Полная теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцій съ одною перемѣнною.

В. П. Ермакова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ дать подробную теорію наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функціи съ одною перемѣнною, принимая во вниманіе всѣ возможные случаи, когда производныя функціи обращаются въ нуль, въ безконечность, либо съ безконечно-малымъ измѣненіемъ перемѣннаго измѣняются на конечную величину.

Вся теорія можетъ быть построена на слѣдующемъ извѣстномъ соотношеніи между функціей и ея производной. Если съ возрастаніемъ перемѣннаго функція возрастаетъ, то ея первая производная положительна; если же функція убываетъ, то первая производная отрицательна. Для большей наглядности указанное соотношеніе представимъ въ формѣ слѣдующей **первой таблички:**

функція	*первая производная*
возрастаетъ	*положительна*
убываетъ	*отрицательна*

Положимъ теперь, что функція переходитъ чрезъ maximum; въ такомъ случаѣ съ возрастаніемъ перемѣнной, функція сначала возрастаетъ, потомъ убываетъ; на основаніи же указаннаго соотношенія первая производная будетъ сначала положительна, а потомъ отрицательна. Если же функція переходитъ чрезъ minimum, то первая производная должна переходить изъ отрицательнаго значенія въ положительное. Такимъ образомъ имѣемъ **вторую табличку:**

функція переходитъ чрезъ	*первая производная переходитъ изъ*
maximum	*положительнаго значенія въ отрицательное*
minimum	*отрицательнаго значенія въ положительное*

Въ обоихъ случаяхъ первая производная мѣняетъ знакъ. Но всякая функція можетъ мѣнять знакъ тремя способами: 1) переходя чрезъ нуль, 2) переходя чрезъ безконечность, 3) дѣлая скачокъ отъ положительной величины къ отрицательной, или обратно. Основываясь на этомъ свойствѣ и на второй табличкѣ, мы можемъ находить тѣ значенія независимаго перемѣннаго, при которыхъ данная функція *можетъ* пріобрѣтать maximum или minimum.

Пусть одно изъ найденныхъ такимъ образомъ значеній независимаго перемѣннаго будетъ $x=a$. Требуется узнать, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x=a$.

Положимъ, что первая производная переходитъ чрезъ нуль, $f'(a)=0$.

На основаніи второй таблички наша задача сводится къ опредѣленію знаковъ $f'(x)$ для значеній независимаго перемѣннаго, весьма близкихъ къ $x=a$. Иногда это опредѣленіе знаковъ можетъ быть сдѣлано по одному внѣшнему виду функціи $f'(x)$. Но если опредѣленіе знаковъ по внѣшнему виду затруднительно, то переходимъ къ разсмотрѣнію слѣдующей производной.

Если $f'(x)$ мѣняетъ знакъ и переходитъ чрезъ нуль, то по обѣ стороны $x=a$ можно намѣтить два такіе достаточно близкіе предѣла, между которыми $f'(x)$ либо непрерывно убываетъ, либо непрерывно возрастаетъ [1]). Въ такомъ случаѣ на основаніи первой таблички производная отъ $f'(x)$, т. е. вторая производная $f''(x)$, должна сохранять постоянный знакъ. Если $f'(x)$ переходитъ изъ положительнаго значенія въ отрицательное (слѣдовательно убываетъ), то $f''(x)$ отрицательна; если же $f'(x)$ переходитъ изъ отрицательнаго значенія въ положительное, то $f''(x)$ положительна. Такимъ образомъ имѣемъ **третью табличку:**

---

[1]) Исключеніемъ будетъ тотъ случай, когда для значеній весьма близкихъ къ $x=a$ функція имѣетъ безконечное число maxima и minima; такой случай представляетъ $\sin\frac{1}{x}$ для значеній x весьма близкихъ $x=0$.

функція переходитъ чрезъ	*первая производная переходитъ чрезъ нуль*	*вторая производная остается*
maximum		*отрицательною*
minimum		*положительною*

Задача приводится къ опредѣленію знака второй производной для значеній весьма близкихъ къ $x = a$. Смотря по величинѣ $f''(a)$, изслѣдованіе распадается на четыре отдѣльныхъ случая.

