С.Н. Зиненко

Математический анализ

Дифференцирование функций одной переменной

(теория к задачам)

2016

<u>*Дифференцирование функций*</u>

Производной *функции* $y = f(x)$ *в точке* x *называется* ***конечный*** *предел*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой*** *в точке* x, *если ее приращение допускает выделение линейной главной части, называемой* ***дифференциалом*** *функции*

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \underset{\Delta x \to 0}{=} \underset{\substack{\| \\ dy = df(x)}}{k\,\Delta x} + o(\Delta x)$$

Замечание. *В случае простейшей линейной функции* $y = kx$ *ее приращение и дифференциал* $\Delta y = dy = k\,\Delta x$ *одно и то же (поэтому, дифференциалом аргумента* $dx = \Delta x$ *называют его приращение). В общем случае, дифференцируемая функция локально почти линейна: ее изменение почти прямо пропорционально* $\Delta y \approx dy = k\,\Delta x$ *изменению аргумента.*

Между ***производной*** *и* ***дифференциалом*** *функции имеется простая связь*

$$k = y' = f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad dy = y'dx \qquad \Leftrightarrow \qquad df(x) = f'(x)dx$$

Теорема *(правила дифференцирования)*

Пусть

1) $u = f(x), \quad v = g(x)$

$\Rightarrow$

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	$(u+v)' = u' + v'$	$d(u+v) = du + dv$
2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$	$(u-v)' = u' - v'$	$d(u-v) = du - dv$
3) $(f(x) \times g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$
4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$
5) $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$u(v)' = u'(v) \cdot v'$	$du(v) = u'(v)dv$

<u>*Таблица*</u>

производных элементарных функций

$(e^x)' = e^x$ $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Замечание. *Непосредственно из определения производной вытекают правила дифференцирования, связанные с константами* $\boldsymbol{c} = const$

$$\boldsymbol{c}' = 0, \qquad (\boldsymbol{c} \cdot f(x))' = \boldsymbol{c} \cdot f'(x)$$

6. Производная и дифференциал функции

Отметим некоторые полезные при дифференцировании советы

- *на постоянное слагаемое “не обращаем внимания” (производная все равно* $=0$*)*

$$\big(f(x)+c\big)' = \big(f(x) + \;\big)' = f'(x)$$

- *постоянный множитель, не задумываясь, выносим за знак производной*

$$\big(c\cdot f(x)\big)' = c\cdot f'(x)$$

- *любой корень преобразуем в степень с дробным показателем*

$$\sqrt[n]{f(x)} = \big(f(x)\big)^{\frac{1}{n}}$$

- *дробь с постоянным числителем преобразуем в степень знаменателя с отрицательным показателем*

$$\frac{c}{f(x)} = c\cdot\big(f(x)\big)^{-1}$$

- *к степенно-показательной функции применяем преобразование “$e^{\text{в степени логарифм}}$„*

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

- *нахождение производной и дифференциала с формальной точки зрения различаются только обозначением: производная - $\{\,'\,\}$ после, дифференциал - $\{\,\boldsymbol{d}\,\}$ перед функцией*

7. Физический и геометрический смысл производной и дифференциала

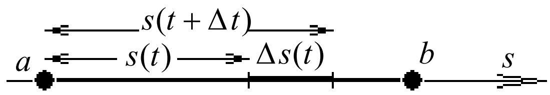
Физический *смысл* ***производной – скорость*** *изменения функции по сравнению с аргументом.*

За промежуток времени $\left[\, t,\ t + \Delta t \,\right]$ *точка пройдет расстояние* $\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t)$ *со средней скоростью*

$$v_{cp} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$$

Скоростью v *в момент времени* t *называется*

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

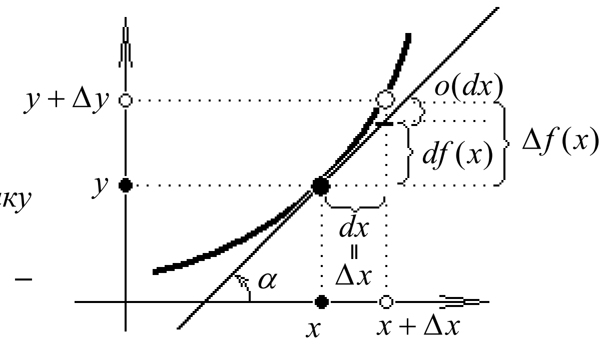


Геометрический *смысл* ***производной***

$$\boxed{f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha}$$

(тангенс угла между касательной к графику функции $f(x)$ *в точке* x *и осью* Ox*).*

Геометрический ***смысл*** *дифференциала –* ***приращение вдоль касательной.***



8. Производные и дифференциалы высших порядков

Формула Лейбница представляет собой распространение формулы $1^{\underline{ой}}$ *производной на производные* $n^{\underline{го}}$ *порядка произведения двух сомножителей*

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \, v^{(n-k)} = u^{(0)} \, v^{(n)} + n \, u^{(1)} \, v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \, u^{(2)} \, v^{(n-2)} + \ldots \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

На практике этой формулой удобно пользоваться в случае, когда один из сомножителей полином, имеющий лишь конечное число отличных от нуля производных, а у другого производные высокого порядка легко находятся.

9. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей

$$\boxed{\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\left\{\frac{0}{0}\right\},\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\right]=\lim_{x\to\omega}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Применение правила Лопиталя, совместно с возможностью замены функций на им эквивалентные в $\{\times\}$, $\{/\}$, *позволяет находить самые сложные пределы*

10. Формула Тейлора

*Формула **Тейлора** является дальнейшим обобщением простейшей формулы, связывающей приращение функции с ее первым дифференциалом на случай* $\exists\, d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$

$$\boxed{\Delta f(x_0) = \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + o(\Delta x^n)}$$

откуда вытекает геометрический смысл высших дифференциалов (как слагаемых, вносящих вклад в полное приращение функции все более высокого порядка малости)

Формуле *Тейлора* ***можно придать иной вид***

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}$$

который можно воспринимать как источник приближенного вычисления функции в “соседней” точке $x = x_0 + \Delta x$ *при малых приращениях аргумента* $\Delta x = x - x_0$

Первое (начальное) слагаемое формулы Тейлора, отличное от нуля (см. занятие 4.)

$$f(x) = a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^k, \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0, \qquad f(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

вносящее основной (главный) вклад в функцию, очевидно, и есть ее главная часть.

Применение формулы Тейлора при нахождении пределов вида (сравнить стр. 6)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to x_0}\frac{a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^k}{b_l(x-x_0)^l + o(x-x_0)^l} = \left[\begin{array}{ll} \infty & , \ k<l \\ \dfrac{a_k}{b_k} & , \ k=l \\ 0 & , \ k>l \end{array}\right.$$

является старым правилом замены функций на главные части (им эквивалентные) в $\{\diagup\}$ *и теоретически снимает все проблемы. Однако само нахождение первого слагаемого* $\neq 0$ *по существу является замаскированным применением* k (l) *раз правила Лопиталя.*

Приведем наиболее важные разложения функций по формуле ***Тейлора*** *при* $x_0 = 0$ *(формула* ***Маклорена****), являющихся дальнейшим развитием таблицы их главных частей*

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = +\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Замечание*. Полезно придать последнему разложению вид*

$$(1+x)^\alpha = C_\alpha^0 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + o(x^n), \qquad C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

и сравнить с биномом Ньютона

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots + x^n$$

11. Графики функций в декартовых координатах

Теорема *(об асимптотах)*

наклонная *прямая* $y = kx + b$ - ***асимптота*** *графика функции* $f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b \end{array}\right.$

вертикальная *прямая* $x = a$ - ***асимптота*** *графика функции* $f(x)$ *при* $x \to a \pm 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$

Теорема *(о монотонности)*

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right. \; x \in [\, a, b \,] \;\Leftrightarrow\; f'(x) = \left[\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array}\right. \; x \in [\, a, b \,]$$

Теорема *(о выпуклости)*

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} \cup \\ \cap \end{array}\right. \; x \in [\, a, b \,] \;\Leftrightarrow\; f'(x) = \left[\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right. \; x \in [\, a, b \,] \;\Leftrightarrow\; f''(x) = \left[\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array}\right. \; x \in [\, a, b \,]$$

Теорема *(об экстремуме)*

необходимое условие *достаточное условие*

$$x_0 = \left[\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array}\right. \Rightarrow f'(x_0) = 0; \quad f'(x) = \left[\begin{array}{l} \{+\} \xrightarrow[x_0]{} \{-\} \\ \{-\} \xrightarrow[x_0]{} \{+\} \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = \left[\begin{array}{l} \{\nearrow\} \xrightarrow[x_0]{} \{\searrow\} \\ \{\searrow\} \xrightarrow[x_0]{} \{\nearrow\} \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \left[\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array}\right.$$

Схема построения графиков функций, заданных явно:

1) *находим область определения* $y = f(x)$

   выясняем четность / нечетность $f(-x) \stackrel{?}{=} \pm f(x)$

   периодичность $f(x + T) \stackrel{?}{=} f(x)$

   определяем точки пересечения с осями координат

2) *исследуем точки разрыва (вертикальные асимптоты ?)*
   поведение при $x \to \pm\infty$ *(наклонные асимптоты ?)*
   строим эскиз графика

3) $f'(x) = \,?$ $\Rightarrow$ *находим интервалы монотонности и точки экстремума*
   уточняем эскиз графика

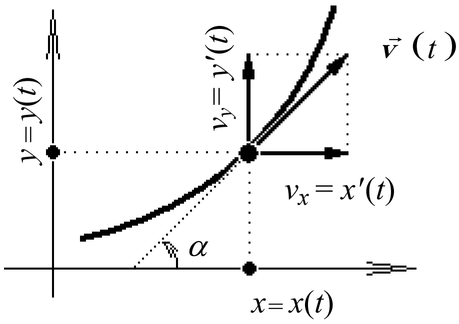
4) $f''(x) = \,?$ $\Rightarrow$ *находим интервалы выпуклости и точки перегиба*
   получаем итоговый график

12. Параметрически заданные кривые

Кривую, заданную в параметрической форме,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\,\alpha, \beta\,]$$

удобно интерпретировать как траекторию движения точки, воспринимая параметр t *как время, а функции* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *как уравнения движения проекций по осям координат, перемещающихся со скоростями* $v_x = x'(t)$, $v_y = y'(t)$.



Отсюда вытекает, что $y'_x(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \quad \Rightarrow \quad y''_{xx}(x) = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{\left(\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)'_t}{x'_t(t)}$, *где* $x = x(t)$

Схема построения кривой, заданной параметрически:

1) *находим общую область определения* $x = x(t)$, $y = y(t)$

   проверяем общую четность / нечетность $x(-t) \overset{?}{=} \pm x(t)$, $y(-t) \overset{?}{=} \pm y(t)$

   выясняем общую периодичность $x(t+T) \overset{?}{=} x(t)$, $y(t+T) \overset{?}{=} y(t)$

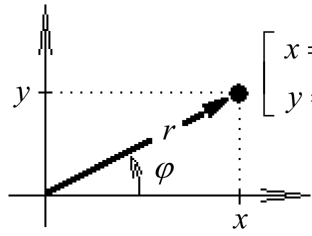
   определяем точки пересечения с осями координат

2) $x'_t = ?$, $y'_t = ?$ $\Rightarrow$ *находим интервалы монотонности и составляем таблицу изменений функций* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *(выясняем наличие асимптот) строим эскиз графика*

3) $y'_x = ?$ $\Rightarrow$ *изучаем поведение кривой в точках изменения монотонности функций уточняем эскиз графика*

4) $y''_{xx} = ?$ $\Rightarrow$ *выясняем выпуклость кривой получаем итоговый график*

13. Кривые в полярной системе координат



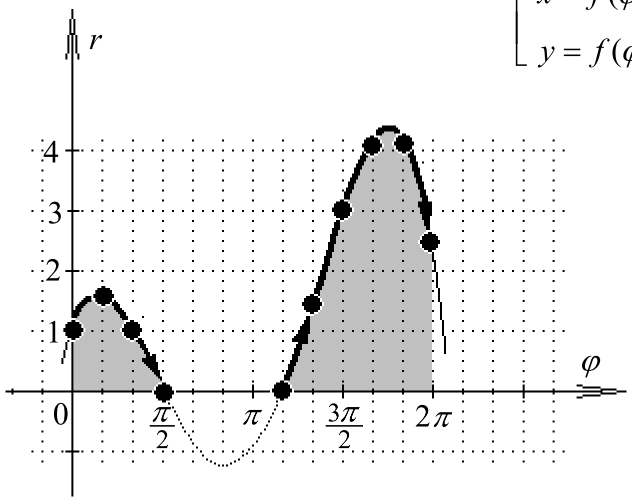
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

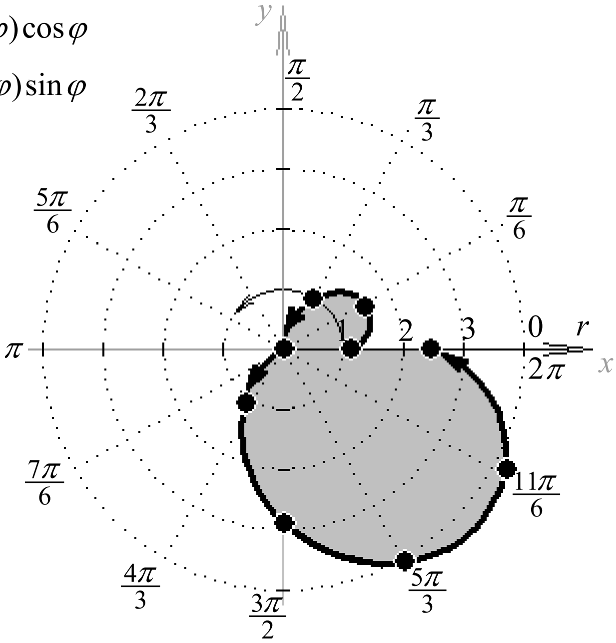
Определение декартовых (x, y) *и полярных* $(\varphi,\ r)$ *координат точки приведено на рисунке, откуда легко вытекает связь между ними*

