Глава III.

Изслѣдованіе періодическихъ движеній.

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ періодическими коэффиціентами.

46. Разсмотримъ систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n, \qquad (s=1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

въ предположеніи, что всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$ суть періодическія функціи t съ однимъ и тѣмъ же вещественнымъ періодомъ ω, и что функціи эти остаются опредѣленными и непрерывными для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Разсматривая только такія значенія послѣдняго, допустимъ, что для нашей системы найдено n независимыхъ рѣшеній

$$\left.\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \dots, & x_{n1} \\ x_{12}, & x_{22}, & \dots, & x_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}, & x_{2n}, & \dots, & x_{nn}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

для обозначенія которыхъ удерживаемъ прежнее условіе, чтобы первый значекъ при буквѣ x относился къ искомой функціи, второй — къ рѣшенію.

Желая указать на значеніе, даваемое независимой перемѣнной, вмѣсто x_{sj} будемъ писать $x_{sj}(t)$.

Въ этомъ предположеніи, группа функцій

$$x_{1j}(t+\omega), \quad x_{2j}(t+\omega), \quad \dots, \quad x_{nj}(t+\omega),$$

соотвѣтствующая какому угодно j, взятому изъ ряда $1, 2, \dots, n$, по свойству разсматриваемой системы уравненій, представитъ также нѣкоторое рѣшеніе ея.

Поэтому, означая черезъ a_{ij} нѣкоторыя постоянныя, будемъ имѣть:

$$x_{sj}(t+\omega) = a_{1j}\,x_{s1}(t) + a_{2j}\,x_{s2}(t) + \dots + a_{nj}\,x_{sn}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

для всякаго s, взятаго изъ ряда $1, 2, \dots, n$.

При посредствѣ опредѣленныхъ такимъ образомъ постоянныхъ a_{ij} составляемъ слѣдующее алгебраическое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

которое будетъ $n^{\text{ой}}$ степени относительно неизвѣстной ϱ.

Это уравненіе, играющее весьма важную роль въ теоріи разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій, будемъ называть *характеристичнымъ*, соотвѣтствующимъ періоду ω *). Такъ же будемъ называть и опредѣлитель, представляющій первую его часть.

Если бы вмѣсто (2) мы разсматривали какую-либо другую систему n независимыхъ рѣшеній, то получили бы вообще другія величины для постоянныхъ a_{ij}. Но коэффиціенты A_s при различныхъ степеняхъ ϱ въ характеристичномъ уравненіи, приведенномъ къ виду

$$\varrho^n + A_1\varrho^{n-1} + \dots + A_{n-1}\varrho + A_n = 0,$$

остались бы прежними.

Въ этомъ состоитъ одно изъ основныхъ свойствъ этихъ коэффиціентовъ, въ силу котораго они могутъ быть названы инваріантами.

Для коэффиціента A_n свойство это обнаруживается уже изъ выраженія, которое можно найти для него, пользуясь извѣстною формулой, дающею величину опредѣлителя, составленнаго изъ n независимыхъ рѣшеній системы (1).

Чтобы получить это выраженіе, означимъ опредѣлитель, составленный изъ функцій (2), черезъ $\triangle(t)$. Тогда названная формула доставитъ слѣдующее равенство:

$$\triangle(t+\omega) = \triangle(t)\,e^{\int_0^\omega \Sigma p_{ss}\,dt}.$$

А такъ какъ въ силу соотношеній (3) опредѣлитель $\triangle(t+\omega)$ представляется подъ видомъ произведенія изъ опредѣлителя $\triangle(t)$ на опредѣлитель величинъ a_{ij}, то написанное сейчасъ равенство приведется къ виду:

*) Можно разсматривать характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду $m\omega$, гдѣ m произвольное положительное или отрицательное цѣлое число.

Говоря о характеристичномъ уравненіи, соотвѣтствующемъ періоду ω, часто для сокращенія рѣчи не будемъ упоминать о періодѣ.

$$(-1)^n A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = e^{\int_0^\omega \sum p_{ss} dt} \tag{4}$$

Изъ этого равенства между прочимъ слѣдуетъ, что характеристичное уравненіе не можетъ имѣть равныхъ нулю корней.

Замѣтимъ, что если всѣ коэффиценты $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (1) суть вещественныя функціи, то всѣ коэффиценты A_s въ характеристичномъ уравненіи необходимо будутъ также вещественными. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ систему (2) всегда можно выбрать такъ, чтобы въ ней всѣ функціи были вещественными. А тогда такими же выйдутъ и всѣ постоянныя a_{ij}.

Изъ формулы (4), которою опредѣляется произведеніе корней характеристичнаго уравненія, видно, что въ этомъ случаѣ произведеніе это всегда будетъ положительнымъ, и что слѣдовательно, если характеристичное уравненіе имѣетъ отрицательные корни, то число такихъ корней всегда будетъ четнымъ.

Извѣстно, что всякому корню ϱ характеристичнаго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе системы (1) вида:

$$x_1 = f_1(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad x_2 = f_2(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad \dots, \quad x_n = f_n(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \; ^{*)} \tag{5}$$

гдѣ всѣ f_s суть періодическія функціи t съ періодомъ ω (между которыми по крайней мѣрѣ одна не равна нулю тожественно). Поэтому, если характеристичное уравненіе не имѣетъ кратныхъ корней, то разсматривая всѣ его корни, получимъ n рѣшеній такого вида, и рѣшенія эти будутъ независимыми.

Въ случаѣ существованія кратныхъ корней система (1) можетъ допускать рѣшенія болѣе общаго вида. А именно, кратному корню ϱ могутъ соотвѣтствовать рѣшенія, для которыхъ функціи f_s въ уравненіяхъ (5) будутъ представляться выраженіями

$$f_s(t) = \varphi_{s0}(t) + t\varphi_{s1}(t) + t^2\varphi_{s2}(t) + \dots + t^m\varphi_{sm}(t),$$

при условіи, что всѣ φ_{sj} суть періодическія функціи t. **)

Если въ число возможныхъ значеній для m включить и нуль, то для каждаго μ-кратнаго корня найдется μ независимыхъ рѣшеній такого вида.

Число m ни въ одномъ изъ нихъ не будетъ превосходить $\mu - 1$ (мы предполагаемъ, что изъ функцій φ_{sm} по крайней мѣрѣ одна не равна нулю тожественно), но можетъ достигать этого предѣла, и если разсматриваемый корень ϱ не обращаетъ въ

*) Подъ $\varrho^{\frac{t}{\omega}}$ разумѣемъ функцію $e^{\frac{t}{\omega}\log\varrho}$, соотвѣтствующую нѣкоторому опредѣленію логариѳма $\log\varrho$.

**) Говоря о періодическихъ функціяхъ и не упоминая о періодѣ, будемъ подразумѣвать, что рѣчь идетъ о функціяхъ съ періодомъ ω.

нуль по крайней мѣрѣ одного изъ первыхъ миноровъ характеристичнаго опредѣлителя, то для него всегда найдется рѣшеніе, въ которомъ будетъ $m=\mu-1$.

Исходя изъ этого рѣшенія, можно получить всѣ остальныя, соотвѣтствующія тому же корню.

Дѣйствительно, если въ какомъ-либо рѣшеніи вида (5) всѣ функціи $f_s(t)$ замѣнимъ ихъ конечными разностями какого-либо порядка, соотвѣтствующими приращенію ω независимой перемѣнной t, то по свойству системы (1) получимъ для нея новое рѣшеніе. Поэтому, имѣя дѣло съ случаемъ, когда $m=\mu-1$, и разсматривая всѣ разности отъ перваго до $\mu-1^{\text{аго}}$ порядка включительно, выведемъ такимъ путемъ изъ нашего рѣшенія еще $\mu-1$ рѣшеній, и эти послѣднія вмѣстѣ съ нашимъ составятъ систему μ рѣшеній, которыя, очевидно, будутъ независимыми.

