УДК 517.9

И. Д. ЧУЕШОВ

СВОЙСТВА АТТРАКТОРА В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПАНЕЛИ

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + u'''' + \left(\Gamma - \int_0^\pi |u'(x, t)|^2 dx\right) u'' = p(x) - \rho u', \qquad (1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u''|_{x=0} = u''|_{x=\pi} = 0, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = u_1(x). \qquad (3)$$

Здесь $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\gamma > 0$, $\rho \geqslant 0$, Γ — константы. Предполагается, что $p \in H_0^1(0, \pi)$, $u_0 \in (H_0^1 \cap H^2)(0, \pi)$, $u_1 \in L^2(0, \pi)$, где $H^l(0, \pi)$ —

соболевское пространство порядка l. Задача (1)—(3) описывает нелинейные колебания бесконечной панели ширины π в сверхзвуковом потоке газа. Величина ρ определяется скоростью потока. Параметр Γ пропорционален величине сжимающего усилия.

Как и в [1], для задачи (1)—(3) можно доказать теорему существования и единственности, позволяющую в пространстве $H = (H_0^1 \cap \cap H^2)(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ построить сильно непрерывную нелинейную полугруппу S_t, действующую по формуле $S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$, где $u(t)$ — решение задачи (1)—(3) с начальными условиями $y_0 = (u_0; u_1)$. Стандартными методами устанавливается справедливость энергетического равенства:

$$E(y(t_2)) - E(y(t_1)) = -\int_{t_1}^{t_2} (\gamma \|\dot{u}(\tau)\|^2 + \rho(\dot{u}(\tau), u'(\tau)))\, d\tau, \qquad (4)$$

где $y(t) = S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$ и для $y = (u_0; u_1)$;

$$E(y) = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|u_0''\|^2 + \frac{1}{2}\|u_0'\|^4 - \Gamma\|u_0'\|^2\right) - (p, u_0), \qquad (5)$$

$\|\cdot\|$, $(.\,,.)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(0, \pi)$.

Норму в пространстве H определим формулой $|y|_H^2 = \|u_0''\|^2 + \|u_1\|^2$, $y = (u_0; u_1)$. Если $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$, то пространство H можно представить в виде $H = F_1 \times F_0$, где

$$F_\sigma = \left\{v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \,\Big|\, \|v\|_\sigma^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{4\sigma}|c_k|^2 < \infty\right\}.$$

Ниже используются также пространства $H_\sigma = F_{1+\sigma} \times F_\sigma$, $\sigma \geqslant 0$. Ясно, что $H_0 = H$ и H_{σ_1} компактно вложено в H_{σ_2}, если $\sigma_1 > \sigma_2$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение, анонсированное в докладе [2].

Теорема 1. *Для каждого $\rho \geqslant 0$ полугруппа S_t обладает компактным максимальным H-аттрактором, т. е. существует компактное в H множество A такое, что $S_t A = A$ и для любого ограниченного B из H при $t \to \infty$ $\rho(S_t B, A) \equiv \sup\{\operatorname{dist}(S_t y, A) \mid y \in B\} \to 0$. Аттрактор A имеет конечную фрактальную размерность.*

Напомним, что фрактальная размерность $\dim_f(A)$ множества A определяется формулой

$$\dim_f(A) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln n_A(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon},$$

где $n_A(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса не больше ε, необходимое для покрытия множества A. Легко показать, что фрактальная размерность не меньше хаусдорфовой (определение см., например, в [3]).

Доказательство теоремы использует идеи и методы, развитые в [3—5], а также некоторые соображения А. Аро (см. ссылку, приведенную в [5]). Излагаемая ниже схема рассуждений носит достаточно общий характер. Она применима, например, при изучении флаттера упругой пологой оболочки конечных размеров (см. доклад [6]).

2. Существование аттрактора вытекает из приведенных ниже лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Система (1)—(3) является диссипативной, т. е. существует* $R > 0$ *такое, что для любого ограниченного множества* B *из* H $|S_t y|_H \leqslant R$ *для всех* $y \in B$ *и* $t \geqslant t_0 = t_0(B)$. *В качестве радиуса диссипативности* R *при* $\Gamma \geqslant 0$ *можно взять величину* $R = c\left[1 + \left(\Gamma + \frac{\rho^2}{\gamma^2} + \gamma^2\right)^2 + \|p\|^2\right]^{1/2}$ **(6)**, *если же* $\Gamma < 0$, *то в (6) следует положить* $\Gamma = 0$. *Здесь и ниже* c *— некоторая абсолютная константа.*

