

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету
імені В.Н. Каразіна



№ 922

Харків
2010

K-14038

П333530

V.N. Karazin Kharkiv National University



00832115

8

Міністерство освіти та науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



№ 922

Серія :

**«Математика, прикладна математика
і механіка»**

Випуск 61

Заснована у 1965 р.

**Харків
2010**

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №11 від 29 жовтня 2010 р.).

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Пацегон Н. Ф. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинovich І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-29.

Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Інтернет:

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

Свідectво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

©Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2010

Ж-14038

Центральна наукова бібліотека
Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна

інв. №

Д 333530

ЗМІСТ

Николаев А.Г., Танчик Е.А. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала	4
Сыровацкий А.Н. Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром	20
Нескородева Т.В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на участках двух монотонно неубывающих кривых	32
Радченко Л.Д. Аналитические функции в плоскости без точки нуля	43
Герасименко В.А., Коломойцев Ю.С. Об эквивалентности K -функционалов и аппроксимационных методов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса	56
Чудинович Игорь Юрьевич (некролог)	65

CONTENTS

Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Local Mathematical Model of Granular Composite Material	4
Syrovatsky A. About one-dimensional perturbation of the selfadjoint operators with simple spectrum	20
Neskorodeva T.V. Wiener field restoration on the plane by its realizations on sites of two monotonously not decreasing curves.	32
Radchenko L.D. Analytic functions in a punctured plane	43
Gerasimenko V.A., Kolomoitsev Iu.S. On equivalence of K -functionals and approximation methods generated by generalized Bochner-Riesz kernels.	56
Chudinovich Igor Yuryevich (obituary)	65

Локальная математическая модель зернистого композиционного материала

А.Г. Николаев, Е.А. Танчик

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»
Украина*

Разработана локальная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в областях их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчик, **Локальна математична модель зернистого композиційного матеріалу.** Розроблено локальну математичну модель напружено-деформівного стану зернистого композиційного матеріалу, побудовану на узагальненому методі Фур'є. Чисельна реалізація моделі дозволила отримати характер розподілу локальних напружень в областях їхньої концентрації. Проведено порівняння результатів із рішенням методом кінцевих елементів.

A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik, **Local Mathematical Model of Granular Composite Material.** The local mathematical model of stress-strain state of granular composite material, based on a generalized Fourier's method, is developed. The numerical realization of model has allowed to receive character of distribution of local stress in the field of their concentration. The comparison of results with the solution on a finite element method is carried out.

2000 Mathematics Subject Classification 74E30.

Введение

В данный момент проводится большое количество исследований, связанных с разработкой моделей композиционных материалов и их применением в различных конструкциях. Композиционные материалы с их уникальными физико-механическими характеристиками с каждым годом вытесняют из

употребления в передовых отраслях машиностроения, таких как авиация и комонавтика, стали и цветные сплавы. Эта общая тенденция весьма устойчива, что делает данную область исследования очень перспективной.

Применение композитных материалов требует, однако, тщательного расчета и обоснования, так как механизмы деформирования и разрушения новых материалов еще очень слабо изучены. Существующие математические модели композитов в большинстве своем основаны на теории стохастических процессов и широком применении метода конечных элементов (МКЭ). Очень актуальной проблемой является создание численно-аналитических моделей для исследования локального напряженно-деформированного состояния (НДС) и получения физически точных решений. Основой подавляющего большинства всех таких моделей являются пространственные задачи теории упругости в различных постановках. Разные подходы к исследованию НДС моделей композиционных материалов приведены в работах [1, 2, 3]. Из многочисленных зарубежных публикаций на эту тему можно отметить [4, 5]. В первой из этих статей предложен метод определения эффективных упругих характеристик композиционных сред на основе решения плоских задач теории упругости с различными граничными условиями. Во второй – рассматривается модель композиционного материала со сферическими включениями с граничными условиями, допускающими скольжение на границе раздела фаз.

Анализ напряжений в окрестности одной полости канонической формы в изотропном и трансверсально-изотропном материалах стал возможным благодаря точным решениям уравнений теории упругости в канонических областях, полученных Ю. Н. Подильчуком [6]. Исследование НДС в многосвязных областях на основе обобщенного метода Фурье (ОМФ) проводилось в работах [7, 8]. В первой из этих статей рассмотрено напряженное состояние трансверсально-изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями, подробно изучено распределение напряжений на оси между полостями. Во второй – изучено НДС изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями на поверхностях полостей и на оси между ними для двух модификаций, рассмотренных нами и в настоящей статье, но с включениями. Для верификации громоздких выкладок приведено сравнение решения ОМФ с решением методом конечных элементов в пакете ANSYS Release 11.0.

В настоящей работе впервые предложена модель НДС зернистого композита, основанная на изучении локального поля напряжений в окрестности двух сфероидальных включений разной геометрической формы с помощью ОМФ. Предложенная модель позволяет получить приближенные аналитические формулы для описания зернистого композита, а также композита, армированного короткими волокнами в виде эллипсоидов вращения.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство Ω с двумя непересекающимися сфероидальными включениями Ω_i , расположенными на одной оси симметрии, с центрами, сдвинутыми друг относительно друга на a (рис. 1). На рисунке изображены две цилиндрические системы координат $O_1\rho_1\varphi_1z_1$ и $O_2\rho_2\varphi_2z_2$. На рис. 2 приведен частный случай модели «А», также рассматриваемый нами при численной реализации задачи.

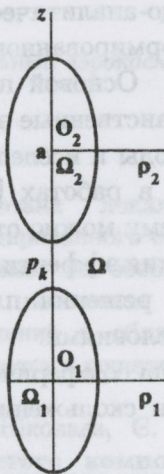


Рис. 1: Схематическое представление геометрической интерпретации задачи: при численной реализации модель «А»

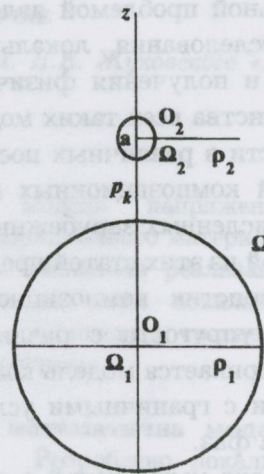


Рис. 2: Частный случай модели «А»: при численной реализации модель «Б»

Уравнения граничных поверхностей включений в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) имеют вид:

$$\partial\Omega_i: \frac{z_i^2}{d_{1i}^2} + \frac{\rho^2}{d_{2i}^2} = 1; \quad (1)$$

где d_{1i} и d_{2i} – большая и малая полуоси сфероидов соответственно, под $\partial\Omega_i$ понимаем границу области Ω_i , $i = 1, 2$; $z_1 = z_2 + a$.

Общие решения краевой задачи для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\mu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

в областях Ω и Ω_i согласно концепции обобщенного метода Фурье строятся как суперпозиции линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сфероида и имеют вид (3) и (4) соответственно [9]:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(i)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_i, \eta_i, \varphi); \quad (4)$$

где для:

$$\text{— одноосного растяжения: } \mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_0 \mu \rho}{G(\mu+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 z}{G(\mu+1)} \mathbf{e}_z; \quad (5)$$

$$\text{— двусосного растяжения: } \mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_0(\mu-1)\rho}{G(\mu+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 \mu z}{G(\mu+1)} \mathbf{e}_z; \quad (6)$$

$\mathbf{U}$ – функция перемещений; μ – коэффициент Пуассона; σ_0 – растяжение на бесконечности; $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат; G – модуль сдвига. В области Ω упругие характеристики – G, μ , в области Ω_i – G_i, μ_i соответственно; $\mathbf{U}_{i,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi)$ – линейно независимые частные решения уравнения Ламе для сфероида, вводимые нами ниже; (ξ, η, φ) – вытянутые сфероидальные координаты. Здесь и в дальнейшем: индексы в обозначении координат (ξ_j, η_j, φ) поставлены там, где необходимо подчеркнуть, что имеется ввиду система координат, связанная с конкретным сфероидом.

На границе раздела сред необходимо удовлетворить граничные условия по перемещениям и напряжениям:

$$u_\rho|_{\Gamma_i} = u_\rho^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad u_z|_{\Gamma_i} = u_z^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad (7)$$

$$F_\rho|_{\Gamma_i} = F_\rho^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad F_z|_{\Gamma_i} = F_z^{(i)}|_{\Gamma_i}. \quad (8)$$

В формулах (7) – (8) введены следующие обозначения: u_ρ, u_z и F_ρ, F_z – компоненты векторов перемещений и напряжений соответственно в цилиндрических координатах в области Ω . Величины с верхним индексом (i) относятся к областям Ω_i .

Функции перемещений и напряжений связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]; \quad (9)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к площадке границы.

Вводятся две сфероидальные системы координат (ξ_i, η_i, φ) , связанные с введенными цилиндрическими координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta_1 &= c_2 \operatorname{sh} \xi_2 \sin \eta_2; \\ c_1 \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta_1 &= a + c_2 \operatorname{ch} \xi_2 \cos \eta_2, \end{cases} \quad (10)$$

где a – расстояние между центрами; c_i – параметры сфероидальных систем координат. Принимая во внимание известные соотношения между совмещенными цилиндрическими и вытянутыми сфероидальными системами координат, первую из системы формул (8) можем записать: $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$, а вторую: $z_1 = a + z_2$. Уравнения поверхностей включений (1) в сфероидальных

координатах могут быть записаны в виде $\xi_i = \xi_{0i}$. Условие непересечения граничных поверхностей имеет вид:

$$d_{11} + d_{12} < a, \quad (11)$$

где d_{11} и d_{12} – большие полуоси первого и второго сфероидов соответственно.

2. Построение общего решения

Введем следующую пару линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сфероида[10]:

$$U_{1,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{c}{2n+1} \nabla \left[u_{n-1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad (12)$$

$$U_{2,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = [z \nabla + (4\mu - 3) \mathbf{e}_z] u_{n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - cq_0^2 \nabla u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \quad (13)$$

$$u_{n,m}^{+(5)} = Q_n^{-m}(\text{ch } \xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad u_{n,m}^{-(5)} = P_n^{-m}(\text{ch } \xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad (14)$$

где P_n^m и Q_n^m – присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода; $q_0 = \text{ch } \xi_0$. Знак «+» в верхнем индексе формул соответствует внешним решениям уравнения Ламе, «-» – внутренним. В решениях (10) – (11), отвечающих граничной поверхности $\partial\Omega_i$, надо выбрать $\xi = \xi_{0i}$. Формулы (10) – (11) в координатной форме имеют вид:

$$U_{1,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = -u_{n,1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_\rho - u_{n,0}^{\pm(5)} \mathbf{e}_z; \quad (15)$$

$$U_{2,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = -qu_{1,n,1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_\rho - \left[qu_{1,n,0}^{\pm(5)} + (3 - 4\mu) u_{n,0}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_z + \\ + c(q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}; \quad (16)$$

$$u_{n,m}^{+}(\xi) = Q_n^{-m}(q); \quad u_{1,n,m}^{+}(\xi) = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q);$$

$$u_{n,m}^{-}(\xi) = P_n^{-m}(q); \quad u_{1,n,m}^{-}(\xi) = (n-m)P_{n-1}^{-m}(q);$$

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}.$$

Применив к формулам (13) – (14) оператор (7), получим координатную запись напряжений, отвечающих базисным решениям в точках поверхности $\xi_i = \xi_{0i}$ на площадках с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$:

$$\mathbf{F}U_{i,n,0}^{\pm(5)} = -2G \frac{h}{c} \left[s_{n,1}^{\pm(i)}(\xi) P_n^1(\cos \eta) \mathbf{e}_\rho + s_{n,0}^{\pm(i)}(\xi) P_n^0(\cos \eta) \mathbf{e}_z \right] \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad (17)$$

$$s_{n,1}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} u_{n,1}^{\pm}; \quad s_{n,1}^{\pm(2)}(\xi) = -q^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u_{1,n,1}^{\pm}}{q} \right) + 2\mu u_{n,0}^{\pm};$$

$$s_{n,0}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm}; \quad s_{n,0}^{\pm(2)}(\xi) = -q^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u_{1,n,0}^{\pm}}{q} \right) - (1 - 2\mu) \frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm};$$

В этих формулах $q = \operatorname{ch} \xi$, $h = 1/\sqrt{q^2 - \cos^2 \eta}$. Для удовлетворения граничных условий на сфероидальных включениях необходимо преобразовать общее решение в отдельности к каждой сфероидальной поверхности. Для этого используем теоремы сложения решений (10) – (11), отнесенных к разным началам [10]:

$$U_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[\delta_{ij} h_{ns}^{(11)12} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)12} \right] U_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi); \quad (18)$$

$$U_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[\delta_{ij} h_{ns}^{(11)21} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)21} \right] U_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi); \quad (19)$$

$$h_{ns}^{(11)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \beta_{kn} Q_{s,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)12} = h_{ns}^{(11)12};$$

$$h_{ns}^{(11)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \beta_{ks} Q_{n,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)21} = h_{ns}^{(11)21};$$

$$h_{ns}^{(21)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \times \\ \times \left[\beta_{kn} \left(c_2 q_{20}^2 Q_{s+1,k+1}^{(1)} - a Q_{s,k+1}^{(1)} \right) - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,n+1} Q_{s,k+2}^{(1)} \right];$$

$$h_{ns}^{(21)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \times \\ \times \left[\beta_{ks} \left(c_2 q_{20}^2 Q_{n+1,k+1}^{(1)} - a Q_{n,k+1}^{(1)} \right) - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,s+1} Q_{n,k+2}^{(1)} \right];$$

В этих формулах: δ_{ij} – символ Кронекера; Γ – гамма-функция Эйлера;

$$\beta_{kn} = \sqrt{\pi} \left(\frac{c_1}{2} \right)^k \frac{\varepsilon_{kn}}{\Gamma((k-n)/2 + 1) \Gamma((k+n)/2 + 3/2)};$$

$$Q_{s,k}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - c_2^2}} \right)^k Q_s^k \left(\frac{a}{c_2} \right); \quad \varepsilon_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{если } k - n = 2l, \\ 0 & \text{если } k - n = 2l + 1. \end{cases}$$

Преобразование решения к системе координат, связанной с центром O_1 :

$$U = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} U_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + U_0 = \\ = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} U_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} U_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) \right] + U_0. \quad (20)$$

Преобразование решения к системе координат, связанной с центром O_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + \mathbf{U}_0 = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

В этих формулах $\tilde{a}_{n,i}^{(2)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s,l}^{(2)} \left(\delta_{li} h_{sn}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{l2} h_{sn}^{(21)21} \right)$; $\tilde{a}_{n,i}^{(1)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s,l}^{(1)} \left(\delta_{li} h_{sn}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{l2} h_{sn}^{(21)12} \right)$. Приравняв (3) и (4), с использованием (18) – (19) удовлетворим условиям на границе раздела сред:

– по перемещениям на поверхности $\partial\Omega_1$ ($\xi_1 = \xi_{10}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(1)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi); \end{aligned} \quad (22)$$

– по перемещениям на поверхности $\partial\Omega_2$ ($\xi_2 = \xi_{20}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(2)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi); \end{aligned} \quad (23)$$

– по напряжениям на поверхности $\partial\Omega_1$ ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi, \xi_1 = \xi_{10}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) \right] + \mathbf{F} \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi); \end{aligned} \quad (24)$$

– по напряжениям на поверхности $\partial\Omega_2$ ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi, \xi_2 = \xi_{20}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{F} \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi). \end{aligned} \quad (25)$$

В формулах (24) – (25) для одноосного растяжения $\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = \sigma_0 h \operatorname{sh} \xi \cos \eta \mathbf{e}_z$, для двuosного растяжения – $\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = \sigma_0 h \operatorname{ch} \xi \sin \eta \mathbf{e}_\rho$. Раскладываем левые и правые части граничных условий (22) – (25) в ряды по функциям Лежандра $P_n^1(\cos \eta)$ (компонента $\mathbf{e}_\rho$) и $P_n(\cos \eta)$ (компонента $\mathbf{e}_z$). Таким образом, после удовлетворения граничным условиям получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) (26) – (33) относительно $a_{n,i}^{(j)}, b_{n,j}^{(i)}$; $i = 1..2$, $j = 1..2$:

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu) - b_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = \frac{d_{21} \mu \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu) - b_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = -\frac{d_{11} \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{-(i)}(\xi_{20}, \mu) - b_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{-(i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = \frac{d_{22} \mu \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{-(i)}(\xi_{20}, \mu) - b_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{-(i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = -\frac{d_{12} \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu) - (G_1/G) b_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = 0; \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu) - (G_1/G) b_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{-(i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = \frac{d_{21} \sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{+(i)} (\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{-(i)} (\xi_{20}, \mu) - (G_2/G) b_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{-(i)} (\xi_{20}, \mu_2) \right] = 0; \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{+(i)} (\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{-(i)} (\xi_{20}, \mu) - (G_2/G) b_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{-(i)} (\xi_{20}, \mu_2) \right] = \frac{d_{22}\sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \quad (33)$$

Решаем систему методом редукции, полагая $n = 1, 2, \dots$, причем $a_{0,i}^{(j)} = b_{0,j}^{(i)} = 0$. В формулах (26) – (29) введены обозначения: $r_{n,1}^{\pm(1)} = -u_{n,1}^{\pm}$; $r_{n,0}^{\pm(1)} = -u_{n,0}^{\pm}$; $r_{n,1}^{\pm(2)} = -qu_{1,n,1}^{\pm}$; $r_{n,0}^{\pm(2)} = -qu_{1,n,0}^{\pm} - (3 - 4\mu)u_{n,0}^{\pm}$. Вектор-столбец правых частей БСЛАУ (26) – (33) соответствует случаю одноосного растяжения. Для двuosного растяжения вектор-столбец правых частей имеет следующий вид:

$$\mathbf{B}^T = \left[-\frac{d_{21}(\mu - 1)\sigma_0}{2G(\mu + 1)}, \frac{d_{11}\mu\sigma_0}{G(\mu + 1)}, -\frac{d_{22}(\mu - 1)\sigma_0}{2G(\mu + 1)}, \frac{d_{12}\mu\sigma_0}{G(\mu + 1)}, \frac{d_{11}\sigma_0}{2G}, 0, \frac{d_{12}\sigma_0}{2G}, 0 \right] \delta_{n1}. \quad (34)$$

3. Анализ результатов

Предложенный выше алгоритм аналитического решения рассматриваемой задачи был реализован в системе компьютерной математики (СКМ) Maple 13.0. Численное исследование на сходимость решений системы (26) – (33) показало, что достаточно высокая точность достигается при размерности системы 80×80 (в бесконечных суммах удерживаем 10 слагаемых). Сходимость метода редукции проиллюстрирована на рис. 3. Каждой кривой соответствует последовательно $N = 1, 2, \dots$ и так далее до $N = 10$ (N – количество удерживаемых в бесконечных суммах слагаемых). Для каждого случая решена соответствующая система уравнений, найдены напряжения σ_z/σ_0 и нанесены на сравнительный график. Из анализа графиков на рис. 3 можно сделать вывод, что сходимость метода редукции очевидна, а дальнейшее увеличение удерживаемых в бесконечных суммах слагаемых не приводит к существенному улучшению точности.

Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности двух вытянутых сфероидов рассмотрим две характерные модели, приведенные на рис. 1 и 2. Первая модель «А» представляет собой два одинаковых сфероида. Вторая модель «Б» представляет собой неодинаковые сфероиды с почти равными полуосями, являясь приближением модели «сфера - сфера».

Для модели «А» межосевое расстояние будем изменять следующим образом: $a = (2.2; 2.5; 3; 4) d_{12}$, где d_{12} – малая полуось сфероида, для

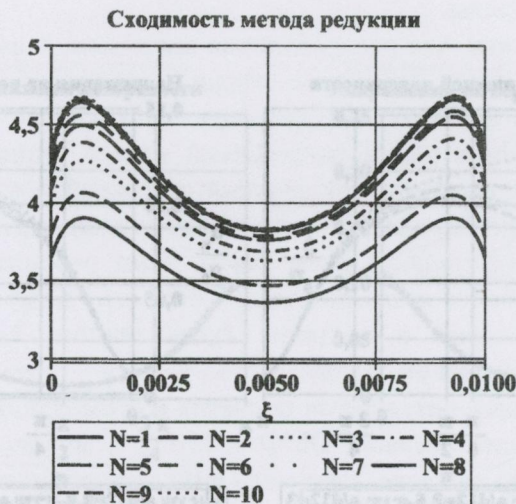


Рис. 3: Сходимость метода редукции

модели «Б» — $a = (8; 10; 12; 15) d_{12}$, где d_{12} — малая полуось малого сфероида. Численно задача решалась для смеси алюмоборосиликатного стекла (зерна) и эпоксидномалеиновой смолы (матрица) с такими характеристиками: $\mu = 0.382$; $\mu_i = 0.2$; $G_i/G \approx 25$.

На рис. 4 – 7 приведены результаты решения для главных компонент тензора напряжений (величины отнесены к σ_0 — растяжению на бесконечности) в сфероидальных координатах для одноосного растяжения на границах раздела сред, т.е. на поверхности включений. Напряжения σ_φ на порядок меньше двух других компонент и их графики здесь не приводятся.