Вмѣсто указаннаго сейчасъ способа полученія новыхъ рѣшеній изъ даннаго можно предложить другой. А именно, вмѣсто замѣны функцій $f_s(t)$ конечными разностями можно для той же цѣли замѣнять эти функціи выраженіями, приводящимися къ ихъ производнымъ по t, если величины φ_{sj} разсматриваются, какъ постоянныя. Что такимъ путемъ дѣйствительно будутъ получаться рѣшенія, это слѣдуетъ непосредственно изъ извѣстныхъ соотношеній между конечными разностями и производными различныхъ порядковъ.

Такимъ способомъ въ только-что указанномъ случаѣ для μ-кратнаго корня ϱ получимъ μ независимыхъ рѣшеній, если за исходное примемъ рѣшеніе, въ которомъ $m=\mu-1$.

Мы будемъ говорить, что въ этомъ случаѣ корню ϱ соотвѣтствуетъ одна группа рѣшеній.

Если бы кратный корень обращалъ въ нуль всѣ миноры характеристичнаго опредѣлителя до порядка $k-1$ включительно, не обращая въ нуль по крайней мѣрѣ одного изъ миноровъ $k^{\text{аго}}$ порядка, то ему соотвѣтствовало бы k группъ независимыхъ рѣшеній, которыя можно было бы составить тѣмъ или другимъ изъ указанныхъ способовъ, исходя изъ извѣстныхъ k рѣшеній.

Число k, никогда не превосходящее кратности μ разсматриваемаго корня, можетъ достигать этого предѣла, и тогда во всякомъ рѣшеніи, соотвѣтствующемъ этому корню, всѣ функціи f_s будутъ періодическими.

Всѣ указанныя здѣсь теоремы, выводящіяся изъ основныхъ предложеній теоріи подстановокъ, можно считать извѣстными *). При томъ доказательства ихъ не представляютъ ни малѣйшихъ затрудненій. Поэтому приводить здѣсь этихъ доказательствъ не будемъ.

Примѣчаніе.—Пусть

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \ldots, \quad \varrho_n$$

суть корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго періоду ω.

---

*) См. напр. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* (Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, tome 12, 1883).

Останавливаясь на какихъ-либо опредѣленіяхъ логариѳмовъ, положимъ

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\omega}\log\varrho_1, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\omega}\log\varrho_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_n = \frac{1}{\omega}\log\varrho_n.$$

Тогда вещественныя части величинъ

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2, \quad -\varkappa_n$$

представятъ характеристичныя числа системы уравненій (1).

Означая черезъ N нѣкоторое вещественное цѣлое число, получаемъ изъ (4) равенство

$$\sum \varkappa_s = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sum p_{ss}\,dt + N\,\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

изъ котораго обнаруживается, что вещественная часть величины $\sum\varkappa_s$ равна характеристичному числу функціи

$$e^{-\int\sum p_{ss}\,dt}.$$

Поэтому, согласно замѣченному въ параграфѣ 9$^{\text{омъ}}$, заключаемъ, что система уравненій (1) есть правильная.

47. Разсмотримъ систему уравненій

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + p_{2s}y_2 + \cdots + p_{ns}y_n = 0, \qquad (s=1,2,\ldots,n) \qquad \textbf{(6)}$$

присоединенную къ (1).

Пусть группа функцій

$$\begin{array}{l} y_{11},\ y_{21},\ \ldots,\ y_{n1}, \\ y_{12},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{1n},\ y_{2n},\ \ldots,\ y_{nn} \end{array}$$

представляетъ какую-либо систему n независимыхъ рѣшеній этихъ уравненій. Тогда группою функцій

$$\begin{array}{l} y_{11}x_1 + y_{21}x_2 + \cdots + y_{n1}x_n, \\ y_{12}x_1 + y_{22}x_2 + \cdots + y_{n2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{1n}x_1 + y_{2n}x_2 + \cdots + y_{nn}x_n \end{array}$$

опредѣлится нѣкоторая система n независимыхъ интеграловъ для уравненій (1).

Пусть

$$\frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2}, \ \ldots, \ \frac{1}{\varrho_k} \tag{7}$$

суть всѣ корни характеристичнаго уравненія системы (6) въ предположеніи, что каждый кратный корень встрѣчается въ ряду чиселъ (7) столько разъ, сколько соотвѣтствуетъ ему группъ рѣшеній. Тогда каждому изъ чиселъ ϱ_s можно будетъ поставить въ соотвѣтствіе по одной группѣ рѣшеній такъ, чтобы всѣ эти рѣшенія были независимыми.

Въ этомъ предположеніи допустимъ, что n_s представляетъ число рѣшеній въ группѣ, соотвѣтствующей числу ϱ_s. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ будутъ, конечно, удовлетворять условію:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Принимая за величины $y_{s\sigma}$ функціи, входящія въ составъ названныхъ группъ, и при составленіи послѣднихъ останавливаясь на второмъ изъ указанныхъ выше способовъ, для числа ϱ_s найдемъ n_s независимыхъ интеграловъ системы (1) вида:

$$\left.\begin{array}{c}\left(z_1^{(s)}\dfrac{t^m}{m!} + z_2^{(s)}\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + z_m^{(s)} t + z_{m+1}^{(s)}\right)\varrho_s^{-\frac{t}{\omega}}, \\ (m = 0, 1, 2, \ldots, n_s - 1)\end{array}\right\} \tag{8}$$

гдѣ всѣ $z_j^{(s)}$ означаютъ нѣкоторыя линейныя формы величинъ x_σ съ періодическими коэффиціентами.

Разсматривая совокупность всѣхъ k группъ, получимъ для системы (1) n независимыхъ интеграловъ такого вида.

Въ эти интегралы перемѣнныя x_σ входятъ только при посредствѣ линейныхъ формъ $z_j^{(s)}$, число которыхъ равно числу всѣхъ интеграловъ. Поэтому, если послѣдніе независимы, то такими же будутъ и формы $z_j^{(s)}$. Эти формы можно будетъ, слѣдовательно, принять за новыя неизвѣстныя функціи вмѣсто $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Такимъ путемъ, дѣлая

$$\varkappa_s = \frac{1}{\omega}\log\varrho_s, \quad \varrho_s^{-\frac{t}{\omega}} = e^{-\varkappa_s t},$$

приходимъ къ слѣдующей системѣ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1^{(s)}}{dt} &= \varkappa_s z_1^{(s)}, \\ \frac{dz_j^{(s)}}{dt} &= \varkappa_s z_j^{(s)} - z_{j-1}^{(s)}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} j = 2, 3, \ldots, n_s \\ s = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}\right\} \tag{9}$$

которой, очевидно, должны удовлетворять величины $z_j^{(s)}$ по самому способу, какимъ онѣ входятъ въ интегралы (8).

Система (1) преобразована, слѣдовательно, въ систему съ постоянными коэффиціентами. При томъ преобразованіе выполнено посредствомъ подстановки, удовлетворяющей всѣмъ условіямъ параграфа 10$^{\underline{го}}$.

Дѣйствительно, чтобы установить это въ разсматриваемомъ случаѣ, очевидно, достаточно только показать, что величина, обратная функціональному опредѣлителю, составленному изъ частныхъ производныхъ функцій $z_j^{(s)}$ по перемѣннымъ x_σ, есть ограниченная функція t. А въ послѣднемъ убѣждаемся, замѣчая, что названный опредѣлитель, представляющій произведеніе изъ функціи

$$e^{(n_1\varkappa_1+n_2\varkappa_2+\ldots+n_k\varkappa_k)t}$$

на функціональный опредѣлитель интеграловъ (8), можетъ отличаться только множителемъ вида

$$Ce^{\frac{2m\pi}{\omega}it}$$

(гдѣ $i=\sqrt{-1}$, m вещественное цѣлое число и C нѣкоторая постоянная) отъ функціи

$$e^{\frac{t}{\omega}\int\limits_0^\omega \Sigma p_{ss}dt-\int\limits_0^t \Sigma p_{ss}dt}.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что система (1) есть приводимая.

