

А. С. ЛЕЙБИН (Харьков)

СФЕРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ БОЙЯ

§ 1. Постановка задачи

В 1901 г. В. Бой, побуждаемый Гильбертом, построил конечную замкнутую лишённую особенностей поверхность, гомеоморфную проективной плоскости, причём нашёл для неё две формы, симметричную и асимметричную^{1,2}. В 1925 г. В. Львовский обнаружил целый класс поверхностей, обладающих указанными свойствами³; в этом классе поверхность Бойя принадлежит к простейшим.

Гильберт и Кон-Фоссен (см.⁴, гл. VI, п. 47) подробно описывают симметричную поверхность Бойя. В конце описания они говорят о её сферическом отображении и при этом замечают: «К сожалению, до сих пор не выяснено, каким образом это изображение простирается на шаре» (см.⁴, стр. 279). Выяснению этого вопроса и посвящена эта работа.

1. Прежде всего заметим, что задача построения сферического отображения поверхности относится к метрической дифференциальной геометрии. Она решается однозначно, если известен закон, по которому мы в каждой точке поверхности можем построить вектор нормали, например, если известно уравнение поверхности в декартовых координатах. Для поверхности же Бойя уравнение до сих пор не найдено. Более того, эта поверхность, как топологический эквивалент проективной плоскости, задана вообще с точностью до топологического преобразования, следовательно, с точки зрения дифференциальной геометрии, неоднозначно. Поэтому ясно, что, с одной стороны, из бесчисленного множества поверхностей Бойя необходимо выбрать какую-то одну или хотя бы ограничиться достаточно узким классом этих поверхностей и для одного из его представителей построить сферическое отображение. С другой стороны, можно ограничиться выяснением только некоторых существенных свойств расположения сферического отображения, характерных для выбранного класса поверхностей.

Мы попытаемся построить сферическое отображение для симметричной формы поверхности Бойя.

2. Рассмотрим некоторую гладкую поверхность без точек самоприкосновения. В каждой точке её построим два противоположных по направлению нормальных единичных вектора.

Если поверхность двусторонняя, то совокупность всех этих нормальных векторов несвязна; она распадается на две отдельные связанные непрерывные совокупности векторов.

Если же поверхность односторонняя, то такого распада нет, и все векторы составляют одну связанную непрерывную совокупность.

При построении сферического отображения двусторонней поверхности на сферу переносятся вектора только одной из двух указанных совокупностей; в случае же односторонней поверхности на сферу переносятся все векторы. Так как при этом каждая точка односторонней поверхности будет отображена двумя своими нормальными векторами в две диаметрально противоположные точки сферы, то:

1) сферическое отображение односторонней поверхности всегда двузначно;

2) всё сферическое отображение такой поверхности расположится на сфере симметрично относительно центра сферы.

Но всякую центрально симметричную фигуру можно разбить на две центрально симметричные друг с другом части. В данном случае это разбиение можно сделать так: проведём на поверхности все замкнутые разрезы, необходимые для превращения её в двустороннюю. Этим самым множество нормальных векторов поверхности разбивается на два связанных множества, как мы видели выше, и следовательно, и отображение на сферу разбивается на две, очевидно, симметричные части («половины»).

Каждая точка поверхности будет иметь по одному представителю в обеих «половинах» отображения, и каждая «половина» будет уже являться однозначным отображением данной поверхности. Исключение составят только точки разрезов: они будут в каждой «половине» представлены дважды, диаметрально противоположными точками.

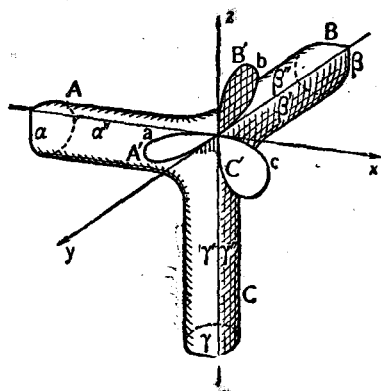
Такое разбиение выгодно тем, что в случае односторонних поверхностей достаточно построить только одну из симметричных частей — «половину» отображения; вторая «половина» получается просто проектированием первой из центра сферы.

Так мы поступим и с поверхностью Бойя: сделаем на ней разрез и будем отображать на сферу получившуюся двустороннюю поверхность с разрезом.

§ 2. Поверхность Бойя

Мы будем опираться на построение поверхности, которое дал сам Бой¹; поэтому мы вкратце приведём его здесь почти без изменений.

3. Возьмём три одинаковые цилиндрические трубки A , B , C длиной l , с сечением в виде выпуклой замкнутой кривой, также длины l ,



Фиг. 1.

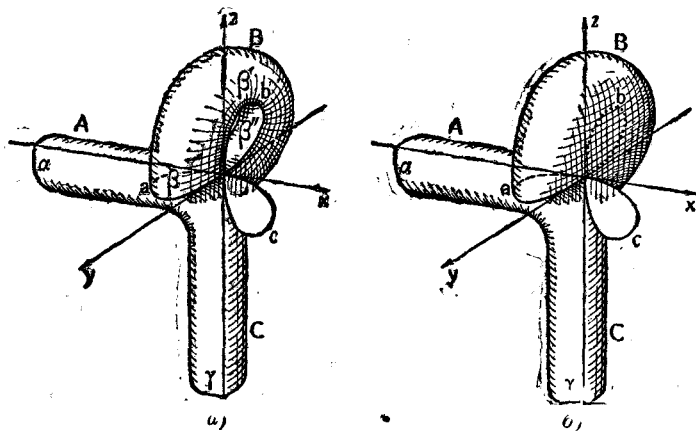
всюду гладкой, за исключением одной точки, где кривая имеет прямой угол. Таким образом каждая трубка имеет ребро с прямым двугранным углом в нём. Две узкие полоски трубки, ограниченные с одной стороны ребром, будем называть берегами ребра трубки и обозначать эти берега символами α' , α'' ; β' , β'' ; γ' , γ'' , соответственно, для трубок A , B , C . Можно сказать, что, например, два берега β' и β'' ребра трубки B ортогональны друг к другу вдоль ребра.

Возьмём ещё три одинаковых куска плоскости — «крышки» A' , B' и C' , края которых a , b , c имеют форму и размеры сечения трубки; такой крышной можно плотно закрыть отверстие трубки.

4. Расположим эти трубки и крышки относительно координатного триэдра так, как показано на фиг. 1. Крышки лежат в координатных плоскостях так, что их края составляют одну пространственную гладкую замкнутую кривую $a + b + c$ с тройной точкой в начале координат; оси координат служат касательными в тройной точке.

Трубки расположены все в октанте (— — —) пространства, где все координаты отрицательны, и вблизи начала координат пересекаются друг с другом. Рёбра их совпадают с координатными осями, а берега рёбер α' , α'' , β' , β'' , γ' , γ'' лежат в координатных плоскостях.

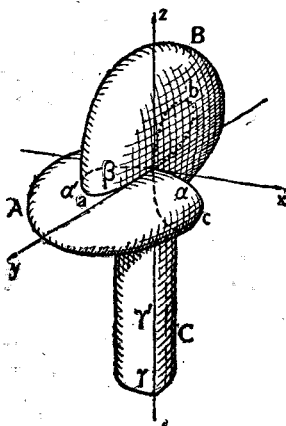
5. Теперьотрежем от каждой трубки ту часть, которая проходит внутри других двух трубок; оставшиеся части сошьём друг с другом вдоль новых краёв — линии обреза. Возникающие при этом рёбра округлим, сгладим. Теперь трубки образуют одну поверхность с одной полостью, открытую с трёх концов трубок, обращённых в стороны отрица-



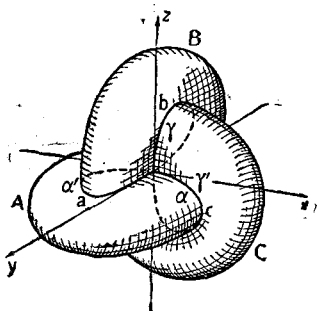
Фиг. 2.

тельных полуосей триэдра. Эта поверхность вместе с тремя крышками обладает симметрией третьего порядка с осью $x = y = z$.

6. Изогнём теперь трубку B так, чтобы ребро её совместилося с контуром b крышки B' , причём ортогональность берегов β' и β'' не нарушилась бы (фиг. 2, а; крышка B' удалена). Так как длина трубки равна длине контура крышки (п. 3), то конец ребра трубки B попадёт в начало координат. Другие образующие трубки



Фиг. 3.



Фиг. 4.

при этом растянем настолько, чтобы открытый край трубки B совместился бы с контуром a крышки A' и вдоль этого контура берег β края трубки B подходил бы ортогонально к плоскости xy .

Теперь разрежем трубку B вдоль её ребра и берег его β' пришьём к крышке B' . Сшитые участки составляют вместе гладкий участок $B' + \beta'$ (фиг. 2, б; шов b показан пунктиром). Берег β'' бывшего ребра трубки теперь остался свободным и подходит ортогонально вдоль линии b к плоскости yz .

Точно так же изогнём трубку A вокруг контура a (фиг. 3) и трубку C вокруг контура c (фиг. 4), разрежем их вдоль рёбер и берега

α' и γ' пришлём к крышкам A' и C' . В результате поверхность снова имеет симметрию третьего порядка с осью $x = y = z$, как и до изгиба трубок.

Теперь вдоль, например, контура b с одной стороны участка $B' + \beta'$ подходит ортогонально берег β'' , с другой стороны, также ортогонально, подходит берег γ открытого края трубки C . Аналогичное имеет место вдоль контуров a и c .

Полученную поверхность назовём поверхностью Σ ; заметим, что она имеет один край вдоль берегов последовательно: $O\alpha\alpha''O\gamma\gamma''O\beta\beta''O$ (O — начало координат).

7. Сошьём берега β'' и γ друг с другом, пропустив этот шов сквозь участок $B' + \beta'$ вдоль контура b ; участки $B' + \beta'$ и $\beta'' + \gamma$ ортогонально пересекаются вдоль контура b , причём оба участка, очевидно, гладкие.

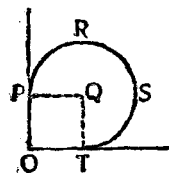
Такую же операцию сделаем вдоль контуров a и c . Эти сшивания делают поверхность замкнутой и односторонней. Линия $a + b + c$ является линией самопересечения (единственной) поверхности. Полученная поверхность и есть симметричная поверхность Боя. Более подробное описание её см. ^{1, 2, 3, 4}.

8. Поверхность Σ , очевидно, получается из поверхности Боя разрезанием последней вдоль её двойной линии $a + b + c$, при котором отрезается трубка от трубки, но крышки остаются пришитыми. Следовательно, поверхность Σ имеет край и, самое важное, она двусторонняя. Таким образом, согласно п. 2, для построения сферического отображения поверхности Боя достаточно построить отображение поверхности Σ .

9. Для построения сферического отображения поверхности Σ мы займёмся более близким рассмотрением отдельных операций, произведённых выше над трубками A, B, C , как бы снова воспроизводя само построение. При этом нам удобнее будет представить операции эти переставленными в своей последовательности и принять такой их порядок: расположение трубок (и крышек), деформация, затем удаление лишних частей трубок одновременно со сглаживанием ребра пересечения и, наконец, сшивание свободных краёв.