Первый случай. Положимъ, что $f''(x)$ при $x = a$ обращается въ величину конечную, опредѣленную, отличную отъ нуля. Въ такомъ случаѣ $f''(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ и для значеній x весьма близкихъ къ $x = a$, а потому данная функція пріобрѣтаетъ либо maximum, либо minimum. Если $f''(a)$ положительна, то на основаніи третьей таблички данная функція пріобрѣтаетъ minimum, если $f''(a)$ отрицательна, то данная функція имѣетъ maximum.

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, приводимая къ виду

$$f(x) = A + (x - a)^2 \varphi(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ A нѣкоторая постоянная величина, а функція $\varphi(x)$ такова, что при $x = a$ она не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Второй случай. Положимъ, что $f''(a) = 0$. Если по внѣшнему виду $f''(x)$ трудно судить о знакѣ этой функціи для значеній x весьма близкихъ къ $x = a$, то разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

Если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum, то по третьей табличкѣ $f''(x)$ сохраняетъ постоянный знакъ. Но если $f''(x)$, сохраняя одинъ и тотъ же знакъ, переходитъ чрезъ нуль, то этотъ нуль будетъ для $f''(x)$ либо maximum, либо minimum.

Въ частности если $f''(x)$ сохраняетъ отрицательный знакъ, то $f''(a) = 0$ будетъ maximum этой функціи; если же $f''(x)$ положительна, то $f''(a) = 0$ будетъ minimum. Сопоставляя это разсужденіе съ третьей табличкой, мы приходимъ къ заключенію, что *двѣ функціи* $f(x)$ *и* $f''(x)$ *одновременно пріобрѣтаютъ maximum, либо minimum, либо одновременно возрастаютъ, либо обѣ убываютъ.*

Такимъ образомъ вопросъ о томъ, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x = a$, сводится къ подобному же вопросу для $f''(x)$. *Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ данною функціею.*

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, выраженная тою же формулой (1), гдѣ функція $\varphi(x)$ такова, что при $x=a$ она обращается въ нуль.

Третій случай. Положимъ, что вторая производная при $x=a$ обращается въ безконечность, $f''(a)=\infty$. Вопросъ всетаки сводится къ опредѣленію знака $f''(x)$ для значеній x весьма близкихъ къ $x=a$. Если такое опредѣленіе затруднительно, то беремъ обратную по величинѣ функцію $\dfrac{1}{f''(x)}$, которая при $x=a$ обращается въ нуль, но должна сохранять одинъ и тотъ же знакъ, если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum.

Тѣже разсужденія, какъ и во второмъ случаѣ, приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію. *Двѣ функціи $f(x)$ и $\dfrac{1}{f''(x)}$ одновременно пріобрѣтаютъ maximum, либо minimum, либо одновременно возрастаютъ, либо обѣ убываютъ.*

Такимъ образомъ вопросъ о томъ, пріобрѣтаетъ ли данная функція $f(x)$ maximum или minimum при $x=a$, сводится къ подобному же вопросу для функціи $\dfrac{1}{f''(x)}$. *Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ данною функціею.*

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, приводимая къ формѣ

$$f(x)=A+(x-a)^n\varphi(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ A нѣкоторая постоянная величина, показатель n заключается между единицею и двумя, а функція $\varphi(x)$ при $x=a$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Четвертый случай. Положимъ, что $f''(x)$ при $x=a$ дѣлаетъ конечный скачокъ. Въ такомъ случаѣ задача приводится къ нахожденію предѣловъ выраженій

$$f''(a-h), \qquad f''(a+h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

съ приближеніемъ положительной величины h къ нулю. Данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum только въ томъ случаѣ, когда обѣ предѣльныя величины имѣютъ одинаковые знаки. Если оба предѣла отрицательны, то данная функція пріобрѣтаетъ maximum, если же оба предѣла положительны, то—minimum.

Примѣромъ этого случая можетъ служить функція

$$f(x)=A+B(x-a)^4\left\{\log(e^{\frac{1}{x-a}}+1)\right\}^2+C(x-a)^2, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ A, B и C — нѣкоторыя постоянныя величины. Предѣльныя величины выраженій (3) въ этомъ примѣрѣ будутъ $2C$ и $2B + 2C$.

До сихъ поръ мы полагали, что первая производная переходитъ чрезъ нуль. Остается разсмотрѣть еще два случая, когда первая производная обращается въ безконечность, или дѣлаетъ конечный скачокъ.