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ разсмотрѣнія ея преобразованія (9) выводимъ, что величины ϱ_s суть корни характеристичнаго уравненія этой системы *), и слѣдовательно получаемъ теорему, что *корни характеристичнаго уравненія присоединенной системы суть обратныя величины корнямъ характеристичнаго уравненія данной.*

Допустимъ, что въ системѣ (1) коэффиціенты $p_{s\sigma}$ суть вещественныя функціи t.

Мы знаемъ (пар. 18, примѣч.), что при этомъ условіи для преобразованія ея въ систему съ постоянными коэффиціентами можно пользоваться такими подстановками параграфа 10$^{\underline{го}}$, въ которыхъ всѣ коэффиціенты были бы вещественными функціями t. Но является вопросъ, можно-ли такія подстановки подчинять предположенію, чтобы коэффиціенты въ нихъ были періодическими, какъ это имѣло мѣсто въ указанномъ сейчасъ преобразованіи.

Нетрудно убѣдиться, что если желательно, чтобы періодомъ для названныхъ коэффиціентовъ служило число ω, какъ это было въ предыдущемъ преобразованіи, то такое предположеніе всегда возможно только въ случаѣ, когда характеристичное уравненіе не имѣетъ отрицательныхъ корней **). При существованіи же послѣднихъ, для возможно-

*) Это заключеніе основывается на предложеніи, что, если система (1) допускаетъ рѣшеніе вида (5) при указанномъ характерѣ функцій f_s, то ρ есть корень ея характеристичнаго уравненія, и что если для этой системы найдено μ независимыхъ рѣшеній такого вида, то кратность корня ρ не менѣе μ.

**) При нашемъ допущеніи, для всякаго положительнаго числа ρ_s коэффиціенты въ формахъ $z_j^{(s)}$ можно предполагать вещественными функціями t. Мнимыя же числа ρ_s разобьются на пары сопряженныхъ, и изъ формъ $z_j^{(s)}$, соотвѣтствующихъ какому-либо изъ нихъ, можно будетъ выводить формы $z_j^{(s)}$ для сопряженнаго сти его необходимы извѣстныя условія, которыя напр. навѣрно не будутъ выполняться, если въ числѣ отрицательныхъ корней находятся простые.

Но нетрудно придти къ заключенію, что въ подстановкахъ, о которыхъ идетъ рѣчь, коэффиціенты во всякомъ случаѣ можно предполагать періодическими съ періодомъ 2ω *).

Нѣкоторыя предложенія относительно характеристичнаго уравненія.

48. Во всякомъ вопросѣ объ устойчивости періодическихъ движеній первая задача, которою придется заняться, будетъ состоять въ изслѣдованіи характеристичнаго уравненія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующей первому приближенію. Поэтому считаемъ умѣстнымъ указать здѣсь нѣкоторыя соображенія, которыми при этомъ изслѣдованіи можно было бы руководствоваться.

Прежде всего обратимъ вниманіе на одно общее предложеніе, на которомъ могутъ быть основаны нѣкоторыя общія методы вычисленія коэффиціентовъ характеристичнаго уравненія.

Предложеніе это состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема. — *Пусть коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (1) зависятъ отъ нѣкоторыхъ параметровъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, удовлетворяя сдѣланнымъ относительно нихъ предположеніямъ по крайней мѣрѣ при величинахъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, модули которыхъ достаточно малы, и пусть періодъ ω отъ этихъ параметровъ не зависитъ. Тогда, если коэффиціенты $p_{s\sigma}$ могутъ быть представлены рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ параметровъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ и сходящимися въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t по крайней мѣрѣ при величинахъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, модули которыхъ не превосходятъ нѣкоторыхъ отличныхъ отъ нуля предѣловъ $E_1, E_2, \ldots$, то коэффиціенты A_s въ характеристичномъ уравненіи*

$$\varrho^n + A_1\varrho^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\varrho + A_n = 0$$

будутъ голоморфными функціями разсматриваемыхъ параметровъ. При томъ, если постоянныя $E_1, E_2, \ldots$ выбраны такъ, чтобы при условіяхъ

$$|\varepsilon_1| = E_1, \qquad |\varepsilon_2| = E_2, \quad \ldots \tag{10}$$

и ряды, составленные изъ модулей членовъ разложеній $p_{s\sigma}$, были сходящимися въ равной

съ нимъ ρ_s замѣною $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$. Поэтому, если характеристичное уравненіе не имѣетъ отрицательныхъ корней, то поступая подобно тому, какъ было показано въ параграфѣ 18^{омъ}, получимъ вещественную подстановку, въ которой коэффиціенты будутъ періодическими функціями t съ періодомъ ω

*) Для этого достаточно замѣтить, что для каждаго отрицательнаго числа ρ_s можно предполагать вещественными коэффиціенты въ формахъ

$$z_j^{(s)}\, e^{\frac{i\pi t}{\omega}}. \qquad (i=\sqrt{-1})$$

степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t, то ряды, которыми представятся инваріанты A_s, будутъ навѣрно абсолютно сходящимися при условіяхъ (10).

Справедливость этой теоремы обнаружится тотчасъ же, если докажемъ, что функціи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и принимающія при $t = 0$ какія-либо данныя значенія $a_1, a_2, \ldots, a_n$, независящія отъ параметровъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, могутъ быть представляемы рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ этихъ параметровъ и абсолютно сходящимися при всякомъ вещественномъ t, пока модули $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ не превосходятъ предѣловъ $E_1, E_2, \ldots$, выбранныхъ согласно указанному сейчасъ условію.

Что же касается этого послѣдняго предложенія, то въ справедливости его легко убѣдимся, разсматривая вмѣсто системы (1) слѣдующую:

$$\frac{dx_s}{dt} = \varepsilon(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n), \qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

въ которой ε означаетъ нѣкоторый новый параметръ, и разыскивая функціи x_s подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Тогда одного взгляда на получаемыя при этомъ уравненія будетъ достаточно, чтобы заключить, что модули коэффиціентовъ въ этихъ рядахъ не будутъ превосходить соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ въ разложеніи по степенямъ тѣхъ же параметровъ слѣдующей функціи:

$$a\,e^{\pm n\varepsilon\int_0^t p\,dt}, \; {}^{*)}$$

гдѣ a означаетъ наибольшую изъ величинъ $|a_s|$, а p — рядъ, расположенный по степенямъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, въ которомъ каждый коэффиціентъ при всякомъ данномъ t равенъ наибольшему изъ модулей соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ разложеній $p_{s\sigma}$ при томъ же t.

Возвращаясь къ системѣ (1), допустимъ, что группа функцій

$$x_{1s}, \quad x_{2s}, \quad \ldots, \quad x_{ns}$$

представляетъ рѣшеніе этой системы, опредѣляемое условіемъ

$$x_{ss}(0) = 1, \qquad x_{js}(0) = 0. \qquad (j \gtrless s)$$

Тогда, разсматривая n такихъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ $s = 1, 2, \ldots, n$, изъ равенствъ (3) выведемъ

$$a_{sj} = x_{sj}(\omega). \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Отсюда въ силу указаннаго сейчасъ предложенія слѣдуетъ, что постоянныя a_{sj}, соотвѣтствующія нашей системѣ частныхъ рѣшеній, при условіяхъ (10) разлагаются въ абсолютно сходящіеся ряды по степенямъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$.

*) Здѣсь верхній знакъ относится къ случаю $t > 0$, нижній — къ случаю $t < 0$.

Поэтому заключаемъ, что этимъ свойствомъ будутъ обладать и коэффиціенты A_s въ характеристичномъ уравненіи.