§ 3. Выбор формы трубок и их деформация

10. Выберем форму трубок A, B, C , которая облегчит дальнейшие исследования, не нарушая их общности (см. ниже § 10, п. 52). Пусть сечение цилиндрических трубок имеет прямолинейные участки OP и OT длины, равной 1 (фиг. 5), а дуга $PRST$ есть дуга в 270° окружности радиуса $QT = QP = 1$, вписанной в прямой угол POT . Такую же форму будут иметь и контуры a, b, c крышек A', B', C' . Таким образом, каждая трубка до деформации состоит из двух плоских полос ширины равной 1 (берега рёбер) и из цилиндрического участка.

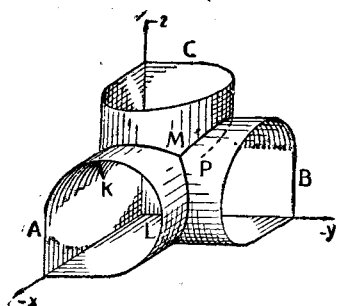


Фиг. 5.

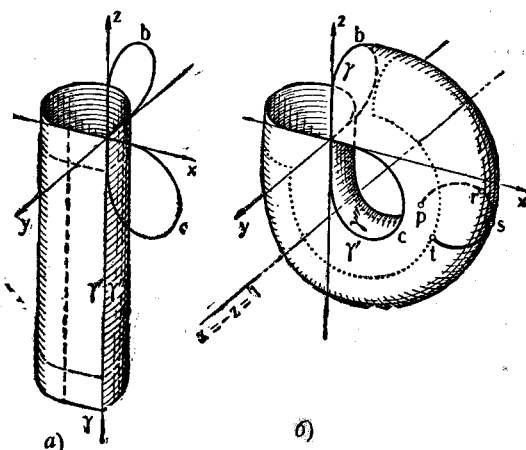
Расположим все три трубки в координатном триэдре согласно п. 4. Если мы теперь удалим все лишние части трубок, находящиеся за линией пересечения их, и посмотрим на них из октанта (— — —) пространства, то линия пересечения, по которой нужно будет сшить трубки и затем сгладить ребро вдоль неё, будет иметь вид, показанный на фиг. 6 (линия ML, MK, MP ; для ясности трубки срезаны вблизи ребра пересечения). Однако в дальнейшем нам удобнее будет считать, что эти лишние части трубок не удалены, т. е. что трубки проходят одна сквозь другую, причём трубка A доходит до плоскости yz , B — до xz и C — до xy .

11. Теперь деформируем все три трубки согласно п. 6. Рассмотрим подробно эту деформацию для трубки C . Эта трубка до деформации представлена на фиг. 7, а; там же показаны контуры b и c крышек B' и C' .

Проведём плоскость $z = -1$ (в этой плоскости лежит точка контура c , в которой прямолинейный участок его переходит в круговой) и плоскость $z = -(l-1)$, где l — длина трубки (согласно п. 3 и фиг. 5 $l = \frac{3\pi}{2} + 2$). Следы этих плоскостей на трубке и границы плоских берегов γ' и γ'' показаны пунктиром (фиг. 7, а). Часть трубки, лежащую между плоскостями $z=0$ и $z=-1$, оставим без изменений и неподвижной. Другую часть,



Фиг. 6.



Фиг. 7.

лежащую между плоскостями $z = -1$ и $z = -(l-1)$, деформируем так, чтобы: 1) ребро трубки совместилося бы с контуром c ; 2) плоский берег γ'' ребра стал бы цилиндрическим с направляющей c , ортогональным к плоскости xz ; 3) плоский берег γ' ребра трубки превратился бы в плоское неполное круговое кольцо, лежащее в плоскости xz ; 4) цилиндрическая часть трубки превратилась бы в часть тора с осью вращения $x = -z = 1$; 5) часть трубки, лежащая между плоскостями $z = -(l-1)$ и $z = -l$ (т. е. берег γ края трубки), осталась бы неизменной по форме; после деформации средней части трубки она окажется расположенной ортогонально к плоскости yz , причём её открытый край совпадёт с контуром b (фиг. 7, б; точечным пунктиром обозначена граница тороидальной части трубки).

§ 4. Сферическое отображение деформированных трубок

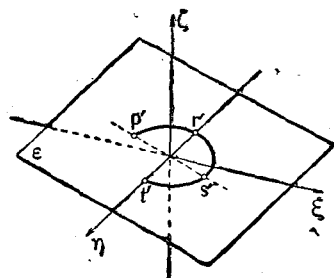
12. Представим себе координатный триэдр (ξ, η, ζ) , параллельный триэдру (x, y, z) и с тем же направлением осей, и в нём единичную сферу с центром в начале триэдра. Координатными плоскостями триэдра (ξ, η, ζ) единичная сфера разбивается на восемь равных частей, каждая из которых лежит в одном октанте пространства $(\xi\eta\zeta)$. Эти части сферы мы для простоты будем называть октантами сферы или просто октантами; это не вызовет недоразумений, так как в дальнейшем о точках пространства (ξ, η, ζ) , не лежащих на сфере, речи не будет. Октанты сферы мы будем обозначать тремя знаками в скобках, поставленными в определённом порядке. Например, $(-++)$ обозначает часть сферы (октант), лежащую в том октанте простран-

ства, где $\xi < 0$, $\eta > 0$ и $\zeta > 0$. Границы октантов будем называть базисными дугами; большие круги сферы, лежащие в плоскостях триэдра (ξ , η , ζ), — базисными кругами. Точки пересечения базисных кругов соответственно названию и знаку их отличных от нуля координат будем обозначать символами ξ^+ , ξ^- , η^+ , η^- , ζ^+ , ζ^- .

На эту сферу мы будем отображать поверхность Бояя.

13. Непосредственно ясно, что при построении сферического отображения поверхности Σ можно вовсе не принимать во внимание плоских и цилиндрических участков трубок, а также крышек, которые пришиваются к плоским участкам трубок (п. 6), так как их отображения совпадают с отображением границ тороидальных участков трубок.

14. Построим отображение тороидальной части трубки C (фиг. 7,б). Представим себе полуплоскость E , имеющую краем прямую $x = -z = 1$ (ось тора) и вращающуюся вокруг этого края от положения, когда она ортогонально пересекает ось x по часовой стрелке на 270° .



Фиг. 8.

Полуплоскость E является меридианной плоскостью для тороидальной части трубки. Меридиан занимает в ней неизменное положение и по форме точно совпадает с дугой $PRST$ (фиг. 5), а все нормали к трубке вдоль меридиана всегда лежат в E . Один из этих меридианов изображён на фиг. 7,б жирной линией $prst$.

Очевидно, что сферическая индикатриса $p'r's't'$ нормалей к трубке вдоль меридиана $prst$ при всяком положении полуплоскости E получается параллельным перенесением самого меридиана $prst$ на единичную сферу так, чтобы центр дуги попал в центр сферы. Это значит, что дуга $p'r's't'$ будет всегда расположена в плоскости ϵ , параллельной E и вращающейся вокруг оси η при вращении E (фиг. 8; сфера не показана). Таким образом точки r' и t' являются неподвижными

на сфере и совпадают с точками η^- и η^+ ; в эти точки отображаются плоские параболические линии (параллели) трубки, описываемые точками r и t меридиана. Сама же дуга $p'r's't'$ вращается вокруг этих точек, скользя по сфере так, что точка s' , выходя из ζ^+ , проходит последовательно через точку ξ^+ , через положение, изображённое на фиг. 8, затем через точку ζ^- и приходит в точку ξ^- .

15. Представим себе, что при этом скольжении дуга $p'r's't'$ оставляет за собою след на сфере в виде плёнки, покрывающей все те точки сферы, в которые отобразились соответствующие точки трубки C . Эту плёнку мы назовём поверхностью отображения σ_C .

16. На рисунках, изображающих сферу в аксонометрии, обозрение всего сферического отображения затруднительно. Поэтому мы произведём стереографическую проекцию сферы вместе с наложенной на неё поверхностью отображения из центра октанта ($+++$) на плоскость, касающуюся сферы в центре октанта ($---$).

Будем считать, что процесс проектирования происходит непрерывно и, следовательно, всё, что происходит на сфере, тотчас же переносится на плоскость, в том числе и натягивание поверхности

отображения. Поэтому все соответствующие точки, линии, участки и наложенные поверхности отображения будем обозначать одними и теми же символами, не различая, находятся ли они на сфере или на плоскости.

Так как через центр проектирования и точку касания плоскости со сферой проходит ось симметрии третьего порядка $\xi = \eta = \zeta$ триэдра (ξ, η, ζ) , то разбиение сферы на октанты базисными кругами (п. 12) спроектируется в симметричное разбиение плоскости тремя равными окружностями на восемь участков с центром симметрии третьего порядка в точке касания плоскости со сферой $\xi = \eta = \zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. В дальней-

шем будет удобнее рассматривать эту плоскость со стороны октанта $(---)$ из некоторой точки $\xi = \eta = \zeta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ пространства $(\xi\eta\zeta)$. На фиг. 9—12 и дальнейших вся плоскость покрыта штриховкой; не заштрихована наложенная на неё поверхность отображения *).

По обозначениям на фиг. 9 видно, что в центре плоскости находится октант $(---)$, вся же область вне базисных кругов представляет октант $(+++)$.

17. В каждом своём положении на сфере дуга $p'r's't'$ проектируется на плоскость в дугу окружности переменного радиуса, проходящую через точки $r' \equiv \eta$ и $t' \equiv \eta$. На фиг. 9 она изображена пунктиром точка-штрих в положении, соответствующем фиг. 8 и 7,б.

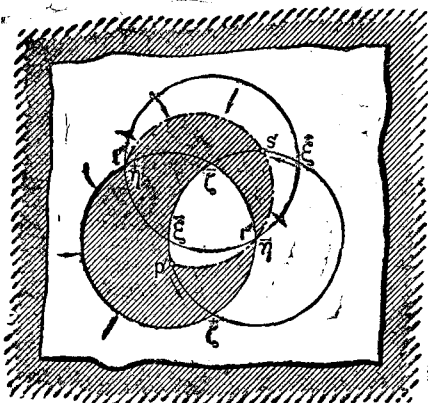
На фиг. 9 изображена и часть поверхности σ_c , которую уже успела натянуть дуга $p'r's't'$, двигаясь из своего начального положения, когда она сливалась с базисной дугой $\zeta\eta\zeta$, в направлении, указанном стрелками.

Как видим, на фиг. 9 уже затянут, покрыт весь центральный октант $(---)$, октант $(+ - +)$, а также и весь внешний октант $(+++)$; при этом участок поверхности, покрывающий внешний октант, на фиг. 9 оборван по случайной неровной линии; однако его следует представлять простирающимся на плоскости во все стороны бесконечно.

18. Обратим внимание на то, что при вращении полуплоскости E (п. 14) на все 270° дуга rst меридиана (фиг. 7,б) всё время скользит по выпуклым точкам трубки C , где гауссова кривизна $K \geq 0$. Обозначим соответствующую часть поверхности σ_c символом σ_c^+ ; она натягивается

на сферу дугой $r's't'$, причём точка s' скользит по базисной дуге $\zeta\eta\zeta$ в направлении стрелок. Вся эта часть σ_c^+ показана отдельно на фиг. 10; она оборвана так же, как на фиг. 9 и на всех дальнейших фигурах.