Из анализа графиков можно сделать вывод, что для одноосного растяжения для обеих моделей на поверхности включений преобладающими являются контактные давления σ_ξ , а также при сближении включений происходит концентрация напряжений у смежных полюсов сфероидов. Следует отметить, что зеркальный (одинаковый, если соответствующим образом выбрать направление обхода по углу η) вид графиков слева и справа на рис. 4, 6, а также симметрия кривых на рис. 8 (слева) может служить косвенной проверкой достоверности полученных решений и громоздких формул, т.к. эти графики соответствуют симметричной модели «А» с симметричными граничными условиями.

На рис. 8 представлены графики напряжений σ_z на оси между включениями для моделей «А» и «Б» при одноосном растяжении в зависимости от изменения межосевого расстояния. Для модели «А» наблюдается концентрация напряжений σ_z между включениями при их сближении. Для модели «Б» максимальные напряжения практически не меняются в зависимости от расстояния между включениями.

Авторами также получены графики для случая двуосного растяжения

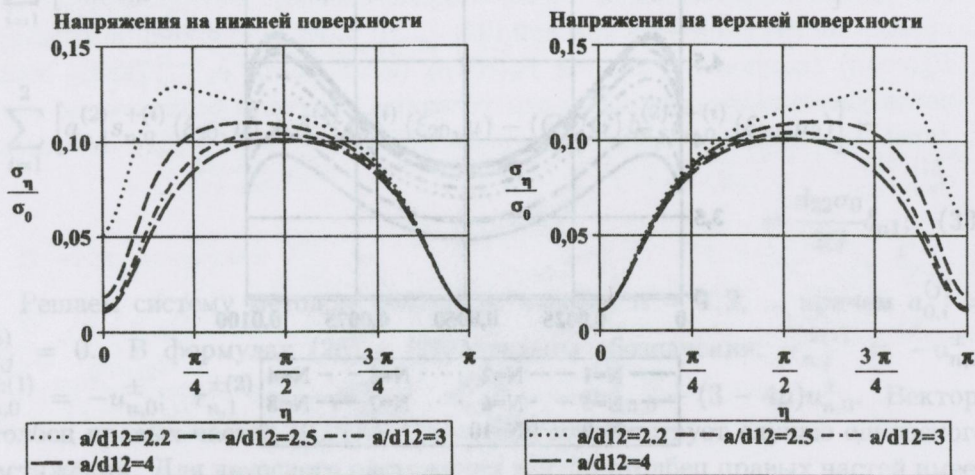


Рис. 4: Напряжения σ_η на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «А» при одноосном растяжении

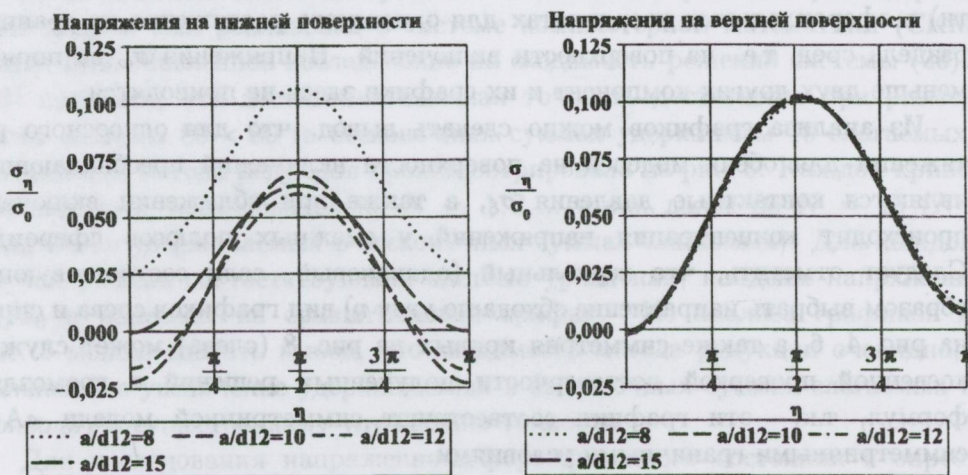


Рис. 5: Напряжения σ_η на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «Б» при одноосном растяжении

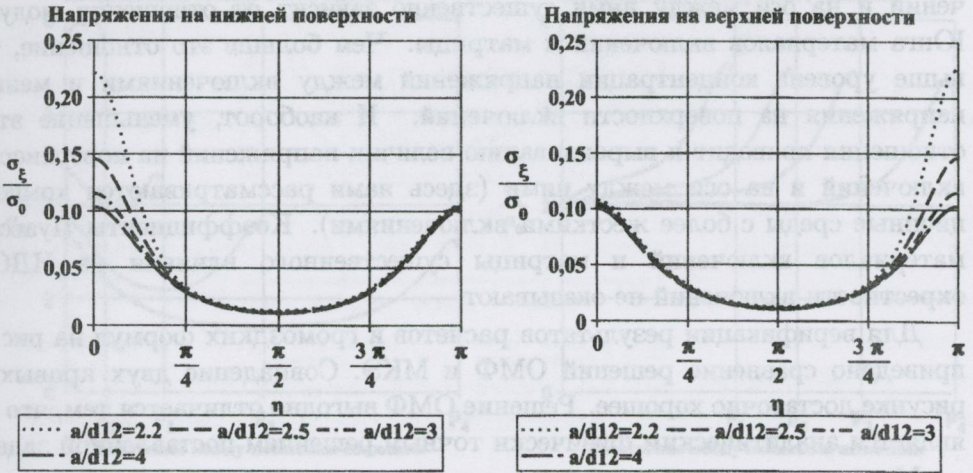


Рис. 6: Напряжения σ_ξ на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «А» при одноосном растяжении

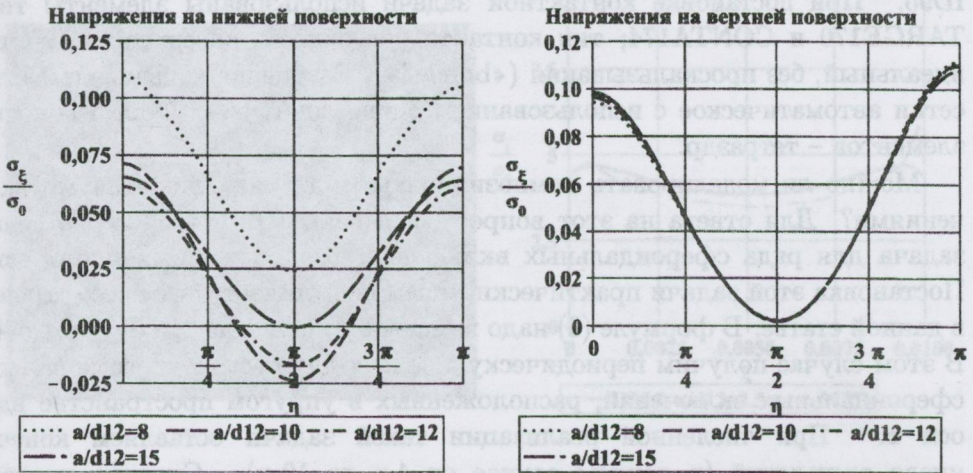


Рис. 7: Напряжения σ_ξ на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «Б» при одноосном растяжении

композиционной среды.

Следует отметить, что распределение напряжений на поверхности включений и на оси между ними существенно зависит от отношения модулей Юнга материалов включений и матрицы. Чем больше это отношение, тем выше уровень концентрации напряжений между включениями и меньше напряжения на поверхности включений. И наоборот, уменьшение этого отношения приводит к выравниванию величин напряжений на поверхностях включений и на оси между ними (здесь нами рассматриваются композиционные среды с более жесткими включениями). Коэффициенты Пуассона материалов включений и матрицы существенного влияния на НДС в окрестности включений не оказывают.

Для верификации результатов расчетов и громоздких формул на рис. 10 приведено сравнение решений ОМФ и МКЭ. Совпадение двух кривых на рисунке достаточно хорошее. Решение ОМФ выгодно отличается тем, что оно является аналитическим физически точным решением поставленной задачи.

Методом конечных элементов решена трехмерная контактная задача в пакете ANSYS Release 11.0. Для этого рассмотрена четвертая часть массивного тела в форме прямоугольного параллелепипеда с двумя сфероидальными включениями. На соответствующие поверхности наложены граничные условия симметрии. Границы тела находятся на расстоянии 10-и характерных размеров от поверхности включений (за характерный размер принята удвоенная большая полуось сфероида). Конечноэлементная сетка в окрестности границы раздела фаз представлена на рис. 9. При построении конечноэлементной сетки использованы элементы типа SOLID95. При постановке контактной задачи использованы элементы типов TARGE170 и CONTA174; тип контакта поверхность-поверхность, контакт идеальный, без проскальзывания («bonded»). Разбиение конечноэлементной сетки автоматическое с использованием опции smart size. Форма конечных элементов – тетраэдр.

Можно ли моделировать композиционный материал лишь двумя включениями? Для ответа на этот вопрос обобщенным методом Фурье решена задача для ряда сфероидальных включений, расположенных вдоль оси z . Постановка этой задачи практически ничем не отличается от рассмотренной в данной статье. В формуле (3) надо изменять j не от 1 до 2, а от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае получим периодическую задачу для бесконечного количества сфероидальных включений, расположенных в упругом пространстве вдоль оси z . При численной реализации такой задачи оставляем конечное число включений (в данном случае от 4-х до 10-и). Следует отметить, что мы учитываем все без исключения взаимовлияния включений друг на друга. Это достигается с использованием теорем сложения (16) – (17). Предметом исследования явились напряжения σ_z между средними включениями. На рис. 11 приведен сравнительный график напряжений σ_z между средними включениями для 2-х, 4-х, 6-и, 8-и и 10-и включений. Как видно из графика кривые для 8-и и 10-и включений практически

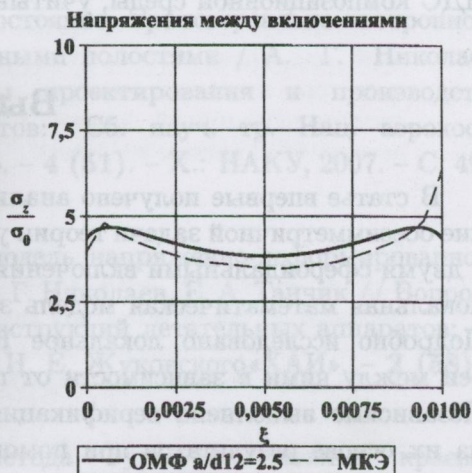


Рис. 9: Конечноэлементная модель

Рис. 10: Напряжения σ_z на оси между включениями в сравнении с решением методом конечных элементов для модели «А» при одноосном растяжении



Рис. 11: Напряжения σ_z на оси между средними включениями для 2-х, 4-х, 6-и, 8-и и 10-и включений для модели «А» при одноосном растяжении

сливаются. Дальнейшее добавление включений не должно привести к увеличению уровня напряжений. Таким образом, можно сделать вывод, что по крайней мере в первом приближении можно моделировать локальное НДС композиционной среды, учитывая всего два включения.

Выводы

В статье впервые получено аналитическое асимптотически точное решение осесимметричной задачи теории упругости для изотропного пространства с двумя сфероидальными включениями. На основе этой задачи предложена локальная математическая модель зернистого композиционного материала. Подробно исследовано локальное НДС на поверхности включений и на оси между ними в зависимости от геометрических параметров включений. Независимо выполнена верификация громоздких выкладок и полученных на их основе результатов при помощи решения задачи методом конечных элементов.

Рассматриваемый в статье подход к решению задачи распространен на периодическую задачу для бесконечного количества сфероидальных включений, расположенных в упругом пространстве вдоль оси z .

Результаты расчетов, приведенные в статье, могут быть использованы в дальнейшем при определении упругих интегральных характеристик композиционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. – К.: Наук. думка, 1987. – 304 с.
2. Куц В. И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями // Прикладная механика. – 1995. – 31, №3. – С. 32 – 39.
3. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / отв. ред. А. И. Мошев. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. – 507 с.
4. F. Bouyge. A Micromechanically Based Couple-Stress Model of An Elastic Two-Phase Composite / Bouyge F., Jasuik I., Ostoja-Starzewski M. // International Journal of Solids and Structures. – Elsevier Science Publishing Company, 2001. – 38, №10 – 13. – P. 1721 – 1735.
5. J. H. Huang. Elastic Fields in Polycrystalline or Composite Materials with Slip Inclusions // International Journal of Engineering Science. – Elsevier Science Publishing Company, 1995. – 33, №9. – P. 1303 – 1313.
6. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – 1: Граничные задачи статики упругого тела – К.: Наук. думка, 1984. – 303 с.
7. Николаев А. Г. Напряженное состояние трансверсально-изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 4 (51). – Х.: НАКУ, 2007. – С. 49 – 54.
8. Николаев А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 2 (58). – Х., 2009. – С.48 – 58.
9. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998, 2. – С. 78 – 83.
10. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнений Ламе – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

Статья получена: 23.03.2010; окончательный вариант: 22.10.2010;
принята: 22.10.2010.

Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром

А.Н. Сыровацкий

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина*

Одна из важнейших задач теории возмущений состоит в изучении спектра возмущенного оператора и описании спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который дает решение этой задачи в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. В данной работе получен бесконечномерный аналог этого утверждения для операторов с простым дискретным спектром.

Сыровацкий О.М. **Об одновимірному збуренні самосполучених операторів з простим спектром.** Одне з найважливіших завдань теорії збурень полягає у вивченні спектру збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. Класичним результатом, який дає рішення цієї задачі в скінченновимірному випадку для операторів з простим спектром, є теорема Льовнера. В роботі отриман нескінченновимірний аналог цього твердження для операторів з простим дискретним спектром.

Syrovatsky A. **About one-dimensional perturbation of the self-adjoint operators with simple spectrum.** One of major tasks of perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe spectral projectors of it. A classic result which gives the solution of this task in finite-dimensional case for operators with a simple spectrum is the Lowner theorem. In the paper the infinite-dimensional analogue of this statement for operators with a simple discrete spectrum is obtained.

2000 Mathematics Subject Classification 47A55.

1. Предварительные сведения.

Начало спектральной теории возмущений восходит к работам Г.Вейля [1](1909), Ф.Реллиха [2](1936) и К.Фридрихса [3](1939). В частности, Г.Вейлю [1] принадлежит теорема об инвариантности непрерывной части спектра самосопряженного оператора при вполне непрерывном возмущении.

В работах Т. Като [4] и М. Роземблюма [5] показано, что абсолютно непрерывная часть спектра инвариантна при конечномерных возмущениях.

В данной работе изучается спектр самосопряженных операторов при одномерных возмущениях. Решается как прямая, так и обратная задачи, то есть нахождение возмущения по двум спектрам возмущенного и невозмущенного операторов. В конечномерном пространстве для самосопряженного оператора с простым спектром данная задача была решена К. Лёвнером [6]. Обобщению этого результата на бесконечномерный случай и посвящена данная работа. В статье Л.П. Нижника [7] изучались одномерные возмущения неограниченных операторов, были получены формулы для резольвенты возмущенного оператора, однако задача о восстановлении одномерного возмущения по двум спектрам не рассматривалась.

Пусть A — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим одномерное возмущение оператора A

$$Bh = Ah + c < h, \varphi > \varphi, \quad (1)$$

где h и φ из H , а $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$.

Так как

$$(B - \lambda I)h = (A - \lambda I)h + c < h, \varphi > \varphi \quad (h \in H, \lambda \in \mathbb{C}),$$

то, полагая $h = R_\lambda(A)f$ ($R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $f \in H$) и умножая на $R_\lambda(B) = (B - \lambda I)^{-1}$ (где λ не принадлежит спектру A и B), мы получим, что

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(B)f + c < R_\lambda(A)f, \varphi > R_\lambda(B)\varphi. \quad (2)$$

Пусть $f = \varphi$, тогда

$$R_\lambda(B)\varphi = R_\lambda(A)\varphi - c < R_\lambda(A)\varphi, \varphi > R_\lambda(B)\varphi,$$

поэтому

$$R_\lambda(B)\varphi = \frac{1}{1 + c < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >} R_\lambda(A)\varphi.$$

Подставляя данное выражение в (2), мы окончательно получим

$$R_\lambda(B)f = R_\lambda(A)f - \frac{< R_\lambda(A)f, \varphi >}{\frac{1}{c} + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >} R_\lambda(A)\varphi, \quad (3)$$

где f — произвольный вектор из H . Итак, мы доказали теорему.

Теорема 1 Пусть A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , оператор B — его одномерное возмущение (1). Тогда резольвента оператора B имеет вид (3).

Определение 1 Комплекснозначная функция $f(z)$ называется неванлинновской (класса N [8], стр.120), если $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}_{\pm} = \{z \in \mathbb{C}; \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, $\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \geq 0$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$).

Рассмотрим выражение (3) и обозначим через $m(\lambda)$ функцию

$$m(\lambda) = 1/c + \langle R_{\lambda}(A)\varphi, \varphi \rangle. \quad (4)$$

Как известно, функция $m(\lambda)$ является неванлинновской (см. [9], стр. 242).

2. Теорема Лёвнера для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве.

В данном разделе мы изложим результат Лёвнера [6], при этом метод его доказательства отличается от первоначального и естественным образом переносится на бесконечномерный случай (см. раздел 3).

Предположим, что A — линейный самосопряженный оператор с простым спектром, действующий в конечномерном пространстве H ($\dim H = n < \infty$). Оператор B — одномерное возмущение вида (1).

Обозначим через $\{\alpha_k\}_1^n$ собственные числа оператора A , которые занумерованы в порядке возрастания $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n$.

По Теореме 1 резольвента оператора B имеет вид (3). Следовательно, особенностями резольвенты $R_{\lambda}(B)$ могут быть числа $\{\alpha_k\}_1^n$ и нули выражения $m(\lambda)$ (4), $m(\lambda) = 0$.

Покажем, что числа $\{\alpha_k\}_1^n$ не являются особенностями резольвенты $R_{\lambda}(B)$ для векторов φ общего положения:

$$\langle \varphi, h_k \rangle \neq 0, \quad \forall h_k : Ah_k = \alpha_k h_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Лемма 1 Особенностями $R_{\lambda}(B)$, где B имеет вид (1) и φ удовлетворяет условию (5), могут быть лишь те λ , при которых $m(\lambda) = 0$.

Доказательство. Выберем в пространстве H ортонормированный базис из собственных векторов оператора A , то есть, базис $\{h_k\}_1^n$ такой, что $Ah_k = \alpha_k h_k$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\{\xi_k\}_1^n$ — координаты вектора φ в этом базисе, то есть $\varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i h_i$, причем $\xi_i \neq 0$ для $\forall i : i = \overline{1, n}$ в силу условия (5).

Так как $Ah_k = \alpha_k h_k$, то $(A - \lambda I)h_k = (\alpha_k - \lambda)h_k$. Поэтому для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$ имеем: $R_{\lambda}(A)h_k = \frac{h_k}{\alpha_k - \lambda}$. Следовательно,

$$R_{\lambda}(A)\varphi = \sum_{k=1}^n \xi_k R_{\lambda}(A)h_k = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda}$$

$$m(\lambda) = 1/c + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle = 1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}.$$

Возьмём произвольный вектор g из H , пусть $\{\nu_k\}_1^n$ – его координаты в базисе $\{h_k\}_1^n$. Тогда

$$R_\lambda(A)g = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k h_k}{\alpha_k - \lambda} \text{ и } \langle R_\lambda(A)g, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \bar{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3), мы олучим, что

$$R_\lambda(B)g = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k h_k}{\alpha_k - \lambda} - \frac{(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \bar{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda})(\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda})}{1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}}. \quad (6)$$

Преобразовав выражение (6), мы получим, что коэффициент при $\frac{1}{\alpha_k - \lambda}$ в числителе этой дроби равен

$$\nu_k h_k |\xi_k|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - \lambda) - \nu_k \bar{\xi}_k \xi_k h_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - \lambda) \equiv 0.$$

То есть, числитель дроби (6) не имеет особенностей в точках α_k ($1 \leq k \leq n$). В этих точках не обращается в нуль и знаменатель дроби. Действительно, если в точках α_k знаменатель дроби равен 0, то $|\xi_k|^2 = 0$, а это не так.

Таким образом, особенностями дроби (4) могут быть лишь те λ , при которых $m(\lambda) = 1/c + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle = 0$, причем числа $\{\alpha_k\}_1^n$, $1 \leq k \leq n$ не являются нулями этого выражения.

■

Замечание 1 Если вектор φ из (1) не является вектором общего положения, то есть, $\exists h_k : \langle \varphi, h_k \rangle = 0$, где $Ah_k = \alpha_k h_k$, то из (1) следует, что $Bh_k = Ah_k + c \langle h_k, \varphi \rangle \varphi = Ah_k = \alpha_k h_k$. Таким образом, собственное значение α_k оператора A является собственным значением оператора B .

Следующая теорема характеризует спектр оператора B вида (1).

Теорема 2 Пусть оператор A – линейный самосопряженный оператор с простым спектром, действующий в конечномерном пространстве; $\{\alpha_i\}_1^n$ – собственные значения оператора A , занумерованные в порядке возрастания; B – оператор вида (1), $\langle \varphi, h_k \rangle \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Тогда спектр оператора B – простой и собственные числа $\{\beta_i\}_1^n$ ($\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$) оператора B перемежаются с числами $\alpha_1 \dots \alpha_n$, то есть, на каждом интервале (α_k, α_{k+1}) существует единственное собственное значение оператора B , причем при $c > 0$: $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$, а при $c < 0$: $\beta_1 < \alpha_1 < \dots < \beta_n < \alpha_n$.