Допустимъ, что систему (1) мы умѣемъ интегрировать въ предположеніи $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0$.

Тогда, если функціи x_s будемъ искать подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ параметровъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то для опредѣленія коэффиціентовъ въ этихъ рядахъ получимъ системы дифференціальныхъ уравненій, которыя будутъ интегрироваться въ извѣстной послѣдовательности посредствомъ квадратуръ. При этомъ въ рядахъ, которыми представятся инваріанты A_s, коэффиціенты будутъ опредѣляться посредствомъ нѣкоторыхъ кратныхъ интеграловъ.

Можетъ случиться, что предложенныя уравненія не содержатъ никакихъ параметровъ, по степенямъ которыхъ можно было бы разлагать постоянныя A_s. Но тогда уравненія эти можно замѣнить другими, въ которыя входили бы такіе параметры, и которыя при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ послѣднихъ приводились бы къ предложеннымъ (какъ это напр. было сдѣлано при доказательствѣ теоремы).

Поэтому методы вычисленія инваріантовъ A_s, основанныя на возможности разложенія ихъ въ разсматриваемые здѣсь ряды, можно считать совершенно общими. *)

49. Пользуясь рядами, о которыхъ шла рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ, можно рѣшать нѣкоторые общіе вопросы относительно характеристичнаго уравненія.

Покажемъ это въ приложеніи къ слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{11}$$

въ которомъ подъ p будемъ разумѣть періодическую функцію t съ вещественнымъ періодомъ ω, опредѣленную и непрерывную для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Замѣняя это уравненіе системой

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = -px,$$

на основаніи формулы (4) заключаемъ тотчасъ же, что соотвѣтствующее ему характеристичное уравненіе будетъ вида

$$\varrho^2 - 2A\varrho + 1 = 0. \tag{12}$$

Вопросъ о составленіи послѣдняго приведется, слѣдовательно, къ опредѣленію одной только постоянной A.

Разсматривая по прежнему только вещественныя значенія t, мы будемъ предполагать, что функція p остается всегда вещественною. Тогда такою же будетъ и постоянная A.

---

*) Нѣкоторыя приложенія этихъ методъ были указаны мною въ статьѣ *Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ* (Сообщ. Харьк. Матем. Общ., 2 серія, т. II, 1889).

При этомъ возможенъ будетъ каждый изъ двухъ случаевъ: 1) $A^2 \leqq 1$, когда корни уравненія (12) будутъ обладать модулями, равными 1, и 2) $A^2 > 1$, когда корни эти будутъ вещественными и одинъ изъ нихъ численно болѣе, другой численно менѣе 1.

Вопросъ о томъ, который изъ этихъ двухъ случаевъ имѣетъ мѣсто, при изслѣдованіи устойчивости является весьма существеннымъ. Поэтому небезполезно указать нѣкоторые признаки для того и для другого.

Такіе признаки можно выводить изъ разсмотрѣнія выраженія постоянной A подъ видомъ нѣкотораго ряда.

Для составленія послѣдняго будемъ временно разсматривать вмѣсто (11) слѣдующее уравненіе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon p x, \tag{13}$$

для котораго постоянную A будемъ искать подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ параметра ε.

Въ силу теоремы предыдущаго параграфа рядъ этотъ будетъ абсолютно сходящимся при всякомъ ε, такъ что A будетъ не только голоморфною, но нѣкоторою цѣлою трансцендентною функціей ε.

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ суть частныя рѣшенія уравненія (13), опредѣляемыя условіями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Разлагая функціи f и φ по степенямъ ε, найдемъ

$$f(t) = 1 + \varepsilon f_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t) + \dots,$$
$$\varphi(t) = t + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \dots,$$

если вообще подъ $f_n(t)$, $\varphi_n(t)$ будемъ разумѣть функціи t, вычисляемыя послѣдовательно по формуламъ

$$f_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p f_{n-1}(t)\,dt, \qquad \varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p\varphi_{n-1}(t)\,dt$$

въ предположеніи, что

$$f_0(t) = 1, \quad \varphi_0(t) = t.$$

Чтобы найти теперь разложеніе постоянной A, замѣчаемъ, что характеристичное уравненіе можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} f(\omega) - \varrho & f'(\omega) \\ \varphi(\omega) & \varphi'(\omega) - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

и что слѣдовательно

$$2A = f(\omega) + \varphi'(\omega).$$

Искомое разложеніе поэтому будетъ:

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\omega) + \varphi'_n(\omega)]\,\varepsilon^n. \qquad \textbf{(14)}$$

Пользуясь найденными формулами, можно рѣшать между прочимъ вопросъ о томъ, который изъ двухъ указанныхъ выше случаевъ представляется для уравненія (13) при величинахъ ε того или другого знака, численно достаточно малыхъ. Такъ какъ

$$f_1(\omega) + \varphi'_1(\omega) = \omega \int_0^{\omega} p\,dt,$$

то вопросъ этотъ будетъ рѣшаться знакомъ интеграла

$$\int_0^{\omega} p\,dt$$

всякій разъ, когда интегралъ этотъ не равенъ нулю.

Изъ тѣхъ же формулъ вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Теорема I. — *Если функція p такова, что можетъ получать только отрицательныя или равныя нулю значенія* (не будучи нулемъ тожественно), *то корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго уравненію (11), всегда будутъ вещественными, и одинъ изъ нихъ будетъ болѣе, другой менѣе 1.*

Остановимся теперь на случаѣ, когда функція p можетъ получать только положительныя или равныя нулю значенія, предполагая, что она не равна нулю тожественно.

Функціи $f_n(t)$, $\varphi'_n(t)$ будутъ обладать тогда такимъ же свойствомъ. При томъ можно будетъ доказать, что при $n > 1$ онѣ будутъ удовлетворять неравенству

$$(f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\,t \int_0^t p\,dt - 2n(f_n + \varphi'_n) > 0 \qquad \textbf{(15)}$$

для всякаго отличнаго отъ нуля вещественнаго t.

Докажется это слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$S_n = (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\,t \int_0^t p\,dt - 2n(f_n + \varphi'_n),$$

замѣчаемъ, что можно написать

$$S_n = \int_0^t (F_n + p\,\Phi_n)\,dt,$$

разумѣя подъ F_n и Φ_n слѣдующія функціи:

$$F_n = tf'_{n-1}\int\limits_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\int\limits_0^t p\,dt - 2nf'_n,$$

$$\Phi_n = t\varphi_{n-2}\int\limits_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\,t - 2n\varphi_{n-1}.$$

Неравенство наше будетъ поэтому доказано, если покажемъ, что для всѣхъ положительныхъ значеній t имѣютъ мѣсто неравенства

$$F_n > 0, \qquad \Phi_n > 0, \tag{16}$$

а для всѣхъ отрицательныхъ — противоположныя имъ

$$F_n < 0, \qquad \Phi_n < 0. \tag{17}$$

Съ этою цѣлью замѣчаемъ, что предыдущія выраженія функцій F_n и Φ_n легко приводятся къ виду

$$F_n = \int\limits_0^t \left(2f'_{n-1}\int\limits_0^t p\,dt + pu_n\right)dt, \qquad \Phi_n = \int\limits_0^t (2pt\varphi_{n-2} + v_n)\,dt,$$

гдѣ u_n и v_n означаютъ выраженія

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2})\int\limits_0^t p\,dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2})\int\limits_0^t p\,dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\varphi'_{n-1},$$

которыя можно представить такъ:

$$u_n = \int\limits_0^t \Big(2p(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1}\Big)dt,$$

$$v_n = \int\limits_0^t \left(2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2}\int\limits_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1}\right)dt.$$

Изъ этихъ формулъ заключаемъ, что если для всѣхъ положительныхъ значеній t имѣютъ мѣсто неравенства

$$F_{n-1} > 0, \qquad \Phi_{n-1} > 0,$$

то для такихъ же значеній t будутъ имѣть мѣсто и неравенства (16), и что если для всякаго отрицательнаго t

$$F_{n-1} < 0, \qquad \Phi_{n-1} < 0,$$

то для такого же t будутъ выполняться и неравенства (17).