Как видим, часть σ_c^+ покрывает однократно всю сферу, оставляя откры-

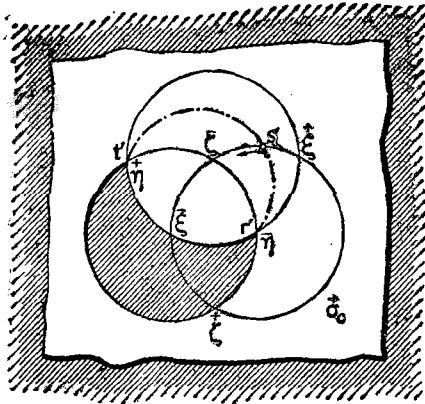


Фиг. 9.

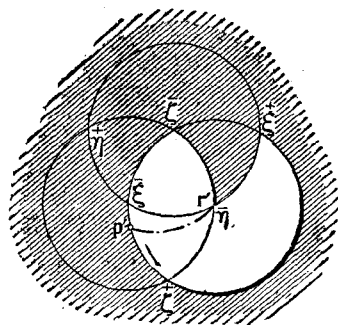
*) Для большей компактности изображений базисные окружности на фиг. 9 и всех последующих несколько сдвинуты друг к другу; в действительности они должны быть взаимно ортогональными. Для всего дальнейшего эта неточность не будет иметь никакого значения; её легко учесть, если это понадобится.

тыми только октанты $(-++)$ и $(--++)$. Следовательно, часть σ_C^+ однолистка и является отображением всех точек трубки с неотрицательной гауссовой кривизной. Назовём поэтому часть σ_C^+ положительным листом поверхности σ_C .

Одновременно дуга pr меридиана (фиг. 7,б) скользит всё время по участку трубки с гауссовой кривизной $K \leq 0$. Её отображение — дуга $p'r'$ — натягивает на сферу также однолистный участок поверхности σ_C — отрицательный



Фиг. 10.



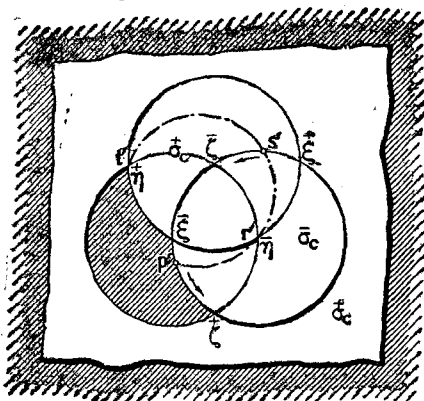
Фиг. 11.

лист σ_C (фиг. 11), причём точка p' скользит по дуге $\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}\zeta^+$ в направлении стрелки.

Теперь можно написать символическую формулу состава поверхности отображения σ_C :

$$\sigma_C = \sigma_C^+ + \sigma_C^- \quad (1)$$

Поверхность эта двулистка, так как октанты $(---)$ и $(+--)$ покрыты ею дважды: раз — листом σ_C^+ и раз — листом σ_C^- . Октант же $(-++)$ оказывается вовсе не покрытым ею. На фиг. 12 представлена вся поверхность σ_C . Листы σ_C^+ и σ_C^- накрывают друг друга сообразно с тем, в какой последовательности их участки натягиваются на сферу дугой $p'r's't'$.



Фиг. 12.

19. Оба листа σ_C^+ и σ_C^- имеют только одну общую точку — точку соединения η . Только через неё возможен непрерывный переход с одного листа на другой, хотя они оба и покрывают два октанта. В этом свойстве поверхности σ_C отражается тот факт, что переход по тороидальной части трубки с участка положительной кривизны на участок отрицательной кривизны возможен только через плоскую параболическую линию, отображающуюся в точку $r' \equiv \eta$ (ср.⁴, стр. 179).

Базисные окружности разбивают листы σ_C^+ и σ_C^- на участки, которые мы будем называть октантами листов и обозначать их так же,

как и на сфере или плоскости. Можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c^+ &= (+ + +) + (+ + -) + (+ - +) + \\ &\quad + (+ - -) + (- + -) + (- - -), \\ \sigma_c^- &= (- - -) + (- - +) + (+ - +). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

20. Обратимся теперь к трубкам A и B . Все три трубки как до, так и после деформации, составляют фигуру с симметрией третьего порядка относительно оси $x = y = z$ (пп. 4, 6). Это означает, что сферическое отображение их будет обладать такой же симметрией относительно оси $\xi = \eta = \zeta$. Поэтому поверхность отображения σ_A можно получить, поворачивая вокруг оси симметрии поверхность σ_c по неподвижной сфере или плоскости на 120° в направлении от ξ через η к ζ . Этот поворот соответствует циклической перестановке знаков в обозначениях октантов в формулах (2) по схеме $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \zeta & \xi & \eta \end{pmatrix}$. Произведя ещё один поворот на 120° в том же направлении, получим из σ_A поверхность σ_B ; в формулах нужно сделать ещё одну перестановку знаков. Все результаты сведены в таблице 1.

Таблица 1

Октант	Знаки покрывающих листов поверхностей			Число покрывающих листов
	σ_A	σ_B	σ_C	
$(+ + +)$	+	+	+	3
$(+ + -)$	+, -		+	3
$(- + +)$	+	+, -		3
$(+ - +)$		+	+, -	3
$(- + -)$	+	-	+	3
$(+ - -)$	-	+	+	3
$(- - +)$	+	+	-	3
$(- - -)$	+, -	+, -	+, -	6

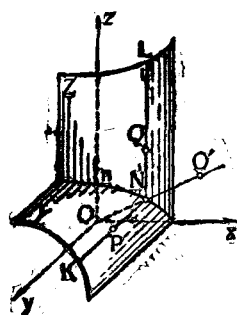
§ 5. Операция сглаживания

21. Всякое ребро поверхности, если оно не является ребром возврата, можно рассматривать как место точек её тангенциального разрыва, так как при переходе через ребро касательная плоскость и нормаль изменяются скачком. Под операцией сглаживания мы понимаем такую операцию, в результате которой поверхность становится тангенциально непрерывной, причём не нарушается её точечная топологическая структура (например, превращение куба в сферу путём округления углов и рёбер).

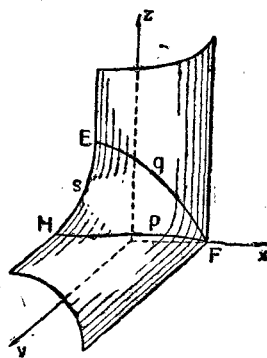
Ясно, что эта операция вносит множество новых тангенциальных элементов поверхности и поэтому весьма значительно изменяет её сферическое отображение. При непосредственной деформации самой поверхности с целью её сглаживания вообще бывает чрезвычайно трудно проследить эти изменения в сферическом отображении.

22. Мы введём другую операцию сглаживания, равносильную деформации, но часто позволяющую сравнительно легко учесть изменения в сферическом отображении. Именно, вблизи сглаживаемого ребра данной поверхности мы будем строить специальную сглаживающую поверхность, которая должна быть всюду гладкой

(т. е. тангенциально и точно непрерывной) и вдоль своих границ гладко переходить в данную поверхность. Граница сглаживающей поверхности может иметь разнообразную структуру, но она всегда должна разделять данную поверхность так, чтобы ограниченные ею части поверхности, содержащие рёбра, можно было отрезать вдоль неё, удалить и заменить гомеоморфной этим частям сглаживающей поверхностью. В результате данная поверхность станет гладкой.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

линии пересечения. На получившейся однополостной поверхности надо сгладить ребро.

Рассмотрим семейство сфер равных радиусов, касающихся извне обоих цилиндров (фиг. 13; показаны части цилиндров, центр O' и точки касания P и Q одной из сфер). Семейство это имеет огибающую—каналовую поверхность. Она касается обоих цилиндров по линиям p и q —геометрическим местам точек P и Q . По этим линиям разрежем каналовую поверхность и используем в качестве сглаживающей поверхности ту её часть, которая расположена ближе к ребру n (фиг. 14, показан участок её $EqFpHsE$).

Цилиндры также разрежем по линиям p и q и удалим части их, содержащие ребро, заменив их сглаживающей поверхностью, которую и сошьём с оставшимися частями цилиндров. Получится гладкая однополостная поверхность.

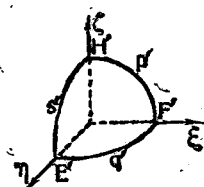
Легко видеть, что показанная на фиг. 14 часть поверхности однозначно покрывает октант сферы, изображённый на фиг. 15; обозначения на этих рисунках соответствуют друг другу по отображению. Отображение всей сглаживающей поверхности покрывает всю сферу однозначно всюду, кроме больших кругов сферы в плоскостях yz и xz , покрытых многозначно.

Пример 2. Построить сглаживающую поверхность для тех же цилиндров, что и в примере 1, но так, чтобы линии p и q были параллельны соответственно плоскостям xz и xy и находились бы на расстоянии от них $b > a$ (a —радиус цилиндров).

Как видно, в этой задаче наложены определённые условия на границы сглаживающей поверхности, именно: заданы её краевые поверхностные полосы (см.⁵, гл. III).

Сглаживающая поверхность показана на фиг. 16. Она получается как часть огибающей четырёх семейств сфер, касающихся цилиндров и имеющих центры на прямых соответственно $y = z = b$, $y = z = -b$, $y = -z = b$ и $y = -z = -b$.

Когда центр сферы уходит на бесконечность, сфера вырождается в плоскость, касающуюся обоих цилиндров с одной или с другой

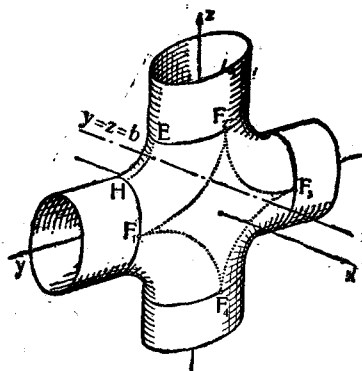


Фиг. 15.

стороны. Части этих плоскостей в виде четырёхугольника $F_1F_2F_3F_4$ вместе с участками огибающих поверхностей составляют сглаживающую поверхность.

Отображение всей поверхности также покрывает всю сферу однократно, кроме базисных кругов в плоскостях $\xi\eta$ и $\xi\xi$, покрытых многократно.

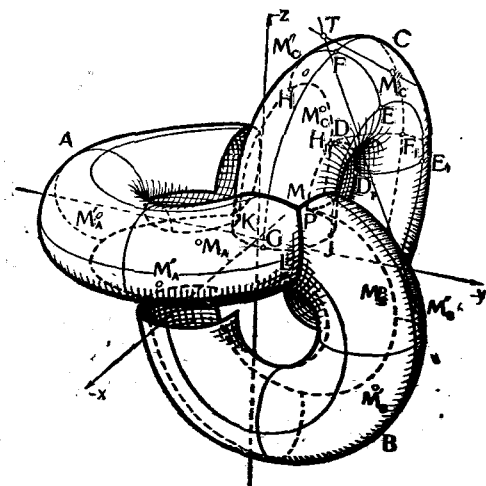
24. Оба примера допускают следующие обобщения. Во-первых, вместо цилиндров могут быть заданы любые две или больше пересекающиеся поверхности. Например, в дальнейшем нам придётся сглаживать линию пересечения тороидальных частей трёх трубок A , B и C (§ 2). Во-вторых, вместо семейств сфер могут быть взяты семейства любых других поверхностей, замкнутых или незамкнутых, лишь бы эти семейства имели огибающие поверхности, удовлетворяющие поставленным условиям. Таким образом мы видим, что в построении сглаживающей поверхности, даже если на неё наложены некоторые условия, как в примере 2, остаётся огромный произвол.