Доказательство. Как было показано выше, числа $\beta_1 \dots \beta_n$ являются нулями функции $m(\lambda)$. Так как $m(\lambda)$ — неванлиновская функция, то $\beta_1 \dots \beta_n$ — вещественные числа. Далее будем рассматривать функцию $m(\lambda)$ при вещественном аргументе:

$$m(x) = 1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}. \quad (7)$$

Рассмотрим интервал (α_k, α_{k+1}) . При $x \rightarrow \alpha_k + 0$ все слагаемые, кроме $\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}$, в выражении (7) стремятся к конечному пределу, а $\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x} \rightarrow -\infty$.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \alpha_k + 0} m(x) = -\infty$. Аналогично, $\lim_{x \rightarrow \alpha_{k+1} - 0} m(x) = +\infty$.

Рассмотрим производную функции $m(x)$ на интервале (α_k, α_{k+1}) :

$$m'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{(\alpha_k - x)^2} > 0, \quad \forall x \in (\alpha_k, \alpha_{k+1}).$$

Функция $m(x)$ непрерывна на (α_k, α_{k+1}) . Таким образом, функция $m(x)$ монотонно возрастает с $-\infty$ на $+\infty$ и непрерывна на этом интервале. А это значит, что на этом интервале существует единственный корень уравнения $m(x) = 0$. И это справедливо для любого $k: 1 \leq k \leq n-1$.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 1/c$, то при $c > 0: \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$, а при $c < 0: \beta_1 < \alpha_1 < \dots < \beta_n < \alpha_n$.

Следующая теорема является обратной к теореме 2.

Теорема 3 (Лёвнера [6]). Пусть даны вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$, где $\{\alpha_i\}_1^n$ — собственные значения линейного самосопряженного оператора A , действующего в n -мерном пространстве H . Тогда существует оператор P ранга 1: $Ph = c < h, \varphi > \varphi$, где h — произвольный вектор из H , $\varphi \in H$, c — скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^n$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.

Доказательство. Возьмем в качестве базиса в пространстве H собственные векторы оператора A . Пусть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — координаты искомого вектора φ в этом базисе. Тогда числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ будут корнями уравнения

$$1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = 0.$$

Выражение в левой части уравнения можно преобразовать следующим

образом:

$$1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \frac{1}{c} \frac{P_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda)},$$

где $P_n(\lambda)$ – многочлен степени n . Так как корнями этого выражения являются числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то $P_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\beta_k - \lambda)$. Значит,

$$1/c + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \frac{1}{c} \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - \lambda}{\alpha_k - \lambda} = 1/c + \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{c} \sigma_k}{\alpha_k - \lambda},$$

где σ_k – некоторые известные положительные числа, определяемые данным равенством.

Приравнявая коэффициенты при $\frac{1}{\alpha_k - \lambda} : 1 \leq k \leq n$, получаем систему:

$$\begin{cases} |\xi_1|^2 = \frac{1}{c} \sigma_1 \\ \dots \\ |\xi_n|^2 = \frac{1}{c} \sigma_n \end{cases}.$$

Выберем произвольное число $c > 0$, тогда из этой системы легко найти $\xi_k : 1 \leq k \leq n$, правда, неединственным образом.

Замечание 2 Для случая $c < 0$ и $\beta_1 < \alpha_1 < \dots < \beta_n < \alpha_n$ нужно применить теорему к оператору $-B = -A + P$ и к числам $-\alpha_n < -\beta_n < \dots < -\alpha_1 < -\beta_1$.

3. Обобщение теоремы Лёвнера на случай оператора в бесконечномерном пространстве.

Пусть A – линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, действующий в бесконечномерном гильбертовом сепарабельном пространстве H , спектр которого состоит из счетного числа изолированных точек единичной кратности.

Обозначим через $\{\alpha_k\}_1^\infty$ собственные числа оператора A , которые занумерованы в порядке возрастания, то есть $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$ [9, с. 273].

Пусть оператор B является возмущением оператора A вида (1). Согласно теореме 1 резольвента оператора B имеет вид (3), причем особенности резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть лишь числа $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и нули выражения

$$m(\lambda) = 1/c + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Как и в случае конечномерного пространства H будем рассматривать вектор общего положения $\varphi \in H$, то есть, φ удовлетворяет условию (5) с $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что числа $\{\alpha_k\}_1^\infty$ не являются особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$.

Лемма 2 Особенности $R_\lambda(B)$, где B имеет вид (1), могут быть лишь те λ , при которых $m(\lambda) = 0$, где $m(\lambda)$ имеет вид (4).

Доказательство. Выберем в пространстве H базис из собственных векторов оператора A , то есть базис $\{h_k\}_1^\infty$, такой что $Ah_k = \alpha_k h_k$, $k = \overline{1, \infty}$. Пусть $\{\xi_k\}_1^\infty$ — координаты вектора φ в этом базисе, то есть $\varphi = \sum_{i=1}^\infty \xi_i h_i$, причем $\xi_i \neq 0$, $i = \overline{1, \infty}$. Так как $Ah_k = \alpha_k h_k$, то $(A - \lambda I)h_k = (\alpha_k - \lambda)h_k$. Поэтому для любого λ из $\mathbb{C}$, $\lambda \neq \alpha_k$, $k = \overline{1, \infty}$, имеем: $R_\lambda(A)h_k = \frac{h_k}{\alpha_k - \lambda}$. Следовательно, $R_\lambda(A)\varphi = \sum_{k=1}^\infty \xi_k R_\lambda(A)h_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda}$, $\langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}$. Рассмотрим произвольное натуральное n и произвольный вектор из H вида $g_n = \sum_{k=1}^n \nu_k h_k$; $\nu_k \in \mathbb{C}$ — координаты вектора в базисе $\{h_k\}_1^\infty$. Тогда:

$$R_\lambda(B)g_n = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k - \lambda} h_k - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \bar{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda}\right) \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k}{\alpha_k - \lambda} h_k\right)}{1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}}. \quad (8)$$

Преобразовав выражение (8), получим:

$$\begin{aligned} R_\lambda(B)g_n = & \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k - \lambda} h_k\right) \left(\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda) + \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)\right)}{\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda) + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)} \\ & + \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k - \lambda} h_k\right) \left(\sum_{k=n+1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)\right)}{\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda) + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)} \\ & - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \bar{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)\right) \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{\alpha_k - \lambda} h_k}{\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda) + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)} \\ & - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \bar{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)\right) \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\xi_k}{\alpha_k - \lambda} h_k}{\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (\alpha_k - \lambda) + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \lambda)}. \end{aligned}$$

Коэффициент при $\frac{1}{\alpha_k - \lambda}$ в числителе этой дроби равен нулю, —

$$\nu_k h_k |\xi_k|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - \lambda) - \nu_k \bar{\xi}_k h_k \xi_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - \lambda) \equiv 0.$$

Таким образом, числитель дроби (8) не имеет особенностей в точках α_k , $1 \leq k \leq n$. В этих точках не обращается в нуль и знаменатель дроби. Действительно, если в точках α_k знаменатель дроби равен нулю, то:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - \alpha_k} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_k) + \sum_{i=n+1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - \alpha_k} \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_k) = 0.$$

Следовательно, $|\xi_k|^2 = 0$, но $\xi_k \neq 0$, $k = \overline{1, \infty}$. Мы получили, что для любого натурального n и $\forall k$ ($1 \leq k \leq n$), для любого вектора $g_n = \sum_{i=1}^n \nu_i h_i$ точка α_k не является особенностью $R_\lambda(B)g_n$. Так как множество векторов g_n плотно в H , то $R_\lambda(B)$ не имеет особенностей в точках α_k , $k = \overline{1, \infty}$.

Таким образом, особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть лишь те λ , при которых $m(\lambda) = 1/c + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle = 0$, причем собственные значения $\{\alpha_k\}_1^\infty$ оператора A не являются нулями этого выражения.

Докажем аналог теоремы 2.

Теорема 4 Пусть оператор A – линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, действующий в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H , спектр которого прост и состоит из счетного числа изолированных точек, $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, занумерованных в порядке возрастания. Пусть оператор B – имеет вид (1). Тогда спектр оператора B состоит из счетного числа изолированных точек, и собственные числа $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ оператора B будут перемежаться с числами $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, то есть на каждом интервале (α_k, α_{k+1}) существует единственное собственное значение оператора B , причем если $c > 0$, то $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots$, а при $c < 0$, соответственно $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \dots$.

Доказательство. Числа $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ являются нулями функции $m(\lambda)$. Так как $m(\lambda)$ имеет вид (4), то $m(\beta_i) = 0$, функция $m(\lambda)$ – неванлинновская функция, следовательно $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ вещественные для любого $i = \overline{1, \infty}$. Поэтому будем рассматривать функцию $m(\lambda)$ при вещественном аргументе

$$m(x) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}$$

Рассмотрим интервал (α_k, α_{k+1}) . Покажем, что при $x \rightarrow \alpha_k + 0$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \rightarrow -\infty$, а при $x \rightarrow \alpha_{k+1} - 0$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \rightarrow +\infty$.

Действительно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$ – сходится, так как $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \|\varphi\|^2$. При $x \rightarrow \alpha_k + 0$ существует такое вещественное r , $r > 0$, что для любого $i \neq k$: $|\alpha_i - x| > r$. Следовательно можно записать оценку:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{r} < \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \frac{\|\varphi\|^2}{r}.$$

Поэтому ряд $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|}$ сходится при $x \rightarrow \alpha_k + 0$. Далее

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|} + \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}. \quad (9)$$

При $x \rightarrow \alpha_k + 0$ первое слагаемое выражения (9) имеет конечный предел, а второе слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому при $x \rightarrow \alpha_k + 0$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \rightarrow -\infty$.

В случае $x \rightarrow \alpha_{k+1} - 0$ при помощи аналогичных рассуждений получаем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \rightarrow +\infty$.

Покажем, что на интервале (α_k, α_{k+1}) функция $m(x)$ монотонно возрастает. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольные 2 точки x_1 и x_2 из интервала (α_k, α_{k+1}) такие, что $x_1 < x_2$. Так как для любого $i = \overline{1, \infty}$: $\frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x_1} < \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x_2}$, то $m(x_1) < m(x_2)$. Кроме того функция $m(x)$ непрерывна на (α_k, α_{k+1}) .

Итак, функция $m(x)$ на (α_k, α_{k+1}) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и непрерывна. Поэтому на этом интервале существует единственный корень уравнения $m(x) = 0$. И это справедливо для любого k : $k = \overline{1, \infty}$.

Следующая теорема позволяет восстановить возмущенный оператор по его спектру и по спектру исходного оператора.

Теорема 5 Пусть даны вещественные числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots$, где $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ — собственные значения линейного самосопряженного оператора A , действующего в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H , $\alpha_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, если $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ и $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ такие, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \infty, \quad (10)$$

то существует одномерный оператор P такой, что $Ph = c < h, \varphi > \varphi$, где h — произвольный вектор из H , φ — вектор из H , c — вещественный скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.

Доказательство. Возьмем в качестве базиса в пространстве H собственные векторы оператора A . Пусть $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ — координаты искомого вектора φ в этом базисе. Тогда числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ будут удовлетворять уравнению $m(\beta_i) = 0, i = \overline{1, \infty}$. Покажем, что функцию $m(\lambda) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}$ можно представить в виде,

$$m(\lambda) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}. \quad (11)$$

Прежде всего покажем, что выражение $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ является голоморфной функцией в $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_k\}_1^{\infty}$. Для этого достаточно установить, что произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ сходится равномерно при любом $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq \alpha_i, i = \overline{1, \infty}$.

Так как $\frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} = 1 + \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \lambda}$, то сходимость $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \lambda}$.

При любом $\lambda \neq \alpha_i, i = \overline{1, \infty}, \exists r(\lambda) = \inf_i |\lambda - \alpha_i| > 0$ (т.к. $\{\alpha_i\}_1^\infty$ не имеют конечных точек сгущения). Следовательно, $\left| \frac{\beta_k - \alpha_k}{\alpha_k - \lambda} \right| < \frac{\beta_k - \alpha_k}{r}, k = \overline{1, \infty}$. Поэтому $\left| \sum_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \lambda} \right| < \frac{1}{r} \sum_{i=1}^\infty (\beta_i - \alpha_i) < \infty$ в силу (10).

Представим функцию $m(\lambda)$ в виде:

$$1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \Psi(\lambda) \prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda},$$

где $\Psi(\lambda)$ некоторая функция в $\mathbb{C}$.

Устремим $\lambda \rightarrow -\infty$. Функция $1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} \rightarrow \frac{1}{c}$, произведение $\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} \rightarrow 1$, поэтому $\Psi(-\infty) = \frac{1}{c}$. Кроме того из этого представления

$$\Psi(\lambda) = \frac{1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}}{\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}},$$

поэтому $\Psi(\lambda)$ не имеет особенностей в $\overline{\mathbb{C}}$, так как в точках $\{\alpha_i\}_1^\infty$ и $\{\beta_i\}_1^\infty$ особенности носят устранимый характер. Поэтому $\Psi(\lambda) \equiv \frac{1}{c}$.

Обозначим

$$F(\lambda) = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^\infty \left(\frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} \right) - \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}. \quad (12)$$

Чтобы комплекснозначная голоморфная в $\mathbb{C}$ функция $F(\lambda)$ была константой, достаточно выполнения условия ее ограниченности. Потребуем чтобы функция $F(\lambda)$ в точках $\{\alpha_i\}_1^\infty$ и в ∞ имела устранимые особенности. То есть, $\text{res}_{\alpha_k} F(\lambda) = 0, k = \overline{1, \infty}$.

$$\begin{aligned} \text{res}_{\alpha_k} F(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \alpha_k} F(\lambda)(\lambda - \alpha_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \alpha_k} \left(\left[\frac{1}{c} \prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} - \sum_{i=1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - \lambda} \right] (\lambda - \alpha_k) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \alpha_k} -\frac{1}{c} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} (\beta_k - \lambda) + |\xi_k|^2 = 0, k = \overline{1, \infty} \end{aligned}$$

В результате мы получаем систему:

$$\begin{cases} |\xi_1|^2 = \frac{1}{c} (\beta_1 - \alpha_1) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^\infty \frac{\beta_i - \alpha_1}{\alpha_i - \alpha_1} \\ |\xi_2|^2 = \frac{1}{c} (\beta_2 - \alpha_2) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^\infty \frac{\beta_i - \alpha_2}{\alpha_i - \alpha_2} \\ \dots \end{cases} \quad (13)$$

Вектор φ , координаты которого удовлетворяют системе (13), должен принадлежать пространству H , поэтому необходимо, чтобы выполнялось условие: $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$. То есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c} (\beta_k - \alpha_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$ должен сходиться.

Сходимость $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_k}$. При любых $\alpha_i, \alpha_j, i = \overline{1, \infty}, j = \overline{1, \infty}, \exists r = \inf_{i,j} |\alpha_i - \alpha_j| > 0$ (т.к. $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ не имеют конечных точек сгущения). Следовательно, $\left| \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_k} \right| < \frac{\beta_i - \alpha_i}{r}, i = \overline{1, \infty}$. Поэтому ряд $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_k}$ мажорируется рядом $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i)$, который сходится в силу (10).

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq \frac{M}{c} \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \infty,$$

где $M = \max \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}, k > 0 \right\}$.

Таким образом, при выполнении условия (10) оба слагаемых в (12) имеют смысл и $F(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}$, а так как $F(\lambda)$ ограничена на ∞ и $F(-\infty) = \frac{1}{c}$, то $F(\lambda) \equiv \frac{1}{c}$.

Взяв произвольное $c > 0$, найдем $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ из системы (13).

Для $c < 0$ рассуждения носят аналогичный характер.

■

В заключении следует отметить, что задача об исследовании возмущения простого спектра самосопряженного оператора A для случая недискретного спектра требует привлечения дополнительных исследований (см., напр., [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Weyl H. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend. Circolo mat. Palermo, 27, 1909, 373-392.
2. Rellich F. Störungstheorie der Spektralzerlegung. I, Math. Ann., 113 (1936), 600-619.
3. Friedrichs K.O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators, Math. Ann., 115 (1938), 259-272.
4. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

5. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. *Pacif. Journ. Math.* Vol.7, no. 1 (1957), 997-1010.
6. Löwner K. Über monotone Matrixfunktionen. *Mathematische Zeitschrift*, 38, 1934, 177-216.
7. Nizhnik L.P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. *Methods of Functional Analysis and Topology*, Vol. 7 (2001), no. 3, pp. 54-66.
8. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 310 с.
9. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1– Х.: Вища школа, 1977. – 316 с.
10. Diaba F., E.Chernikh. On rank one perturbation of continuous spectrum which generates prescribed finite point spectrum, *Methods of Functional Analysis and Topology*, Vol. 14 (2008), no. 1, pp. 20–31.

Статья получена: 16.03.2009; окончательный вариант: 21.06.2010;
принята: 29.06.2010.

© Сыровацкий А.Н., 2010

Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на участках двух монотонно неубывающих кривых

Т.В. Нескорородева

Донецкий национальный университет, Украина

Целью работы являются построение зависимостей для наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки $\tilde{m}_\gamma(u, v)$ винеровского поля $w(u, v)$ по его реализациям на участках двух монотонно неубывающих кривых $w(x, y)$, $(x, y) \in \gamma_1 \cup \gamma_2$, $(u, v) \notin \gamma$ и ее ошибки $d_\gamma(u, v)$. Данные зависимости в работе получены для различных вариантов расположения точки (u, v) относительно кривых γ_1 и γ_2 .

Нескорородева Т.В. **Відновлення вінерівського поля на площині по його реалізаціях на ділянках двох монотонно неспадаючих кривих.** Метою роботи є побудова залежностей для найкращої у середньоквадратичному значенні оцінки $\tilde{m}_\gamma(u, v)$ вінерівського поля $w(u, v)$ по його реалізаціях на ділянках двох монотонно неспадаючих кривих $w(x, y)$, $(x, y) \in \gamma_1 \cup \gamma_2$, $(u, v) \notin \gamma$ та її помилки $d_\gamma(u, v)$. Дані залежності в роботі отримані для різних варіантів розташування точки (u, v) відносно кривих γ_1 і γ_2 .

T.V. Neskoroodeva, **Wiener field restoration on the plane by its realizations on sites of two monotonously not decreasing curves.** The purpose of this paper is to construct dependencies for the best in mean square value of an estimation $\tilde{m}_\gamma(u, v)$ Wiener fields $w(u, v)$ on its realizations on sites of two monotonously not decreasing curves $w(x, y)$, $(x, y) \in \gamma_1 \cup \gamma_2$, $(u, v) \notin \gamma$ and its error $d_\gamma(u, v)$. The given dependencies are received in work for various variants of an arrangement of a point (u, v) concerning curves γ_1 and γ_2 .

2000Mathematics Subject Classification 60G35.

1. Введение.

Постановка проблемы. В задачах обработки изображений последние интерпретируются как случайные (чаще всего винеровские) поля и как следствие такой интерпретации возникает необходимость решения следующих задач. Пусть (Ω, σ, P) - некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x, y)$, $x \geq 0, y \geq 0$. Предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x, y)$, $(x, y) \in \gamma$ (где γ - некоторая кривая на плоскости) и необходимо восстановить поле в точке $(u, v) \notin \gamma$. Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для $w(u, v)$, основанной на значениях $w(x, y)$ при $(x, y) \in \gamma$. Известно, что эта оценка задается формулой $\bar{m}_\gamma(u, v) = M \{ w(u, v) | F_\gamma \}$ и ее ошибка вычисляется по формуле $d_\gamma(u, v) = M \{ (w(u, v) - \bar{m}_\gamma(u, v))^2 | F_\gamma \}$, где $F_\gamma = \sigma \{ w(x, y), (x, y) \in \gamma \}$.

Анализ исследований. В [1] приведено решение задач восстановления винеровского поля на плоскости по его значениям на замкнутой кривой. В [2] решены задачи восстановления по реализациям винеровского поля на участках двух монотонно невозрастающих кривых γ_1 и γ_2 . Примеры использования данных моделей при анализе показателей деятельности предприятия, которые представлены двумерными массивами данных описаны в [3, 4]. В данных работах предполагается, что имеется система с неполной информацией об объекте. Множество γ соответствует параметрам распределений "наблюдаемых" показателей, переменные (u, v) - параметрам распределений показателей "недоступных наблюдению". Поэтому актуальным является построение явных формул для величин $\bar{m}_\gamma(u, v)$ и $d_\gamma(u, v)$ для разных видов кривых сужения γ .

Постановка задачи. Формализация зависимостей для величин $\bar{m}_\gamma(u, v)$ и $d_\gamma(u, v)$ в случае, когда множество γ имеет вид участков двух монотонно неубывающих кривых γ_1 и γ_2 .

2. Определения и обозначения.