Пятый случай. Положимъ, что первая производная переходитъ чрезъ безконечность, $f'(a) = \infty$. Въ этомъ случаѣ разсмотримъ функцію $\varphi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$, которая переходитъ чрезъ нуль и должна мѣнять знакъ, если данная функція переходитъ чрезъ maximum или чрезъ minimum. Функція $\varphi(x)$ должна мѣнять знакъ по тѣмъ же правиламъ, какъ и $f'(x)$, т. е. по второй табличкѣ. Если трудно по внѣшнему виду судить о знакѣ функціи $\varphi(x)$, то перейдемъ къ производной этой функціи

$$\varphi'(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Если $\varphi(x)$ переходитъ чрезъ нуль и мѣняетъ знакъ, то по обѣ стороны $x = a$ можно найти два такіе довольно близкіе предѣла, между которыми эта функція либо непрерывно убываетъ, либо непрерывно возрастаетъ. Но въ такомъ случаѣ по первой табличкѣ $\varphi'(x)$ должна сохранять постоянный знакъ. Если $\varphi(x)$ переходитъ изъ положительнаго значенія въ отрицательное, то $\varphi'(x)$ отрицательна, если же $\varphi(x)$ переходитъ изъ отрицательнаго значенія въ положительное, то $\varphi'(x)$ положительна. Но изъ равенства (5) слѣдуетъ, что $\varphi'(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ противоположные знаки. Отсюда вытекаетъ **четвертая табличка:**

функція переходитъ чрезъ	*первая производная переходитъ чрезъ безконечность*	*вторая производная остается*
maximum		*положительною*
minimum		*отрицательною*

Если при $x = a$ первая производная обращается въ безконечность, то извѣстно, что при томъ же значеніи перемѣннаго и всѣ остальныя производныя также обращаются въ безконечности. По этой причинѣ разсмотримъ обратную по величинѣ функцію $\dfrac{1}{f''(x)}$, которая переходитъ чрезъ нуль и должна сохранять одинъ и тотъ же знакъ, если данная функція пріобрѣтаетъ maximum или minimum. Но если функція

$\frac{1}{f''(x)}$, сохраняя постоянный знакъ, переходитъ чрезъ нуль, то этотъ нуль будетъ maximum или minimum для функціи $\frac{1}{f''(x)}$.

Повторяя тѣже разсужденія, какъ и во второмъ случаѣ, мы на основаніи четвертой таблички приходимъ къ слѣдующему заключенію: *если изъ двухъ функцій $f(x)$ и $\frac{1}{f''(x)}$ одна пріобрѣтаетъ maximum при $x = a$, то другая пріобрѣтаетъ minimum при томъ же значеніи перемѣннаго; если одна изъ этихъ функцій непрерывно возрастаетъ, то другая непрерывно убываетъ.*

Такимъ образомъ нашъ вопросъ о maximum и minimum функціи $f(x)$ сводится къ подобному же вопросу для функціи $\frac{1}{f''(x)}$. Съ этою второю функціею можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какъ и съ первою.

Представителемъ этого случая можетъ быть функція, выражаемая формулой (2), гдѣ A—нѣкоторая постоянная величина, показатель n заключается между нулемъ и единицею, а функція $\varphi(x)$ при $x = a$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность.

Шестой случай. Остается разсмотрѣть еще одинъ случай, когда первая производная, при переходѣ перемѣннаго чрезъ $x = a$, измѣняется на конечную величину. Въ такомъ случаѣ нужно найти предѣлы выраженій

$$f'(a-h), \qquad f'(a+h), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{6}$$

съ приближеніемъ положительной величины h къ нулю. Данная функція имѣетъ maximum или minimum, если найденные предѣлы имѣютъ разные знаки.

Примѣромъ для этого случая можетъ служить функція:

$$f(x) = A + B(x-a)^2 \log(e^{\frac{1}{x-a}} + 1) + C(x-a),$$

гдѣ A, B и C—нѣкоторыя постоянныя величины. Предѣлы выраженій (6) для этого примѣра будутъ C и B.