Фиг. 16.

§ 6. Сглаживание линии пересечения трубок

25. Построим сглаживающую поверхность для наших трёх трубок A , B , C . Линия пересечения, которую мы должны сгладить, изображена на фиг. 17, причём мы смотрим на неё из октанта (— — —)



Фиг. 17.

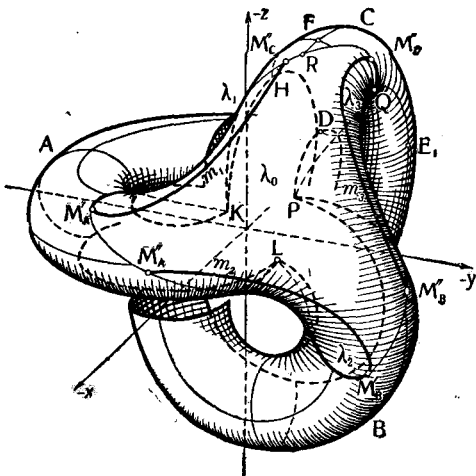
$JEE_1\dots$ — параболическая линия, $GFF_1\dots$ — экватор, $DEFH$ и $D_1E_1F_1H_1$ — меридианы, параллельные плоскостям yz и xz .

26. Приложим к трубкам некоторую плоскость μ так, чтобы она коснулась одновременно всех трёх трубок со стороны октанта (— — —). В силу симметрии третьего порядка всей фигуры, μ будет перпендикулярна к оси симметрии $x=y=z$, а точки касания M_A , M_B , M_C будут лежать на равных расстояниях друг от друга (фиг. 17).

пространства. В точке M линия разветвляется на три ветви: MP , MK и ML . Она получилась из линии, отмеченной теми же буквами на фиг. 6 (стр. 131), в результате деформации трубок и мало отличается от неё по форме; концы её P , K и L остались неподвижными. Чтобы не загромождать фиг. 17, на ней показаны только тороидальные части трубок. Тонкими линиями показаны на трубках параболические линии (те параллели, плоскости которых являются касательными плоскостями), экваторы (параллели наибольшего радиуса) и те меридианы, плоскости которых параллельны координатным плоскостям. На трубке C , например,

Надавим на плоскость μ справа сверху; она оторвётся от трубки A и покатится по трубкам B и C . Повернув её таким образом на некоторый угол φ , мы остановим её. Для определённости выберем угол φ таким, чтобы точка касания плоскости с трубкой C оказалась между меридианами $DEFH$ и $D_1E_1F_1H_1$, несколько ближе к первому, в положении M'_C . Тогда точка касания с трубкой B , очевидно, перейдёт через экватор трубки B и окажется в положении M'_B . Самую плоскость в этом положении назовём μ_{BC} (об ином выборе угла φ см. § 10, п. 51).

27. Построим прямую, касательную в точке M'_C к параллели трубки C , проходящей через эту точку; так же построим касательную прямую в M'_B к параллели трубки B , проходящей через M'_B . Обе касательные лежат в плоскости μ_{BC} и пересекаются в некоторой точке T . Легко показать, что T отлична от M'_C и M'_B и лежит в плоскости μ_{BC} по ту же сторону от прямой $M'_B M'_C$ (на фиг. 17 эта прямая не показана), что и точка пересечения плоскости μ_{BC} с осью симметрии $x=y=z$. Следовательно, через точки M'_B и M'_C можно провести в плоскости μ_{BC} дугу m_3 выпуклой кривой, касающуюся в своих концах M'_B и M'_C прямых $M'_B T$ и $M'_C T$ и потому гладко переходящую в параллели трубок и выпуклостью своей обращённую в сторону точки T .



Фиг. 18.

дуги не нарушат симметрии третьего порядка всей фигуры. (фиг. 18).

28. Описанным в § 5 способом построим теперь сглаживающую поверхность λ_3 вблизи линии MP пересечения трубок B и C , гладко переходящую в плоскость μ_{BC} по кривой m_3 . В трубки B и C она будет переходить гладко по некоторым кривым PM'_B и PM'_C (фиг. 18). Поверхность эту можно построить так, чтобы она имела отрицательную кривизну всюду, кроме точек параболической дуги m_3 . Мы не будем проводить здесь построения поверхности λ_3 . Заметим только, что в качестве дуги m_3 может быть взята дуга эллипса; тогда для построения λ_3 можно воспользоваться семейством эллипсоидов, касающихся торов B и C в точках линий $M'_B P$ и $M'_C P$; один крайний эллипсоид семейства должен касаться обоих торов в точке P , а другой крайний эллипсоид вырожден в плоскость μ_{BC} , причём вырождение происходит так, что кривая m_3 является предельной характеристической линией семейства—аналогично вырождению сфер в плоскости в примере 2 § 5. Если же дуга m_3 не эллиптическая, то нужно подобрать другое семейство поверхностей.

Точно так же построим поверхность λ_1 между трубками C и A с границей $KM'_A M'_C K$ и поверхность λ_2 между трубками A и B с границей $LM'_B M'_A L$, от чего симметрия всей фигуры не нарушится (фиг. 18).

29. Теперь соединим линии PM'_C и KM'_C дугой $M'_C M'_C$ по трубке C ; пусть эта дуга имеет всюду положительную геодезическую кривизну и выпуклостью своей обращена в сторону свободного конца трубки. Аналогично построим дуги $M'_A M'_A$ и $M'_B M'_B$.

30. Рассмотрим полученный замкнутый контур $M'_A M'_A M'_B M'_B M'_C M'_C M'_A$. Вдоль него заданы шесть поверхностных полос: три симметричные друг с другом вдоль дуг $M'_i M'_i$ заданы трубками и три другие, также симметричные; плоские полосы вдоль дуг m_i заданы сглаживающими поверхностями, или, что то же самое, плоскостями μ_{ij} ($i, j = A, B, C; i \neq j$). Каждые две соседние полосы имеют в угловых точках контура общие поверхностные элементы, и поэтому все шесть полос вместе составляют одну замкнутую непрерывную (тангенциально и точечно) полосу.

Теперь мы можем построить поверхность λ_0 , гладкую и имеющую положительную гауссову кривизну всюду, кроме параболических линий m_i . По этим линиям она гладко переходит в поверхности λ_1, λ_2 и λ_3 , вдоль остальных трёх дуг $M'_i M'_i$ также гладко — в трубки.

31. Таким образом поверхности λ_1, λ_2 и λ_3 (отрицательной кривизны) и поверхность λ_0 (положительной кривизны) составляют одну всюду гладкую поверхность $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Она имеет три плоские параболические линии m_i и вдоль своих границ гладко переходит в трубки; этот переход будет рассмотрен более подробно в § 8, п. 38.

По границе $PKLP$ поверхности λ разрежем все три трубки A, B, C и удалим части их, пересекающиеся друг с другом, а к образовавшимся новым краям пришьём поверхность λ . В результате мы получим поверхность Σ (п. 6), если будем считать, что трубки были уже разрезаны вдоль их рёбер и к ним пришиты крышки (п. 6). Сделав ещё сшивания, согласно п. 7 мы получим симметричную поверхность Бойя.

32. Рассматривая гипсовую модель симметричной поверхности Бойя*), легко обнаружить, что она тоже имеет три плоские параболические линии, расположенные примерно так же, как линии m_i на построенной нами поверхности (в общем весьма похожей на гипсовую). Поставим для этого гипсовую модель двумя её трубками на гладкую твёрдую доску и будем катить её по доске так, чтобы она потом оказалась лежащей на своей выпуклой части, сквозь которую проходит ось симметрии поверхности. Таким образом в начале движения поверхность опирается о доску двумя точками, а в конце — одной. В один из промежуточных моментов движения поверхность соприкасается с доской вдоль целой параболической линии. Две точки опоры переходят по трубкам на концы параболической линии, соответствующие нашим точкам M'_B и M'_C , а потом скачком (в момент соприкосновения по параболической линии) переходят в одну точку опоры в средней части параболической линии, после чего поверхность опирается о доску уже одной точкой. В момент этого скачка от двух точек опоры к одной ощущается заметный толчок, особенно при быстром качении, так как модель массивна.

33. Заметим, что требование, чтобы плоские дуги m_i гладко переходили именно в параллели торов (п. 27), вовсе не обязательно и принято нами только для определённости. Весьма возможно, что построить сглаживающую поверхность λ будет проще, если заставить эти дуги гладко переходить в какие-нибудь другие кривые на трубках, проходящие через точки M'_i и M'_j под небольшим углом к параллелям. Однако эти изменения ничего существенного не внесут в построение поверхности λ ; в дальнейшем мы даже не будем пользоваться этим свойством дуг m_i .

*) Такая модель имеется, например, в Геометрическом кабинете Харьковского университета.

§ 7. Сферическое отображение сглаживающей поверхности

34. Прежде всего отобразим границу $PKLP$ сглаживающей поверхности λ . В точке P трубки B и C имеют общую касательную плоскость, именно, плоскость yz (фиг. 18, ср. фиг. 6), и общая нормаль их в этой точке направлена по полуоси $+x$. Поэтому точка P отображается в точку

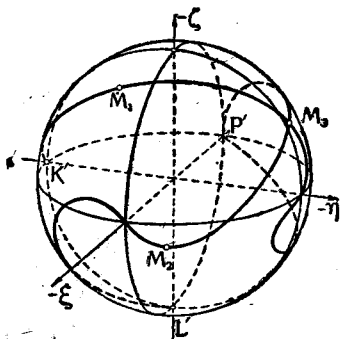
$P' \equiv \xi^+$ сферы или плоскости (фиг. 19 и 20). Аналогично точка K отображается в точку $K' \equiv \eta^+$ и L — в точку $L' \equiv \zeta^+$.

Вдоль плоской дуги m_1 касательная плоскость к поверхности совпадает с плоскостью μ_{CA} этой дуги; значит, дуга m_1 вместе со своими концами отображается в одну точку M_1 сферы. Плоскость μ_{CA} занимает такое положение (в силу выбора угла φ , п. 26), что вектор нормали к ней направлен в октант $(-+-)$ пространства $x y z$. Следовательно, точка M_1 лежит внутри

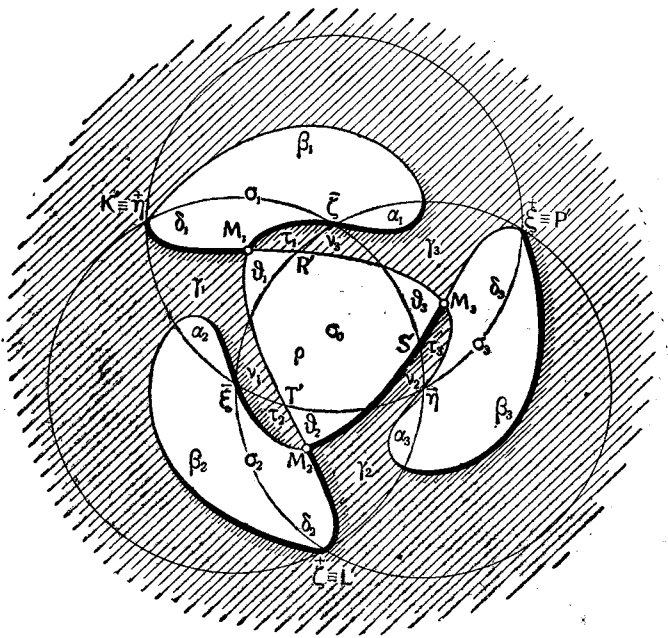
октанта $(-+-)$ сферы (фиг. 19 и 20). Аналогично дуги m_2 и m_3 отображаются в точки M_2 и M_3 , симметричные с M_1 относительно центра октанта $(---)$ или относительно прямой $\xi = \eta = \zeta$. Таким образом, мы построили отображения четырёх точек каждой из дуг PK , KL и LP границы поверхности λ .