Определение. Случайная функция $w(x, y), x \geq 0, y \geq 0$, принимающая значения в пространстве R^1 , называется винеровским полем, если выполняются следующие условия:

1) для $\forall (x, y) : (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge ((x = 0) \vee (y = 0)) \Rightarrow w(x, y) = 0$ (с вероятностью $P = 1$);

2) $\forall x \geq 0, y \geq 0, \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$ приращения $\Delta w = w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y + \Delta y) + w(x, y) - w(x + \Delta x, y)$ винеровского поля по непересекающимся прямоугольникам со сторонами параллельными координатным осям - случайные величины независимы в совокупности;

3) $\forall x \geq 0, y \geq 0, \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$ приращения винеровского поля Δw имеют нормальное распределение $N(0, \Delta x \Delta y)$:

$$P\{\Delta w < z\} = \frac{1}{2\pi\Delta x\Delta y} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/(2\Delta x\Delta y)) dt, \quad t \in R^1.$$

Заметим, что корреляционная функция винеровского поля имеет следующий вид:

$$R((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min(x_1, x_2) \min(y_1, y_2).$$

Предположим, что мы наблюдаем винеровское поле на участках двух монотонных кривых γ_1 и γ_2 (рис.1), которые задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x(\tau), \\ y = y(\tau); \end{cases} \quad \tau \in [0, 1] \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = \tilde{x}(\tau), \\ y = \tilde{y}(\tau); \end{cases} \quad \tau \in [0, 1],$$

где функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ удовлетворяют следующим условиям:

C_1) функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ положительные, кусочно-гладкие на отрезке $[0, 1]$;

C_2) если $\tau_1 < \tau_2$ то $x(\tau_1) \leq x(\tau_2)$, $y(\tau_1) \leq y(\tau_2)$, $\tilde{x}(\tau_1) \leq \tilde{x}(\tau_2)$, $\tilde{y}(\tau_1) \leq \tilde{y}(\tau_2)$, $x(1) < \tilde{x}(0)$, $\tilde{y}(1) < y(0)$ (выпуклость кривых роли не играет);

$$C_3) \quad 1 - B\tilde{B} \neq 0,$$

где

$$B = \frac{x(0)}{y(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{x}^2(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau, \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{y}(0)}{\tilde{x}(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}^2(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tau,$$

$$\varphi(\tau) = x(\tau)\dot{y}(\tau) + y(\tau)\dot{x}(\tau), \quad \tilde{\varphi}(\tau) = \tilde{x}(\tau)\dot{\tilde{y}}(\tau) + \tilde{y}(\tau)\dot{\tilde{x}}(\tau), \quad \tau \in [0, 1].$$

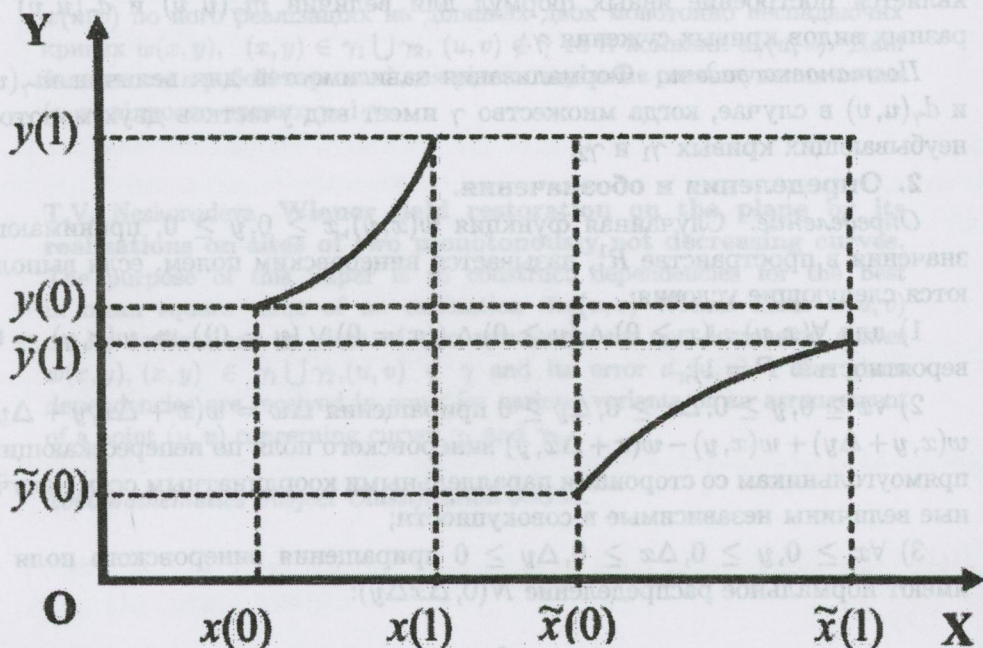


Рис. 1: Общий вид и взаимное расположение участков кривых γ_1 и γ_2 .

Рассмотрим следующие случайные процессы:

$$w(\tau) = w(x(\tau), y(\tau)), \quad \tilde{w}(\tau) = w(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (1)$$

Эти процессы являются гауссовскими с корреляционными функциями

$$R(\tau_1, \tau_2) = \min(x(\tau_1), x(\tau_2)) \min(y(\tau_1), y(\tau_2)),$$

$$\tilde{R}(\tau_1, \tau_2) = \min(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_2)) \min(\tilde{y}(\tau_1), \tilde{y}(\tau_2))$$

соответственно.

В настоящей статье будет рассмотрен случай, когда точка (u, v) принадлежит области ограниченной участками кривых γ_1 и γ_2 и прямыми $y = \tilde{y}(0)$, $y = y(1)$, $x = x(0)$, $x = \tilde{x}(1)$. Эту область можно представить в виде объединения следующих областей (явный вид формул для $\bar{m}(u, v)$ и $d(u, v)$ будет зависеть от того какой из этих областей принадлежит точка (u, v)):

$$D_1 = \{x = x(\tau), y(0) < y < y(\tau), \tau \in (0, 1)\},$$

$$D'_1 = \{x(1) < x < \tilde{x}(0), y(0) < y \leq y(1)\},$$

$$D''_1 = \{x(0) \leq x < x(1), \tilde{y}(1) < y \leq y(0)\},$$

$$D'''_1 = \{x(1) \leq x < \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) < y \leq y(0)\},$$

$$D_2 = \{x = x(\tau), \tilde{y}(\tau) < y < \tilde{y}(1), \tau \in (0, 1)\},$$

$$D'_2 = \{x(1) < x \leq \tilde{x}(0), \tilde{y}(0) \leq y < \tilde{y}(1)\},$$

$$D''_2 = \{\tilde{x}(0) \leq x < \tilde{x}(1), \tilde{y}(1) \leq y < y(0)\},$$

$$D_3 = \{\tilde{x}(0) \leq x \leq \tilde{x}(1), y(0) \leq y \leq y(1)\},$$

$$D_4 = \{x(0) \leq x \leq x(1), \tilde{y}(0) \leq y \leq \tilde{y}(1)\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= \left[\frac{w(x(0), y(0))}{y(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau) \right], \\ \bar{m}_2 &= \left[\frac{w(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0))}{\tilde{x}(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть точка (u, v) принадлежит области $D_1 \cup D'_1 \cup D''_1 \cup D'''_1$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u, v) = K_1(u, v)\bar{m}_1 + K_2(u, v)\bar{m}_2 + \alpha w(x(\tau(v)), v) + v \int_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau), \quad (3)$$

$$d(u, v) = uv - (v + K_1(u, v)) [\alpha x(\tau(v)) + vC] - \\ - K_2(u, v) \left[\frac{\tilde{y}(0)}{\tilde{x}(0)} (\tilde{x}(0) - u) + u\tilde{B} \right], \quad (4)$$

где

$$K_1(u, v) = -\frac{[u - x(\tau(v)) - vC]\tilde{B}}{1 - B\tilde{B}}, \quad K_2(u, v) = \frac{u - x(\tau(v)) - vC}{1 - B\tilde{B}},$$

$$\tau(v) = \begin{cases} \min_{y(\tau)=v} \tau, & y(0) \leq v \leq y(1), \\ 0, & \tilde{y}(0) < v \leq y(0); \end{cases} \quad \tau(u) = \begin{cases} \min_{x(\tau)=u} \tau, & x(0) \leq u \leq x(1), \\ 1, & x(1) < u \leq \tilde{x}(1); \end{cases}$$

$$C = \int_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}^2(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } y(0) \leq v \leq y(1); \\ \frac{v}{y(0)}, & \text{при } 0 < v < y(0); \end{cases}$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ и случайные функции $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ - определяются зависимостями (1) - (2).

Теорема 2. Пусть точка (u, v) принадлежит области $D_2 \cup D'_2 \cup D''_2$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u, v) = \beta w(u, \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) + u \int_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau) + \tilde{K}_1(u, v)\bar{m}_1 + \tilde{K}_2(u, v)\bar{m}_2, \quad (5)$$

$$d(u, v) = uv - \left(u + \tilde{K}_2(u, v) \right) [\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) + u\tilde{C}] - \\ - \tilde{K}_1(u, v) \left[x(0) - \frac{vx(0)}{y(0)} + vB \right], \quad (6)$$

где $\beta = \begin{cases} 1, & \text{при } \tilde{x}(0) \leq v \leq \tilde{x}(1); \\ \frac{u}{\tilde{x}(0)}, & \text{при } x(1) < u \leq \tilde{x}(0); \end{cases},$

$$\tilde{\tau}(v) = \begin{cases} \min_{\tilde{y}(\tau)=v} \tau, & \tilde{y}(0) \leq v \leq \tilde{y}(1), \\ 1, & \tilde{y}(1) < v \leq y(1); \end{cases} \quad \tilde{\tau}(u) = \begin{cases} \min_{\tilde{x}(\tau)=u} \tau, & \tilde{x}(0) \leq u \leq \tilde{x}(1), \\ 0, & x(0) \leq u < \tilde{x}(0); \end{cases}$$

$$\tilde{K}_1(u, v) = \frac{v - \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) - u\tilde{C}}{1 - B\tilde{B}}, \quad \tilde{K}_2(u, v) = -\tilde{K}_1(u, v)B, \quad \tilde{C} = \int_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}^2(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tau.$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ и случайные величины $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ - определяются зависимостями (1) - (2).

Теорема 3. Пусть точка (u, v) принадлежит области $D_3 \cup D_4$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u, v) = \tilde{K}_1(u, v)\bar{m}_1 + \tilde{K}_2(u, v)\bar{m}_2 +$$

$$+\alpha w(x(\tau(v)), v) + v \int_{\tau(v)}^1 \frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau) + \beta w(u, \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) + u \int_{\tilde{\tau}(u)}^1 \frac{\dot{y}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau), \quad (7)$$

$$d(u, v) = uv - \left(v + \tilde{K}_1(u, v) \right) [\alpha x(\tau(v)) + vC] - (u + \tilde{K}_2(u, v)) [\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) + \tilde{C}], \quad (8)$$

где

$$\tilde{K}_1(u, v) = \frac{[\alpha x(\tau(v)) + vC]\tilde{B} - [\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) + u\tilde{C}]}{1 - B\tilde{B}},$$

$$\tilde{K}_2(u, v) = \frac{[\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) + \tilde{C}]B - [\alpha x(\tau(v)) + vC]}{1 - B\tilde{B}},$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ и случайные функции $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ - определяются зависимостями (1)-(2).

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0 = \tau_{k(n)}^0 < \tau_{k(n)}^1 < \dots < \tau_{k(n)}^{k(n)} = 1$, $n \geq 1$, некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ такое, что: $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(n) < \dots$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k(n)} (\tau_{k(n)}^j - \tau_{k(n)}^{j-1}) = 0$ и для любого $j = \overline{1, k(n)}$ существует $r = \overline{1, k(n+1)}$ такое, что $\tau_{k(n)}^j = \tau_{k(n+1)}^r$. Введем следующие обозначения: $x_j = x_{k(n)}^j$, $y_j = y_{k(n)}^j$, $\tilde{x}_j = \tilde{x}_{k(n)}^j$, $\tilde{y}_j = \tilde{y}_{k(n)}^j$, $w_j = w(x_j, y_j)$, $\tilde{w}_j = w(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$, $F_{k(n)} = \sigma \{w_j, \tilde{w}_j, j = \overline{0, k(n)}\}$, $\tilde{m}_{k(n)}(u, v) = M \{w(u, v) | F_{k(n)}\}$, $d(u, v)_{k(n)} = M \{(w(u, v) - \tilde{m}(u, v))^2 | F_{k(n)}\}$.

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$ через n и для нахождения $\tilde{m}_n(u, v)$ и $d_n(u, v)$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции из [5, стр.498]. Для этого найдем решение системы:

$$\text{cov}(\bar{w}, \bar{w})\bar{\beta} = \text{cov}(w(u, v), \bar{w}), \quad (9)$$

где $\bar{w} = (w, \tilde{w})$, $w = (w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_n)$, $\tilde{w} = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j, \dots, \tilde{w}_n)$, $\bar{\beta}$ - неизвестный вектор, имеющий следующую структуру: $\bar{\beta} = (\beta, \tilde{\beta})$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_n)$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_j, \dots, \tilde{\beta}_n)$.

Матрица $\text{cov}(\bar{w}, \bar{w})$ имеет следующую структуру:

$$\text{cov}(\bar{w}, \bar{w}) = \begin{pmatrix} \text{cov}(w, w) & \text{cov}(w, \tilde{w}) \\ \text{cov}(\tilde{w}, w) & \text{cov}(\tilde{w}, \tilde{w}) \end{pmatrix},$$

где

$$\text{cov}(w, w) = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_0 & x_0 y_0 & \dots & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & x_1 y_1 & x_1 y_1 & \dots & x_1 y_1 \\ x_0 y_0 & x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0 y_0 & x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} cov(\tilde{w}, \tilde{w}) &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \dots & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \dots & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 & \dots & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 & \dots & \tilde{x}_n\tilde{y}_n \end{pmatrix}, \\ cov(w, \tilde{w}) &= \begin{pmatrix} x_0\tilde{y}_0 & x_0\tilde{y}_1 & x_0\tilde{y}_2 & \dots & x_0\tilde{y}_n \\ x_1\tilde{y}_0 & x_1\tilde{y}_1 & x_1\tilde{y}_2 & \dots & x_1\tilde{y}_n \\ x_2\tilde{y}_0 & x_2\tilde{y}_1 & x_2\tilde{y}_2 & \dots & x_2\tilde{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n\tilde{y}_0 & x_n\tilde{y}_1 & x_n\tilde{y}_2 & \dots & x_n\tilde{y}_n \end{pmatrix}, \\ cov(\tilde{w}, w) &= cov^T(w, \tilde{w}). \end{aligned}$$

Определим координаты вектора $cov(w(u, v), \bar{w})$. Рассмотрим сначала случай, когда точка $(u, v) \in D_1$ и уравнение $x(\tau) = u$ имеет единственное решение. Не умаляя общности можно считать, что для любого $n \geq 1$ существуют τ_q^n и τ_p^n такие, что $\tau(u) = \tau_q^n$ и $\tau(v) = \tau_p^n$ ($p < q$). Учитывая эти обозначения и условие C_2 , запишем координаты вектора $cov(w(u, v), \bar{w})$: $cov(w(u, v), \bar{w}_j) = u\tilde{y}_j$, $j = \overline{0, n}$,

$$cov(w(u, v), w_j) = \begin{cases} x_j y_j, & j = \overline{0, p-1}, \\ x_j v, & j = \overline{p, q}, \\ uv, & j = q+1, n; \end{cases}$$

Далее, пронумеруем уравнения системы (9) по следующему правилу: первые n уравнений будут иметь индекс $(1, j)$, $j = \overline{0, n}$, следующие - $(2, j)$, $j = \overline{0, n}$. Чтобы найти решение системы (9) сделаем над ее уравнениями следующие преобразования. Из уравнений с индексами (k, j) , $k = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, n}$ вычтем уравнения с индексами $(k, j-1)$; $k = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, n}$ соответственно. В результате этих преобразований система (9) примет вид:

$$cov'(\bar{w}, \bar{w})\bar{\beta} = cov'(w(u, v), \bar{w}), \quad (10)$$

$$\text{где } cov'(\bar{w}, \bar{w}) = \begin{pmatrix} cov'(w, w) & cov'(w, \tilde{w}) \\ cov'(\tilde{w}, w) & cov'(\tilde{w}, \tilde{w}) \end{pmatrix},$$

$$cov'(w, w) = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_0 & x_0 y_0 & \dots & x_0 y_0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_1 & \dots & \varphi_1 \\ 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(\tilde{w}, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \dots & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 \\ 0 & \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\varphi}_1 & \dots & \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_2 & \dots & \tilde{\varphi}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\varphi}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(w, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} x_0 \tilde{y}_0 & x_0 \tilde{y}_1 & x_0 \tilde{y}_2 & \dots & x_0 \tilde{y}_n \\ \Delta x_1 \tilde{y}_0 & \Delta x_1 \tilde{y}_1 & \Delta x_1 \tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_1 \tilde{y}_n \\ \Delta x_2 \tilde{y}_0 & \Delta x_2 \tilde{y}_1 & \Delta x_2 \tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_2 \tilde{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_n \tilde{y}_0 & \Delta x_n \tilde{y}_1 & \Delta x_n \tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_n \tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(\tilde{w}, w) = \begin{pmatrix} x_0 \tilde{y}_0 & x_1 \tilde{y}_0 & x_2 \tilde{y}_0 & \dots & x_n \tilde{y}_0 \\ x_0 \Delta \tilde{y}_1 & x_1 \Delta \tilde{y}_1 & x_2 \Delta \tilde{y}_1 & \dots & x_n \Delta \tilde{y}_1 \\ x_0 \Delta \tilde{y}_2 & x_1 \Delta \tilde{y}_2 & x_2 \Delta \tilde{y}_2 & \dots & x_n \Delta \tilde{y}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0 \Delta \tilde{y}_n & x_1 \Delta \tilde{y}_n & x_2 \Delta \tilde{y}_n & \dots & x_n \Delta \tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(w(u, v), w_j) = \begin{cases} x_0 y_0, & j = 0, \\ \varphi_j, & j = \overline{1, p}, \\ \Delta x_j v, & j = \overline{p+1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}; \end{cases} \quad cov'(w(u, v), \tilde{w}_j) = \begin{cases} u \tilde{y}_0, & j = 0, \\ u \Delta \tilde{y}_j, & j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

где $\varphi_j = x_j y_j - x_{j-1} y_{j-1}$, $\tilde{\varphi}_j = \tilde{x}_j \tilde{y}_j - \tilde{x}_{j-1} \tilde{y}_{j-1}$, $j = \overline{1, n}$.

Далее, полученные уравнения системы (10) с индексами $(1, j)$, $j = \overline{1, n}$ разделим на $\Delta x_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, уравнение с индексом $(1, 0)$ - на x_0 . Уравнения с индексами $(2, j)$, $j = \overline{1, n}$ разделим на $\Delta \tilde{y}_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, уравнение с индексом $(2, 0)$ - на $\tilde{y}_0$. И затем из полученных уравнений с индексами (k, j) , $k = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, n}$ вычтем уравнения с индексами $(k, j+1)$, $k = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, n-1}$ соответственно (случай, когда $x(\tau) \equiv const$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv const$ на некотором отрезке $[\tau', \tau''] \subseteq [0, 1]$, будет рассмотрен ниже). В результате этих преобразований система (10) примет вид:

$$cov''(\tilde{w}, \tilde{w}) \bar{\beta} = cov''(w(u, v), \tilde{w}), \quad (11)$$

$$\text{где } cov''(\tilde{w}, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} cov''(\tilde{w}, \tilde{w}) & cov''(\tilde{w}, w) \\ cov''(w, \tilde{w}) & cov''(w, w) \end{pmatrix},$$

$$cov''(w, w) = \begin{pmatrix} y_0 & A_0 & A_0 & \dots & A_0 \\ 0 & \varphi_1 \Delta x_1^{-1} & A_1 & \dots & A_1 \\ 0 & 0 & \varphi_2 \Delta x_2^{-1} & \dots & A_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n \Delta x_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$cov''(\tilde{w}, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 & \tilde{A}_0 & \tilde{A}_0 & \dots & \tilde{A}_0 \\ 0 & \tilde{\varphi}_1 \Delta \tilde{y}_1^{-1} & \tilde{A}_1 & \dots & \tilde{A}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_2 \Delta \tilde{y}_2^{-1} & \dots & \tilde{A}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\varphi}_n \Delta \tilde{y}_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$cov''(w, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{y}_0 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \dots & \tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$\text{cov}''(\tilde{w}, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

$$\text{cov}''(w(u, v), w_j) = \begin{cases} A_j, j = \overline{0, p-1}, \\ \varphi_p \Delta x_p^{-1} - v, j = p, \\ v, j = q, \\ 0, j = \overline{p+1, n} \text{ } j \neq q; \end{cases}$$

$$\text{cov}''(w(u, v), \tilde{w}_j) = \begin{cases} 0, j = \overline{0, n-1}, \\ u, j = n; \end{cases}$$

где $A_0 = y_0 - \varphi_1 \Delta x_1^{-1}$, $\tilde{A}_0 = \tilde{x}_0 - \tilde{\varphi}_1 \Delta \tilde{y}_1^{-1}$,

$$A_j = \varphi_j \Delta x_j^{-1} - \varphi_{j+1} \Delta x_{j+1}^{-1}, \quad \tilde{A}_j = \tilde{\varphi}_j \Delta \tilde{y}_j^{-1} - \tilde{\varphi}_{j+1} \Delta \tilde{y}_{j+1}^{-1}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Учитывая условие C_3 и предположение, что $x(\tau) \not\equiv \text{const}$ или $\tilde{y}(\tau) \not\equiv \text{const}$ на отрезке $[0, 1]$, для коэффициентов β_j получим следующие равенства:

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{\Delta x_1}{\varphi_1} \right) \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad \beta_j = S_j \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{q+1, n-1}, \quad (12)$$

$$\beta_p = 1 - \frac{v \Delta x_{p+1}}{\varphi_{p+1}} + S_p \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad \beta_j = S_j \left(v + \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n \right), \quad j = \overline{p+1, q-1}, \quad (13)$$

$$\beta_q = \frac{v \Delta x_q}{\varphi_q} + S_q \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad \tilde{\beta}_0 = \left(\frac{1}{\tilde{x}_0} - \frac{\Delta \tilde{y}_1}{\tilde{\varphi}_1} \right) \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n, \quad (14)$$

$$\tilde{\beta}_j = \tilde{S}_j \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $S_j = \frac{\Delta x_j}{\varphi_j} - \frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}}$, $\tilde{S}_j = \frac{\Delta \tilde{y}_j}{\tilde{\varphi}_j} - \frac{\Delta \tilde{y}_{j+1}}{\tilde{\varphi}_{j+1}}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Подставляя полученные равенства в уравнения системы (11) с индексами (k, n) , $k = 1, 2$ получим единственное решение (в силу условия C_3) для величин $\frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n$ и $\frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n$:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n = -\frac{(u-x_p-vC')\tilde{B}'}{1-\tilde{B}'\tilde{B}'}; \\ \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n = \frac{u-x_p-vC}{1-\tilde{B}'\tilde{B}'}. \end{cases} \quad (16)$$

где $\tilde{B}' = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \tilde{y}_j^2}{\tilde{\varphi}_j}$, $B' = \frac{x_0}{y_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{\varphi_j}$, $C' = \sum_{j=p+1}^q \frac{\Delta x_j^2}{\varphi_j}$.

