АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1960 ГОДУ *ВЫХОДИТ РАЗ В ДВА МЕСЯЦА*

ТОМ XV *Сентябрь—Октябрь* *№ 5, 1974*

МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Отдел заметок

Сообщения Сибирского математического общества

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XV, № 5 Сентябрь — Октябрь 1974

УДК 513.88

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

КОММУТАТИВНЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

Пусть E — конечномерное линейное пространство (вещественное или комплексное). Задание в нем замкнутого, выпуклого, ограниченного, поглощающего множества B, инвариантного относительно умножения на скаляры α с $|\alpha|=1$, определяет в E структуру пространства Минковского с единичным шаром B. Линейные операторы, сохраняющие B, являются изометриями пространства Минковского. Группа $\mathrm{Iso}\,B$ всех изометрий пространства с шаром B компактна и содержит подгруппу скалярных операторов $K=\{\alpha I: |\alpha|=1\}$. Группа изометрий определяет различные свойства пространства Минковского (см. ([1, 2])) и заслуживает подробного изучения. В частности, возникает вопрос о возможных группах изометрий. Будем говорить, что группа операторов G в пространстве E реализуется как группа изометрий, если в E существует такой единичный шар B, что $G=\mathrm{Iso}\,B$. В настоящей заметке вопрос о реализации решается для коммутативных групп.

Пусть G компактная группа операторов в пространстве E, $K\subset G$. Введем евклидову норму $\|.\|$, инвариантную относительно G; единичную евклидову сферу обозначим через S.

Лемма. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — попарно не пересекающиеся, замкнутые, нигде не плотные подмножества сферы S, инвариантные относительно G. Тогда в E существует такой единичный шар B, инвариантный относительно G, что любой оператор $T\in\mathrm{Iso}\,B$ является ортогональным (унитарным) и сохраняет каждое из множеств $A_1, \ldots, A_m$.*

Доказательство. Положим

$$B=\bigcup_{k=1}^{m}\mathrm{conv}\,(\lambda_k A_k\bigcup S),$$

где попарно различные числа $\lambda_k>1$ настолько близки к 1, что множество B выпукло. Очевидно, B инвариантно относительно G и является единичным шаром. Множество крайних точек шара B имеет вид

$$\mathrm{extr}\,B=\bigcup_{k=1}^{m}\lambda_k A_k\bigcup\Phi,$$

где множество Φ состоит из таких точек $x\in S$, что для любого $y\in\lambda_k A_k$ ($k=1, \ldots, m$) выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,(x, y)\leqslant 1$, т. е. $\|x-z\|\geqslant\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k=\sqrt{2(1-\lambda_k^{-1})}$, для любого $z\in A_k$ ($k=1, \ldots, m$). Обозначим ε-окрестность множества A через $A(\varepsilon)$. Тогда

$$\Phi = S \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k(\varepsilon_k).$$

Если положительные числа ε_k достаточно малы (т. е. λ_k достаточно близки к 1), то замыкания $\overline{A_k(\varepsilon_k)}$ также попарно не пересекаются и внутренность $\operatorname{int}\Phi$ множества Φ не пуста. Каждая точка множества $\operatorname{int}\Phi$ имеет относительно $\operatorname{extr} B$ окрестность, открытую в S, а точки множеств $A_1, \ldots, A_m$ и границы Φ относительно S этим свойством не обладают. Тем самым множество $\operatorname{int}\Phi$ допускает топологическую характеризацию в множестве $\operatorname{extr} B$. Оператор $T \in \operatorname{Iso} B$ сохраняет множество $\operatorname{extr} B$ и, следовательно, множество $\operatorname{int}\Phi$. Аналитические функции $\|x\|$ и $\|Tx\|$ совпадают на множестве $\operatorname{int}\Phi$, а значит, и на открытом конусе, им порожденном. По теореме единственности, $\|x\|=\|Tx\|$ для всех $x \in E$, и оператор T ортогонален (унитарен). Поскольку нормы точек на различных множествах $\lambda_k A_k$ различны, оператор T сохраняет каждое из множеств $\lambda_k A_k$, а, следовательно, и A_k.

Теорема 1. *Каждая коммутативная, компактная группа G операторов в комплексном пространстве, содержащая подгруппу K, реализуется как группа изометрий.*

Доказательство. Существует ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства E в котором операторы $g \in G$ диагонализуются. В частности, матрицы операторов, принадлежащих связной компоненте G_0 единицы группы G, имеют вид $\operatorname{diag}\{\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)\}$, где $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — мультипликативные характеры группы G_0. Группу G_0 можно рассматривать как точное представление тора некоторой размерности r. Характеры $\chi_1, \ldots, \chi_n$ порождают всю группу характеров G_0^* (действительно, иначе нашелся бы такой неединичный элемент $g \in G_0$, что $\chi_1(g) = \ldots = \chi_n(g) = 1$, и матрица оператора g была бы единичной), поэтому $r \leqslant n$.