Доказательство. Пусть $\Gamma \geqslant 0$ (случай $\Gamma < 0$ аналогичен). Положим $\Phi(y) = (u_0, \ u_1) + \frac{\gamma}{2}\|u_0\|^2$, $V(y) = E(y) + \frac{\gamma}{8}\Phi(y)$. Достаточно показать, что на решениях системы (1)—(3) функционал $V(y)$ обладает свойствами

$$V(y) \geqslant \frac{1}{4}|y|_H^2 - \frac{1}{4}(\Gamma^2 + 4\|p\|^2), \tag{7}$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\gamma}{16}V \leqslant \gamma c\left[\left(\Gamma + \frac{\rho^2}{\gamma^2} + \gamma^2\right)^2 + \|p\|^2\right]. \tag{8}$$

Чтобы установить (7), (8), следует воспользоваться неравенством $|(\dot{u}, \ u)| \leqslant \frac{1}{2\gamma}\|\dot{u}\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|^2$, соотношениями (1), (4) и тем обстоятельством, что $(u, \ u') = 0$.

Лемма 2. *Полугруппа* S_t *является асимптотически гладкой в следующем смысле: существует ограниченное в* H_σ, $0 < \sigma < 1/2$, *множество* K_σ *такое, что* $\rho(S_t B, \ K_\sigma) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *для любого ограниченного множества* B *из* H.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $-\Gamma \leqslant \varphi(t) \leqslant R^2 - \Gamma$, $|\dot{\varphi}(t)| \leqslant 2R^2$. Рассмотрим задачу $\ddot{u} + \gamma\dot{u} + u'''' - \varphi(t)u'' = h(x, \ t)$ **(9)** с граничными и начальными условиями (2), (3). Предполагается, что $h(x, t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, \pi))$. Легко проверить, что задача (9), (2), (3) однозначно разрешима и определяет в пространстве H сильно непрерывное эволюционное семейство $U(t, \ t_0)$ формулой $U(t, \ t_0)y_0 = (u(t); \ \dot{u}(t))$, где $u(t)$ — решение однородной ($h \equiv 0$) задачи (9), (2) с начальными условиями $u|_{t=t_0} = u_0$, $\dot{u}|_{t=t_0} = u_1$, $y_0 = (u_0; \ u_1)$. Решение неоднородной задачи при этом запишется в виде

$$y(t, \ t_0) = U(t, \ t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, \ \tau)(0; \ h(\tau))\,d\tau.$$

При $h \equiv 0$ решение задачи (9), (2), (3) имеет вид

$$u(x, \ t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)e_k(x),$$

где g_k определяются из соотношений

$$\ddot{g}_k + \gamma \dot{g}_k + (k^4 + \varphi(t)\, k^2)\, g_k = 0,$$
$$g_k|_{t=0} = g_{k0} = (u_0,\ e_k),\ \dot{g}_k|_{t=0} = g_{k1} = (u_1,\ e_k). \qquad (10)$$

На решениях задачи (10) рассмотрим функционал

$$V_k = \frac{1}{2}\left[\dot{g}_k^2 + (k^4 + \varphi(t)\, k^2)\, g_k^2 + \gamma\left(g_k \dot{g}_k + \frac{\gamma}{2}\, g_k^2\right)\right].$$

Непосредственные вычисления показывают, что для всех k, удовлетворяющих неравенствам

$$k^2 \geqslant 4\left(\Gamma + \frac{2R^2}{\gamma}\right),\ \frac{1}{2}k^4 - (R^2 - \Gamma)\, k^2 - \gamma^2 \geqslant 0, \qquad (11)$$

выполнены соотношения

$$\frac{1}{4}(\dot{g}_k^2 + k^4 g_k^2) \leqslant V_k \leqslant \frac{3}{4}(\dot{g}_k^2 + k^4 g_k^2),\ \frac{dV_k}{dt} + \frac{\gamma}{2}\, V_k \leqslant 0.$$

Отсюда извлекается оценка

$$|P_N U(t,\ t_0)|_{L(H_\sigma,\ H_\sigma)} \leqslant c \exp\left[-\frac{\gamma}{4}(t - t_0)\right],\ N \geqslant N_0,\ \sigma \geqslant 0, \quad (12)$$

где P_N — ортопроектор в H на з. л. о. $\{(e_k;\ 0),\ (0;\ e_k);\ k \geqslant N\}$, N_0 — наименьшее натуральное число такое, что (11) справедливо для всех $k \geqslant N_0$. Очевидно, что N_0 допускает оценку $N_0^2 \leqslant c(R^2(1 + \gamma^{-1}) + |\Gamma|)$.