Таким образом,

$$\bar{m}_n(u, v) = \sum_{j=0}^n \beta_j w_j + \sum_{j=0}^n \tilde{\beta}_j \tilde{w}_j, \quad (17)$$

где коэффициенты β_j , $\tilde{\beta}_j$, $j = \overline{0, n}$ определяются равенствами (12) - (15).

Рассмотрим первую сумму в равенстве (17).

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \beta_j w_j &= \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n \left(\frac{w_0}{y_0} - \frac{\Delta x_1}{\varphi_1} w_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_j}{\varphi_j} - \frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}} \right) w_j + \frac{\Delta x_n}{\varphi_n} w_n \right) + \\ &+ 1 - \frac{v \Delta x_{p+1}}{\varphi_{p+1}} w_p + \sum_{j=p+1}^{q-1} \left(\frac{\Delta x_j}{\varphi_j} - \frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}} \right) w_j + \frac{v \Delta x_q}{\varphi_q} w_q = \\ &= - \frac{(u - x_p - v C') \tilde{B}'}{1 - B' \tilde{B}'} \left(\frac{w_0}{y_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{\varphi_j} \Delta w_j \right) + w_p + v \sum_{j=p+1}^q \frac{\Delta x_j}{\varphi_j} \Delta w_j. \quad (18) \end{aligned}$$

Делая аналогичные преобразования со второй суммой в равенстве (17) получим:

$$\sum_{j=0}^n \tilde{\beta}_j \tilde{w}_j = \frac{u - x_p - v C'}{1 - B' \tilde{B}'} \left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \tilde{y}_j}{\tilde{\varphi}_j} \Delta \tilde{w}_j \right). \quad (19)$$

Далее, в силу условия C_1 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ на отрезке $[0,1]$ по теореме о среднем имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x_j &= \dot{x}(\xi_j) \Delta \tau_j, \quad \xi_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad \Delta y_j = \dot{y}(\eta_j) \Delta \tau_j, \quad \eta_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \\ \Delta \tilde{x}_j &= \dot{\tilde{x}}(\sigma_j) \Delta \tau_j, \quad \sigma_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad \Delta \tilde{y}_j = \dot{\tilde{y}}(\zeta_j) \Delta \tau_j, \quad \zeta_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \\ \varphi_j &= (x_j \dot{y}(\eta_j) + y_{j-1} \dot{x}(\xi_j)) \Delta \tau_j = \varphi'_j \Delta \tau_j, \quad \tilde{\varphi}_j = (\tilde{x}_j \dot{\tilde{y}}(\zeta_j) + \tilde{y}_{j-1} \dot{\tilde{x}}(\sigma_j)) \Delta \tau_j = \tilde{\varphi}'_j \Delta \tau_j, \\ \tilde{B}' &= \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\dot{\tilde{y}}^2(\zeta_j) \Delta \tau_j}{\tilde{\varphi}'_j}, \quad B' = \frac{x_0}{y_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\dot{x}^2(\xi_j) \Delta \tau_j}{\varphi'_j}, \quad C' = \sum_{j=p+1}^q \frac{\dot{x}^2(\xi_j) \Delta \tau_j}{\varphi'_j}. \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в (18) и (19) и сокращая каждое слагаемое на $\Delta \tau_j$, $j = \overline{1, n}$ получим:

$$\begin{aligned} \bar{m}_n(u, v) &= - \frac{(u - x_p - v C') \tilde{B}'}{1 - B' \tilde{B}'} \left(\frac{w_0}{y_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\dot{x}(\xi_j)}{\varphi'_j} \Delta w_j \right) + \\ &+ w_p + v \sum_{j=p+1}^q \frac{\dot{x}(\xi_j)}{\varphi'_j} \Delta w_j + \frac{u - x_p - v C'}{1 - B' \tilde{B}'} \left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\dot{\tilde{y}}(\zeta_j)}{\tilde{\varphi}'_j} \Delta \tilde{w}_j \right). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к *l.i.m.* при $n \rightarrow \infty$ получим выражение, стоящее в правой части (3). Далее, учитывая, что $k(n)$ переобозначали через n и учитывая определение разбиения отрезка $[0,1]$ имеем: $F_{k(1)} \subseteq F_{k(2)} \subseteq \dots F_{k(n)} \subseteq \dots F$, где $F = \sigma \left\{ \bigcup_{k(n)=1}^{\infty} F_{k(n)}, n = 1, 2, \dots \right\}$. Следовательно, согласно теореме Леви из [5] получим: $\bar{m}_{k(n)}(u, v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{m}(u, v)$ (с вероятностью $P = 1$).

Так как $M \{ (w(u, v) - \bar{m}_{k(n)}(u, v))^2 | F \} \leq M \{ (w(u, v) - \bar{m}_{k(1)}(u, v))^2 | F \}$, $n = 1, 2, \dots$, то следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{m}_{k(n)}(u, v) = \bar{m}(u, v)$, что и доказывает равенство (3). Равенство (4) доказывается аналогично.

Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано в случае, когда не существует отрезка $[\tau', \tau''] \subseteq [0, 1]$ на котором $x(\tau) \equiv \text{const}$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv \text{const}$ и уравнение $x(\tau) = u$ имеет единственное решение. Если $x(\tau) \equiv \text{const}$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv \text{const}$ на отрезке $[\tau', \tau''] \subseteq [0, 1]$, то не сложно показать, что формулы (3) и (4) остаются верными в том же виде. Если точка $(u, v) \in D'_1 \cup D''_1 \cup D'''_1$ то изменятся только координаты вектора $\text{cov}(w(u, v), w)$. Учитывая это и повторяя рассуждения, сделанные в первом случае утверждение теоремы 1 докажем полностью. Для доказательства теорем 2 – 4 необходимо повторить все этапы доказательства теоремы 1, учитывая, что изменятся только координаты вектора $\text{cov}(w(u, v), \bar{w})$.

Выводы. Получены явные зависимости (3) - (8) для величин $\bar{m}_\gamma(u, v)$ и $d_\gamma(u, v)$ в случае, когда множество γ имеет вид участков двух монотонно неубывающих кривых γ_1 и γ_2 для различных вариантов взаимного расположения точки восстановления (u, v) относительно кривой наблюдений γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Земляк Т.В. О восстановлении винеровского поля на плоскости по его значениям на замкнутых кривых // Укр. мат. журнал. - К. - 1999. - т. 51. - № 6. - С. 744 - 752.
2. Земляк Т.В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его значениям на участках двух монотонно невозрастающих кривых // Вісник Харківського національного університету. - Харків. - 2000. - № 475. - С. 378-387.
3. Нескородева Т.В. Математическое обеспечение автоматизированной системы принятия решений в аудите // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - Харків. - 2006. № 4 (16). - С. 71 - 75.
4. Криводубский О.А. Математическое обеспечение для интеллектуальной системы принятия решений в аудите / О.А. Криводубский, Т.В. Нескородева // Штучний інтелект. - Донецьк. - 2007. - № 1. - С. 159 - 164.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974. - 696 с.

Статья получена: 07.08.2009 ; окончательный вариант: 18.03.2010;
принята: 20.03.2010.

Аналитические функции в плоскости без точки нуля

Л.Д. Радченко

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,

пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина

liudmyla.radchenko@gmail.com

Мы изучаем мероморфные функции $f(z)$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых семейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ нормальное. Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) изучал А. Островский. Мы обобщили некоторые теоремы Островского, а также доказали новые свойства нормальных функций в $\mathbb{C}^*$.

Радченко Л.Д., Аналітичні функції у площині з вилученим початком координат. Ми вивчаємо мероморфні функції $f(z)$ у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для яких сімейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ нормальне. Такі функції (при додатковому обмеженні — наявність полюса або переборної особливості у нулі) вивчав А. Островський. Ми узагальнили деякі теореми Островського, а також довели нові властивості нормальних функцій у $\mathbb{C}^*$.

L.D. Radchenko, **Analytic functions in a punctured plane.** We study meromorphic functions $f(z)$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, for which the family $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ is normal. Such functions (with additional restriction, namely, presence of a pole or removable singularity in zero) were studied by A. Ostrovsky. We have generalized some him theorems and also have proved new properties of normal functions in $\mathbb{C}^*$.

2000 *Mathematics Subject Classification* 30D45.

1 Введение

В работе изучается специальный класс мероморфных функций, так называемые нормальные функции. Это такие мероморфные функции $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, что семейство $\{(f \circ \psi)(z)\}$, где ψ пробегает группу всех конформных изоморфизмов области Ω , является нормальным. Другими словами, из любой последовательности функций этого семейства можно

выбрать равномерно сходящуюся на компактах в области Ω подпоследовательность, при этом в $\bar{\mathbb{C}}$ рассматривается сферическая метрика.

Если в Ω введена метрика, инвариантная относительно всех конформных изоморфизмов, то нормальные мероморфные функции можно описать как голоморфные и равномерно непрерывные отображения из Ω в $\bar{\mathbb{C}}$.

Класс нормальных мероморфных функций находит применение в различных разделах комплексного анализа и, в частности, в теории Неванлинны ([1], [3], [4], [5], [6], [7], [10]). Так, в работах [2], [5] и [6] изучались свойства нормальных функций в комплексной плоскости. В работе [6] было введено понятие нормальной функции первой категории. В работе [5] был доказан критерий принадлежности мероморфной функции этому классу, в работе [2] было получено полное описание нормальных функций первой категории в терминах ее нулей и полюсов, а также найдены необходимое и достаточное условие того, что произведение двух нормальных функций первой категории является функцией того же класса.

Нормальные мероморфные функции в единичном круге изучались, в частности, в работе [3]. При этом были описаны некоторые свойства этих функций и получен критерий нормальности мероморфной функции в терминах ее сферической производной.

Различные обобщения класса нормальных функций, а также его подклассы рассматривались в работе [8].

В данной работе мы изучаем нормальные мероморфные функции в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) полностью описал А. Островский (см. [9]). Как отметил без доказательства А. Еременко (см. [1]), некоторая модификация конструкции Островского позволяет описать все нормальные функции в $\mathbb{C}^*$.

В нашей работе в качестве метрики в $\mathbb{C}^*$ мы используем метрику $ds = \frac{|dz|}{|z|}$, инвариантную относительно системы конформных изоморфизмов $\{z \rightarrow \lambda z\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$. Через $d(z, w)$ обозначаем расстояние в этой метрике. $B(z, r)$ — круг с центром в точке z радиуса r в этой метрике. В образе, т.е. в замкнутой комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, всегда рассматривается сферическая метрика

$$\rho_s = \frac{|Z - W|}{\sqrt{1 + |Z|^2} \sqrt{1 + |W|^2}}.$$

На множестве мероморфных функций в Ω всегда, если не оговорено противное, рассматривается равномерная сходимость на компактах в Ω . При проверке нормальности мероморфной функции в $\mathbb{C}^*$ можно ограничиться автоморфизмами $\lambda_n \rightarrow 0$ или $\lambda_n \rightarrow \infty$, т.к. если $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \neq 0, \infty$, то всегда $f(\lambda_n z) \rightarrow f(\lambda_0 z)$. Условимся также говорить, что мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$ имеет несущественную особенность в нуле (бесконечности), если она имеет устранимую особенность или полюс в нуле (соответственно на

бесконечности). Поскольку преобразование $z \rightarrow \frac{1}{z}$ сохраняет нормальность и меняет местами особенности в нуле и бесконечности, то при изучении характера особенностей в этих точках достаточно ограничиться особенностью в нуле. Отметим также, что суперпозиция дробно-линейного отображения и нормального есть голоморфное равномерно непрерывное отображение из $\mathbb{C}^*$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и поэтому также нормальна.

Перейдем к точным формулировкам полученных нами результатов.

Теорема 1. *Если нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ в некотором круге с выколотым центром $\{z : 0 < |z| < \varepsilon\}$ выпускает хотя бы одно значение, то она имеет в нуле несущественную особенность (т.е. полюс или устранимую особенность).*

Аналогичное утверждение верно и для окрестности бесконечности.

Следствие. *Если f – нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ и $f(z) \neq a$ при $0 < |z| < \varepsilon$, $f(z) \neq b$ при $\frac{1}{\varepsilon'} < |z| < \infty$, где a, b – возможно одинаковые точки из $\overline{\mathbb{C}}$, то $f(z)$ – рациональна.*

В дальнейших теоремах предполагается, что $f(z)$ нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ с нулями $\{a_n\}$ и полюсами $\{b_n\}$, причем $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются мультимножествами, т.е. каждая точка может иметь конечную кратность, совпадающую с кратностью соответствующего нуля или полюса.

Следующие три теоремы описывают свойства нормальных функций в $\mathbb{C}^*$. Они были доказаны А. Островским [9] для нормальных функций в $\mathbb{C}^*$, имеющих в нуле несущественную особенность и сформулированы без доказательства в общем случае А. Ереенко [1]. В нашей работе будет приведено полное доказательство указанных теорем.

Теорема 2. *Величина $|\text{card}\{k : a_k \in \Gamma(r_1, r_2)\} - \text{card}\{k : b_k \in \Gamma(r_1, r_2)\}|$ ограничена равномерно по $0 < r_1 < r_2 < \infty$.*

Теорема 3. *Величина $\text{card}\{k : a_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\} + \text{card}\{k : b_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\}$ ограничена для всех $r > 0$.*

Этот результат может быть также сформулирован в следующем виде.

Теорема 3*. *Для любого множества $E \subset \mathbb{C}^*$, ограниченного в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$, величина $\text{card}\{k : a_k \in E\} + \text{card}\{k : b_k \in E\}$ ограничена константой, зависящей от диаметра E в этой метрике.*

Теорема 4. *Величина $\inf_{k,l} \left| \frac{a_k}{b_l} - 1 \right|$ строго положительна.*

Или, в терминах метрики d :

Теорема 4*. *Величина $\inf_{k,l} d(a_k, b_l)$ строго положительна.*

Отметим также следующий простой результат.

Теорема 5. *Пусть f – нормальная функция и для некоторой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ $\lambda_n \rightarrow 0$ (или $\lambda_n \rightarrow \infty$) функции $f(\lambda_n z)$ сходятся к функции $g(z)$. Тогда $g(z)$ также нормальная функция.*

Далее мы показываем, что при некоторых условиях на множество предельных функций можно получить дополнительную информацию о распределении значений нормальной функции.

Теорема 6. Пусть среди предельных функций семейства $\{f(\lambda z)\}$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ нет тождественной бесконечности. Тогда для любого $\delta > 0$ существует C_δ такое, что при $z \notin \cup_n B(b_n, \delta)$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq C_\delta$.

Применяя эту теорему к функции $\frac{1}{f}$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6*. Пусть среди предельных функций семейства $\{f(\lambda z)\}$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ нет тождественного нуля. Тогда для любого $\delta > 0$ существует C_δ такое, что при $z \notin \cup_n B(a_n, \delta)$ выполнено неравенство $|f(z)| \geq \frac{1}{C_\delta}$.

Следуя [6], введем следующее определение.

Функцию $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ назовем нормальной первой категории, если среди предельных функций семейства $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ нет констант. В противном случае назовем эту функцию нормальной второй категории.

Следующий результат удобно формулировать для A -точек функции f , т.е. корней уравнения $f(z) - A = 0$ (или в случае $A \equiv \infty$ уравнения $\frac{1}{f(z)} = 0$).

Теорема 7. Если f — нормальная первой категории, то для всех $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует константа K такая, что для всех $r > 0$ в кольце $\{r < |z| < Kr\}$ есть A -точка $f(z)$.

Следующий критерий является аналогом теоремы 1 из работы [5] для нормальных в $\mathbb{C}^*$ функций.

Теорема 8. Для того, чтобы мероморфная функция f в $\mathbb{C}^*$ являлась нормальной первой категории необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta > 0$ выполнялись утверждения теорем 6 и 6*, а ее нули и полюсы удовлетворяли теоремам 2, 3, 4 и 7.

Произведение нормальных функций, вообще говоря, может и не быть нормальной функцией. Пусть, например, $f_1(z) = z$, $f_2(z)$ — любая нормальная функция, у которой есть корни $\alpha_n \rightarrow \infty$ и полюсы $\beta_n \rightarrow \infty$ (построить такую функцию можно, используя представление А. Островского из [9], [1]). Не ограничивая общности, считаем, что $f_2(\alpha_n z) \rightarrow g(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $g(z) \neq 0$. С другой стороны, если произведение $f_1(\alpha_n z)f_2(\alpha_n z)$ имеет предел $h(z)$ при $n \rightarrow \infty$, то $h(1) = 0$. В то же время, для любого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $g(z) \neq 0$, имеем $h(z) = \infty$. Значит, $h(z)$ не может быть мероморфной функцией. Тем не менее, для нормальных функций первой категории справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть f_1, f_2 — нормальные функции первой категории. Тогда для того, чтобы их произведение $f_1 f_2$ было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между нулями и полюсами этого произведения было равномерно отграничено от нуля. Аналогичное утверждение верно для функции $\frac{f_1}{f_2}$.

Полное описание нормальных функций в виде бесконечных произведений по нулям и полюсам, данное А. Еременко в [1] без доказательства, будет с

полным доказательством приведено во второй части работы.

Метрика $\frac{|dz|}{|z|}$ в $\mathbb{C}^*$

Рассмотрим в $\mathbb{C}^*$ метрику $ds = \frac{|dz|}{|z|}$, так что $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{u^2 + v^2}$. Длина кривой $(u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)), t \in (t_0, t_1)$, в этой метрике вычисляется по формуле

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt,$$

где g_{ij} — элементы матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$ первой фундаментальной формы.

Можно показать, что окружности с центром в начале координат и лучи, исходящие из него, в этой метрике являются геодезическими линиями.

Обозначим через $d(a, b)$ — расстояние между точками a и b в этой метрике. Если точки a, b расположены на одной окружности с центром в нуле, то $d(a, b) = |\arg a - \arg b|$, при этом $\arg a, \arg b$ такие, что $|\arg a - \arg b| < 2\pi$. Если же они расположены на одном луче, то $d(a, b) = \left| \ln \frac{|b|}{|a|} \right|$. Заметим, что для произвольных точек $a, b \in \mathbb{C}^*$

$$\max \left\{ \left| \ln \frac{|b|}{|a|} \right|, |\arg a - \arg b| \right\} < d(a, b) < \left| \ln \frac{|b|}{|a|} \right| + |\arg a - \arg b| \quad (1)$$

Обозначим через $\Gamma(r, R)$ — открытое кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, через C без индексов — любые, вообще говоря, произвольные, постоянные, зависящие только от функции f или ее нулей и полюсов. Для $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ положим $C(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^* : \arg a - \varepsilon < \arg z < \arg a + \varepsilon; |a|e^{-\varepsilon} < |z| < |a|e^{\varepsilon}\}$. Из (1) следует, что $B(a, \varepsilon) \subset C(a, \varepsilon) \subset B(a, 2\varepsilon)$. В силу неравенства треугольника, диаметр множества $C(a, \varepsilon)$ в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$ не превосходит 4ε . Значит, диаметр $B(a, \varepsilon)$ в этой метрике также не превосходит 4ε .

Отметим, что диаметры множеств не меняются при отображениях $\{z \rightarrow \lambda z\}$.

Далее, из неравенства (1), неравенства

$$\max \left\{ \left| \ln \frac{|z|}{|w|} \right|, |\arg z - \arg w| \right\} < \left| \operatorname{Ln} \frac{z}{w} \right| < \left| \ln \frac{|z|}{|w|} \right| + |\arg z - \arg w|$$

и неравенства

$$\frac{1}{2} \left| \frac{z}{w} - 1 \right| \leq \left| \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{z}{w} - 1 \right) \right| \leq \left| \frac{z}{w} - 1 \right|,$$

которое справедливо при $\left| \frac{z}{w} - 1 \right| < \frac{1}{2}$, следует, что окрестность любой точки z в метрике $d(z, w)$ порождается множествами вида $\left\{ w : \left| \frac{z}{w} - 1 \right| < \delta \right\}$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$. Отсюда, в частности, следует, что теоремы 4 и 4* эквивалентны.

Эквивалентность теорем 3 и 3* следует из того, что любое ограниченное в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$ множество можно вложить в кольцо вида $\Gamma(r, ar)$, где $|\ln a| \leq \text{diam} E$. Следовательно, его можно покрыть конечным числом колец вида $\Gamma(r, 2r)$.