35. В силу симметрии этой границы $PKLP$ мы можем заняться рассмотрением только её дуги $PM'_C M'_C K$. Её отображение проходит через точки P' , M_3 , M_1 и K' . Оно проходит также через точку η , так как в эту точку отображается параболическая линия JEE_1 трубки C (фиг. 17, см. также п. 19 и фиг. 12), а линия PK пересекает JEE_1 в точке Q (фиг. 18).

Для определённости положим, что линия $PM'_C M'_C K$ гладкая и что дуга $M'_C M'_C$ пересекает экватор трубки C в точке R дуги FG экватора, как на фиг. 18. Тогда линия $PQM'_C RM'_C K$ проходит последовательно по участкам трубки: $PJEDP$, $DEE_1 D_1 D$, $EE_1 F_1 FE$, $JEFGJ$ и $GFHKG$, отображающимся, соответственно, на октанты $(+-+)$, $(--+)$, $(+-)$, $(---)$ и $(-+-)$ поверхности σ_C (фиг. 12). Следовательно, по этим же октантам пройдёт отображение рассматриваемой линии — $P'W\eta M_3 R' M_1 K'$ (фиг. 19 и 20).



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Если мы заставим, как и в п. 14, полушлость E вращаться, то в её начальном положении подвижный меридиан $prst$ (сечение трубки плоскостью E) совпадёт с краем свободного конца γ трубки C , часть которого видна на фиг. 17 за трубкой B , в просвете последней. При полном повороте (в 270°) полушлости E меридиан $prst$ последовательно пройдёт через положения $D_1E_1F_1H_1$, $DEFH$ и $PJGK$. При этом движении он сначала не будет иметь общих точек с кривой $PM'_CM'_CK$; затем наступит момент, когда он коснётся её где-то вблизи точки M'_C , и в дальнейшем он всегда будет дважды пересекать кривую $PM'_CM'_CK$, причём одна из точек пересечения будет всё время приближаться к концу t меридиана, скользящему по краю H_1HK торoidalной части трубки. Поэтому линия $P'M_3M_1K'$ пересекает дугу $p'r's't'$ во всех её положениях на σ_C , ближайших к крайнему $\xi\eta$ $\xi\eta$. Это значит, что линия $P'M_3M_1K'$ на поверхности σ_C касается края её $\xi\eta$ $\xi\eta$ в точке $K' \equiv \eta$. Аналогичными рассуждениями легко показать, что дуги $P'M_3M_1K'$ и $\xi\eta$ $\xi\eta$ в точках η и ξ пересекаются, вообще, не касаясь, как и показано на фиг. 19 и 20. Линия $P'M_3M_1K'$, очевидно, гладкая, как и её прообраз.

36. На фиг. 20 показано отображение всей границы сглаживающей поверхности λ , состоящее из трёх гладких дуг: рассмотренной $P'W\eta M_3R'M_1K'$ и симметричных с нею $K'U\zeta M_1T'M_2L'$ и $L'V\bar{\zeta} M_2S'M_3P'$ (на фиг. 19 последняя дуга не показана, чтобы не загромождать чертежа). Все три дуги составляют симметричный замкнутый контур с тремя узлами M_1 , M_2 и M_3 , который ограничивает четыре односвязные области: центральную σ_0 и три симметричные друг с другом σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Легко видеть, что участок λ_0 сглаживающей поверхности λ отображается на область σ_0 . В самом деле, граница λ_0 отображена на границу σ_0 (треугольник $M_1M_2M_3M_1$). Сам участок λ_0 односвязный и гладкий, и во всех его внутренних точках гауссова кривизна $K > 0$; значит, окрестность каждой его точки отображается на сферу однозначно и непрерывно. Кроме того, по построению участка λ_0 , в центре его нормаль совпадает с осью симметрии $x=y=z$ и направлена внутрь октанта (— — —) пространства xyz ; поэтому центр участка λ_0 отображается в центр октанта (— — —) сферы. Наибольшего отклонения от направления оси симметрии нормали достигают только в точках границы участка. Из этого заключаем, что отображение участка λ_0 заполняет однократно весь участок σ_0 или, скажем, порождает на сфере лист σ_0 поверхности отображения.

Аналогично убеждаемся, что участок λ_3 сглаживающей поверхности порождает односвязный лист σ_3 с краем $M_3\eta WP'M_3$, а λ_1 и λ_2 дают симметричные с σ_3 листы σ_1 и σ_2 . Таким образом вся сглаживающая поверхность $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ отображается в поверхность

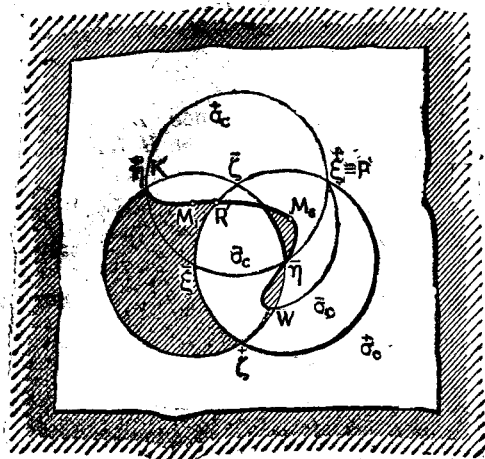
$$\sigma_\lambda = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (3)$$

При этом листы σ_1 , σ_2 и σ_3 отрицательные и связаны с положительным листом σ_0 каждый только одной точкой; причина этого та, что их прообразы λ_1 , λ_2 и λ_3 (отрицательной кривизны) связаны с λ_0 (положительной кривизны) вдоль плоских параболических линий (ср. п. 19).

Базисные круги разбивают каждый из листов σ_1 , σ_2 , σ_3 на три участка и лист σ_0 — на четыре; согласно обозначениям этих участков на фиг. 20 запишем:

$$\sigma_0 = \rho + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3, \quad \sigma_i = \alpha_i + \beta_i + \delta_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

37. Теперь мы можем выяснить, как изменяется сферическое отображение трубок A, B, C при введении сглаживающей поверхности. От трубки C мы отбросили часть её, ограниченную линией $PM_cM_c'K$ и её нижним крайним меридианом $PJGK$ (п. 31; фиг. 17 и 18). Это значит, что от поверхности σ_C (фиг. 12) мы должны отбросить часть, ограниченную её краем $\xi\eta\bar{\xi}\eta$ и кривой $P'WM_sR'M_1K'$; следовательно, от σ_C отбрасывается



Фиг. 21.

участок $\xi\eta\bar{\xi}\eta$ и от σ_C — участок $\eta\bar{\xi}\bar{\eta}M_sR'M_1\eta$. После этого поверхность σ_C предстанет в виде, изображённом на фиг. 21. Листы её σ_C^+ и σ_C^- остаются соединёнными в единственной точке η .

Точно такие же изменения претерпят поверхности σ_A и σ_B , оставаясь симметричными с σ_C ; читатель легко представит себе эти поверхности, вообразив поверхность σ_C повернутой вокруг центра октанта (— — —) на 120° сначала влево (σ_A), потом вправо (σ_B).

В результате этих изменений формулы состава поверхности σ_C запишутся согласно обозначениям фиг. 20 так:

$$\begin{aligned} \sigma_C^+ &= (+ + +) + (+ - +) + (+ + -) + [(+ - -) - \vartheta_3 - \tau_3] + \left\{ \begin{aligned} &+ \nu_3 + \tau_1 + \bar{\nu}_1, \end{aligned} \right. \\ \sigma_C^- &= (- - -) + [(- - +) - \alpha_3] + [(+ - +) - \beta_3]. \end{aligned} \quad (5)$$

Переставляя циклически знаки в обозначениях октантов и индексы 1, 2, 3, мы получим из формул (5) формулы состава σ_A и потом σ_B (как в п. 20).

38. Теперь мы уже имеем отображение всех участков трубок, остающихся после операции сглаживания, и самой сглаживающей поверхности λ , т. е. отображение всей поверхности Σ (как мы уже говорили в п. 4, отображение крышек входит в отображение трубок).

Однако поверхность Σ непрерывна и всюду гладка, значит её сферическое отображение должно быть непрерывным, т. е. все полученные поверхности $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ и σ_λ должны быть непрерывно связаны друг с другом вдоль своих границ в одну поверхность отображения σ . Установим эту связь.

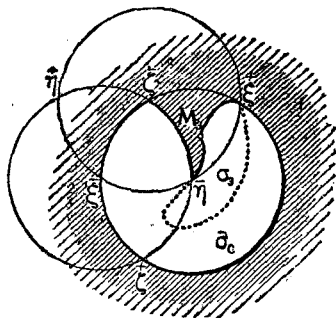
У поверхности Σ участки λ_3, λ_0 и λ_1 сглаживающей поверхности гладко переходят в трубку C по кривой $PQM_cRM_c'K$ (фиг. 18). Поэтому у поверхности σ соответствующие участки должны быть непрерывно связаны вдоль общей границы $P'W\eta M_sR'M_1K'$. Именно, к листу σ_C вдоль края $P'W\eta$ нужно пришить лист σ_3 (ср. фиг. 20 и 21); они являются прямым продолжением друг для друга. Получающийся лист $\sigma_C + \sigma_3$ показан на фиг. 22. Затем тот же лист σ_3 вдоль края ηM_s при-

шивается к листу σ_c ; но эти листы уже не прямо продолжают друг друга, а подходят к дуге ηM_3 с одной и той же стороны, налегая друг на друга. Дуга ηM_3 является, таким образом, для поверхности σ складкой, кривой возврата. Это показано на фиг. 23. Как и на фиг. 9, угол ζ листа σ_c подложен под лист σ_c , а остальная часть листа σ_c и лист σ_3 лежат поверх листа σ_c .

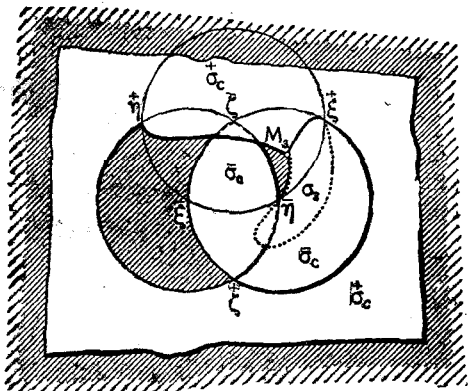
Далее, мы должны вдоль дуги $M_3 M_1$ сшить листы σ_c и σ_0 (ср. фиг. 20 и 21); они продолжают друг друга прямо. Наконец, вдоль дуги $M_1 K'$ мы должны сшить листы σ_c и σ_1 ; они подходят к общей своей границе с одной и той же стороны и образуют в ней складку поверхности σ .

39. Такая разница между различными дугами кривой $P'W\eta M_3 R' M_1 K'$ объясняется различием знаков кривизны отображаемых участков поверхности Σ . Например, дуга $M_3 M_1$ является отображением границы $M'_c M'_c$ двух участков поверхности Σ , имеющих положительную кривизну, причём в точках самой границы кривизна обоих её берегов положительна (и вообще различна, т. е. изменяется скачком при переходе через дугу, не изменяя знака). Так же и дуга $P'W\eta$ является отображением границы PQ (фиг. 18) двух участков Σ , имеющих отрицательную кривизну, и поэтому отрицательные листы σ_1 и σ_c продолжают друг друга прямо через дугу $P'W\eta$, так же как и положительные листы σ_0 и σ_c через общую границу $M_3 M_1$.