Если $n=r=1$, то пространство E можно отождествить с полем комплексных чисел, а группа G сведется к подгруппе K. В качестве единичного шара возьмем единичный круг $|z| \leqslant 1$.

Пусть $n \geqslant 2$. Условия леммы выполняются для множеств $Kv_j = \{zv_j : |z|=1\}$ $(j=1, \ldots, n)$ и орбиты Ga, где a — вектор общего положения, $\|a\|=1$. То, что Ga нигде не плотна, ясно из соображений размерности: $\dim Ga \leqslant \dim G = r \leqslant n < 2n-1 = \dim S$. Пусть T — изометрия соответствующего шара B. Оператор T диагонализуется в базисе $v_1, \ldots, v_n$, так как он сохраняет множества Kv_j. Если G_i — одна из связных компонент группы G, то множество $G_i a$ является связной компонентой орбиты Ga. Оператор T, сохраняя множество Ga, переставляет его связные компоненты между собой. Пусть при этом $G_0 a$ переходит в некоторую $G_i a$. Если $g_i \in G_i$, то оператор $R = g_i^{-1}T$ сохраняет множество $G_0 a$ и имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Существует такой оператор $g \in G_0$, что $Ra = ga$. Проектируя это равенство на все v_j, получим $\mu_j = \chi_j(g)$. Следовательно, оператор R имеет ту же матрицу, что и g. Поэтому $T = g_i g \in G$, и теорема доказана.

Пусть группа операторов G вещественного пространства E реализуется как группа изометрий. Если G действует транзитивно на множестве всех одномерных подпространств (будем говорить в этом случае, что G действует транзитивно в E), то G действует транзитивно на единичной сфере пространства Минковского. Поскольку G вложена в полную ортогональную группу $O(E)$, то единичная сфера пространства Минковского гомотетична S и G должна совпасть с $O(E)$. Пусть G содержит тривиальное продолжение группы H операторов в подпространстве E_1, т. е. подгруппу, образованную прямыми суммами операторов $h \in H$ и единичного оператора в некотором дополнении E_2 подпространства E_1. Если H действует транзитивно в E_1, то G содержит тривиальное продолжение группы $O(E_1)$. Группа $O(E_1)$ некоммутативна при $\dim E_1 \geqslant 2$. Поэтому, если G коммутативна, то G не содержит тривиальных продолжений групп операторов, действующих транзитивно в 2-мерных подпространствах.

Теорема 2. *Пусть G — коммутативная, компактная группа операторов в вещественном пространстве, содержащая оператор $(-I)$. Если G не содержит подгрупп, получающихся тривиальными продолжениями групп операторов, действующих транзитивно в 2-мерных подпространствах, то G реализуется как группа изометрий.*

Доказательство. Пространство E разлагается в ортогональную сумму инвариантных относительно группы G двумерных или одномерных подпространств E_i $(i=1, \ldots, m)$. Пусть компонента G_0 единицы группы G действует нетождественно в подпространствах E_i $(i=1, \ldots, s)$. Операторы $g \in G_0$ имеют вид

$$g = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i(\chi_i(g)) \oplus I,$$

где $V_i(\varphi)$ поворот на угол φ в двумерном пространстве E_i, χ_i — ненулевые, вещественные, аддитивные характеры группы G_0.

Пусть a — вектор с $\|a\|=1$, проекции a_i которого на подпространства E_i отличны от нуля. Заметим, что $\dim Ga \leqslant \dim G = r \leqslant n-2 = \dim S - 1$ за исключением случая $r=1$, $n=2$; но тогда G действует транзитивно в E. В достаточно малой окрестности вектора a найдется вектор b с проекциями b_i на E_i, обладающий следующими свойствами:

1) $\|b\|=1$, $b \notin Ga$;

2) $b_i = V_i(\varphi_i) a_i$ $(i=1, \ldots, s)$ и числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$, 2π целочисленно линейно независимы;

3) если $i > s$ и $\dim E_i = 2$, то a_i и b_i неколлинеарны;

4) множество $G_0 b$ является ближайшим к множеству $G_0 a$ среди связных компонент орбиты Gb.

Согласно лемме, единичный шар B можно построить так, чтобы любая его изометрия T была ортогональным оператором и сохраняла множества $S \cap E_i$ $(i=1, \ldots, m)$, Ga, Gb.