Отсюда слѣдуетъ, что справедливость неравенствъ (16) для $t > 0$ и неравенствъ (17) для $t < 0$ будетъ несомнѣнною при всякомъ n, бóльшемъ 1, если неравенства эти имѣютъ мѣсто въ случаѣ $n = 2$.

Въ послѣднемъ же убѣждаемся непосредственно, замѣчая, что изъ нашихъ формулъ выводятся слѣдующія:

$$F_2 = 2\int_0^t \left\{ \left(\int_0^t p\,dt \right)^2 + 2p\varphi_1' \right\} dt, \qquad \Phi_2 = 2\int_0^t (pt^2 + 2f_1)\,dt.$$

Такимъ образомъ неравенство (15) можно считать доказаннымъ.

Обращаемся теперь къ нашей задачѣ.

Формула (14) для уравненія (11) принимаетъ видъ

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)].$$

Поэтому, замѣчая, что въ силу (15)

$$f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi_{n-1}'(\omega)]\,\frac{\omega}{2n}\int_0^\omega p\,dt,$$

находимъ:

$$A < 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt\right)\Big[f_{2n-1}(\omega) + \varphi_{2n-1}'(\omega)\Big]$$

и

$$A > 1 - \frac{\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n+2}\int_0^\omega p\,dt\right)\Big[f_{2n}(\omega) + \varphi_{2n}'(\omega)\Big].$$

Отсюда заключаемъ тотчасъ же, что если

$$\omega\int_0^\omega p\,dt \leqq 4,$$

то необходимо будетъ

$$-1 < A < 1,$$

и такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему предложенію:

Теорема II. — *Если функція p такова, что можетъ получать только положительныя или равныя нулю значенія* (не будучи нулемъ тожественно), *и если при томъ функція эта удовлетворяетъ условію*

$$\omega \int_0^\omega p\,dt \leqq 4\,,$$

то корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго уравненію (11), всегда будутъ мнимыми, обладая модулями, равными 1.

Условія, выраженныя въ этой теоремѣ, достаточны, но конечно не необходимы.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда функція p приводится къ постоянной величинѣ (за періодъ ω можно принять тогда какое угодно число), уже одного условія $p > 0$ достаточно, чтобы корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго какому-либо вещественному періоду, обладали модулями, равными 1.

Поэтому естественно возникаетъ вопросъ, не будетъ ли того же самаго и въ общемъ случаѣ.

Но на вопросъ этотъ получается однако отрицательный отвѣтъ, ибо можно привести примѣры, въ которыхъ функція p будетъ оставаться всегда положительною, а характеристичное уравненіе тѣмъ не менѣе будетъ обладать вещественными корнями, изъ которыхъ одинъ по числовой величинѣ будетъ болѣе, другой менѣе 1.

Чтобы дать примѣръ такого рода, разсмотримъ уравненіе Ламе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (h + 2k^2\,\mathrm{sn}^2 t)\,x$$

въ одномъ изъ простѣйшихъ его случаевъ.

Здѣсь h означаетъ какую угодно постоянную, а k положительную правильную дробь, представляющую модуль эллиптической функціи $\mathrm{sn}\,t$.

Благодаря изслѣдованіямъ Эрмита, мы знаемъ, что если вмѣсто h ввести новую постоянную λ, полагая

$$h = -1 - k^2\,\mathrm{cn}^2\lambda\,,$$

то одно изъ частныхъ рѣшеній разсматриваемаго уравненія представится выраженіемъ

$$\frac{\mathrm{H}(t+\lambda)}{\Theta(t)}\, e^{-\frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}t},$$

въ которомъ H и Θ суть извѣстныя Якобіевскія функціи. Другое вообще найдется, если въ выраженіи этомъ замѣнимъ t на $-t$ или λ на $-\lambda$. *)

---

*) См. Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (Paris, Gautier-Villars, 1885; p. 14).

За періодъ ω въ разсматриваемомъ случаѣ можно принять число $2K$, разумѣя подъ K, какъ обыкновенно, интегралъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

и изъ написаннаго сейчасъ выраженія видно, что корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго этому періоду, суть слѣдующіе:

$$-e^{2K\frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}} \quad \text{и} \quad -e^{-2K\frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}}. \tag{18}$$

Будемъ предполагать число λ вещественнымъ и лежащимъ между 0 и $2K$, но недостигающимъ этихъ предѣловъ. При томъ будемъ предполагать его достаточно малымъ для того, чтобы выполнялось условіе

$$1-k^2-k^2\,\mathrm{sn}^2\lambda > 0.$$

Тогда функція

$$p = 1 + k^2\,\mathrm{cn}^2\lambda - 2k^2\,\mathrm{sn}^2 t$$

будетъ положительною для всѣхъ вещественныхъ значеній t, и въ то же время числа (18) будутъ вещественными, при чемъ одно будетъ численно болѣе, другое численно менѣе 1.

50. Иногда на основаніи нѣкоторыхъ функціональныхъ свойствъ коэффиціентовъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ можно тотчасъ же сдѣлать нѣкоторыя заключенія относительно характеристичнаго уравненія.

Такъ напр., если въ системѣ

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = q_{s1}\frac{dx_1}{dt} + q_{s2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + q_{sn}\frac{dx_n}{dt} + p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n,$$

$$(s=1, 2, \ldots, n)$$

съ періодическими коэффиціентами $q_{s\sigma}$, $p_{s\sigma}$, всѣ $q_{s\sigma}$ суть нечетныя функціи t, а всѣ $p_{s\sigma}$ — четныя, то можно утверждать, что въ соотвѣтствующемъ ей характеристичномъ уравненіи

$$\varrho^{2n} + A_1\varrho^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1}\varrho + A_{2n} = 0$$

коэффиціенты A_s будутъ удовлетворять соотношеніямъ

$$A_{2n} = 1, \qquad A_{2n-s} = A_s, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

такъ что уравненіе это будетъ принадлежать къ типу такъ называемыхъ возвратныхъ.

Въ этомъ убѣдимся, замѣчая, что разсматриваемая система не мѣняется вслѣдствіе замѣны t на $-t$.

Указанный сейчасъ случай заключается въ болѣе общемъ, когда въ предложенной системѣ уравненій, которая пусть будетъ вида (1), всѣ тѣ изъ коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$, для которыхъ значки s и σ не превосходятъ нѣкотораго цѣлаго числа k, и всѣ тѣ, для которыхъ оба значка болѣе k, представляютъ нечетныя, а остальные всѣ — четныя функціи t.

Такая система не будетъ мѣняться, если въ ней t замѣнимъ на $-t$ и одновременно съ этимъ

$$x_{k+1} \text{ на } -x_{k+1}, \quad x_{k+2} \text{ на } -x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_n \text{ на } -x_n.$$

А на основаніи этого нетрудно показать, что между коэффиціентами соотвѣтствующаго ей характеристичнаго уравненія

$$\varrho^n + A_1\varrho^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\varrho + A_n = 0$$

будутъ существовать соотношенія

$$A_n = (-1)^n, \quad A_{n-1} = (-1)^n A_1, \quad A_{n-2} = (-1)^n A_2, \ \ldots \ . \tag{19}$$

Можно разсматривать условія еще болѣе общаго характера, а именно — условія, при которыхъ уравненія (1) не будутъ мѣняться вслѣдствіе замѣны t на $-t$ при одновременной замѣнѣ величинъ x_s нѣкоторыми линейными ихъ формами съ постоянными коэффиціентами.