Доказательства сформулированных теорем

Определение. Функция $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называется нормальной, если семейство функций $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ — нормально, т.е. из любой последовательности функций этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на компактах в $\mathbb{C}^*$ подпоследовательность, при этом в $\overline{\mathbb{C}}$ рассматривается сферическая метрика.

Заметим, что в сферической метрике расстояние между точками сохраняется при замене Z, W на $\frac{1}{Z}$ и $\frac{1}{W}$ и что для любого $R < \infty$ и любых точек $Z, W, |Z| < R, |W| < R$ имеем: $c|Z - W| \leq \rho(Z, W) \leq C|Z - W|$ с некоторыми константами c и C , зависящими от R .

Отметим некоторые простые факты, касающиеся мероморфных и нормальных функций.

Предложение 1. Дробно-линейное отображение сохраняет нормальность функции.

Следует из того, что дробно-линейное отображение есть гомеоморфизм сферы Римана на себя. ■

Предложение 2. Функции $f(z)$ и $f(\frac{1}{z})$ нормальны одновременно.

Предложение 3. Если f_n — непрерывные отображения из произвольной области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ в $\overline{\mathbb{C}}$, то следующие условия эквивалентны:

- (1) f_n равномерно сходится на компактных подмножествах Ω ;
- (2) $\forall z_0 \in \Omega$ существует окрестность $U_{z_0} = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ такая, что в ней либо функции $f_n(z)$, либо $f_n^{-1}(z)$ сходятся равномерно как отображения из U_{z_0} в $\mathbb{C}$ с Евклидовой метрикой в $\mathbb{C}$.

Это следует из связи между сферическим и Евклидовым расстояниями. ■

Предложение 4. Пусть f_n — мероморфные функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, $\rho(f_n(z), f(z)) \rightarrow 0$ на компактных подмножествах Ω . Тогда функция f мероморфна.

Предложение 5. Пусть f_n — мероморфные функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, $\rho(f_n(z), f_m(z)) \rightarrow 0$ на компактных подмножествах Ω . Тогда существует мероморфная функция f в Ω (возможно $f \equiv \infty$), что $\rho(f_n(z), f(z)) \rightarrow 0$ на компактных подмножествах Ω .

Предложение 6. Пусть f_n – последовательность мероморфных функций в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, и в окрестности каждой точки из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Тогда существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в Ω .

Достаточно, применяя диагональный процесс, получить подпоследовательность, сходящуюся в окрестности каждой точки из $\mathbb{C}^*$, и воспользоваться предложением 3. ■

Теперь мы можем доказать теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Выберем последовательность $\{\mu_m\} \subset \mathbb{C}^*$ и покажем, что для некоторой ее подпоследовательности $\mu_{m'}$ функции $g(\mu_{m'}z)$ сходятся равномерно на компактах относительно сферической метрики. Достаточно проверить сходимост для фиксированного компакта $K \subset \mathbb{C}^*$, а потом воспользоваться диагональным процессом. По условию, для каждого фиксированного m , $\rho(f(\lambda_n \mu_m z), g(\mu_m z)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in K$. Выберем подпоследовательность $n(m)$ так, что $\rho(f(\lambda_{n(m)} \mu_m z), g(\mu_m z)) \leq \frac{1}{n}$ при $z \in K$. Тогда $\rho(f(\lambda_{n(m)} \mu_m z), g(\mu_m z)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно на K . Далее, из последовательности $\lambda_{n(m)} \mu_m$ выберем такую подпоследовательность, чтобы $f(\lambda_{n(m')} \mu_{m'} z)$ сходилась к некоторой функции $h(z)$ равномерно на K . Из неравенства $\rho(g(\mu_{m'} z), h(z)) \leq \rho(g(\mu_{m'} z), f(\lambda_{n(m')} \mu_{m'} z)) + \rho(f(\lambda_{n(m')} \mu_{m'} z), h(z))$, следует, что подпоследовательность $g(\mu_{m'} z)$ сходит к функции $g(z)$ равномерно по $z \in K$. ■

Предложение 7. Пусть f_n – мероморфные функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, причем $f_n \rightarrow f$ равномерно на компактах в Ω . Тогда если L – замкнутая стягиваемая в точку кривая в Ω , $f|_L \neq 0$ и $f|_L \neq \infty$, то существует N , такое что для всех $n > N$ верно: $p_n \equiv p$, $q_n \equiv q$, где p_n и q_n – количество нулей и полюсов функций $f_n(z)$, p и q – количество нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри области, ограниченной кривой L .

Это верно и в случае, когда L является границей кольца в Ω .

Доказательство. По теореме Гурвица, нули и, соответственно, полюсы допредельных функций стремятся к нулям и, соответственно, полюсам предельной. Отсюда следует, что для всех нулей и полюсов f и выбранного $\tilde{\epsilon}$ можно найти такой номер N , начиная с которого нули и полюсы допредельных функций будут лежать в окрестности радиуса $\tilde{\epsilon}$, а, следовательно, и внутри L , если ϵ достаточно мало. Ввиду того, что у функции f внутри L конечное число нулей и полюсов, номер N можно взять один для всех нулей и полюсов. Мы получили, что, начиная с некоторого номера, все нули и полюсы допредельных функций, стремящиеся к нулям и полюсам, лежащим внутри L , предельной функции, также лежат внутри L . Таким образом, начиная с этого номера, $p_n \equiv p$, $q_n \equiv q$. ■

Теперь мы можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)$ не принимает в выколотой окрестности нуля значение A . Переходя при необходимости к функции

$\frac{1}{f(z) - A}$, можно считать $A = \infty$, т.е. $f(z)$ голоморфна в этой окрестности. Пусть среди предельных функций последовательности вида $f(p_n z)$, $p_n \rightarrow 0$, есть функция $g(z) \neq \infty$. Если $g(z)$ имеет полюса, то выбирая замкнутый контур $L \subset \mathbb{C}^*$, на котором $g(z) \neq 0$ и $g(z) \neq \infty$, приходим в противоречие с предложением 7.

Пусть $\sup_{|z|=1} |g(z)| = M$. Так как $f(p_n z) \rightarrow g(z)$ равномерно на окружности $|z| = 1$, то при достаточно больших n имеем $|f(p_n z)| \leq M + 1$ при $|z| = 1$. Отсюда по принципу максимума модуля получаем, что $|f(z)| \leq M + 1$ в выколотой окрестности нуля, т.е. в точке $z = 0$ имеет устранимую особенность. Значит $g(z)$ является голоморфной функцией в $\mathbb{C}^*$.

Если же все предельные функции равны бесконечности, то $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$. Значит, у функции $f(z)$ в нуле полюс. ■

Доказательство теоремы 2. Предположим противное. Пусть для всех n , можно найти такие числа $r_{1n} < r_{2n} < \infty$, что $|\text{card}\{k : r_{1n} < |a_k| < r_{2n}\} - \text{card}\{k : r_{1n} < |b_k| < r_{2n}\}| > n$. Не ограничивая общности можно считать, что у $f(z)$ нет ни нулей, ни полюсов на окружностях радиусов r_{1n} и r_{2n} . Также можно считать, что

$$\text{card}\{k : r_{1n} < |a_k| < r_{2n}\} - \text{card}\{k : r_{1n} < |b_k| < r_{2n}\} > n. \quad (2)$$

В противном случае заменим f на $\frac{1}{f}$.

Предположим, что для любого n есть полюсы, меньшие r_{1n} и нули, большие r_{2n} . Пусть далее a_{1n} — нуль с наименьшим модулем из всех, больших r_{1n} , b_{1n} — полюс с наибольшим модулем из всех, меньших r_{1n} , a_{2n} — нуль с наибольшим модулем из всех, меньших r_{2n} , b_{2n} — полюс с наименьшим модулем из всех, больших r_{2n} . Соединим a_{in} с b_{in} для $i = 1, 2$, кривой: по радиусу, а затем — по меньшей дуге окружности. Когда z пробегает по каждой из этих кривых, $|f(z)|$ изменяется от 0 до $+\infty$. Следовательно, можно найти такие точки z_{1n} и z_{2n} на этих кривых, что $|f(z_{1n})| = 1$ и $|f(z_{2n})| = 1$. Легко видеть, что при переходе от r_{in} к z_{in} разность в формуле (2) может только увеличиться.

Ввиду нормальности функции $f(z)$, из последовательностей $f(|z_{1n}|z)$ и $f(|z_{2n}|z)$ можно выделить подпоследовательности, равномерно сходящиеся на каждом компакте в $\mathbb{C}^*$ к предельным функциям $g_1(z)$ и $g_2(z)$ соответственно. Очевидно, что $|g_1(1)| = 1$ и $|g_2(1)| = 1$. Следовательно, $g_i \neq 0$ и $g_i \neq \infty$.

Пусть $g_1(z) \neq 0, \infty$ и $g_2(z) \neq 0, \infty$ при $|z| = 1$. Так как $f(|z_{jn}|z) \rightarrow g_j(z)$, то и $f'(|z_{jn}|z) \rightarrow g'_j(z)$, $\frac{f'(|z_{jn}|z)}{f(|z_{jn}|z)} \rightarrow \frac{g'_j(z)}{g_j(z)}$, $j = 1, 2$. Далее, согласно принципу аргумента,

$$\begin{aligned} \text{card}\{k : |z_{1n}| < |a_k| < |z_{2n}|\} - \text{card}\{k : |z_{1n}| < |b_k| < |z_{2n}|\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|z_{2n}|} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|z_{1n}|} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(|z_{2n}|z)}{f(|z_{2n}|z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(|z_{1n}|z)}{f(|z_{1n}|z)} dz.$$

Устремляя n к бесконечности получим, что последняя разность бесконечно возрастает и стремится к разности $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g'_2(z)}{g_2(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g'_1(z)}{g_1(z)} dz$, которая ограничена. Мы пришли к противоречию.

Если у $g_1(z)$ и $g_2(z)$ есть нули или полюсы при $|z| = 1$, то выберем $\rho'_1 < 1 < \rho_1$ и $\rho_2 < 1 < \rho'_2$ — числа такие, что на окружностях $|z| = \rho_i$ и $|z| = \rho'_i$ у функций $g_i(z)$ нет ни нулей, ни полюсов. Разности количества нулей и полюсов этих функций в кольцах $\{\rho'_1 < |z| < \rho_1\}$, $\{\rho_2 < |z| < \rho'_2\}$ ограничены. В силу предложения 7 разности количества нулей и полюсов для функций $f(|z_{in}|z)$ также ограничены в этих кольцах. Следовательно, эти разности ограничены и для функции $f(z)$ в кольцах $\{|z_{1n}|\rho'_1 < |z| < |z_{1n}|\rho_1\}$, $\{|z_{2n}|\rho_2 < |z| < |z_{2n}|\rho'_2\}$. Значит, разности количества нулей и полюсов в кольце $\{|z_{1n}|\rho_1 < |z| < |z_{2n}|\rho_2\}$ функции $f(z)$ бесконечно возрастает. Таким образом, этот случай сводится к первому.

Пусть теперь $f(z)$ не имеет полюсов при $|z| < r_{1n}$. В силу теоремы 1, функция f имеет в нуле несущественную особенность, т.е. данная теорема сводится к утверждению ограниченности разности количества нулей и полюсов, содержащихся в круге произвольного радиуса. Доказательство этого факта повторяет вышеизложенное, необходимо лишь опустить r_{1n} и проводить рассуждения для кругов $|z| < r_{2n}$, а не для колец $r_{1n} < |z| < r_{2n}$.

Случай, когда $f(z)$ не имеет нулей при $|z| > r_{2n}$ сводится к предыдущему заменой $\frac{1}{f(1/z)}$. ■

Доказательство теоремы 3. Покажем, что $\text{card}\{k : r \leq |a_k| \leq 2r\}$ — ограничено для всех r . Предположим противное. Пусть для всех n , существует r_n такое, что $\text{card}\{k : r_n \leq |a_k| \leq 2r_n\} > n$. Найдем подпоследовательность r_{n_k} такую, что $f(r_{n_k}z) \rightarrow f_0(z)$ в $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$. В силу равенства теоремы 2, величина $\text{card}\{l : r_{n_k} \leq |a_l| \leq 2r_{n_k}\} - \text{card}\{l : r_{n_k} \leq |b_l| \leq 2r_{n_k}\}$ не превосходит некоторой константы C . Следовательно, при достаточно больших n_k функция $f(r_{n_k}z)$ имеет нули и полюсы в $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$. Значит, $f_0 \neq 0$, $f_0 \neq \infty$ и поэтому имеет конечное число нулей и полюсов в этом кольце. Выбирая числа $\rho_1 < 1$ и $\rho_2 > 2$ такие, что $f_0(z) \neq 0, \infty$ при $\{\rho_1 \leq |z| < 1\}$, $\{2 < |z| \leq \rho_2\}$, получим противоречие с предложением 7. ■

Доказательство теоремы 4. Если утверждение теоремы неверно, то существует (k_n, l_n) — последовательности индексов такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k_n}}{b_{l_n}} = 1$. Рассмотрим $f(a_{k_n}z)$. Найдем подпоследовательность $f(a_{k_n}z)$ сходящуюся равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{C}^*$ к предельной функции g . Из того, что $f(a_{k_n}) = 0$ следует, что $g(1) = 0$. В некоторой окрестности точки 1 имеем $|g(z)| < 1$. Рассмотрим последовательность $z_n = \frac{b_{l_n}}{a_{k_n}}$. Так

как $z_n \rightarrow 1$ и $f(a_{k_n}z)$ сходится равномерно к $g(z)$ в некоторой окрестности единицы, то функция $f(a_n z_n) = f(b_n)$ ограничена, что невозможно, т.к. b_n полюсы функции f . ■

Следствие. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — нули и полюсы некоторой нормальной функции. Введем меру $|\mu|(E) = \text{card}\{k : a_k \in E\} + \text{card}\{k : b_k \in E\}$. Тогда для любого множества $E \subset \mathbb{C}^*$ имеем:

$$|\mu|(E) \leq C_0 S(E), \quad (3)$$

где $S(E)$ — количество замкнутых колец вида $\Gamma(r, 2r)$, покрывающих E . Более того, для всех $r > 0$ и $a > 1$:

$$|\mu|(\Gamma(r, ar)) < C(\ln a + 1), \quad (4)$$

при всех $\gamma \leq 0$:

$$\int_{r < |\omega| < ar} |\omega|^\gamma d|\mu|(\omega) < Cr^\gamma (\ln a + 1). \quad (5)$$

при всех $\gamma > 0$:

$$\int_{r < |\omega| < ar} |\omega|^\gamma d|\mu|(\omega) < Cr^\gamma a^\gamma (\ln a + 1). \quad (6)$$

Доказательство. (3) очевидно следует из теоремы 3. Количество замкнутых колец вида $\Gamma(r, 2r)$, покрывающих кольцо $\Gamma(r, ar)$ равно $[\log_2 a] + 1$, т.е. (4) вытекает из (3). Теперь из неравенств (4) и $r < |\omega| < ar$ получаем (5) и (6). ■

Доказательство теорем 6 и 6*. Предположим, что утверждение теоремы 6* не верно. Рассмотрим последовательность (ω_k) такую, что $\omega_k \notin \cup_n B(a_n, \delta)$ для всех k и $f(\omega_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\omega_{k'}$, что $f(z\omega_{k'}) \rightarrow f_0(z)$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Очевидно, что $f_0(1) = 0$ и по условию $f_0 \not\equiv 0$. Используя предложение 7, а также тот факт, что при умножении на $\omega_{k'}$ диаметр множеств $B(a_n, \delta)$ не меняется, приходим к противоречию. Аналогично доказывается утверждение теоремы 6. ■

Доказательство теоремы 7. Докажем наличие полюса в каждом кольце. Случай с произвольной A -точкой сводится к рассматриваемому заменой $\frac{1}{f(z) - A}$. Предположим противное. Пусть $\Gamma(r_n, K_n r_n)$, $K_n \rightarrow \infty$ — последовательность колец, не содержащих полюсов функции f . Тогда в кольцах $\Gamma(\frac{r'_n}{\sqrt{K_n}}, \sqrt{K_n} r'_n)$, где $r'_n = r_n \sqrt{K_n}$, также нет полюсов функции f . Из теоремы 6 следует, что $|f(r'_n z)| < C_\delta$ для $\frac{e^\delta}{\sqrt{K_n}} < |z| < \sqrt{K_n} e^{-\delta}$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, если $f(r'_n z) \rightarrow g(z)$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$, то $|g(z)| < C_\delta$ для $0 < |z| < \infty$. Значит, $g(z) \equiv \text{const}$, что противоречит условию. ■

Доказательство теоремы 8. Необходимость следует из теорем 2, 3, 4, 6, 6* и 7. Покажем, что эти условия являются достаточными. Пусть нули и полюсы функции f удовлетворяют утверждениям теорем 2, 3, 4 и 7, а сама функция удовлетворяет утверждениям теорем 6 и 6*. Зафиксируем δ_0 из теоремы 4. Тогда каждое множество $B(\omega, \delta_0/2)$ не содержит одновременно и нулей, и полюсов f . Если оно не содержит полюсов f , тогда выполнено неравенство теоремы 6, т.е. $|f(z)| < C$ для всех $z \in B(\omega, \delta_0/3)$. Аналогично, если оно не содержит нулей f , то $|f(z)| > 1/C$ для всех $z \in B(\omega, \delta_0/3)$. Следовательно, для любой последовательности (ω_k) и произвольного $z_0 \in \mathbb{C}^*$, существует подпоследовательность $(\omega_{k'})$ такая, что $|f(z\omega_{k'})| < C$ или $|1/f(z\omega_{k'})| < C$ для всех k' и всех $z \in B(z_0, \delta_0/3)$. В любом случае есть подпоследовательность $(\omega_{k''}) \subset (\omega_{k'})$ и мероморфная функция $g(z)$ в множестве $B(z_0, \delta_0/3)$ такие, что последовательность функций $f(z\omega_{k''})$ равномерно сходится к ней в данном множестве.

По предположению 6 найдется последовательность $f(z\omega_{k''})$, которая сходится в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$.

Так как функции $f(z\omega_{k''})$ имеют хотя бы один нуль и полюс в кольце $\Gamma(1, A_0)$, то по предположению 7, $g(z) \not\equiv \text{const}$, $g(z) \not\equiv \infty$, и функция f является нормальной первой категории. ■

Для доказательства теоремы 9 понадобится следующая лемма.

Предложение 8. Пусть $c_n \in \mathbb{C}^*$ — точки такие, что в каждом открытом кольце $\Gamma(\frac{r}{2}, 2r)$ содержится не более C точек. Тогда если $\delta \leq \delta_0$, то диаметр каждого связного множества вида $\cup_{k=1}^N B(c_k, \delta)$ не превосходит $8C_1\delta$.

Доказательство. Так как $\text{diam}(B(c, \delta)) \leq 4\delta$, то диаметр (в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$) каждого связного множества вида $\cup_{k=1}^N B(c_k, \delta)$ не превосходит $4N\delta$.

Очевидно, что для каждого фиксированного натурального числа N при достаточно малых $\delta \leq \delta_0$, связное множество вида $\cup_{j=1}^N B(c_n, \delta)$ вложено

в $\Gamma(\frac{|a|}{2}, 2|a|)$, где a некоторая точка из набора $c_1, c_2, \dots, c_N$. По условию $N < \frac{C}{4}$. Таким образом, диаметр каждой связной компоненты в объединении $\cup_n B(c_n, \delta)$ будет не больше $4C\delta$ для любого $\delta \leq \delta_0$. ■

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим последовательность $(\omega_k) \subset \mathbb{C}^*$. Тогда существуют нормальные функции g_1, g_2 и подпоследовательность $(\omega_{k'})$ такие, что $\rho_S(f_1(z\omega_{k'}), g_1(z)) \rightarrow 0$, $\rho_S(f_2(z\omega_{k'}), g_2(z)) \rightarrow 0$, при $k' \rightarrow \infty$, равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Пусть U — объединение множеств $B(b_j, \delta)$ по всем полюсам b_j функций g_1 и g_2 . Покажем, что равномерно на компактах в $\mathbb{C}^* \setminus U$ выполнено:

- 1) $|f_1(z\omega_{k'}) - g_1(z)| \rightarrow 0$;
- 2) $|f_2(z\omega_{k'}) - g_2(z)| \rightarrow 0$;
- 3) $|(f_1 f_2)(z\omega_{k'}) - (g_1 g_2)(z)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Так как функции f_1, f_2 нормальные первой категории, то для них

справедливы утверждения теорем 6 и 6*. Из теоремы 6 и предложения 3 следуют утверждения 1) и 2). Утверждение 3) получается из-за того, что функции $f_i(z\omega_{k'})$ равномерно ограничены на компактах в $\mathbb{C}^* \setminus U$.

Используя предложение 8 и теорему 3, получаем, что диаметр в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$ каждой связной компоненты A множества U не превосходит C . Значит для достаточно малого δ , он не превосходит расстояния в между нулями и полюсами функции $f_1 f_2$. Следовательно, A не содержит одновременно нулей и полюсов функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$.

Пусть A не содержит полюсов функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$. Тогда по принципу максимума модуля из 1), 2) и 3) получим, что последовательность функций $(f_1 f_2)(z\omega_{k''})$ равномерно сходится на множестве A к голоморфной функции $f^*(z)$ для некоторой подпоследовательности $(\omega_{k''}) \subset (\omega_{k'})$. Так как $f^*(z) = (g_1 g_2)(z)$ на ∂A , то 3) верно во всем множестве A .