Пусть решение $S_t y_0 = (u(t);\ \dot{u}(t))$ задачи (1)—(3) при $t \geqslant t_0$ лежит в поглощающем шаре B_R, тогда, полагая $\varphi(t) = -\Gamma + \|u'\|^2$, $h = -\rho u' + p$, получаем представление

$$S_t y_0 = U(t,\ t_0)\, y(t_0) + G(t;\ t_0,\ y_0),\ G = -\int_{t_0}^{t} U(t,\ \tau)(0;\ \rho u' - p)\, d\tau. \quad (13)$$

Отсюда можно извлечь утверждение леммы 2. Действительно, при $t \geqslant t_0$, $\sigma \geqslant 0$

$$|(1 - P_{N_0})\, S_t y_0|_{H_\sigma} \leqslant N_0^{2\sigma} |S_t y_0|_H \leqslant R N_0^{2\sigma}. \qquad (14)$$

С другой стороны, в силу (12) $P_{N_0} U(t,\ t_0)\, y(t_0) \to 0$ при $t \to \infty$. А для $G(t;\ t_0,\ y_0)$ справедлива оценка

$$|P_{N_0} G(t;\ t_0,\ y_0)|_{H_\sigma} \leqslant c \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{\gamma}{4}(t - \tau)\right) \|u'(\tau)\|_\sigma\, d\tau + c\,\gamma^{-1}.$$

Но F_σ — интерполяционное пространство между $(H_0^1 \cap H^2)(0,\ \pi)$ и $L^2(0,\ \pi)$. Поэтому при $\frac{1}{4} < \sigma < \frac{1}{2}$ $F_\sigma = H^{2\sigma}(0,\ \pi)$. Следовательно, $\|u'\|_\sigma \leqslant c\|u''\| \leqslant cR$. Значит,

$$|P_{N_0} G(t;\ t_0,\ y_0)|_{H_\sigma} < cR\gamma^{-1},\ \sigma < \frac{1}{2}. \qquad (15)$$

Из (14), (15) получаем утверждение леммы 2 для

$$K_\sigma = \left\{ y \,\middle|\, |y|_{H_\sigma} \leqslant Q_\sigma \equiv cR\left(N_0^{2\sigma} + \frac{\rho}{\gamma}\right),\ \sigma < \frac{1}{2} \right\}.$$

Леммы 1 и 2 с помощью методики А. Аро (аналогичные рассуждения используются и в [7]) позволяют установить существование аттрактора A, лежащего в K_σ при $\sigma < \frac{1}{2}$.

3. Для доказательства конечномерности аттрактора воспользуемся следующим вариантом теоремы О. А. Ладыженской [4].

Теорема 2. *Пусть M — компактное множество в гильбертовом пространстве H, V — преобразование, определенное на M такое, что $M \subset V(M)$ и для любых v_1, $v_2 \in M$ $\|Vv_1 - Vv_2\| \leqslant l\|v_1 - v_2\|$, $\|Q_n(Vv_1 - Vv_2)\| \leqslant \delta\|v_1 - v_2\|$, $\delta < 1$, где Q_n — ортопроектор коразмерности n. Тогда фрактальная размерность $\dim_f(M)$ конечна и допускает оценку*

$$\dim_f(M) \leqslant n \ln \frac{8\varkappa^2 l^2}{1-\delta^2} \Big/ \ln \frac{2}{1+\delta^2},$$

$\varkappa$ — некоторая абсолютная константа.

Отметим, что в [4] теорема 2 доказана для хаусдорфовой размерности. Однако практически дословное повторение рассуждений работы [4] позволяет установить теорему О. А. Ладыженской в приведенной здесь формулировке.

Лемма 3. *Пусть y_1, $y_2 \in A$. Тогда*

$$|S_t y_1 - S_t y_2|_H \leqslant \exp(Gt)\,|y_1 - y_2|_H, \tag{16}$$

$$|P_N(S_t y_1 - S_t y_2)|_H \leqslant c_1 e^{-\frac{\gamma}{4}t}\left(1 + \frac{L_\sigma}{N^{2\sigma}} e^{Gt}\right)|y_1 - y_2|, \tag{17}$$

при $N \geqslant N_0$, $\sigma < \frac{1}{2}$, $G = c_2(R^2 + \rho + |\Gamma|)$, $L_\sigma = c_3\Big(R^{2\sigma}(1+\gamma^{-1})^\sigma + \frac{\rho}{\gamma}\Big)$.