Предполагая, что $p_{s\sigma}(t)$ есть означеніе коэффиціента $p_{s\sigma}$, какъ функціи перемѣнной t, допустимъ, что существуютъ слѣдующія соотношенія

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_{sj}\, p_{j\sigma}(t) + \alpha_{j\sigma}\, p_{sj}(-t)\right] = 0, \qquad (s, \sigma = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

гдѣ всѣ $\alpha_{s\sigma}$ означаютъ нѣкоторыя постоянныя, опредѣлитель которыхъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{21}$$

будемъ предполагать отличнымъ отъ нуля.

Тогда система уравненій

$$\left.\frac{dy_s}{dt} = -p_{s1}(-t)\,y_1 - p_{s2}(-t)\,y_2 - \cdots - p_{sn}(-t)\,y_n \right\} \tag{22}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

представитъ преобразованіе системы (1) посредствомъ подстановки

$$y_s = \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sn}x_n. \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(23)}$$

Основываясь на этомъ, легко показать, что инваріанты A_s будутъ удовлетворять соотношеніямъ (19).

Дѣйствительно, пусть ϱ есть одинъ изъ корней характеристичнаго уравненія системы (1), и пусть группа функцій

$$x_1 = f_1(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad x_2 = f_2(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad \ldots, \quad x_n = f_n(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}} \qquad \textbf{(24)}$$

представляетъ одно изъ рѣшеній этой системы, соотвѣтствующихъ корню ϱ, такъ что всѣ $f_s(t)$ суть или періодическія функціи t, или суммы конечнаго числа членовъ, представляющихъ произведенія періодическихъ функцій на нѣкоторыя цѣлыя степени t.

Изъ этого рѣшенія по формуламъ (23) выведемъ слѣдующее рѣшеніе системы (22):

$$y_1 = \varphi_1(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad y_2 = \varphi_2(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n(t)\varrho^{\frac{t}{\omega}},$$

въ которомъ функціи

$$\varphi_s(t) = \alpha_{s1}f_1(t) + \alpha_{s2}f_2(t) + \ldots + \alpha_{sn}f_n(t)$$

будутъ такого же характера, какъ и функціи $f_s(t)$. При томъ, если послѣднія не всѣ тожественно равны нулю (что и будемъ предполагать), то въ силу нашего предположенія относительно опредѣлителя (21) и между функціями $\varphi_s(t)$ найдутся не равныя нулю тожественно.

Но изъ всякаго рѣшенія системы (22) замѣною t на $-t$ выводится нѣкоторое рѣшеніе системы (1). Поэтому для послѣдней получимъ рѣшеніе

$$x_1 = \varphi_1(-t)\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{t}{\omega}}, \quad x_2 = \varphi_2(-t)\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{t}{\omega}}, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(-t)\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{t}{\omega}}, \qquad \textbf{(25)}$$

существованіе котораго обнаруживаетъ, что $\frac{1}{\varrho}$ есть одинъ изъ корней характеристичнаго уравненія этой системы.

Если бы корень ϱ былъ кратнымъ и кратность его была m, то мы нашли бы для системы (1) m независимыхъ рѣшеній вида (24) и изъ послѣднихъ указаннымъ сейчасъ путемъ вывели бы m рѣшеній вида (25), которыя при сдѣланномъ предположеніи относительно опредѣлителя (21) также были бы независимыми. Поэтому мы заключили бы, что $\frac{1}{\varrho}$ есть кратный корень, и что кратность его не менѣе m. А такъ какъ корень ϱ какой угодно, то отсюда же слѣдовало бы, что кратность корня $\frac{1}{\varrho}$ не можетъ быть и болѣе m.

Такимъ образомъ можемъ утверждать, что, если характеристичное уравненіе системы (1) обладаетъ корнемъ ϱ какой-либо кратности m, то будетъ обладать и корнемъ

$\frac{1}{\varrho}$ той же кратности m, и что слѣдовательно коэффиціенты въ этомъ уравненіи будутъ удовлетворять соотношеніямъ

$$A_n = \pm 1, \quad A_{n-1} = A_n A_1, \quad A_{n-2} = A_n A_2, \ \ldots \ .$$

Поэтому для доказательства равенствъ (19) остается доказать только первое изъ нихъ *).

Съ этою цѣлью, означая черезъ A опредѣлитель (21), а черезъ $\mathrm{A}_{s\sigma}$ его миноръ, соотвѣтствующій элементу $\alpha_{s\sigma}$, выводимъ изъ (20) слѣдующее равенство:

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \mathrm{A}_{s\sigma} \sum_{j=1}^{n} [\alpha_{sj} p_{j\sigma}(t) + \alpha_{j\sigma} p_{sj}(-t)] = 0,$$

которое по раздѣленіи на A приводится къ виду

$$\sum_{s=1}^{n} [p_{ss}(t) + p_{ss}(-t)] = 0$$

и такимъ образомъ обнаруживаетъ, что $\sum p_{ss}$ есть нечетная функція t.

Вслѣдствіе этого находимъ

$$\int_0^{\omega} \sum p_{ss} dt = 0;$$

а отсюда въ силу (4) заключаемъ, что $A_n = (-1)^n$.

Можно замѣтить, что въ случаѣ нечетнаго n характеристичное уравненіе системы (1), удовлетворяющей разсмотрѣнному сейчасъ условію, всегда будетъ обладать по крайней мѣрѣ однимъ корнемъ, равнымъ 1, и слѣдовательно система эта всегда будетъ допускать періодическое рѣшеніе (отличное отъ очевиднаго $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$).

Примѣчаніе. — Замѣтимъ, что если коэффиціенты $p_{s\sigma}$ удовлетворяютъ соотношеніямъ (20) при такихъ величинахъ постоянныхъ $\alpha_{s\sigma}$, для которыхъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

не имѣетъ ни кратныхъ корней, ни корней, различающихся между собою только знаками, то интегрированіе системы (1) приводится къ преобразованію ея посредствомъ

*) Если бы коэффиціенты p_{ss} были вещественными функціями t, то это равенство не требовало бы приводимаго далѣе доказательства, ибо въ силу (4) величина $(-1)^n A_n$ была бы тогда во всякомъ случаѣ положительною.

нѣкоторой линейной подстановки съ постоянными коэффиціентами и къ выполненію n квадратуръ.

Дѣйствительно, нетрудно убѣдиться, что если корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравненія (26) всѣ различны, то всегда найдется линейная подстановка съ постоянными коэффиціентами, преобразовывающая систему (1) въ такую

$$\frac{dz_s}{dt} = q_{s1}(t) z_1 + q_{s2}(t) z_2 + \ldots + q_{sn}(t) z_n, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

для которой коэффиціенты $q_{s\sigma}$ будутъ удовлетворять соотношеніямъ

$$\lambda_s q_{s\sigma}(t) + \lambda_\sigma q_{s\sigma}(-t) = 0. \qquad (s, \sigma=1, 2, \ldots, n)$$

А изъ послѣднихъ при нашихъ предположеніяхъ слѣдуетъ, что всѣ $q_{s\sigma}$, для которыхъ s и σ различны, будутъ нулями.

Интегрированіе преобразованной системы приведется поэтому къ выполненію n квадратуръ

$$\int q_{11}\, dt, \quad \int q_{22}\, dt, \quad \ldots, \quad \int q_{nn}\, dt.$$

Что касается корней характеристичнаго уравненія системы (1) при разсматриваемыхъ здѣсь предположеніяхъ, то въ случаѣ, если опредѣлитель (21) не нуль, всѣ эти корни будутъ равными 1, а въ противномъ случаѣ — всѣ, за исключеніемъ одного, который можетъ быть какимъ угодно.

51. Иногда соотношенія между инваріантами, о которыхъ шла рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ, могутъ обусловливаться самымъ видомъ дифференціальныхъ уравненій, независимо отъ какихъ-либо функціональныхъ свойствъ ихъ коэффиціентовъ.

Укажемъ одинъ изъ наиболѣе важныхъ случаевъ этого рода.