Пусть A не содержит нулей функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$, тогда аналогично утверждениям 1), 2), 3) получим, что $|\frac{1}{f_1(z\omega_{k'})} - \frac{1}{g_1(z)}| \rightarrow 0$, $|\frac{1}{f_2(z\omega_{k'})} - \frac{1}{g_2(z)}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так же получаем, что $|\frac{1}{(f_1 f_2)(z\omega_{k'})} - \frac{1}{(g_1 g_2)(z)}| \rightarrow 0$, при $k' \rightarrow \infty$ на множестве A и $\rho_S((f_1 f_2)(z\omega_{k''}), g_1 g_2(z)) \rightarrow 0$, при $k'' \rightarrow \infty$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$.

Наконец, если f_2 — нормальна, то $\frac{1}{f_2}$ — нормальна, что доказывает последнее утверждение теоремы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Eremenko. Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. // Preprint. Purdue University. — 1999.
2. S. Ju. Favorov. Sunyer-i-Balaguer's Almost Elliptic Functions and Yosida's Normal Functions. // Journal d'Analyse Mathématique, v.104. — 2008. — p. 307–340.
3. A. J. Lohwater, Ch. Pommerenke. On normal meromorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1, no. 550. — 1973. — p. 1–12.
4. D. Minda. Yosida functions. // Lectures in Complex Analysis (ed: Chuang Chi-Tai) Proc. Symp. Compl. Anal., World Sci. — London 1988. — p. 197–213.
5. H. Yoshida. Almost periodic meromorphic functions. // Mathematica Montisnigri, v.1. — 1993. — p. 121–143.
6. K. Yosida. On a class of meromorphic functions. // Proc. Phys.-Math. Soc., Japan, v.16. — 1934. — p. 227–235.
7. L. Zalcman. A heuristic Principle in Function Theory // Amer. Math. Monthly, 82. — 1975. — p. 812–817.

8. К.О. Курбанов. Об одной классификации мероморфных функций, определенных в конечной плоскости // Математические заметки т. 15, по 6. — 1974. — с. 865—874.
9. П.Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. — М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, главная редакция общетехнической литературы и номографии. — 1936. — 239с.
10. У.К. Хейман. Мероморфные функции. — М.: изд. "МИР". — 1966. — 287р.

Статья получена: 17.02.2010; окончательный вариант: 15.09.2010;
принята: 21.09.2010.

© Радченко Л.Д., 2010

Об эквивалентности K -функционалов и аппроксимационных методов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса

В.А. Герасименко, Ю.С. Коломойцев

*Сумской национальной аграрный университет, Украина
Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

В работе изучаются средние и семейства операторов, порожденные обобщенными средними Бохнера-Рисса. Доказано, что при условии сходимости средних или семейства операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса, скорость приближения функций этими методами будет эквивалентна K -функционалам или их аналогам в случае $0 < p < 1$.

Герасименко В.О., Коломойцев Ю.С., **Про еквівалентність K -функціоналів та апроксимаційних методів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса.** У роботі вивчаються середні та сімейства операторів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса. Доведено, що при умові збіжності середніх або сімейств операторів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса, швидкість наближення функцій такими методами буде еквівалентна K -функціоналам або їх аналогам у випадку $0 < p < 1$.

V.A. Gerasimenko, Yu.S. Kolomoitsev, **On equivalence of K -functionals and approximation methods generated by generalized Bochner-Riesz kernels.** In the paper the means and families of operators generated by generalized Bochner-Riesz kernels are studied. It is proved that under condition of convergence of means or families of operators generated by generalized Bochner-Riesz kernels the rate of approximation of functions by these methods is equivalent to K -functional or their realization in the case $0 < p < 1$.

2000 Mathematics Subject Classification 42A10, 42A15.

1. Введение

Рассмотрим семейство операторов

$$S_{n,\lambda}^{(r,\alpha)}(f;x) = (2n+1)^{-d} \sum_{k=0}^{2n} f(t_n^k + \lambda) K_n^{(r,\alpha)}(x - t_n^k - \lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где

$$K_n^{(r,\alpha)}(h) = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|^{2r}}{n^{2r}}\right)^\alpha \cdot e^{ikh} \quad (2)$$

— обобщенное ядро Бохнера-Рисса.

В формулах (1) и (2) величины x, k и λ являются d -размерными векторами, $|k| = (k_1^2 + \dots + k_d^2)^{1/2}$, $kh = k_1 h_1 + \dots + k_d h_d$ и

$$t_n^k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad \sum_{k=0}^{2n} = \sum_{k_1=0}^{2n} \dots \sum_{k_d=0}^{2n}.$$

Мы будем также рассматривать обобщенные средние Бохнера-Рисса

$$S_n^{(r,\alpha)}(f;x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x+h) K_n^{(r,\alpha)}(h) dh, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Здесь и далее $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ обозначает d -мерный тор. При $r = 1$ средние (3) называют средними Бохнера-Рисса. Средние Бохнера-Рисса являются классическим методом тригонометрической аппроксимации, они интенсивно изучались многими математиками (см., напр., [1]). Изучению обобщенных средних Бохнера-Рисса при $r \in \mathbb{N}$ также посвящено целый ряд работ (см., напр., [2]-[5]). В частности, в [2]-[4] показано, что скорость приближения функций обобщенными средними Бохнера-Рисса имеет более высокий порядок в отличие от приближения классическими средними Бохнера-Рисса.

Отметим, что метод суммирования рядов Фурье (3) уже не применим для аппроксимации функций в пространствах L_p с $0 < p < 1$. В отличие от метода (3) приближение семейством операторов (1) имеет смысл для любых $0 < p \leq \infty$ (см. [6]).

Далее нам понадобится понятие K -функционала:

$$K_{2r}(f, t)_p = \inf_g (\|f - g\|_p + t^{2r} \|\Delta^r g\|_p), \quad (4)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Отметим, что при $0 < p < 1$ K -функционал, определенный по формуле (4), тождественно равен 0 (см. [7]). Однако, как было показано в работе [7], в этом случае K -функционал можно заменить следующим объектом

$$\tilde{K}_{2r}(f, \delta)_p = \inf_{t \in \mathcal{T}_{1/\delta}} \{\|f - t\|_p + \delta^{2r} \|\Delta^r t\|_p\}, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{T}_\sigma = \left\{ t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k e^{ikx} : c_{-k} = \bar{c}_k, |k| = (k_1^2 + \dots + k_d^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma \right\}.$$

Известно (см. [8]), что при $p \in [1, \infty]$ и $r = 1$

$$K_{2r}(f, t)_p \asymp \tilde{K}_{2r}(f, t)_p, \quad f \in L_p, \quad t > 0. \quad (6)$$

где $\asymp$ — двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p и r .

В настоящей статье мы покажем, что соотношение (6) справедливо также при любом $r \geq 2$ (см. доказательство теоремы 4).

В работе [2] была доказана следующая теорема:

Теорема А. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha > \frac{d-1}{2}$. Тогда

$$\|f - S_n^{(r, \alpha)}\|_p \asymp K_{2r}(f; 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Следующее усиление теоремы А для средних Бохнера-Рисса ($r = 1$) было получено в работе [8]:

Теорема В. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 0$. Если последовательность операторов $\{S_n^{(1, \alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в L_p , то

$$\|f - S_n^{(1, \alpha)}(f)\|_p \asymp K_2(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для семейства операторов (1) справедлива аналогичная теорема (см. [8]):

Теорема С. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $\alpha > 0$. Если семейство операторов $\{S_{n; \lambda}^{(1, \alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{R}^d}$ сходится в L_p , то

$$\int_{\mathbb{T}^d} \|f - S_{n; \lambda}^{(1, \alpha)}(f)\|_p^p \asymp \tilde{K}_2(f, 1/n)_p^p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В настоящей статье, используя методы работы [8], мы обобщим теоремы В и С на случай средних и семейств операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначим через $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_{p; x}$ p -норму (квазинорму, если $0 < p < 1$) относительно x . p -(квази)норма относительно параметра λ обозначается символом $\|\cdot\|_{p; \lambda}$. Далее, $\|\cdot\|_{\bar{p}} := \|\cdot\|_{p; x}\|_{p; \lambda}$.

Норму линейного и ограниченного оператора $\mathcal{L}_n$, отображающего L_p , $1 \leq p \leq \infty$, в $\mathcal{T}_n$, обозначим через

$$\|\mathcal{L}_n\|_{(p)} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|\mathcal{L}_n(f)\|_p. \quad (12)$$

Пусть $\{\mathcal{L}_{n;\lambda}\}_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{T}^d}$ — семейство операторов, отображающих $L_p(\mathbb{T}^d)$ с $0 < p \leq \infty$ в пространство полиномов $\mathcal{T}_n$, такое, что функция $\mathcal{L}_{n;\lambda}(f; x)$ двух переменных x и λ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^{2d})$ для каждой функции $f \in L_p$. Определим норму (усредненную) такого семейства следующим образом

$$\|\{\mathcal{L}_{n;\lambda}\}\|_{(p)} = (2\pi)^{-d/p} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|\mathcal{L}_{n;\lambda}(f; x)\|_{\bar{p}}.$$

Последовательность линейных операторов $\{\mathcal{L}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, отображающих L_p , $1 \leq p \leq \infty$, в пространство $\mathcal{T}_n$, называется сходящейся в L_p , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_p = 0$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$.

Аналогично, семейство линейных операторов $\{\mathcal{L}_{n;\lambda}\}_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{T}^d}$, отображающее L_p , $0 < p \leq \infty$, в пространство $\mathcal{T}_n$, называется сходящимся в L_p , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{L}_{n;\lambda}(f)\|_{\bar{p}} = 0$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$.

Множество тех значений (p, α, r) , для которых средние $S_n^{(r, \alpha)}$ сходятся в $L_p(\mathbb{T}^d)$, будем обозначать через $\Omega(d)$. Множество тех значений (p, α, r) , для которых сходятся семейства $\{S_{n;\lambda}^{(r, \alpha)}\}$, обозначим через $\Lambda(d)$.

Буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров. Константы C могут быть различными даже в одной строке.

Символ $\asymp$ будет обозначать двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p, r и, быть может, от α .

Следующие две теоремы вытекают из теорем 10 и 11 работы [8].

Теорема 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Средние $S_n^{(r, \alpha)}$ сходятся в L_p , $1 \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность их норм $\{\|S_n^{(r, \alpha)}\|_{(p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена.

Теорема 2. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Семейство $\{S_{n;\lambda}^{(r, \alpha)}\}$ сходится в L_p , $0 < p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|S_{n;\lambda}^{(r, \alpha)}\|_{(p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена.

Прежде чем сформулировать следующую теорему приведем несколько вспомогательных утверждений, касающихся неравенств для тригонометрических полиномов.

Пусть g — вещественная или комплекснозначная функция, определенная на $\mathbb{R}^d$. Эта функция порождает операторы $\{A_\sigma(g)\}_{\sigma \geq 1}$, определяемые по следующей формуле

$$A_\sigma(g)t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g\left(\frac{k}{\sigma}\right) c_k e^{ikx}, \quad t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k e^{ikx} \in \mathcal{T}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|A_\sigma(\mu)t\|_p \leq C(d; p; \mu; \nu) \|A_\sigma(\nu)t\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma \geq 1. \quad (8)$$

Будем говорить, что (8) верно в L_p , если оно выполняется для всех полиномов $t \in \mathcal{T}_\sigma$ и $\sigma \geq 1$ с некоторой положительной константой, не зависящей от t и σ .

Предположим, что $\nu(\xi) \neq 0$ для $\xi \neq 0$ и определим следующую функцию

$$\chi(\xi) = \frac{\mu(\xi)}{\nu(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Будем также предполагать, что χ каким-либо образом определена в точке $\xi = 0$. Рассмотрим неравенство

$$\|A_\sigma(\chi)t\|_p \leq C(d; p; \mu; \nu) \|t\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma \geq 1, \quad (9)$$

которое является ассоциированным с неравенством (8). Следующие две леммы доказаны в работе [8].

Лемма 1. Пусть $\mu(0) = \nu(0) = 0$. Если неравенство (9) верно, то неравенство (8) будет также верным независимо от значения $\chi(0)$.

Обозначим через $W_1^k(\mathbb{R}^d)$ пространство Соболева всех интегрируемых функций, чьи производные до k -го порядка включительно принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^d)$. Через $W_{1,0}^k(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать множество функций из $W_1^k(\mathbb{R}^d)$, имеющих компактный носитель.

Лемма 2. Пусть $0 < p \leq \infty$, $k = [d/q] + 1$ ($q = \min(1, p)$). Если $\chi \in W_{1,0}^k(\mathbb{R}^d)$, то неравенство (9) верно в пространстве L_p .

Теорема 3. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $(p, \alpha, r) \in \Omega(d) \cup \Lambda(d)$. Тогда

$$\|T - S_n^{(r, \alpha)}(T)\|_p \asymp n^{-2r} \|\Delta^r T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

В неравенствах (10) оператор $S_n^{(r, \alpha)}$ может быть заменен на $S_{n; \lambda}^{(r, \alpha)}$ с любым $\lambda \in \mathbb{R}^d$ и константами не зависящими от n и T .

Доказательство. При доказательстве теоремы мы повторяем схему доказательства теоремы 13 статьи [8]. Докажем оценку сверху.

Нетрудно проверить, что для любого полинома $T \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}^d$

$$S_n^{(r, \alpha)}(T; x) = S_{n; \lambda}^{(r, \alpha)}(T; x), \quad x \in \mathbb{T}^d. \quad (11)$$

Откуда получим, что в неравенстве (10) оператор $S_n^{(r,\alpha)}$ может быть заменен на $S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}$. Кроме того, при $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p \leq c\|T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Покажем, что при $0 < p < 1$ неравенство (12) также выполняется. Действительно, из равенства (11) и условий теоремы получим, что для каждого $T \in \mathcal{T}_n$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p = (2\pi)^{-d/p} \|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(T)\|_{\bar{p}} \leq \|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\|_{(p)} \|T\|_p \leq c\|T\|_p.$$

Далее, определим следующие функции:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_1; \\ 0, & \xi \notin D_2, \end{cases} \quad \varphi_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_{1/2}; \\ 0, & \xi \notin D_{3/4}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi_0(\xi),$$

где $D_R = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < R\}$. Мы будем дополнительно предполагать, что φ и φ_0 являются бесконечно-дифференцируемыми на $\mathbb{R}^d$ и радиальными функциями. Положим также

$$\Psi_{r,\alpha}(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{-2r}(1 - \psi_{r,\alpha}(\xi)), & \xi \neq 0; \\ \alpha, & \xi = 0, \end{cases} \quad \mathcal{X}_{r,\alpha}(\xi) = \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi(\xi),$$

где

$$\psi_{r,\alpha}(\xi) = (1 - |\xi|^{2r})_+^\alpha.$$

Ясно, что

$$\mathcal{X}_{r,\alpha}(\xi) = \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi_0(\xi) + \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Поскольку функция $y^{-2r}(1 - (1 - y^{2r})_+^\alpha)$ (продолженная по непрерывности в 0) является аналитической в интервале $(-1, 1)$ мы получим, что функция $\Psi_{r,\alpha}\varphi_0$ является бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^d$. Следовательно, функция $|\xi|^{-2r}\varphi_1(\xi)$ также обладает этим свойством.

Используя лемму 2 и (12), находим

$$\begin{aligned} \|A_n(\mathcal{X}_{r,\alpha})T\|_p^q &\leq \\ &\leq \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_0)T\|_p^q + \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_1)T\|_p^q = \\ &= \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_0)T\|_p^q + \|A_n(|\cdot|^{-2r}\varphi_1(\cdot)) \circ A_n(1 - \psi_{r,\alpha}(\cdot))T\|_p^q \leq \\ &\leq c\|T\|_p^q + \|T - S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p^q \leq c\|T\|_p^q, \end{aligned} \quad (13)$$

где $T \in \mathcal{T}_n$ и $q = \min(1, p)$. Возьмем в лемме 1 $\mu(\xi) = (1 - \psi_{r,\alpha}(\xi))\varphi(\xi)$ и $\nu(\xi) = |\xi|^{2r}$. Тогда из неравенства (13) получим, что

$$\|T - S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p \leq Cn^{-2r}\|\Delta^r T\|, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, оценка сверху в (10) доказана.

Оценку снизу можно аналогично получить из доказательства теоремы 13 статьи [8]. ■

3. Основные результаты

В настоящем разделе мы обобщим теоремы В и С на случай средних и семейств операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ и $r \in \mathbb{N}$. Если последовательность операторов $\{S_n^{(r,\alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в L_p , то

$$\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \asymp K_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при $(p, \alpha, r) \in \Omega(d)$ справедливо соотношение

$$\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \asymp \tilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Из теоремы 1 следует, что при $(p, \alpha, r) \in \Omega(d)$ последовательность $\{S_n^{(r,\alpha)}\}$ ограничена в L_p . Используя теорему 3 для функции $f \in L_p$ и произвольного полинома $T \in \mathcal{T}_n$, находим

$$\begin{aligned} \|f - S_n^{(r,\alpha)}\|_p &\leq \|f - T\|_p + \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + \|S_n^{(r,\alpha)}(f - T)\|_p \leq \\ &\leq (1 + \|S_n^{(r,\alpha)}\|_{(p)})\|f - T\|_p + Cn^{-2r}\|\Delta^r T\|_p \leq \\ &\leq C(\|f - T\|_p + n^{-2r}\|\Delta^r T\|_p). \end{aligned}$$

Откуда следует оценка сверху в (14).

Используя оценку снизу в соотношении (10), находим

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p &\leq \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + n^{-2r}\|\Delta^r S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \leq \\ &\leq \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + C\|S_n^{(r,\alpha)}(f - S_n^{(r,\alpha)}(f))\|_p \leq \\ &\leq C\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, соотношение (14) доказано.

Далее, используя соотношение (14) и теорему А, получим, что при $1 \leq p \leq \infty$ и всех $r \in \mathbb{N}$

$$K_{2r}(f, t)_p \asymp \tilde{K}_{2r}(f, t)_p.$$

Из последнего соотношения и эквивалентности (14) вытекает справедливость доказываемой теоремы. ■

Теорема 5. Пусть $0 < p \leq \infty$, $\alpha > 0$ и $r \in \mathbb{N}$. Если семейство операторов $\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{R}^d}$ сходится в L_p , то

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_p \asymp \tilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $(p, \alpha, r) \in \Omega(d) \cup \Lambda(d)$. Тогда справедлива эквивалентность

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}} \asymp \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p. \quad (17)$$

Соотношение (17) при $r = 1$ доказано в работе [8]. При $r \geq 2$ доказательство аналогично случаю $r = 1$. Таким образом, из теоремы 4 и соотношения (17) получим эквивалентность (16) при $p \geq 1$.

Пусть теперь $0 < p < 1$. Используя теорему 3, находим

$$\begin{aligned} \|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}^p &\leq \|f - T\|_p^p + \|T - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(T)\|_p^p + \|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f - T)\|_p^p \leq \\ &\leq (2\pi)^d \left(1 + \|\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}\|_{(p)}^p\right) \|f - T\|_p^p + Cn^{-2rp} \|\Delta^r T\|_p^p \leq \\ &\leq C(\|f - T\|_p^p + n^{-2rp} \|\Delta^r T\|_p^p) \leq \\ &\leq C(\|f - T\|_p + n^{-2r} \|\Delta^r T\|_p)^p \end{aligned}$$

для всех $f \in L_p$ и $T \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}} \leq C\tilde{K}_{2r}(f; 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Докажем теперь оценку снизу в соотношении (16). Заметим, что для всех $f \in L_p$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{K}_{2r}(f; 1/n)_p \leq 2(2\pi)^{-d/p} \max \left\{ \|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}, n^{-2r} \|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}} \right\}. \quad (19)$$

Используя теорему 3 (нижнюю оценку в (10)), получим, что для всех $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^d$

$$n^{-2r} \|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_p \leq C \|S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f) - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f))\|_p, \quad (20)$$

где константа C не зависит от β, γ и n . Кроме того, справедливо равенство

$$S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)} \circ S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} = (S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} - I) + (I - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}) + S_{n;\beta}^{(r,\alpha)} \circ (I - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

где I — тождественный оператор.

Из (20) и (21) получим, что для $f \in L_p$ и всех $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} n^{-2rp} \|\Delta^r S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p &\leq C(\|f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \|f - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \\ &+ \|S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f))\|_p^p). \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрируя неравенство (22) по $\mathbb{T}^d$ относительно переменной β , получим, что

$$\begin{aligned} n^{-2rp} \|\Delta^r S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p &\leq C((1 + \|\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}\|_{(p)}^p) \|f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \\ &+ (2\pi)^{-d/p} \|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}^p). \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, интегрируя обе части неравенства (23) относительно переменной γ по $\mathbb{T}^d$, находим

$$n^{-2rp} \|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}^p \leq C \|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}^p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Таким образом, из (19) и (24) получим, что

$$\tilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p \leq C \|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\bar{p}}, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.
2. Trigub R.M., Belinsky E.S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer. 2004.
3. Тригуб Р.М. Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. матем., – 1980. – 44, N6. – С. 1378-1409.
4. Тригуб Р.М. Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – 188, N4. – С. 145-160.
5. Wang J. Generalized Bochner-riesz means on spaces generated by smooth blocks // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2003. – 44, N3. – P. 489-505.
6. Руновский К. В., О семействе линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1993. – 184, N2. – С. 145-160.
7. Ditzian Z., Hristov V., Ivanov K. Moduli of smoothness and K-functional in L_p , $0 < p < 1$ // Constr. Approx. – 1995. – 11. – С. 67-83.
8. Runovski K., Schmeisser H.-J., On Approximation Methods Generated by Bochner-Riesz Kernels // J Fourier Anal Appl. – 2008. – 14. – P. 16-38.
9. Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.-J., On the method of approximation by families of linear polynomials operators // J. Anal Appl. – 2000. – 19. – P. 677-693.

