица U

$$U \cdot U' = U' \cdot U = I \Leftrightarrow U' = U^{-1}$$

(столбцы которой образуют ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A), приводящая A к диагональному виду (на диагонали стоят соответствующие собственные значения матрицы A)

$$A = U \Lambda U^{-1} = U \Lambda U' \Rightarrow U' A U = \Lambda$$

Следовательно, ортогональное преобразование $x = U \tilde{x}$ приводит квадратичную форму к каноническому виду (сумме квадратов)

$$K(x) = (Ax, x) = (AU \tilde{x}, U \tilde{x}) = (U' A U \tilde{x}, \tilde{x}) = (\Lambda \tilde{x}, \tilde{x}) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_k \tilde{x}_k^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

№ 14.2.

Квадратичная часть уравнения поверхности 2^{го} порядка представляет собой квадратичную форму

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz) + (b_1x + b_2y + b_3z + c) = 0$$

Собственным ортогональным преобразованием можно привести ее к каноническому виду

$$\lambda \tilde{x}^2 + \mu \tilde{y}^2 + \nu \tilde{z}^2 + (\dots) = 0$$

Геометрический смысл ортогонального преобразования - поворот системы координат в пространстве на некоторый угол с возможным зеркальным отображением.

Для выяснения вида поверхности достаточно найти только собственные значения

№ 14.3.

Метод **Лагранжа** приведения квадратичной формы $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$= \underline{a_{11}x_1^2} + \dots + a_{nn}x_n^2 + \underline{2a_{12}x_1x_2} + \dots + \underline{2a_{1n}x_1x_n} + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n = \rightarrow$$

к каноническому виду состоит в последовательном выделении полных квадратов

$$\rightarrow = \left(\underline{a_{11}x_1^2} + \underline{2a_{12}x_1x_2} + \dots + \underline{2a_{1n}x_1x_n} \right) + (\dots) =$$

$$= a_{11} \left(x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + 2 \cdot x_1 \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right) + (\dots) =$$

$$= a_{11} \left(\underbrace{x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n}_{\substack{\Delta_1 \\ \tilde{x}_1}} \right)^2 - \dots + (\dots) = \Delta_1 \cdot \tilde{x}_1^2 + K_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

Замечание. Согласно закону инерции квадратичной формы количество положительных, нулевых и отрицательных коэффициентов при квадратах новых переменных $\tilde{x}_k^2$ (так называемая сигнатура (n_+, n_0, n_-)) не зависит от способа приведения к каноническому виду. Следовательно, если нас интересует только вопрос знаков коэффициентов канонического вида (например, при определении типа поверхности второго порядка), то метод Лагранжа позволяет ответить на это более элементарными средствами, по сравнению с нахождением собственных значений, т.е. корней характеристического полинома (построение которого весьма трудоемко, а нахождение корней не всегда удается)

№ 14.4.

Если угловые миноры матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\Delta_1 \neq 0} & \dots & \overbrace{a_{1k}}^{\Delta_k \neq 0} & \dots & \overbrace{a_{1n}}^{\Delta_n \neq 0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{k1}} & \dots & \underline{a_{kk}} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{n1}} & \dots & \underline{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

отличны от нуля, то после преобразования по методу **Лагранжа** квадратичной формы к каноническому виду получим

$$K_n(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = \tilde{K}_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \dots, \tilde{x}_n) = \Delta_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \tilde{x}_k^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \tilde{x}_n^2$$

Теорема (критерий Сильвестра)

Для того,

1) чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной

$$K(x) = (Ax, x) = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \forall x \neq 0$$

 $\Leftrightarrow$ 1) чтобы угловые миноры матрицы A

$$\begin{cases} (+1)^k \Delta_k > 0 \\ (-1)^k \Delta_k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots \text{были положительными} & +++ \dots \\ \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots \text{чередовали знак} & -+- \dots \end{cases}$$

Замечание. Матрица $A > 0$ (< 0) также называется положительной (отрицательной)**№ 14.5.****Первый дифференциал функции нескольких переменных**

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

удобно рассматривать, как **линейный** функционал над столбцом вектора приращений

$$df(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0) dx_k = (f'_x, dx), \quad f'_x = \text{grad } f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} f(x_0)$$

а **второй** дифференциал, как **квадратичную** форму над столбцом вектора приращений

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) dx_i dx_j = (f''_{xx} dx, dx), \quad f''_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} f(x_0)$$

Теорема (достаточное условие экстремума функции нескольких переменных)

Пусть

1) первый дифференциал

$$df(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0) dx_k = (f'_x, dx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'_x = 0$$

$\Downarrow$
0

 $\Rightarrow$

1) если второй дифференциал

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) dx_i dx_j = (f''_{xx} dx, dx) \Leftrightarrow f''_{xx} = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \begin{cases} \min \\ \max \\ \min \max \end{cases}$$

Дополнение. Шарики на пружинках

$$m_i \vec{r}_i'' = - \sum_{j \neq i} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \sum_{j \neq i} k_{ij} \vec{r}_j - \left(\sum_{j \neq i} k_{ij} \right) \vec{r}_i, \quad k_{ij} = k_{ji} \geq 0, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_i \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_i I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & m_n I \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1} k_{1j} I & \dots & -k_{1i} I & \dots & -k_{1n} I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{i1} I & \dots & \sum_{j \neq i} k_{ij} I & \dots & -k_{in} I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1} I & \dots & -k_{ni} I & \dots & \sum_{j \neq n} k_{nj} I \end{bmatrix}$$

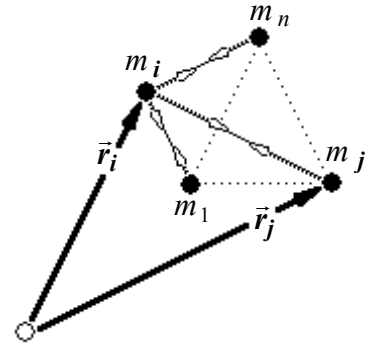
$$M \vec{r}'' = -K \vec{r}, \quad M = M^* > 0, \quad K = K^* (\geq 0)$$

Заметим, что

$$K \vec{r} = \text{grad } \frac{1}{2} (K \vec{r}, \vec{r}) = \text{grad } E_{\Pi}$$

при этом

$$\begin{aligned} 2E_{\Pi} &= (K \vec{r}, \vec{r}) = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \vec{r}_i \right) = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} (k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}_i) + k_{ji} (\vec{r}_j - \vec{r}_i, \vec{r}_j)) = \sum_i \sum_{j < i} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad E_{\Pi} = \frac{1}{2} (K \vec{r}, \vec{r}) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}, \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r} \right)$$

Учитывая, что

$$E_K = \frac{1}{2} (M \vec{v}, \vec{v}) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}, \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v} \right)$$

построим **вектор состояния**

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{h}_r = \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}, \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}$$

скалярный квадрат которого есть **полная энергия** системы материальных точек

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

Преобразуя дифференциальное уравнение для $\vec{r}$

$$\begin{bmatrix} \vec{r}' = \vec{v} \\ M \vec{v}' = -K \vec{r} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}' = \Omega^* \cdot \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v} \\ \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}' = -\Omega \cdot \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \sqrt{M}^{-1} \sqrt{K}$$

получим уравнение для вектора состояния $\vec{h}$

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \Omega^* \\ i \Omega & 0 \end{bmatrix} = A^*$$

с **самосопряженной** матрицей $A = A^*$, что равносильно **сохранению энергии**

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = - \left(\frac{A - A^*}{i} \vec{h}, \vec{h} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const}$$