О MINIMUM-Ѣ

ОТКЛОНЕНІЯ СВѢТОВАГО ЛУЧА ПРИЗМОЮ.

А. П. Грузинцева.

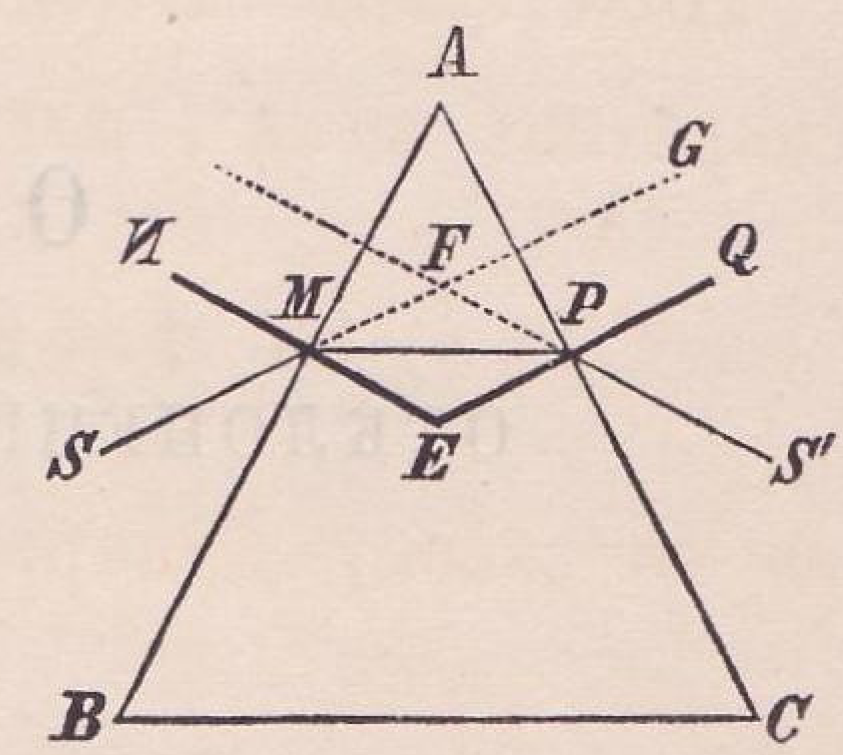
Существуетъ много элементарныхъ способовъ вывода условій minimum-а отклоненій свѣтоваго луча призмой. Всѣ эти способы могутъ быть раздѣлены на два рода: 1) пріемы геометрическіе и 2) пріемы аналитическіе.

Предложенные до сихъ поръ геометрическіе пріемы вывода условій для наименьшаго отклоненія луча, при всей своей точности, для изучающихъ начальную физику трудны, такъ-какъ требуютъ предварительнаго изученія хода преломленныхъ лучей въ прозрачныхъ срединахъ при помощи нѣкоторыхъ геометрическихъ построеній, которыя обыкновенно не излагаются въ начальныхъ курсахъ. Остаются такимъ образомъ аналитическіе способы; изъ нихъ самыми лучшими считаются способы Барри и Эйзенлора въ той или другой редакціи, но, какъ будетъ ниже показано, эти пріемы заключаютъ въ себѣ одинъ пунктъ, который для элементарнаго изложенія крайне неудобенъ по своей трудности. Заинтересованный этимъ вопросомъ, я пересмотрѣлъ, на сколько былъ въ состояніи, всѣ извѣстные способы рѣшенія нашего вопроса и пришелъ къ заключенію, что изъ всѣхъ аналитическихъ элементарныхъ способовъ самый лучшій это — Шелльбаха, данный имъ въ 1881 году[1].

[1] Анналы *Видемана*, т. XIV, стр. 367.

Единственный недостатокъ его — нѣкоторая длиннота, но за то онъ вполнѣ убѣдителенъ для ученика.

Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ пріемъ, изложенный со всѣми подробностями.



Пусть ABC будетъ главное сѣченіе призмы; $SMPS'$ ходъ луча; NE и QE перпендикуляры къ передней и задней гранямъ призмы. Обозначимъ буквами i и i' углы вхожденія и выхожденія луча; r и r' внутренніе углы (преломленія на 1-й грани и паденія на 2-й); преломляющій уголъ призмы A и отклоненіе луча или уголъ GFP буквой δ, тогда, какъ извѣстно, имѣемъ:

$$r + r' = A$$

$$\delta = (i + i') - A.$$

Такъ-какъ A количество постоянное, то, слѣдовательно, δ будетъ minimum, когда $(i + i')$ — minimum. Такимъ образомъ задача объ отысканіи minimum-а величины δ сводится къ вопросу объ отысканіи такихъ значеній угловъ i и i', при которыхъ ихъ сумма $(i + i')$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Эту послѣднюю задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ треугольникъ MPE; онъ даетъ по извѣстной теоремѣ тригонометріи

$$MP^2 = ME^2 + PE^2 + 2ME.\,PE.\,\mathrm{cs}\,A \qquad (1)$$

такъ-какъ

$$\angle MEP = 180^\circ - A.$$

Далѣе, на основаніи теоремы синусовъ имѣемъ:

$$\frac{MP}{\mathrm{sn}\,A} = \frac{ME}{\mathrm{sn}\,r'} = \frac{PE}{\mathrm{sn}\,r};$$