Доказательство. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — решения задачи (1)—(3) с начальными условиями y_1, y_2, то функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot v + \gamma \dot v + v'''' = F(u_1, u_2, t)$ **(18)**, где $F(u_1, u_2, t) = -\Gamma v'' + (\|u_1'\|^2 u_1'' - \|u_2'\|^2 u_2'') - \rho v'$. Очевидно, что $\|F\| \leqslant c(\rho + R^2 + |\Gamma|)\|v''\|$. Поэтому из (18) с помощью леммы Гронуолла получаем (16).

Установим (17). Ясно, что $P_N S_t y_i = (p_N u_i(t),\ p_N \dot u_i(t))$, где p_N — ортопроектор в $L^2(0, \pi)$ на з. л. о. $\{e_k,\ k \geqslant N\}$. Величина $w_N = p_N(u_1 - u_2)$ является решением уравнения $\ddot w_N + \gamma \dot w_N + w_N'''' + (\Gamma - \|u_1'\|^2) w_N'' = \Phi_N(u_1, u_2, t)$. Здесь $\Phi_N(u_1, u_2, t) = (\|u_1'\|^2 - \|u_2'\|^2) \times p_N u_2'' - \rho p_N(u_1' - u_2')$. Оценим величину $\Phi_N(u_1, u_2, t)$. Так как $|y|_{H_\sigma} \leqslant Q_\sigma$ для $y \in A$, то

$$\|p_N u_2''\| = \|p_N u_2\|_1 \leqslant \frac{1}{N^{2\sigma}}\|u_2\|_{1+\sigma} \leqslant \frac{Q_\sigma}{N^{2\sigma}},\ \sigma < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\| p_N (u_1' - u_2') \| \leqslant \frac{1}{N^{2\sigma}} \| u_1' - u_2' \|_\sigma \leqslant \frac{c}{N^{2\sigma}} | S_t y_1 - S_t y_2 |_H, \ \sigma < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\| \Phi_N (u_1, \ u_2, \ t) \| \leqslant \frac{c}{N^{2\sigma}} (\rho + RQ_\sigma) | S_t y_1 - S_t y_2 |_H.$$

Пользуясь представлением решения неоднородной задачи (9), (2), (3) и оценкой (12) для $\varphi = -\Gamma + \| u_1' \|^2$, $h = \Phi_N$, получаем, что

$$| P_N (S_t y_1 - S_t y_2) |_H \leqslant c e^{-\frac{\gamma}{4} t} \Big\{ | y_1 - y_2 |_H + \\ + \frac{1}{N^{2\sigma}} (\rho + RQ_\sigma) \int_0^t e^{\frac{\gamma}{4}\tau} | S_\tau y_1 - S_\tau y_2 |_H \, d\tau \Big\}. \tag{19}$$

Подставляя сюда (16), получаем (17).

Выберем t_0 и $N \geqslant N_0$ так, чтобы $c_1 \exp \left(-\frac{\gamma}{4} t_0 \right) = \frac{\delta}{2}$, $L_\sigma N^{-2\sigma} \exp (G t_0) \leqslant 1$, $\delta < 1$. Лемма 3 позволяет воспользоваться теоремой 2 для $M = A$ и $V = S_{t_0}$. Поэтому фрактальная размерность $\dim_f (A)$ аттрактора конечна и может быть оценена через параметры задачи. В частности, при $\Gamma \geqslant 0$ $\dim_f (A) \leqslant c_1 \exp (c_2 (\rho + R^2) \gamma^{-1})$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Отметим следующее свойство задачи (1)—(3).

Теорема 3. *Пусть $y_1 (t)$ и $y_2 (t)$ — некоторые решения задачи (1)—(3) из* A. *Тогда найдется* $N \geqslant N_0$ *такое, что из условия* $(1 - P_N) \times \times (y_1 (t) - y_2 (t)) \to 0$, $t \to \infty$ *вытекает, что* $| y_1 (t) - y_2 (t) |_H \to 0$, $t \to \infty$. *Наименьшее N, обладающее таким свойством, допускает оценку* $N^{2\sigma} \leqslant c (\rho + RQ_\sigma) \gamma^{-1}$.

Для доказательства следует воспользоваться тем, что коэффициент перед интегральным членом в (19) за счет выбора N может быть сделан сколь угодно малым и леммой Гроноулла.