Дуга же $M_1 K$ — общая граница отрицательного листа σ_1 и положительного σ_c — является отображением границы $M'_c K$ между выпуклым участком трубки C и участком λ_1 с отрицательной кривизной. При переходе через их границу кривизна изменяется скачком, изменяя и знак. Поэтому



Фиг. 22.

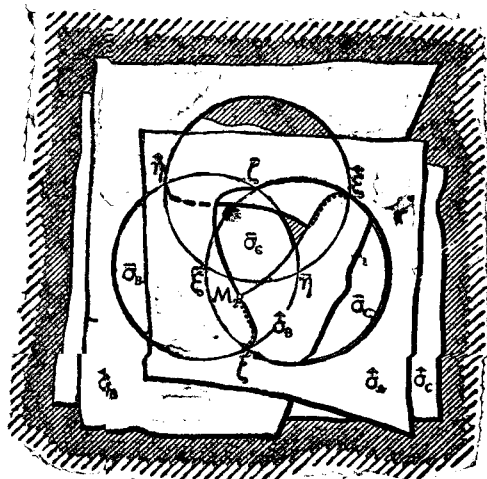


Фиг. 23.

му листы σ_1 и σ_c налегают друг на друга, подходя к общей границе с одной и той же стороны. То же справедливо и для дуги QM'_c и её отображения ηM_3 .*).

*) См. 4, гл. IV, п. 29, стр. 177 — 181, особенно стр. 178; но там рассмотрены отображения окрестностей только параболических линий как границ участков поверхности с кривизной разных знаков; те же рассуждения применимы и в более общем случае, когда граница не является параболической линией, а просто линией гладкого соединения таких участков, причём при переходе через неё кривизна может изменяться скачком, меняя и знак. Пример: поверхность колокола, образованного вращением вокруг оси Oz кривой, состоящей из двух дуг окружностей в плоскости xz : 1) $x^2 + z^2 = 1$; $x \geq 0$, $z \geq 0$ и 2) $(x - 3)^2 + z^2 = 4$; $x \leq 2$; $z \leq 0$. При $z > 0$ поверхность имеет кривизну $K = 1$ (полусфера), при $z < 0$, $K < 0$,

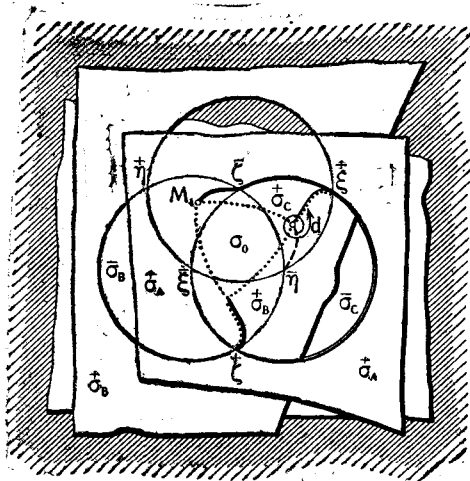
Поверх всего наложим теперь лист σ_A^+ (фиг. 26) и пришьём его к листу σ_2 вдоль дуги ζM_2 . Теперь в центре чертежа мы видим треугольник $M_1 M_2 M_3$, образованный краями листов σ_A^+ , σ_B^+ и σ_C^+ . Как мы видели выше (п. 38), эти края нужно пришить к листу σ_0 поверхности σ_A (ср. фиг. 20). По этому листу устанавливается теперь непосредственный прямой переход между листами σ_A^+ , σ_B^+ и σ_C^+ (фиг. 27, шов отмечен точками).



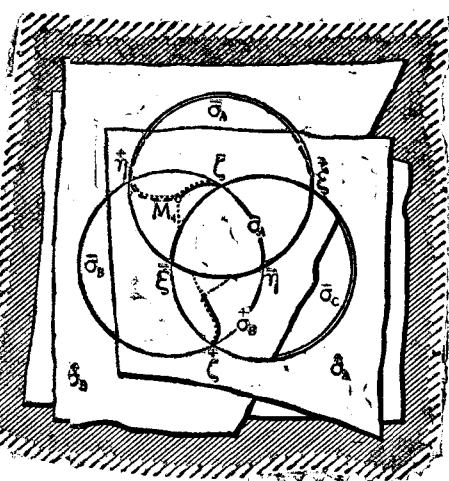
Фиг. 26.

Остался ещё не пришитым лист $\sigma_A^+ + \sigma_1$. Его, как и все такие отрицательные листы, мы должны пришить к двум листам: к σ_A^+ по дуге ζM_1 и к σ_C^+ по дуге $M_1 K'$. Это возможно сделать только одним способом: лист $\sigma_A^+ + \sigma_1$ нужно расположить частью σ_1 между листами σ_C^+ и σ_A^+ в проёме листа σ_B^+ ; тогда октанты его $(+ - -)$ и $(- - -)$ расположатся сверху (фиг. 28, ср. фиг. 25).

Таким образом все сшивания отдельных листов поверхности σ можно осуществить без самопересечений. Такую модель поверхности σ легко склеить из плотной бумаги.



Фиг. 27.

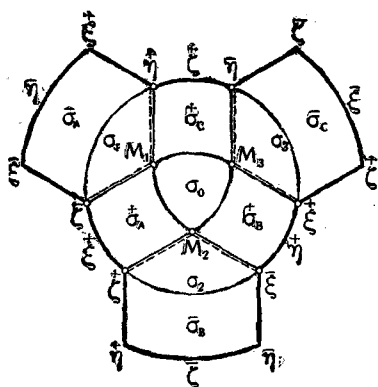


Фиг. 28.

41. Поверхность σ имеет шесть складок (линий возврата) и девять точек разветвления на концах этих складок: η , M_3 , ξ и симметричные с ними; в точках M_1 , M_2 и M_3 сходятся по две складки.

Каждый из листов σ_A , σ_A^+ , σ_B , σ_B^+ , σ_C , σ_C^+ имеет свободные края; все эти края составляют один связный простой контур — край поверх-

ности σ . Его можно обойти, например, так. По листу σ_C (см. фиг. 23), начиная от точки η , через ζ к η (под листом σ_C), затем по листу σ_C до $\bar{\zeta}$ (под листом σ_C); эта дуга $\eta\zeta\eta$ является начальным положением дуги $t's'r'p'$ в п. 6, т. е. является отображением берега γ открытого края трубки C (см. п. 11, также фиг. 7). Затем мы пройдем дальше по краю $\bar{\zeta}\bar{\xi}\bar{\zeta}\bar{\xi}$ листа σ_C ; этот край является отображением минимальной параллели трубки C , по которой скользит точка p меридиана $prst$ (п. п. 14, 18), следовательно, и отображением берега γ' трубки C . Теперь в точке разветвления ξ мы сойдем на поверхность σ_B (см. фиг. 24 и 25) и обойдем её край по σ_B и $\bar{\sigma}_B$ точно так же, как обошли край поверхности σ_C . Этот край $\xi\eta\bar{\xi}\eta\zeta\eta\bar{\zeta}$, аналогично, является отображением берегов β и β' края трубки B . Затем по краю $\bar{\zeta}\bar{\xi}\bar{\zeta}\bar{\xi}\eta\bar{\xi}\eta$ поверхности σ_A — отображению берегов α и α' края трубки A — мы вернёмся в исходную точку η .



Фиг. 29.

42. Описанные в п. 40 сшивания листов схематически представлены на фиг. 29. Все эти листы заменены гомеоморфными им многоугольниками; следовательно, фиг. 29 изображает фундаментальный многоугольник для поверхности σ . Точки разветвления поверхности обозначены на нём [кружочками, линии

возврата отмечены параллельным к ним пунктиром. Участки σ_1 , σ_2 и σ_3 отделены, соответственно, от $\bar{\sigma}_A$, $\bar{\sigma}_B$ и $\bar{\sigma}_C$ тонкой линией (прямой шов).

Как видно по фундаментальному многоугольнику, поверхность σ гомеоморфна кругу; следовательно, она гомеоморфна самой поверхности Σ , своему прообразу.

43. Мы знаем (пп. 6—8), что для получения поверхности Боя из поверхности Σ нужно сшить, например, берега γ' и α . На поверхности σ отображения этих берегов $\bar{\zeta}\bar{\xi}\bar{\zeta}\bar{\xi}$ и $\zeta\xi\zeta\xi$ диаметрально противоположны друг другу. Это находится в полном соответствии с замечанием об отображении точек разреза односторонней поверхности, приведёнными в п. 2. Эти дуги являются отображением дуги с двойной кривой поверхности Боя, по которой мы сделали разрез, превратив последнюю в поверхность Σ (п. 8.). Ясно, что остальные петли двойной кривой, a и b , отображаются точно так же.

Мы можем сказать поэтому, что σ является однозначным сферическим отображением поверхности Боя, за исключением её двойной кривой, которая отображается двузначно. Более того, все непараболические точки поверхности Боя (в которых кривизна $K \neq 0$) отображаются в поверхность σ взаимно однозначно.

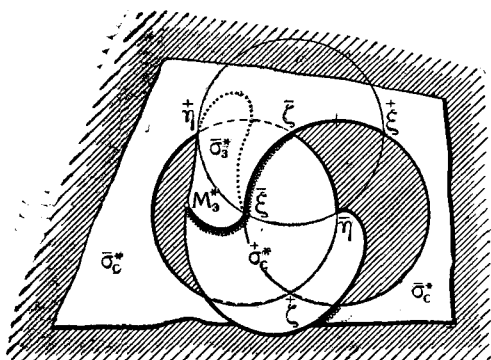
44. Отождествив указанные в п. 43 диаметрально противоположные дуги края поверхности σ , мы найдём, что замкнутая таким образом поверхность σ будет гомеоморфна проективной плоскости, т. е. гомеоморфна самой поверхности Боя.

§ 9. Полное отображение поверхности Бойя

45. Чтобы получить полное отображение поверхности Бойя, нужно согласно п. 2 спроектировать поверхность σ на сферу из центра сферы; получается поверхность σ^* , симметричная с σ . При этом край поверхности σ^* совпадает с краем поверхности σ и вдоль этого края нужно, очевидно, сшить обе поверхности в одну поверхность $\sigma + \sigma^*$.

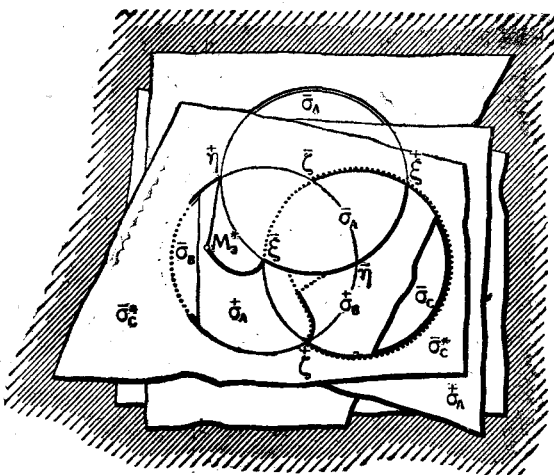
На фиг. 30 показана часть $\sigma_C^* + \sigma_3^*$ поверхности σ^* , симметричная с частью $\sigma_C + \sigma_3$ (фиг. 23) поверхности σ (заметим, что всякая пара центрально симметричных точек на сфере отображается стереографически на плоскость в пару точек, лежащих на пересечении прямой, проходящей через центр октанта (---), и окружности, проходящей через какую-нибудь из

трёх пар точек: ξ^+ и $\bar{\xi}^+$, η^+ и $\bar{\eta}^+$ или ζ^+ и $\bar{\zeta}^+$). Её край $\eta^+ \bar{\zeta}^+ \eta^+ \zeta^+ \xi^+ \bar{\xi}^+$ совпадает частью с краем поверхности σ_B , частью с краем поверхности σ_A (п. 41).