обозначивъ на-время это общее отношеніе буквой k, получимъ:

$$MP = k\,\mathrm{sn}\,A,\ ME = k\,\mathrm{sn}\,r',\ PE = k\,\mathrm{sn}\,r.$$

Подставивъ значенія MP, ME, PE въ равенство (1) и сокративъ на k^2, получимъ:

$$\mathrm{sn}^2 A = \mathrm{sn}^2 r + \mathrm{sn}^2 r' + 2\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,r'\,\mathrm{cs}\,A;$$

но по закону Декарта имѣемъ:

$$\mathrm{sn}\,r = \frac{\mathrm{sn}\,i}{n},\ \mathrm{sn}\,r' = \frac{\mathrm{sn}\,i'}{n},$$

поэтому предъидущее равенство даетъ:

$$n^2\,\mathrm{sn}^2 A = \mathrm{sn}^2 i + \mathrm{sn}^2 i' + 2\,\mathrm{sn}\,i\,\mathrm{sn}\,i'\,\mathrm{cs}\,A. \qquad (2)$$

Изъ тригонометріи мы знаемъ, что

$$\mathrm{sn}^2 i = \frac{1 - \mathrm{cs}\,2i}{2},\ \mathrm{sn}^2 i' = \frac{1 - \mathrm{cs}\,2i'}{2}$$

$$2\,\mathrm{sn}\,i\,\mathrm{sn}\,i' = \mathrm{cs}(i - i')\,\mathrm{cs}(i + i').$$

Подставляя все это въ равенство (2), имѣемъ, по замѣнѣ суммы

$$\mathrm{cs}\,2i + \mathrm{cs}\,2i'$$

ея значеніемъ

$$2\,\mathrm{cs}(i + i')\,\mathrm{cs}(i - i'),$$

слѣдующее:

$$n^2\mathrm{sn}^2 A = 1 - \mathrm{cs}(i + i')\,\mathrm{cs}(i - i') + [\mathrm{cs}(i - i') - \mathrm{cs}(i + i')]\,\mathrm{cs}\,A.$$

Опредѣлимъ отсюда $\mathrm{cs}\,(i + i')$; найдемъ:

$$\mathrm{cs}(i + i') = \frac{1 - n^2\mathrm{sn}^2 A + \mathrm{cs}(i - i')\,\mathrm{cs}\,A}{\mathrm{cs}\,A + \mathrm{cs}(i - i')}.$$

Но

$$1 = \operatorname{sn}^2 A + \operatorname{cs}^2 A;$$

подставляя вмѣсто единицы это ея значеніе, получимъ по сокращеніи:

$$\operatorname{cs}(i+i') = \operatorname{cs} A - \frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}. \qquad (3)$$

Это соотношеніе и рѣшаетъ вопросъ. Въ правой его части только $\operatorname{cs}(i-i')$ перемѣнная величина, всѣ остальныя постоянныя, поэтому очень легко изслѣдовать эту формулу.

При измѣненіи угловъ i и i' величина $\operatorname{cs}(i-i')$ тоже мѣняется; она достигаетъ, какъ извѣстно изъ тригонометріи, своего наибольшаго значенія, именно единицы, когда $i-i'=0$, но тогда дробь

$$\frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}$$

пріобрѣтетъ свое наименьшее значеніе, а вся разность

$$\operatorname{cs} A - \frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}$$

пріобрѣтетъ наибольшее значеніе, ибо вычитаемое—положительное количество; но эта разность равна $\operatorname{cs}(i+i')$, слѣдовательно при $i-i'=0$ величина $\operatorname{cs}(i+i')$ пріобрѣтаетъ свое наибольшее значеніе, а значитъ, уголъ $(i+i')$—наименьшее.

Итакъ, при $i-i'=0$ или, что то-же, при

$$i = i'$$

сумма $(i+i')$ дѣлается наименьшею и слѣдовательно

$$\delta = (i+i') - A$$

тоже становится наименьшею, ч. и т. д.

Формула (3) даетъ возможность знать это наименьшее значеніе; оно будетъ опредѣляться изъ формулы:

$$\operatorname{cs}(\delta + A) = \operatorname{cs} A - \frac{(n^2 - 1)\operatorname{sn}^2 A}{1 + \operatorname{cs} A}.$$

Вотъ доказательство Шелльбаха.

Въ заключеніе замѣтимъ, что способы Барри и Эйзенлора приводятъ къ формуламъ:

$$\operatorname{cs}\frac{1}{2}(\delta + A) = n \operatorname{cs}\frac{A}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(r - r')}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(i - i')}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta + A) = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(i - i')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(r - r')}.$$

При условіи $i = i'$ также будетъ $r = r'$, слѣдовательно правыя части обѣихъ этихъ формулъ обращаются въ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, раскрытіе котораго потребуетъ добавочнаго изслѣдованія.