Если график функции в декартовых координатах можно представить как траекторию движения точки по закону $r = f(\varphi)$ *вдоль вертикальной прямой* $\varphi = const$, *перемещающейся вправо с единичной скоростью, то график этой функции в полярных координатах удобно рассматривать как траекторию движения точки по закону* $r = f(\varphi)$ *вдоль луча* $\varphi = const$, *поворачивающегося против часовой стрелки с единичной угловой скоростью.*

Отметим, что из геометрического смысла полярного радиуса $r \geq 0$ *следует дополнительное (кроме требования* $\exists\, f(\varphi)$*) ограничение на полярные углы:* $f(\varphi) \geq 0$. *Для уточнения поведения кривой в полярных координатах в характерных точках (угол наклона касательной, выяснения наличия асимптот и т.п.) полезно помнить связь с декартовыми координатами* (x, y), *негласно присутствующими как фон на заднем плане, что позволяет получить параметрические уравнения кривой*

$$\begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$



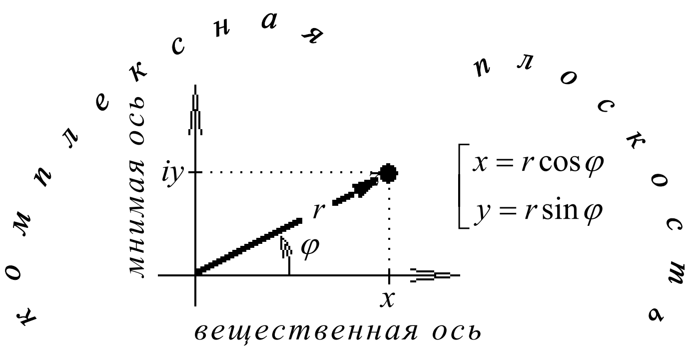


14. Комплексные числа

Комплексные числа являются расширением множества вещественных чисел с сохранением всех свойств арифметических операций путем добавлением нового числа – мнимой единицы

$$\boxed{i \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1}$$

Геометрической интерпретацией комплексных чисел z является точка на плоскости (радиус-вектор точки)



Декартовы координаты точки (x, y) *называются вещественной* $x = \mathrm{Re}\, z$ *и мнимой* $y = \mathrm{Im}\, z$ *частью комплексного числа*

$z = x + iy$ - ***алгебраическая*** *форма*

Полярные координаты точки (φ, r) *называются аргументом* $\varphi = \arg z$ *и модулем* $r = |z|$ *комплексного числа*

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - ***тригонометрическая*** *форма*

Арифметические операции $\{+\}$, $\{-\}$, $\{\times\}$, $\{/\}$ *над комплексными числами в алгебраической форме сводятся к привычному раскрытию скобок и приведению подобных*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + iy_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot iy_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \overline{z}_2}{z_2 \times \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 - iy_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot iy_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Замечание. *Комплексное число* $\overline{z} = x - iy$ *называется комплексно* ***сопряженным*** *к* $z = x + iy$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2$$

Операции $\{\times\}$, $\{/\}$ *удобней проводить над числами в тригонометрической форме*

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) \\ z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) \end{array}\right., \qquad \Rightarrow \qquad z_1 \overset{\times}{/} z_2 = r_1 \overset{\times}{/} r_2 \Big(\cos\left(\varphi_1 \pm \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 \pm \varphi_2\right)\Big)$$