Фиг. 30.

На фиг. 31 показан только отрицательный лист $\sigma_C^* + \sigma_3^*$, наложенный на поверхность σ (фиг. 28). Он шит с листом σ_A^+ (дуга $\xi^+ \bar{\zeta}^+$), с σ_A^- (дуга $\bar{\zeta}^- \bar{\xi}^-$) и частично с σ_B , насколько это позволяет



Фиг. 31.

являющихся отображением одного и того же участка λ_3 поверхности Бойя. Каждый символ, снабжённый звёздочкой, обозначает участок σ^* , центрально симметричный участку σ , обозначенному тем же символом без звёздочки.

46. Поверхность $\sigma + \sigma^*$ имеет всего 18 складок (линий возврата) и 18 точек разветвления на концах складок. Точки разветвления суть: M_3 и ей симметричные (в симметрии третьего порядка и относительно центра сферы) — всего шесть точек, да ещё в каждой базисной точке

обрыв листа σ_A^+ (часть дуги $\eta^+ \zeta^+$). Ясно, что последнее сшивание, как и пришивание остальных листов σ^* к σ , невозможно без самопересечения поверхности $\sigma + \sigma^*$.

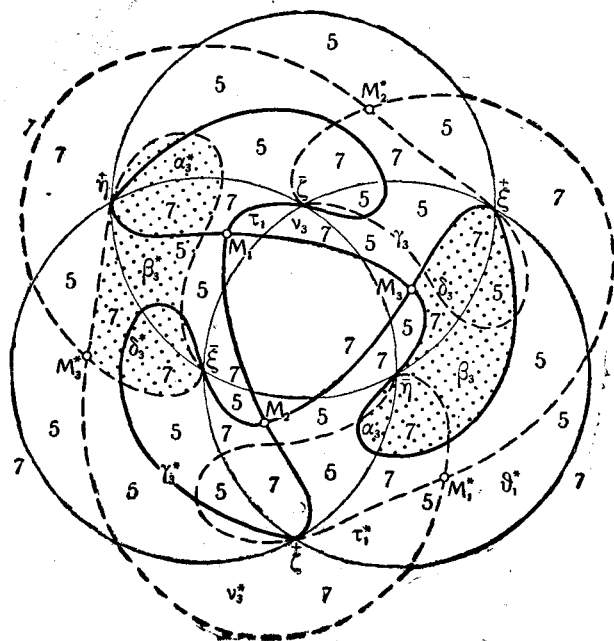
На фиг. 32 представлено расположение границ участков поверхности $\sigma + \sigma^*$; границы участков поверхности σ показаны сплошными линиями (ср. фиг. 20), а границы участков σ^* — пунктирными. Сеткой точек покрыты два центрально симметричных участка σ_3 и σ_3^* ,

находится по две точки разветвления (например, в η — точки η_1 и η_2), — всего 12 точек.

Все точки разветвления носят одинаковый характер: в них сходится по три листа, делающих две складки, причём два из этих листов являются прямым продолжением один другого. Выше мы уже рассмотрели сшивание листов, сходящихся в точке M_2 (п. 40). В ней сходятся листы σ_C , σ_3 и σ_B (фиг. 23 и 24), причём лист σ_C продолжается прямо через лист σ_0 в лист σ_B (фиг. 27). От складки ηM_2 можно добраться до складки $M_3 \xi$, обходя вокруг точку M_2 по гладкому пути d по положительным листам σ_C , σ_0 и σ_B (фиг. 27); этот путь замыкается путём более коротким по отрицательному листу σ_3 .

Точно такое же строение имеет поверхность во всех остальных точках разветвления. Например, в точке η_1 сходятся, образуя складки, три листа: σ_C^+ , σ_3^+ и σ_B^+ , причём σ_B^+ является прямым продолжением листа σ_3^+ через лист σ_C^+ (фиг. 31).

При этом листы σ_C^+ и σ_3^+ дают складку ηM_2^+ (фиг. 30), а листы σ_C^+ и σ_B^+ — складку $\eta \xi \eta$



Фиг. 32.

(ср. фиг. 30 и 25); очевидно, лист σ_C^+ надо пропустить сквозь лист σ_A^+ (ср. фиг. 26), чтобы сшить его с листом σ_B .

В точке же η_2 сходятся листы σ_1 и σ_C , образуя известную уже нам складку ηM_1 (фиг. 28; п. 40), и листы σ_C и σ_B^+ , образуя складку $\eta \xi \eta$, причём лист σ_B^+ является прямым продолжением листа σ_1 через лист σ_A .

Итак, в каждой точке разветвления сходится по две складки, и каждая складка имеет по две точки разветвления на своих концах. Оказывается, что все складки составляют два отдельных девятиугольника, центрально симметричных друг с другом. Три последовательные стороны одного из них суть складки: ηM_2 листов σ_C и σ_3 , $M_3 \xi$ листов σ_3 и σ_B и $\xi \eta$ листов σ_B и σ_A , остальные с ними симметричны: $\bar{\eta} M_2$ и т. д.

47. Схематически эти сшивания показаны на фиг. 33. Точки разветвления обозначены кружочками, линии возврата отмечены параллельными им пунктирами. Жирными линиями выделена граница многоугольников поверхностей σ и σ^+ , вдоль которой они сшиты (ср. фиг. 29).

Эта схема представляет собою фундаментальный многоугольник поверхности $\sigma + \sigma^*$, причём нужно ещё представить себе лист σ_0^* в виде односвязного куска, пришитого своей границей вдоль внешней границы $M_1^* M_2^* M_3^* M_1^*$ к изображённому на фиг. 33 многоугольнику и дополняющего его поэтому до топологической сферы. Таким образом мы убеждаемся, что поверхность $\sigma + \sigma^*$ гомеоморфна сфере.

Каждая точка поверхности Бойя отображается на поверхность $\sigma + \sigma^*$ в пару диаметрально противоположных точек (на сфере). Чтобы получить однозначное отображение, достаточно отождествить друг с другом точки каждой пары, т. е. отождествить все соответствующие при проектировании σ на σ^* (п. 45) точки этих поверхностей. Очевидно, такое отождествление топологически эквивалентно отождествлению диаметрально противоположных точек сферы (которой гомеоморфна поверхность $\sigma + \sigma^*$), в результате чего получается поверхность, гомеоморфная проективной плоскости или поверхности Бойя. Равносильный результат мы уже получили в п. 44.

Следует заметить, что все точки разветвления поверхности $\sigma + \sigma^*$ топологически ничем не отличаются от любой другой (метрически регулярной) её точки; вокруг них поверхность укладывается складками потому, что на неё здесь затрачено материала больше, чем в обычной точке.

48. Отметим некоторые особенности расположения поверхностей отображения σ и $\sigma + \sigma^*$.

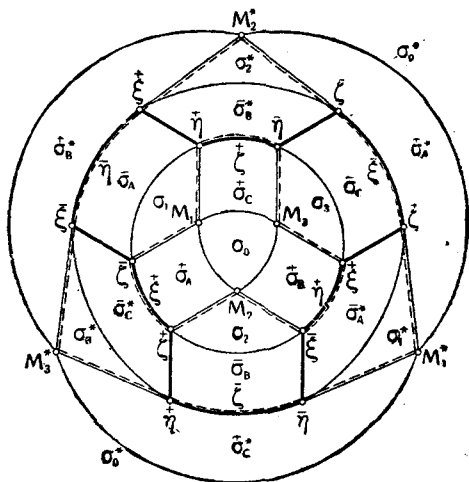
Пусть данную точку x единичной сферы S покрывают $P(\varphi, x)$ положительных (в смысле п. 18) листов и $N(\varphi, x)$ отрицательных листов поверхности отображения φ . Введя ещё две функции

$$a(\varphi, x) = P(\varphi, x) - N(\varphi, x), \quad A(\varphi, x) = P(\varphi, x) + N(\varphi, x), \quad (6)$$

назовём $P(\varphi, x)$ положительным, $N(\varphi, x)$ отрицательным, $a(\varphi, x)$ алгебраическим и $A(\varphi, x)$ арифметическим покрытиями точки x сферы поверхностью φ . Функции P , N , a и A непрерывны во всех внутренних точках тех участков сферы, которые отмечены на фиг. 20. Из этой фигуры и из фиг. 23—31 видно, что σ покрывает участок v_3 листами $\bar{\sigma}_B$, $\bar{\sigma}_C$, $\bar{\sigma}_C^+$ и $\bar{\sigma}_A$. Понимая под x_v любую точку участка v_3 , имеем

$$P(\sigma, x_v) = 1, \quad N(\sigma, x_v) = 3, \quad a(\sigma, x_v) = -2, \quad A(\sigma, x_v) = 4. \quad (7)$$

Можно представить себе, что при наложении на сферу два листа разных знаков уничтожают друг друга во всех точках, где они налегают друг на друга, листы же одинаковых знаков не взаимодействуют друг с другом. Тогда алгебраическое покрытие данной точки показывает, сколько листов и какого знака осталось над этой точкой в результате такого их взаимодействия. Это может быть принято за определение понятия алгебраического покрытия.



Фиг. 33.

Данные покрытий для поверхностей σ и $\sigma + \sigma^*$ приведены в табл. 2. В силу симметрии третьего порядка обеих поверхностей, достаточно привести данные только для четырёх различных октантов и для одного из симметричных участков каждого из этих октантов. Поверхность $\sigma + \sigma^*$ обладает ещё центральной симметрией, следовательно, имеет только два различных вида октантов. Таким образом вся таблица сохраняет силу при циклической перестановке знаков и индексов, а таблица для $\sigma + \sigma^*$ — ещё и при замене всюду знаков плюс и минус на обратные и одновременном введении звёздочек у всех букв. На фиг. 32 указаны цифрами арифметические покрытия всех участков сферы поверхностью $\sigma + \sigma^*$.

Таблица 2

Поверх- ность	Участки сферы Покрывтия	(---)		(+-)				(-++)	(+++)
		ρ	ν_3	δ_3	τ_3	ϑ_3	$\gamma_3 + \alpha_1$		
σ	$P(\sigma, x)$	1	1	2	1	1	1	2	3
	$N(\sigma, x)$	3	3	2	1	1	1	1	0
	$A(\sigma, x)$	4		4	2			3	3
	$a(\sigma, x)$	-2		0				1	3
$\sigma + \sigma^*$	$A(\sigma + \sigma^*, x)$	7		7	5				
	$a(\sigma + \sigma^*, x)$	1		1					

49. Замечательно, что алгебраическое покрытие $a(\sigma, x)$ распределяется строго по октантам и что покрытие $a(\sigma + \sigma^*, x)$ равномерно покрывает всю сферу: $a(\sigma + \sigma^*, x) \equiv 1$. Эта закономерность позволяет предполагать, что с функцией $a(\varphi, x)$ связан некоторый геометрический факт.