4. Если $\rho = 0$, то из (4) вытекает, что $E (y (t_1)) \geqslant E (y (t_2))$, $t_1 < t_2$ **(20),** причем равенство возможно лишь в том случае, когда $y (t) = y_0$, где y_0 — стационарная точка полугруппы S_t. Как и в [3, 8] это обстоятельство позволяет показать, что в случае общего положения аттрактор A является регулярным (определение см. в [3, 8]). Для этого следует воспользоваться теоремой 6.1 [8]. Как и в примере, рассмотренном в [8], используя стандартные методы, удается доказать выполнение всех условий этой теоремы. Аттрактор при этом имеет вид

$$A = \bigcup_{k=1}^{L} M (z_k),$$

где $\{ z_k, \ k = 1, 2, \ldots, L \}$ — множество стационарных точек полугруппы S_t, $M (z_k)$ — неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z_k.

В случае, когда $p(x) \equiv 0$, стационарные точки могут быть вычислены явно. Оказывается, что $L=1$, $A=\{0\}$ при $\Gamma<1$ и $L=2n+1$, если $n^2<\Gamma\leqslant(n+1)^2$. В последнем случае неподвижные точки имеют вид $z_k=(w_k;\ 0)$, $k=0,\ \pm1,\ \dots,\ \pm n$, где

$$w_0(x)=0,\ w_{\pm k}(x)=\pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}(\Gamma-k^2)}\sin kx,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

При этом $E(z_0)=0$, $E(z_{\pm k})=-\frac{1}{4}(\Gamma-k^2)^2$, $\dim M(z_0)=n$, $\dim M(z_{\pm k})=k-1$, $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$ ($z_{\pm1}$ — устойчивые стационарные точки). Таким образом, в данной ситуации $\dim A<\sqrt{\Gamma}$. Это, в частности, показывает, что полученная выше оценка размерности аттрактора является довольно грубой.

Отметим, что регулярность аттрактора сохраняется и при малых $\rho>0$, а приведенные выше рассмотрения применимы в случае шарнирно закрепленного трубопровода, по которому течет жидкость со скоростью v. В такой ситуации вместо уравнения (1) следует рассмотреть уравнение

$$\ddot{u}+\gamma\dot{u}+u''''+\left(v^2-\int_0^\pi|u'|^2\,dx\right)u''=p(x)-2\beta v\dot{u}'.$$

Слагаемое $2\beta v\dot{u}'$ не дает вклада в энергетическое соотношение. Поэтому энергия системы и в данном случае обладает свойством (20). Как и выше, это обстоятельство позволяет доказать регулярность аттрактора.

5. Если в задаче (1)—(3) учесть эффекты вязкоупругости, то в левой части (1) следует добавить слагаемое

$$\alpha\dot{u}''''-\sigma\int_0^\pi u'(x,\ t)\,\dot{u}'(x,\ t)\,dx\cdot u''(x,\ t),\ \alpha,\ \sigma>0,$$

а вместо (2) рассмотреть граничные условия:

$$u|_{x=0;\ x=\pi}=0,\ \left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u''\Big|_{x=0;\ x=\pi}=0.$$

Особенностью этой постановки по сравнению с (1)—(3) является наличие конечной точки сгущения у спектра линеаризованной задачи. Однако это обстоятельство не мешает построить соответствующую полугруппу S_t и доказать аналоги теорем 1 и 3 представленным выше методом.

Список литературы: 1. *Морозов Н. Ф.* Исследование колебаний призматического стержня под действием поперечной нагрузки//Изв. вузов. Математика.— 1965.— № 3.— С. 121—125. 2. *Чуешов И. Д.* Аттракторы в некоторых задачах нелинейной механики: Тез. докл. Первой Северо-Кавказской региональной конф.: Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения.— Махачкала, 1986.— С. 222—223. 3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности//Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 4.— С. 133—187. 4. *Ладыженская О. А.* О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем//Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1982, 115.— С. 137—155. 5. *Бабин А. В., Ви-*

шик *М. И.* Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям//Мат. сб. — 1985. — **126**, № 3. — С. 397—419. 6. *Чуешов И. Д.* О флаттере упругой пологой оболочки: Тез. докл. Всесоюз. конф.: Метод функций А. М. Ляпунова в современной математике. — Х., 1986. — С. 142. 7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 424 с. 8. *Babin A. V., Vishik M. I.* Regular attractors of semigroups and evolution equations//J. Math. pures et appl. — 1983. — **62**. — P. 441—491.

Поступила в редколлегию 11.07.86