Допустимъ, что предложенная система есть каноническая

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s}, \qquad (s=1, 2, \ldots, k) \tag{27}$$

въ которой H представляетъ квадратичную форму перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$ съ коэффиціентами такого же характера, какъ въ системѣ (1).

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} x_{11},\ x_{21},\ \ldots,\ x_{k1},\ y_{11},\ y_{21},\ \ldots,\ y_{k1}, \\ x_{12},\ x_{22},\ \ldots,\ x_{k2},\ y_{12},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{k2} \end{array}\right\} \tag{28}$$

суть два какихъ-либо рѣшенія этой системы.

Означая черезъ H_i $(i=1, 2)$ результатъ замѣны въ функціи H величинъ x_s, y_s величинами x_{si}, y_{si}, найдемъ:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{k}(x_{j1} y_{j2} - x_{j2} y_{j1}) = \sum_{j=1}^{k}\left(x_{j1}\frac{\partial H_2}{\partial x_{j2}} - x_{j2}\frac{\partial H_1}{\partial x_{j1}} + y_{j1}\frac{\partial H_2}{\partial y_{j2}} - y_{j2}\frac{\partial H_1}{\partial y_{j1}}\right).$$

Но вторая часть этого равенства тожественно равна нулю, ибо, представляя функцію величинъ (28), уничтожающуюся при одновременномъ равенствѣ ихъ нулю, обладаетъ въ отношеніи ихъ тожественно равными нулю частными производными. Такъ напр. частная производная ея по x_{s1} равна

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_{s2}} - \sum_{j=1}^{k} \left(x_{j2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \, \partial x_s} + y_{j2} \frac{\partial^2 H}{\partial y_j \, \partial x_s} \right) = 0.$$

Вслѣдствіе этого равенство наше приводитъ къ слѣдующему соотношенію:

$$\sum_{j=1}^{k} (x_{j1} y_{j2} - x_{j2} y_{j1}) = \text{Const.},$$

которымъ будутъ такимъ образомъ связаны всякія два рѣшенія системы (27).

Разсмотримъ $2k$ независимыхъ рѣшеній этой системы

$$x_{1s}, \quad x_{2s}, \quad \ldots, \quad x_{ks}, \quad y_{1s}, \quad y_{2s}, \quad \ldots, \quad y_{ks}. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,2k)}$$

Въ силу доказаннаго сейчасъ, между ними будутъ существовать $k(2k-1)$ соотношеній вида

$$\sum_{j=1}^{k} (x_{js} y_{j\sigma} - x_{j\sigma} y_{js}) = C_{s\sigma}, \tag{29}$$

въ которыхъ постоянныя $C_{s\sigma} = -C_{s\sigma}$ $(s, \sigma = 1, 2, \ldots, 2k)$ вслѣдствіе независимости разсматриваемыхъ рѣшеній будутъ таковы, что во всякой группѣ ихъ

$$C_{s1}, \quad C_{s2}, \quad \ldots, \quad C_{s2k}$$

каково бы ни было данное число s, найдется по крайней мѣрѣ одна постоянная $C_{s\sigma}$, соотвѣтствующая отличному отъ s числу σ, которая не будетъ нулемъ.

Означая теперь черезъ $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2k}$ корни характеристичнаго уравненія системы (27), допустимъ, что наши рѣшенія выбраны такъ, чтобы функціи x_{js}, y_{js} были вида

$$x_{js} = f_{js}(t) \varrho_s^{\frac{t}{\omega}}, \qquad y_{js} = \varphi_{js}(t) \varrho_s^{\frac{t}{\omega}},$$

гдѣ f_{js}, φ_{js} означаютъ или періодическія функціи t, или (если между величинами ϱ_s существуютъ равныя) суммы конечнаго числа членовъ, представляющихъ произведенія изъ періодическихъ функцій на нѣкоторыя цѣлыя неотрицательныя степени t.

Тогда изъ равенства (29), которое приметъ видъ

$$(\varrho_s \varrho_\sigma)^{\frac{t}{\omega}} \sum_{j=1}^{k} [f_{js}(t) \varphi_{j\sigma}(t) - f_{j\sigma}(t) \varphi_{js}(t)] = C_{s\sigma},$$

заключимъ, что если $C_{s\sigma}$ не нуль, то необходимо будетъ

$$\varrho_s \varrho_\sigma = 1.$$

А такъ какъ, по замѣченному выше, для каждаго даннаго числа s можно найти отличное отъ него число σ, при которомъ постоянная $C_{s\sigma}$ не будетъ нулемъ, то отсюда выведемъ, что каждому корню ϱ_s характеристичнаго уравненія будетъ соотвѣтствовать по крайней мѣрѣ одинъ корень, равный $\frac{1}{\varrho_s}$, и что если уравненіе это имѣетъ корень, равный $+1$ или -1, то послѣдній всегда будетъ кратнымъ.

Вслѣдствіе этого можемъ утверждать, что если характеристичное уравненіе

$$\varrho^{2k} + A_1\varrho^{2k-1} + \ldots + A_{2k-1}\varrho + A_{2k} = 0$$

системы (27) не имѣетъ кратныхъ корней, то между коэффиціентами его будутъ существовать соотношенія

$$A_{2k} = 1\,, \quad A_{2k-s} = A_s\,. \quad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots\,,\,k-1)} \qquad \textbf{(30)}$$

Но доказавши послѣднія для случая простыхъ корней, легко убѣдиться въ справедливости ихъ и для случая кратныхъ.

Будемъ разсуждать для этого слѣдующимъ образомъ.

Въ функціи H, которая пусть будетъ

$$H = \sum_{s=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{k}(p_{s\sigma}x_s x_\sigma + q_{s\sigma}y_s y_\sigma + r_{s\sigma}x_s y_\sigma)\,,$$

коэффиціенты $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$, r_{ss} и $r_{s\sigma}$ (для s и σ различныхъ) замѣняемъ величинами

$$\varepsilon p_{s\sigma}\,, \quad \varepsilon q_{s\sigma}\,, \quad \varkappa_s + \varepsilon(r_{ss} - \varkappa_s)\,, \quad \varepsilon r_{s\sigma}\,,$$

разумѣя подъ ε произвольный параметръ, а подъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ какія-либо постоянныя, для которыхъ числа

$$e^{\varkappa_1\omega}, \quad e^{\varkappa_2\omega}, \ \ldots\,, \ e^{\varkappa_k\omega}, \quad e^{-\varkappa_1\omega}, \quad e^{-\varkappa_2\omega}, \ \ldots\,, \ e^{-\varkappa_k\omega} \qquad \textbf{(31)}$$

всѣ различны, — и разсматриваемъ каноническую систему, соотвѣтствующую измѣненной такимъ образомъ функціи H.

Система эта при $\varepsilon = 0$ будетъ обращаться въ систему съ постоянными коэффиціентами, для которой числа

$$\varkappa_1\,, \ \varkappa_2\,, \ \ldots\,, \ \varkappa_k\,, \ -\varkappa_1\,, \ -\varkappa_2\,, \ \ldots\,, \ -\varkappa_k$$

будутъ служить корнями опредѣляющаго уравненія, а слѣдовательно числа (31) — корнями характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго періоду ω.

Поэтому, замѣчая, что для нашей новой системы инваріанты A_s будутъ непрерывными по отношенію къ ε, ибо въ силу теоремы параграфа 48^{го} представятъ нѣкоторыя цѣлыя трансцендентныя функціи его, и принимая въ разсчетъ, что по условію числа (31) всѣ различны, заключимъ, что характеристичное уравненіе этой системы не будетъ имѣть кратныхъ корней ни при $\varepsilon = 0$, ни при отличныхъ отъ нуля величинахъ ε, модули которыхъ достаточно малы. Поэтому для такихъ значеній ε будутъ выполняться соотношенія (30). Но въ такомъ случаѣ соотношенія эти, какъ выражающія равенства между цѣлыми функціями ε, необходимо будутъ выполняться для всякихъ его значеній, а слѣдовательно и для $\varepsilon = 1$, когда наша новая каноническая система переходитъ въ первоначальную.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема. — *Если предложенная система линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами имѣетъ каноническую форму, то соотвѣтствующее ей характеристичное уравненіе всегда есть возвратное.* *)

Наше доказательство основывалось на существованіи извѣстнаго соотношенія между всякими двумя рѣшеніями системы (27).