Статья получена: 25.03.2010; окончательный вариант: 29.06.2010;
принята: 29.06.2010.

Чудинович Игорь Юрьевич (некролог)**15.12.1949 – 14.06.2010**

14 июня 2010 года ушел из жизни прекрасный математик и педагог, яркий представитель Харьковской математической школы, профессор Игорь Юрьевич Чудинович, почти вся профессиональная жизнь которого была связана с механико-математическим факультетом Харьковского государственного университета.

И.Ю. Чудинович родился 15 декабря 1949 года в городе Макеевка Донецкой области, в семье инженеров. Уже в Харькове после 8 класса встал выбор между музыкальным училищем или математической школой, и Игорь, не сказав ничего родителям, пошел и записался в математическую школу. Занятия в школе велись ведущими учеными Харьковского государственного университета и других высших учебных заведений города, и общая атмосфера в школе способствовала развитию как творческого духа сотрудничества и соперничества среди учеников, так и глубокого интереса к математике.

В 1966 году И.Ю. Чудинович стал студентом механико-математического факультета Харьковского государственного университета. В университете он посещал лекции таких выдающихся ученых как В.А. Марченко, А.В.

Погорелов, Н.И. Ахиезер, Б.Я. Левин и др., где студентам не только излагался классический и современный математический материал на высоком профессиональном уровне, но и прививалось умение мыслить, творчески подходить к решению задач, заниматься самостоятельной исследовательской деятельностью. Впоследствии И.Ю. Чудинович стал достойным продолжателем традиций Харьковской математической школы, которые он на столь же высоком уровне передавал следующим поколениям математиков.

После окончания университета в 1971 году И.Ю. Чудинович поступил в аспирантуру Физико-технического института низких температур по специальности математическая физика (руководитель профессор В.А. Щербина), которую окончил в 1974 году успешной защитой кандидатской диссертации в Институте теоретической физики НАН Украины, г. Киев.

С 1974-го по 2002-й годы И.Ю. Чудинович работал на кафедре математической физики и вычислительной математики механико-математического факультета Харьковского государственного университета, сначала ассистентом, затем доцентом, а с 1995 года профессором кафедры. В течение многих лет И.Ю. Чудинович входил в состав редколлегии Вестника Харьковского государственного университета.

В 1993 году им была защищена докторская диссертация в Физико-техническом институте низких температур, и ему была присуждена степень доктора физико-математических наук.

За годы работы в университете И.Ю. Чудинович руководил более чем 70-ю дипломными работами, 4 его ученика стали кандидатами физико-математических наук. Помимо подготовки и чтения курсов по таким предметам как уравнения математической физики, вариационное исчисление, физика, им было создано немало спецкурсов, в том числе по обобщенным функциям и пространствам Соболева. И.Ю. Чудинович был исключительно талантливым педагогом, одним из лучших преподавателей точных наук в университете. Его лекции отличались особенной ясностью, изяществом и последовательностью изложения, удивительным умением со всей полнотой математической строгости и в то же время легко и доступно изложить самый трудный материал.

С 2002-го по 2007-й годы И.Ю. Чудинович работал в Университете Гуанахуато, Саламанка (Мексика). Последние три года И.Ю. Чудинович работал в университете Тулсы (США), в должности профессора факультета математики и компьютерных наук.

Основные научные интересы И.Ю. Чудиновича были связаны с построением общей теории нестационарных граничных интегральных уравнений и ее применением к задачам классической теории упругости, теории колебаний упругих пластин, теории вязкоупругости и термоупругости, задачам дифракции акустических и электромагнитных волн. В 70-е годы И.Ю. Чудинович изучал различные вопросы квантовой электродинамики, и в частности, привел математически корректное доказательство градиентной инвариантности матрицы рассеивания (S-матрицы) в теории Фейнмана-

Дайсона. В 80-е годы им исследовались проблемы синтеза некоторых дискретных механических систем с заданными частотами колебаний, а также изучались вопросы гомогенизации упругих сред с больших числом маленьких вкраплений. В 90-е годы И.Ю. Чудиновичем была построена полная математически строгая теория нестационарных граничных интегральных уравнений в динамических задачах теории упругости. В частности, им была доказана однозначная разрешимость подобных уравнений для начально-краевых задач с условиями Дирихле, Неймана и со смешанными граничными условиями, для начально-краевых задач в кусочно-однородных средах, а также в областях с трещинами. Позже им были получены аналогичные результаты в теории дифракции электромагнитных и акустических волн, для динамических задач вязкоупругих сред, начально-краевых задач теории термоупругости, а также для начально-краевых задач теории тонких упругих пластин.

Научные результаты И.Ю. Чудиновича широко известны среди математиков как в нашей стране так и за рубежом, он неоднократно был докладчиком на международных конференциях и симпозиумах, приглашался для совместной работы с математиками университета Штутгарта (Германия) и университета Глазго (Великобритания). И.Ю. Чудинович является автором и соавтором 3-х математических монографий, более 80-ти статей в реферируемых журналах, и 30-ти других публикаций, включая учебные пособия и курсы лекций.

Для Игоря Юрьевича наука была главным занятием в жизни, он любил и превосходно знал историю и литературу, был признанным знатоком и ценителем оперной музыки. Игорь Юрьевич был исключительно обаятельным человеком с прекрасным чувством юмора.

Талантливый ученый и педагог, человек прекрасных душевных качеств - доброжелательный, отзывчивый, мягкий, деликатный - Игорь Юрьевич Чудинович неизменно пользовался огромным уважением и любовью своих сотрудников, студентов и людей, знавших его. Они навсегда сохраняют светлую память о нем.

Коробов В.И., Борисенко А.А., Гандель Ю.В., Гришин А.Ф.,
Золотарев В.А., Руткас А.Г., Скляр Г.М., Пацегон Н.Ф.,
Фаворов С.Ю., Чуешов И.Д., Щербина В.А., Янцевич А.А.,
Лытова А.Ю.

Список публикаций И.Ю. Чудиновича

А. Книги

1. Чудинович И.Ю. Метод граничных уравнений в динамических задачах теории упругости. - Харьков, 1991. - 132с.

2. Chudinovich, I. and Constanda, C., *Variational and Potential Methods in the Theory of Bending of Plates with Transverse Shear Deformation*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington, D.C., 2000, 236 pp.
3. Chudinovich, I. and Constanda, C., *Variational and Potential Methods for a Class of Linear Hyperbolic Evolutionary Processes*, Springer, London-Heidelberg-New York, 2005, 148 pp.

В. Статьи в реферируемых журналах

1. В. Д. Гордецкий, О. В. Уваров, И. Ю. Чудинович, В. А. Щербина, *R-операция Боголюбова для локальных взаимодействий*, ТМФ, 20:2 (1974), 147-159.
2. И. Ю. Чудинович, В. А. Щербина, Ренормированные фейнмановские амплитуды для полей с фиксированными массами, ТМФ, 27:1 (1976), 24-37.
3. И. Ю. Чудинович, Ю. В. Исиченко, И. Д. Чуешов, К задаче плоской теории упругости, *Вестник Хар. Гос. Univ.* **46** (1981), 61.
4. Dolberg, M.D. and Chudinovich, I.Yu., A discrete synthesis problem for a system of strings, *Proc. Acad. Sci. USSR. Mech. Solids*, **6** (1982), 48-54.
5. Л. В. Берлянд, И. Ю. Чудинович, Осреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами, *Докл. АН СССР* **272** (1983), 777-780.
6. И. Ю. Чудинович, Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения* **42** (1984), 21-26.
7. И. Ю. Чудинович, Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами 2. Случай периодического распределения пустот, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения* **44** (1985), 133-136.
8. И. Ю. Чудинович, Осреднение густоперфорированных цилиндрических оболочек, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения* **46** (1986), 136-139.
9. И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред, *Доповіді НАН України, Сер. А*, no. 11 (1990), 18-21.

10. И. Ю. Чудинович, Методы решения граничных уравнений в задачах динамики упругих сред, *Доповіді НАН України, Сер. А*, по. 4 (1991), 14–17.
11. И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред с краевыми условиями смешанного типа, *Доповіді НАН України, Сер. Мат. Фіз.* по. 11 (1992), 24–26.
12. И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных упругих сред, *Матем. заметки*, 51:2 (1992), 124–128.
13. И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции упругих волн на пространственных трещинах, *Матем. заметки*, 51:4 (1992), 119–123.
14. И. Ю. Чудинович, Замечание о гладкости решений нестационарных граничных уравнений, *Матем. заметки*, 52:5 (1992), 132–135.
15. Chudinovich, I.Yu., The boundary equation method in the third initial-boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems, *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993), 203–215.
16. Chudinovich, I.Yu., The boundary equation method in the third initial-boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions, *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993), 217–227.
17. Chudinovich, I.Yu., Methods of potential theory in the dynamics of elastic media, *Рос. Журнал Мат. Физ.* **1** (1993), 427–446.
18. Chudinovich, I.Yu., О решениях методом Галеркина граничных уравнений в задачах нестационарной дифракции упругих волн на пространственных трещинах, *Дифференциальные уравнения* **29** (1993), 1648–1651.
19. С. Ю. Доброхотов, О. Л. Толстова, И. Ю. Чудинович, Волны в жидкости на упругом основании. Теорема существования и точные решения, *Матем. заметки*, 54:6 (1993), 33–55.
20. Chudinovich, I. and Dieng, S., Potential theory methods in diffraction problems for acoustic waves, *C.R. Acad. Sci. Paris* **320** (1995), 885–889.
21. Chudinovich, I. and Dieng, S., The solvability of the boundary equations of the transient diffraction of acoustic waves on manifolds having a boundary, *C.R. Acad. Sci. Paris* **320** (1995), 1019–1023.
22. Chudinovich, I.Yu., The solvability of the main mixed problems of the theory of elasticity in complete scales of Sobolev spaces, *Доповіді НАН України, Сер. Мат. Фіз.* no. 6 (1995), 39–40.

23. Chudinovich, I., The solvability of the first main mixed problem of the theory of elasticity in a complete scale of Sobolev spaces, *Мат. Физ., Анал. Геом.* **2** (1995), 129–138.
24. Chudinovich I., The solvability of the second main mixed problem of the theory of elasticity in a complete scale of Sobolev spaces, *Мат. Физ., Анал. Геом.* **3/4** (1995), 356–362.
25. Chudinovich, I. and Constanda, C., Weak solutions of interior boundary-value problems for plates with transverse shear deformation, *IMA J. Appl. Math.* **59** (1997), 85–94.
26. Chudinovich, I., The solvability of boundary equations in mixed problems for nonstationary Maxwell system, *Math. Methods Appl. Sci.* **20** (1997), 425–448.
27. Лытова А. Ю., Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции электромагнитных волн. // Диф. уравнения. - 1997. - т.33. - вып. 9 - с. 1191-1198. .
28. Chudinovich, I., The solvability of boundary equations in mixed problems for the Maxwell system, *Russian Math. Dokl.* **335** (1997), 25–27.
29. Chudinovich, I. and Constanda, C., Variational treatment of exterior boundary value problems for plates with transverse shear deformation, *IMA J. Appl. Math.* **61** (1998), 141–153.
30. Лытова А. Ю., Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в смешанных задачах для системы Максвелла // Доповіді НАН України. - 1998. - №4. - с. 32-35.
31. Chudinovich, I. and Constanda, C., Displacement-traction boundary value problems for plates with transverse shear deformation, *J. Integral Equations Appl.* **11** (1999), 421–436.
32. Chudinovich, I. and Constanda, C., Nonstationary integral equations for elastic plates, *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser.I* **329** (1999), 1115–1120.
33. Chudinovich, I. and Constanda, C., Existence and integral representations of weak solutions for elastic plates with cracks, *J. Elasticity* **55** (1999), 169–191.
34. Chudinovich, I., Граничные уравнения в задачах динамики тонких пластин, *Вісник Харківського університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. по. 458 (1999), 213–217.
35. Chudinovich, I. and Gassan, Yu., Boundary equations in basic dynamic problems for thin elastic plates, *Вісник Харківського національного*

університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка".
no. 475 (2000), 250–258.

36. Chudinovich I.Yu., Dumina O.A. Boundary equations in two main dynamic problems for thermoelastic media, *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. no. 475 (2000), 230–240.
37. Chudinovich, I. and Constanda, C., The Cauchy problem in the theory of plates with transverse shear deformation, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **10** (2000), 463–477.
38. Chudinovich, I. and Constanda, C., Solvability of initial-boundary value problems in bending of plates, *Z. Angew. Math. Phys.* **51** (2000), 449–466.
39. Chudinovich, I. and Constanda, C., Solution of bending of elastic plates by means of area potentials, *Z. Angew. Math. Mech.* **80** (2000), 547–553.
40. Chudinovich, I. and Constanda, C., Boundary integral equations for multiply connected plates, *J. Math. Anal. Appl.* **244** (2000), 184–199.
41. Chudinovich, I. and Constanda, C., Integral representations of the solutions for a bending of plate on an elastic foundation, *Acta Mech.* **139** (2000), 33–42.
42. Chudinovich, I. and Constanda, C., Existence and uniqueness of weak solutions for a thin plate with elastic boundary conditions, *Appl. Math. Lett.* **13** (2000), 43–49.
43. Chudinovich, I., Constanda, C., and Koshchii A., The classical approach to dual methods for plates, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **53** (2000), 497–510.
44. Chudinovich, I. and Constanda, C., Combined displacement-traction boundary value problems for elastic plates, *Math. Mech. Solids* **6** (2001), 175–191.
45. Chudinovich, I. and Constanda, C., The solvability of boundary integral equations for the Dirichlet and Neumann problems in the theory of thin elastic plates, *Math. Mech. Solids* **6** (2001), 269–279.
46. Chudinovich, I. and Constanda, C., The transmission problem in bending of plates with transverse shear deformation, *IMA J. Appl. Math.* **66** (2001), 215–229.
47. Chudinovich, I., Boundary equations in dynamic problems of the theory of elasticity, *Acta Applicandae Math.* **65** (2001), 169–183.
48. Chudinovich, I. and Constanda, C., Dynamic transmission problems for plates, *Z. Angew. Math. Phys.* **53** (2002), 1060–1074.

49. Chudinovich, I. and Constanda, C., Boundary integral equations in dynamic problems for elastic plates, *J. Elasticity* **68** (2002), 73–94.
50. Chudinovich I.Yu., Dumina O.A. Boundary equations in the contact dynamic problem for thermoelastic media // Мат. физика, анализ, геометрия. - 2002. -Т. 9, № 3. - С. 427-435.
51. Chudinovich, I. and Constanda, C., Time-dependent boundary integral equations for multiply connected plates, *IMA J. Appl. Math.* **68** (2003), 507–522.
52. А. Ю. Лытова, И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах дифракции электромагнитных волн с импедансным краевым условием, Матем. заметки, 73:1 (2003), 77-91.
53. Chudinovich, I. and Constanda, C., Integral representations for the solution of dynamic bending of a plate with displacement-traction boundary data, *Georgian Math. J.* **10** (2003), 467–480 (V.D. Kupradze Memorial Volume).
54. Chudinovich, I. and Constanda, C., Boundary integral equations in dynamic contact problems for plates, *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. **493** (2003), 53–56.
55. Chudinovich, I., Constanda, C., and Gomez, E.A., Nonstationary boundary equations for plates with transverse shear deformation and elastic articulation of the boundary, *Acta Mech.* **167** (2004), 91–100.
56. Chudinovich, I., Constanda, C., and Gomez, E.A., Weak solutions for time-dependent boundary integral equations associated with the bending of elastic plates under combined boundary data, *Math. Methods Appl. Sci.* **27** (2004), 769–780.
57. Chudinovich, I., Constanda, C., and Venegas, J.C., The Cauchy problem in the theory of thermoelastic plates with transverse shear deformation, *J. Integral Equations Appl.* **16** (2004), 321–342.
58. Chudinovich, I., Constanda, C., and Venegas, J.C., Solvability of initial-boundary value problems for bending of thermoelastic plates with mixed boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **311** (2005), 357–376.
59. Chudinovich, I., Constanda, C., and Dolberg, O., A matrix of fundamental solutions for thermoelastic plates with transverse shear deformation, *J. Engng. Math.* **51** (2005), 199–209.
60. Chudinovich, I. and Constanda, C., Potential representations of solutions for dynamic bending of elastic plates weakened by cracks, *Math. Meth. Solids* **11** (2006), 494–512.

61. Chudinovich, I., Constanda, C., and Venegas, J.C., On the Cauchy problem for thermoelastic plates, *Math. Methods Appl. Sci.* **29** (2006), 625–636.
62. Chudinovich, I., Constanda, C., Dale, D., and Koshchii, A., Nonclassical dual methods in equilibrium problems for elastic plates, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, on-line advanced publ. (2005), doi: 10.1093/qj-mam/hbi034.
63. Chudinovich I., Constanda C., The Cauchy problem in the bending of thermoelastic plates, in *Integral Methods in Science and Engineering: Theoretical and Practical Aspects*, Birkhäuser, Boston, 2006, 29–35.
64. Chudinovich I., Constanda C., Mixed initial-boundary value problems for thermoelastic plates, in *Integral Methods in Science and Engineering: Theoretical and Practical Aspects*, Birkhäuser, Boston, 2006, 37–45.
65. Chudinovich I., Constanda C., Potential representations of solutions for dynamic bending of elastic plates weakened by cracks, *Math. Mech. Solids* **11** (2006), 494–512.
66. Chudinovich I., Constanda C., Doty D., and Koshchii A., Non-classical dual methods in equilibrium problems for thin elastic plates, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **59** (2006), 125–137
67. Chudinovich I., Constanda C., Col'in Venegas J., On the Cauchy problem for thermoelastic plates, *Math. Methods Appl. Sci.* **29** (2006), 625–636
68. Chudinovich I., Constanda C. Aguilera-Cort'es L.A., The direct method in time-dependent bending of thermoelastic plates, *Applicable Anal.* **86** (2007), 315–329
69. Chudinovich I., Constanda C., Doty D., Hamill W., and Pomeranz S., On a boundary value problem for the plane deformation of a thin plate on an elastic foundation, in *Proceedings of the Thirteenth International Symposium on Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics*, Khar'kov-Kherson, 2007, 358–361
70. Chudinovich I., Constanda C., Layer potentials in thermodynamic bending of elastic plates, in *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2008, 63–73.
71. Chudinovich I., Constanda C., Direct methods in the theory of thermoelastic plates, in *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2008, 75–81.
72. Chudinovich I., Constanda C., Doty D., Hamill W., and Pomeranz S., The Dirichlet problem for the plane deformation of a thin plate on an elastic foundation, in *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2008, 83–88

73. Chudinovich I., Constanda C., Boundary integral equations in time-dependent bending of thermoelastic plates, *J. Math. Anal. Appl.* **339** (2008), 1024–1043.
74. Chudinovich I., Constanda C., Contact problems in bending of elastic plates, in *Advances in Computational and Experimental Engineering and Sciences*, Tech Science Press, 2008, pp. 159–165.
75. Chudinovich I., Constanda C., The displacement initial-boundary value problem for bending of thermoelastic plates weakened by cracks, *J. Math. Anal. Appl.* **348** (2008), 286–297.
76. Chudinovich I., Constanda C., Boundary integral equations in bending of thermoelastic plates with mixed boundary conditions, *J. Integral Equations Appl.* **20** (2008), 311–336.
77. Chudinovich I., Constanda C., The traction initial-boundary value problem for bending of thermoelastic plates with cracks, *Applicable Anal.* **88** (2009), 961–975.
78. Chudinovich I., Constanda C., Boundary integral equations for thermoelastic plates with cracks, *Math. Mech. Solids* **15** (2010), 96–113.
79. Chudinovich I., Constanda C., Contact problems in bending of thermoelastic plates, in *Integral Methods in Science and Engineering. Vol. 1: Analytic Methods*, Birkhäuser, Boston, 2010, 115–122.
80. Chudinovich I., Constanda C., Doty D., Koshchii A., Solution estimates in classical bending of plates, in *Integral Methods in Science and Engineering. Vol. 2: Computational Methods*, Birkhäuser, Boston, 2010, 113–120.
81. Chudinovich I., Constanda C., Boundary integral equations for bending of thermoelastic plates with transmission boundary conditions, *Math. Methods Appl. Sci.* **33** (2010), 117–124.
82. Chudinovich I., Constanda C., Transmission problems for thermoelastic plates with transverse shear deformation, *Math. Mech. Solids* **15** (2010), 491–511.
83. Chudinovich I., Constanda C., The Dirichlet problem for a plate on an elastic foundation, *Libertas Math.* **30** (2010), 81–84.

Visit our Web-page

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Editorial Board
- Abstracts
- Full-texts available (PDF)

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
№ 922 Серія “Математика, прикладна математика і механіка”

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 01.11.2010 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 4,7

Обл.– вид. арк. – 5,5

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, тел. 705-24-32 4-63

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