Условимся площадь всякого участка поверхности отображения, расположенной на сфере, обозначать тем же символом, что и сам участок. При этом, в силу конгруэнтности участков, обозначенных одинаковыми буквами, мы можем опускать индексы; например, площадь участка ν_i (фиг. 32) равна ν . Только площади участков, обозначенных буквой σ , придётся писать с индексами. Площадь октанта будем обозначать символом Δ ; очевидно, $\Delta = \frac{\pi}{2}$, т. е. равна $\frac{1}{8}$ площади сферы S . Кроме того, условимся ещё площади участка приписывать знак листа, содержащего этот участок. Так, площадь участка ν_1 равна $-\nu$, если ν_1 взято на листе σ_c (фиг. 32 и 23), и равна $+\nu$, если ν_1 взято на листе σ_+ .

Пусть теперь x есть внутренняя точка некоторого участка сферы, например, участка ν_i . Тогда число $a(\varphi, x)$ выражает суммарную площадь поверхности отображения φ , приходящуюся на единицу площади этого участка, или, что то же, суммарную площадь сферического отображения заданной поверхности (в нашем случае — поверхности Σ) на единицу площади этого участка («удельная» площадь сферического отображения).

Поэтому площадь отображения поверхности Σ , приходящаяся на весь участок v_s сферы, выразится интегралом

$$\iint_{v_s} a(\sigma, x) d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент поверхности единичной сферы S .

Согласно табл. 2

$$\iint_{v_s} a(\sigma, x) d\omega = \iint_{v_s} -2d\omega = -2v_s. \quad (9)$$

Как известно, интеграл полной кривизны поверхности Φ , взятый по этой поверхности, равен площади сферического отображения этой поверхности, если Φ двусторонняя. Если же поверхность Φ односторонняя, то он равен половине площади полного (двузначного; см. п. 2) сферического отображения поверхности³ или площади одной из симметричных «половин» отображения (см. там же), т. е. равен площади однозначного (исключая края) отображения поверхности, превращённой разрезами в двустороннюю; сам интеграл полной кривизны также берётся тогда по разрезанной поверхности. Следовательно, в нашем случае

$$\iint_{\Sigma} K do = \iint_{\sigma} \varepsilon d\omega = \frac{1}{2} \iint_{\sigma+\sigma^*} \varepsilon d\omega, \quad (10)$$

где do — элемент поверхности Σ , $d\omega$ — элемент площади единичной сферы S , а $\varepsilon = +1$ или -1 , когда интегрирование идёт, соответственно, по положительному или по отрицательному листу поверхности σ . Точки, где K двузначна, составляют множество меры нуль на самой поверхности Σ ; на поверхностях σ и $\sigma+\sigma^*$ соответствующие точки, а также точки, которым соответствует на Σ значение $K=0$, также составляют множество меры нуль (согласно п. 13).

Согласно определению функции $a(\varphi, x)$ (п. 48) мы можем написать:

$$\iint_{\sigma} \varepsilon d\omega = \iint_S a(\sigma, x) d\omega = \frac{1}{2} \iint_S a(\sigma+\sigma^*, x) d\omega. \quad (11)$$

Согласно табл. 2 и в силу симметрии имеем

$$\begin{aligned} \iint_S a(\sigma, x) d\omega &= \iint_{(- - -)} -2d\omega + 3 \iint_{(+ - -)} 0 \cdot d\omega + 3 \iint_{(- + +)} 1d\omega + \\ &+ \iint_{(+++)} 3d\omega = 4 \iint_{\Delta} d\omega = 4\Delta = 2\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Точно так же

$$\frac{1}{2} \iint_S a(\sigma+\sigma^*, x) d\omega = \frac{1}{2} \iint_S 1d\omega = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi. \quad (13)$$

Сопоставляя формулы (10) — (13), получаем

$$\iint_{\Sigma} K do = 2\pi. \quad (14)$$

Формула эта выведена путём подсчёта площади построенного нами сферического отображения. Она прекрасно согласуется с извест-

ной формулой Гаусса-Бонне для замкнутых поверхностей:

$$\iint_{\Phi} K do = 2\pi(3-q), \quad (15)$$

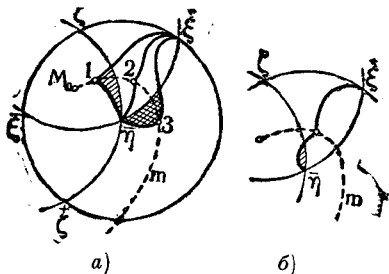
где q — риманово число связности поверхности Φ (см. ⁵, стр. 179). Формула верна и для односторонних поверхностей². Следовательно, если Φ — поверхность Боя, то левые части (14) и (15) совпадают, а для поверхности Боя $q=2$, и в правой части (15) получается 2π .

Этот результат подтверждает правильность выполненного нами построения сферического отображения поверхности Боя.

§ 10. Исследование ограничений

В заключение рассмотрим все ограничения, введенные нами при построении поверхности Боя в §§ 3, 6 и 7.

50. В п. 35 мы наложили условия на кривую $PM'_cM''_cK$ — гладкость её в точках M'_c и M''_c (следовательно, и всюду) — и положение точки R . Но дуга $M'_cM''_c$ этой кривой отобразилась в дугу $M_3R'M_1$ гладкого



Фиг. 34.

прямого соединения листов σ_c и σ_0 . Все точки этой дуги, кроме концов M_3 и M_1 , суть регулярные точки поверхности σ , и поэтому сама дуга ничем не отличается от любой другой соседней с ней дуги на $\sigma_c + \sigma_0$, соединяющей точки M_3 и M_1 . Следовательно, указанные условия, мож-

жет быть, затрудняющие построение сглаживающей поверхности λ , можно отбросить, и это существенно не отразится на поверхности σ .

51. В п. 26 мы наложили ограничения на угол φ . Рассмотрим изменения, которые могут произойти, если принять другие значения для угла φ .

Пусть снова плоскость μ (п. 26) катится от исходного положения по трубкам B и C в одном направлении. При этом точка M'_c движется по трубке C , проходя через положение, показанное на фиг. 17. Отображение её — точка M_3 — в это время опишет кривую m (фиг. 34, а), идущую из центра M_0 октанта (— — —) через центр октанта (+ — +) на бесконечность. На фиг. 34, а отмечены три характерных последовательных положения 1, 2, 3 точки M_3 на кривой m и соответствующие положения сходящихся в ней складок $\bar{\eta}M_3$ и $M_3^{\dagger}$.

Если сравнить линию $\bar{\eta}I\xi^{\dagger}$ с аналогичной линией $\bar{\eta}M_3^{\dagger}$ на фиг. 22, то видно, что в случае 1 поверхность $\sigma_c + \sigma_3$ перекрывает сама себя на участке, который на фиг. 34, а заштрихован в одном направлении.

Этот же участок покрывается и листом σ_c при сшивании поверхности σ_c (ср. фиг. 21). Этих покрытий не было у нашей поверхности σ . Арифметические покрытия этого участка будут: $A(\sigma, x) = 6$, $A(\sigma + \sigma^*, x) = 9$ (то же — на симметричных с ним участках). Таких больших покрытий не давали рассмотренные нами раньше поверхности (табл. 2), которые соответствуют положению 2 на фиг. 34, а (ср. фиг. 22).

Однако то же может произойти и в случае 2 (фиг. 34, б), если только точка Q (фиг. 17) будет лежать не на дуге EE_1 , а на дуге JE

параболической линии. Заштрихованный на фиг. 34, б участок будет иметь $A(\sigma, x) = 6$ и $A(\sigma + \sigma^*, x) = 9$.

В случае же 3, наоборот, у листов $\bar{\sigma}_c + \sigma_c$ и $\bar{\sigma}_c$ не будет участка, дважды заштрихованного на фиг. 34, а, так что он покроется только один раз участком σ_c и будет иметь $A(\sigma, x) = 1$ и $A(\sigma + \sigma^*, x) = 4$ (таких малых покрытий нет в табл. 2).

Если угол φ ещё больше возрастает, то точка M_3 подходит к границе октанта $(+ - +)$ или выходит в $(+ + +)$; при этом вообще значительно усложняется как строение поверхности σ , так и строение сглаживающей поверхности λ : возникают новые линии, где кривизна изменяет знак, появляются новые выпуклые участки и т. д. Этого мы не будем рассматривать подробно.

При всех этих изменениях остаются инвариантными только алгебраические покрытия $a(\sigma, x)$ и $a(\sigma + \sigma^*, x)$.

Сравнивая положения 1, 2 и 3 точки M_3 , мы видим, что самым «экономным» в смысле арифметического покрытия является случай 3: на поверхность σ идёт меньше всего материала. Но зато в этом случае сглаживающая поверхность имеет наиболее длинную границу, и это затрудняет вообще её построение. В случае 1, наоборот, сглаживающая поверхность невелика, но усложняется поверхность σ . Поэтому случай 2 мы можем назвать оптимальным в сравнении со случаями 1 и 3. В этом же случае наблюдается и наибольшее сходство построенной поверхности Бойя с её гипсовой моделью.

52. Выбор специальной формы трубок (§ 3) носит чисто вспомогательный характер, делая все рассуждения более определёнными и удобными. Сферическое отображение, например, трубки C , построенной и деформированной при тех общих предположениях, которые делает Бой (у нас пп. 3 и 6), полностью совпадает с отображением нашей трубки C , т. е. с поверхностью σ_c (§ 4).

В этом легко убедиться, если обратить внимание на то, что трубка Бойя, всюду гладкая, кроме точек ребра, имеет плоскую параболическую линию, аналогичную нашей $JEE_1 \dots$ (фиг. 17), параллельную координатной плоскости; отображения же краёв и берегов ребра совпадают с таковыми нашей трубки.

При построении сглаживающей поверхности мы нигде существенно не пользовались специальной формой трубок. Поэтому точно так же можно построить сглаживающую поверхность и для бойевских трубок; точки P , K и L при этом совпадут с началом координат, но это не имеет никакого значения.

Если ещё обобщить форму трубок, предположив, что их параболические линии не лежат каждая в одной касательной плоскости, то поверхности σ_A , σ_B и σ_C значительно усложнятся: вблизи точек разветвления ξ , η , ζ появятся новые складки и листы поверхности, и поверхность σ усложнится.

53. Сглаживающую поверхность, как указано в п. 24, можно построить весьма различными способами. Прежде чем остановиться на способе, изложенном в § 6, было испробовано несколько других, иногда более простых способов, но все они привели к поверхности σ , более сложной как по количеству, так и по расположению листов и складок.

* * *

Можно предполагать, что мы получили одно из наиболее простых, а потому, и наилучше обозримых расположений сферического отображения симметричной поверхности Бойя.

Вместе с тем построено отображение всей проективной плоскости на самую себя, о котором говорят Гильберт и Кон-Фоссен (см. ⁴, стр. 280), и на гауссову плоскость.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. Boy, Ueber die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche, Göttinger Nachrichten, 1901, Heft I.
2. W. Boy, Ueber die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Math. Annalen, 1903, т. 57, стр. 151—184 (обе работы содержатся также в отдельном издании серии Гёттингенских диссертаций).
3. В. Львовский, О построении замкнутых односторонних поверхностей с замкнутыми двойными линиями «Матем. сборник», 1925, т. XXXII, вып. 3, стр. 353—356.
4. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, ОНТИ, 1936.
5. Б. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935, т. I.