Можно указать и другія системы, допускающія подобныя соотношенія, изъ разсмотрѣнія которыхъ могутъ быть выводимы нѣкоторыя заключенія о характеристичномъ уравненіи.

Таковъ напр. случай, когда въ системѣ (1) коэффиціенты $p_{s\sigma}$ связаны между собою уравненіями

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{js} p_{j\sigma} - \alpha_{j\sigma} p_{js}) = 0\,, \qquad {\scriptstyle (s,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)}$$

въ которыхъ $\alpha_{s\sigma}$ суть нѣкоторыя постоянныя, удовлетворяющія условію $\alpha_{s\sigma} + \alpha_{\sigma s} = 0$ при всякихъ s и σ, взятыхъ изъ ряда $1, 2, \ldots, n$.

Можетъ случиться, что предложенная система, не будучи каноническаго вида, приводится къ нему посредствомъ нѣкоторой линейной подстановки съ постоянными или періодическими коэффиціентами. Всякій разъ, когда это будетъ констатировано, а подстановка будетъ удовлетворять условіямъ параграфа 10<u>го</u>, можно будетъ утверждать, что характеристичное уравненіе для этой системы есть возвратное.

Такъ напр., пусть предложена система

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \sum_{\sigma=1}^{k} \left[\alpha_{s\sigma} + \int_0^t (p_{s\sigma} - p_{\sigma s})\, dt\right] \frac{dx_\sigma}{dt} + \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma} x_\sigma\,, \qquad {\scriptstyle (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)}$$

въ которой коэффиціенты $p_{s\sigma}$, имѣя обычныя значенія, удовлетворяютъ условіямъ

$$\int_0^\omega (p_{s\sigma} - p_{\sigma s})\, dt = 0\,, \qquad {\scriptstyle (s,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)}$$

---

*) Теорема эта указывается и M. Poincaré въ его мемуарѣ *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Acta mathematica, t. 13; p. 99, 100), гдѣ авторъ также основываетъ ее на соотношеніяхъ вида (29). Но она была извѣстна мнѣ ранѣе опубликованія этого мемуара, и еще въ февралѣ 1890 г. я сообщилъ ее Харьковскому Математическому Обществу въ томъ видѣ, какъ она изложена выше, вмѣстѣ съ нѣкоторыми другими предложеніями, касающимися характеристичнаго уравненія (Сообщ. Х. М. О., 2<u>ая</u> серія, томъ II; извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій).

а $\alpha_{s\sigma}$ суть какія-либо постоянныя, для которыхъ

$$\alpha_{s\sigma} + \alpha_{\sigma s} = 0. \qquad (s, \sigma = 1, 2, \ldots, k)$$

Дѣлая

$$y_s = \frac{dx_s}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{k}\Big[\alpha_{s\sigma} + \int_0^t (p_{s\sigma} - p_{\sigma s})\,dt\Big]x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

и полагая

$$H = \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{k}\Big[p_{s\sigma} + p_{\sigma s} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{si}q_{\sigma i}\Big]x_s x_\sigma + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{k} q_{s\sigma}x_s y_\sigma - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} y_s^2,$$

гдѣ

$$q_{s\sigma} = \alpha_{s\sigma} + \int_0^t (p_{s\sigma} - p_{\sigma s})\,dt,$$

приведемъ эту систему къ виду (27). Мы можемъ поэтому утверждать, что характеристичное уравненіе для нея есть возвратное.

52. Если въ уравненіяхъ (1) коэффиціенты $p_{s\sigma}$ суть вещественныя функціи t (что и будемъ здѣсь предполагать), то для изслѣдованія характеристичнаго уравненія можно пользоваться методой, основанной на соображеніяхъ, подобныхъ тѣмъ, которыя лежатъ въ основаніи методы изслѣдованія устойчивости, названной нами второю.

Метода эта всегда даетъ возможность находить болѣе или менѣе точные высшій и низшій предѣлы модулей корней характеристичнаго уравненія. Для полученія этихъ предѣловъ можно напр. поступать, какъ было сдѣлано въ параграфѣ 7$^{\text{омъ}}$ при доказательствѣ теоремы I. *)

Но метода эта можетъ также служить иногда и для раскрытія нѣкоторыхъ другихъ свойствъ характеристичнаго уравненія.

Допустимъ напр., что предложена слѣдующая система:

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(32)}$$

въ которой коэффиціенты $p_{s\sigma}$, представляющіе вещественныя періодическія функціи t, таковы, что уравненіе

---

*) Если бы коэффиціенты въ нашихъ уравненіяхъ не были вещественными, то полагая

$$x_s = y_s + z_s\sqrt{-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и разсматривая y_s, z_s, какъ вещественныя функціи t, мы составили бы для опредѣленія ихъ систему $2n^{\text{аго}}$ порядка линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ вещественными коэффиціентами. А разыскивая указаннымъ сейчасъ способомъ высшій и низшій предѣлы модулей корней характеристичнаго уравненія для этой послѣдней системы, мы нашли бы такіе предѣлы и для нашей первоначальной системы.

$$\begin{vmatrix} 2(p_{11}-k) & p_{12}+p_{21} & \dots & p_{1n}+p_{n1} \\ p_{21}+p_{12} & 2(p_{22}-k) & \dots & p_{2n}+p_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}+p_{1n} & p_{n2}+p_{2n} & \dots & 2(p_{nn}-k) \end{vmatrix} = 0$$

съ неизвѣстною k не имѣетъ отрицательныхъ корней ни при какихъ значеніяхъ t (мы разсматриваемъ, какъ и раньше, только вещественныя значенія t).

Пусть p есть наименьшій изъ его корней (которые всѣ, какъ извѣстно, вещественны).

Такъ какъ коэффиціенты въ нашихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ мы всегда предполагаемъ непрерывными для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t, то такою же будетъ и функція p. Функція эта при томъ будетъ періодическою съ тѣмъ же періодомъ ω, которымъ обладаютъ коэффиціенты $p_{s\sigma}$.

Мы допустимъ, что функція p не равна тожественно нулю (хотя, можетъ быть, и можетъ обращаться въ нуль при нѣкоторыхъ значеніяхъ t).

Тогда можно будетъ доказать, что *характеристичное уравненіе системы (32) имѣетъ n корней съ модулями, бóльшими 1, и n корней съ модулями, мéньшими 1.*

Съ этою цѣлью, полагая

$$x_1\frac{dx_1}{dt}+x_2\frac{dx_2}{dt}+\dots+x_n\frac{dx_n}{dt}=X,$$

выводимъ изъ нашихъ уравненій слѣдующее:

$$\frac{dX}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}p_{s\sigma}x_s x_\sigma+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2.$$

Отсюда, предполагая всѣ x_s вещественными, по извѣстному свойству квадратичныхъ формъ находимъ:

$$\frac{dX}{dt}\geqq p\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2. \tag{33}$$

А замѣчая, что вторая часть этого неравенства не менѣе величины

$$2\sqrt{p}\left(x_1\frac{dx_1}{dt}+x_2\frac{dx_2}{dt}+\dots+x_n\frac{dx_n}{dt}\right),$$

выводимъ изъ него слѣдующее:

$$\frac{dX}{dt}\geqq 2\sqrt{p}\,X.$$

Здѣсь радикалъ $\sqrt{p}$ (когда p не нуль) будемъ считать положительнымъ.