Практическія упрощенія. Въ предыдущемъ мы видѣли, что вопросъ о maximum и minimum одной функціи приводится иногда къ подобному же вопросу для другой функціи, а для второй функціи подобнымъ же образомъ можетъ приводиться къ третьей и т. д. Можетъ случиться, что рядъ подобныхъ дѣйствій окажется безконечнымъ, что данная функція приводится къ другой—болѣе сложной. Такое обстоятельство дѣйствительно имѣетъ мѣсто, если первая или вторая производная обращается въ безконечность. Такимъ образомъ наша теорія оказывается несостоятельною. Но въ помощь теоріи можно дать нѣкоторыя практическія упрощенія, которыя при надлежащемъ навыкѣ всегда даютъ возможность привести задачу къ благополучному концу. На самомъ дѣлѣ мы видимъ, что наша задача приводится къ опредѣленію знаковъ первой, второй, либо какой-нибудь слѣдующей производной. Но знакъ всякаго выраженія не измѣнится, если мы его умножимъ или раздѣлимъ на такой множитель, который остается всегда положительнымъ.

Для примѣра положимъ, что намъ нужно найти наибольшее и наименьшее значеніе алгебраической дроби

$$\frac{F(x)}{\phi(x)}.$$

Беремъ производную

$$\frac{\phi(x)\,F'(x)-F(x)\phi'(x)}{\phi(x)^2}.$$

Такъ какъ вопросъ идетъ о знакѣ этого выраженія, то можно знаменателя отбросить. Остается выраженіе

$$\phi(x)\,F'(x)-F(x)\,\phi'(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Прежде всего нужно найти такія значенія x, при которыхъ это выраженіе обращается въ нуль. Пусть одно изъ этихъ значеній будетъ $x=a$. Теперь нужно изслѣдовать знакъ этого выраженія для сосѣднихъ значеній, для каковой цѣли беремъ производную

$$\phi(x)\,F''(x)-F(x)\phi''(x).$$

Остается подставить сюда $x=a$ и изслѣдовать знакъ полученнаго выраженія.

Для второго примѣра возьмемъ

$$\varphi(x)e^{\psi(x)}.$$

Для отысканія наибольшей и наименьшей величины этого выраженія беремъ производную

$$\varphi'(x)e^{\psi(x)}+\varphi(x)\,\psi'(x)e^{\psi(x)}.$$

Здѣсь можно отбросить положительный множитель $e^{\psi(x)}$, послѣ чего получимъ:

$$\varphi'(x)+\varphi(x)\,\psi'(x).$$

Далѣе съ этимъ выраженіемъ нужно поступать такъ, какъ и съ выраженіемъ (7).

Можно дать еще упрощенія другого рода. Положимъ, что намъ нужно отыскать знакъ $F(x)$ для значеній весьма близкихъ къ $x=a$. Полагая $x=a\pm h$, получаемъ выраженіе

$$F(a\pm h),$$

въ которомъ h есть какъ угодно малая величина. Разложимъ это выраженіе какимъ-нибудь образомъ на отдѣльные члены и отбросимъ члены высшихъ порядковъ. Задача приведется къ изслѣдованію знака оставшагося выраженія.

Дополненіе. Говоря о четвертомъ случаѣ, мы предполагали, что каждый изъ предѣловъ выраженій (3) не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Если же предѣлъ одного изъ выраженій (3) обращается въ нуль или въ безконечность, то знакъ такого выраженія остается неизвѣстнымъ. Для устраненія этого обстоятельства прежде всего нужно надъ выраженіями (3) произвести указанныя выше упрощенія.

Для примѣра положимъ въ выраженіи (4) $C=0$; тогда предѣлъ $f''(a-h)$ обращается въ нуль. Замѣчая же, что $\log(e^{-\frac{1}{h}}+1)$ всегда положителенъ, мы отсюда заключаемъ, что знакъ $f(a-h)$ одинаковъ со знакомъ выраженія

$$\frac{f''(a-h)}{\log(e^{-\frac{1}{h}}+1)}.$$

Это послѣднее выраженіе при $h=0$ обращается въ $2B$. Отсюда заключаемъ, что знакъ $f(a-h)$ одинаковъ со знакомъ B.

Сказанное здѣсь о четвертомъ случаѣ можетъ быть примѣнено и къ шестому случаю.

Кіевъ, 29 окт. 1891.