Подпространства E_i инвариантны относительно T и оператор T разлагается в прямую сумму ограничений $T_i | E_i$ $(i=1, \ldots, m)$. Можно считать, что T оставляет множество $G_0 a$ на месте. Тогда $G_0 b$ также остается на месте по свойству 4). Следовательно, существуют такие операторы g_1 $g_2 \in G_0$, что $Ta=g_1a$, $Tb=g_2b$. Проектируя эти равенства на подпространства E_i $(i=s+1,\ldots,m)$, получим $T_ia_i=a_i$, $T_ib_i=b_i$; откуда $T_i=I$ по свойству 3). Проектируя равенство $Ta=g_1a$ на подпространства E_i $(i=1,\ldots,s)$, получим $T_ia_i=V_i(\chi_i(g_1))a_i$; откуда $T_i=V_i(\chi_i(g_1))$ или $T_i=V_i(\chi_i(g_1))\sigma_i$, где σ_i — симметрия плоскости E_i относительно прямой, определяемой вектором a_i. Оператор Q, определенный равенством $T=g_1Q$, также является прямой суммой ограничений $Q_i|E_i$, причем $Q_i=I$ при $i=s+1,\ldots,m$ и Q_i может равняться I или σ_i при $i=1,\ldots,s$. Покажем, что на самом деле $Q=I$. Проектируя равенство $Tb=g_2b$ на E_i $(i=1,\ldots,s)$, получим $Q_ib_i=V_i(\chi_i(g))b_i$, где $g=g_1^{-1}g_2$. Если $Q_i=I$, то отсюда

(1) $\chi_i(g)\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Если же $Q_i=\sigma_i$, то, согласно свойству 2), получим $V_i(-\varphi_i)a_i=V_i(\chi_i(g)+$ $+\varphi_i)a_i$, откуда

(2) $\chi_i(g)\equiv -2\varphi_i \pmod{2\pi}$.

Предположим, что $Q\neq I$; пусть, например, $Q_1=\sigma_1$.

Вначале рассмотрим случай, когда $\chi_i\neq\chi_1$ для любого $i\neq 1$. Если подгруппа X, порожденная характерами χ_i $(i\neq 1)$ имеет нулевое пересечение с циклической подгруппой $\langle\chi_1\rangle$, то группа характеров разлагается в прямую сумму $G_0^*=\langle\chi_1\rangle\dot{+}X$. Пусть $G=G_1\times G_2$ — двойственное разложение. Тогда $\chi_i(g_1)=0$ $(i\neq 1)$ и потому $g_1=V_1(\chi_1(g_1))\oplus I$. Это означает, что группа G содержит тривиальное продолжение группы операторов $G_1|E_1$. Группа G_1 действует транзитивно в двумерном подпространстве E_1, так как операторы $g_1|E_1$ являются поворотами. Полученное противоречие показывает, что существует целочисленная линейная зависимость $n_1\chi_1+\ldots+n_s\chi_s=0$, такая что $n_1\neq 0$. Используя сравнения (1), (2), получим нетривиальную (в силу того, что χ_1 удовлетворяет сравнению (2)) целочисленную линейную зависимость между $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$, 2π.

Пусть теперь $\chi_1=\chi_i$ $(i\neq 1)$. Характер χ_1 удовлетворяет одному из сравнений (1), (2), откуда $-2\varphi_1\equiv 0$ или $-2\varphi_1\equiv -2\varphi_i \pmod{2\pi}$. В первом случае имеем целочисленную линейную зависимость между φ_1, 2π, а во втором между φ_1, φ_i, 2π.

Полученные противоречия показывают, что $Q=I$. Значит, оператор T равен g_1 и принадлежит группе G. Теорема доказана.

Следствие 1. *Каждая конечная, коммутативная группа операторов в вещественном пространстве, содержащая оператор $(-I)$, реализуется как группа изометрий.*

Можно показать, что в случае конечной группы условие коммутативности излишне.

Следствие 2. *Для любой коммутативной, компактной группы Ли G (т. е. прямого произведения тора на конечную абелеву группу), содержащей элемент второго порядка, существует пространство Минковского, группа изометрий которого изоморфна G.*

Действительно, такая группа обладает точным представлением, удовлетворяющим всем условиям теоремы 2.

В частности, для любого $r \geqslant 1$ существует пространство Минковского, группа изометрий которого изоморфна r-мерному тору, и, тем самым, связна. Отметим, что группы изометрий всех классических пространств Минковского не связны.

В заключение, автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила в редакцию
20 июля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И.*, О зависимости некоторых свойств пространства Минковского от асимметрий, Матем. сб., 71, № 1 (1966), 24–28.

[2] *Любич Ю. И.*, О граничном спектре сжатий в пространствах Минковского, Сиб. матем. ж., XI, № 2 (1970), 358–369.

УДК 513.88

В. Н. Калюжный. КОММУТАТИВНЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

Пусть G – коммутативная группа операторов в вещественном или комплексном конечномерном линейном пространстве. Найдены необходимые и достаточные условия для существования нормы, группа изометрий которой совпадает с G.