В частности,

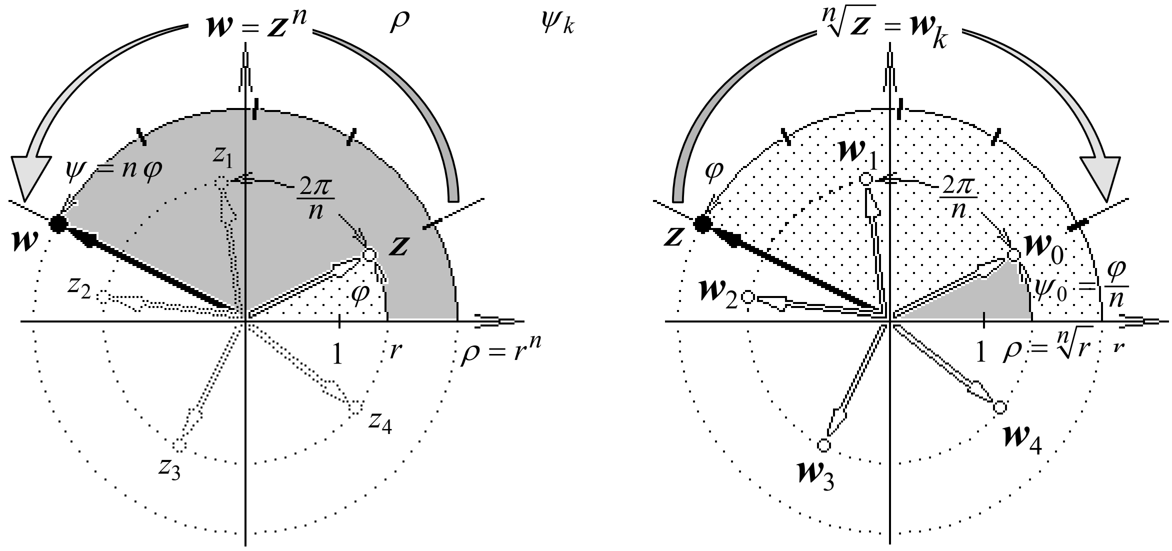
$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad \rho = r^n, \quad \psi = n\varphi$$

Нетрудно видеть, что числа z_k, *аргументы которых* $\varphi_k = \varphi + \frac{2\pi}{n}k$ *отличаются на величину кратную* $\frac{2\pi}{n}$, *имеют одну и ту же степень*

$$z_k{}^n = r^n\left(\cos n\varphi_k + i\sin n\varphi_k\right) = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = z_0{}^n = w$$

Отсюда вытекает, что $\exists\, n$ *различных комплексных корней* $n^{\underline{ой}}$ *степени*

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{\rho}\Big(\cos\Big(\underbrace{\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k}_{\psi_k}\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\Big)\Big), \quad k = 0, \ \dots, \ (n-1)$$



Другими словами, полином $x^n - a = 0$ *имеет* n *комплексных корней (причем различных)*

В общем случае, полином $n^{\underline{ой}}$ *степени*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

имеет n ***комплексных*** *корней с учетом их кратности (повторений), так что имеет место разложение полинома на простейшие комплексные множители*

$$P_n(x) = a_n\left(x - z_1\right)\cdot\left(x - z_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - z_n\right)$$

Если коэффициенты $a_k = \overline{a}_k$ ***вещественные****, то комплексные корни можно сгруппировать в пары комплексно сопряженных чисел* z_0, $\overline{z}_0$, *объединив комплексные простейшие множители в вещественные квадратные трехчлены с дискриминантом* $D < 0$

$$\left(x - z_0\right)\left(x - \overline{z}_0\right) = x^2 - (z_0 + \overline{z}_0)\cdot x + z_0\overline{z}_0 = x^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_0\cdot x + \left|z_0\right|^2 = x^2 - 2px + q$$

Отсюда вытекает разложение ***вещественного*** *полинома на простейшие* ***вещественные*** *множители по вещественным* $x_1, x_2, \dots$ *и парам комплексно сопряженных* $z_1, \overline{z}_1$, $z_2, \overline{z}_2$, ... *корней кратности* $k_1, k_2, \ \dots$, $l_1, l_2, \ \dots$ *соответственно*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n\left(x - x_1\right)^{k_1}\cdot\left(\ \dots\ \right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2 - 2p_1x + q_1\right)^{l_1}\cdot\left(\ \dots\ \right)^{l_2}\cdot\ldots$$

15. Элементарные функции комплексного переменного

Показательная *функция комплексного переменного*

$$e^{z} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n} \quad \Rightarrow \quad e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^{n} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

порождает ***тригонометрические*** *и* ***гиперболические*** *функции*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \Big| \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

из определения которых вытекает простая связь между ними

$$\cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \sin iz = i\operatorname{sh} z \qquad \Big| \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z \qquad \operatorname{sh} iz = i\sin z$$

объясняющая “удивительные вещественные совпадения” в свойствах этих функций

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x\,\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x\,\operatorname{sh} y$
$\ldots$	$\ldots$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
$\ldots$	$\ldots$
$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c, \quad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$